УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

ТЕОРЕМЫ ТИПА ФРАГМЕНА–ЛИНДЕЛЁФА

© У. Ю. Жураева

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Узбекистан
e-mail: umida_9202@mail.ru

Поступила в редакцию 03.04.2022 г., после доработки 17.04.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Доказаны теоремы типа Фрагмена–Линделёфа для бигармонических функций.

Ключевые слова: теорема типа Фрагмена–Линделёфа, функция Карлемана, бигармоническая функция.

DOI: 10.31857/S0374064124080059, EDN: KDBSIQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D — бесконечная область двумерного пространства и $u(P)$ — бигармоническая в ней функция, непрерывная вплоть до границы со своими производными до третьего порядка включительно. Требуется показать, что если функция $u(P)$ и её нормальная производная, лапласиан этой функции и его нормальная производная ограничены на границе области D и функция $u(P)$ неограничена внутри неё, то при $P\to\infty$ она должна расти внутри D со скоростью не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

Сформулированная задача исследовалась многими авторами (см., например, работы [1–8]).

Справедлива

Теорема 1 [1]. *Пусть $u(r,\phi,x)$ — гармоническая функция в цилиндре $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\phi<2\pi$, $-\infty<x<+\infty$. Если выполнены условия*

$$u(a,\phi,x)=0,\quad \left|\frac{\partial u}{\partial r}(a,\phi,x)\right|<C,\quad \max_{(r,\phi)}|u(r,\phi,x)|<C\exp\left\{\exp\left\{\frac{\pi|x|}{2(a+\varepsilon)}\right\}\right\},\quad \varepsilon>0,$$

то $u(r,\phi,x)\equiv 0$.

В теореме 1 и далее C — постоянная величина. Аналогичная теорема установлена в работе [2] для цилиндра с прямоугольным основанием.

Имеет место следующая

Теорема 2 [3]. *Пусть $u(r,\phi,x)$ — гармоническая функция в цилиндре $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\phi<2\pi$, $-\infty<x<+\infty$. Если выполнены условия*

$$u(a,\phi,x)=0,\quad \left|\frac{\partial u}{\partial r}(a,\phi,x)\right|<C\exp\{\mu|x|\},\quad \max_{(r,\phi)}|u(r,\phi,x)|<C\exp\left\{\exp\left\{\frac{\pi|x|}{2(a+\varepsilon)}\right\}\right\},\quad \varepsilon>0,$$

причём $\mu<\lambda_{01}/a$, λ_{01} — наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_0(x)$, то $u(r,\phi,x)\equiv 0$.

Е.М. Ландис в книге [9] поставил следующую задачу. Пусть в цилиндре $0\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}x_k^2<1$ пространства $\mathbb{R}^n$ расположена область, уходящая в бесконечность (в одну или в обе стороны), со сколь угодно гладкой границей G. Пусть в этой области определено решение u уравнения

$\Delta\Delta u=0$ (произвольной гладкости вплоть до границы) и $u|_G=0$, $\partial u/\partial n\big|_G=0$. Следует ли отсюда, что функция u неограничена (экспоненциально растёт при уходе на бесконечность)? Сформулированные ниже результаты в некотором смысле дают ответ на этот вопрос.

В работе [10] впервые предложен метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа, получена интегральная формула Грина в неограниченной области в классе растущих гармонических функций. В [11] исследованы вопросы регуляризации и разрешимости задачи Коши для полигармонических уравнений порядка n в некоторых неограниченных областях пространства $\mathbb{R}^m$ при произвольных нечётных m, а также при чётных m таких, что $2n<m$; случай произвольных чётных m, когда $2n\geqslant m$, рассмотрен в [12, 13]. Следует отметить, что аналогичные результаты можно найти в работах [14, 15].

Пусть D — лежащая в полупространстве $y=\{(y_1,y_2,\ldots,y_{m-1},y_m)\in\mathbb{R}^m\colon y_m>0\}$ неограниченная область с границей ∂D, любая конечная часть этой области удовлетворяет условию Ляпунова, и, кроме того, предположим, что граница ∂D задана уравнением $y_m=f(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_{m-1})$, где f — непрерывная функция, имеющая ограниченные частные производные первого порядка.

Теорема 3 [6]. *Пусть гармоническая функция $u(y)$ удовлетворяет условиям*

$$|u(y)|+|\operatorname{grad}u(y)|\leqslant C\exp\{|y|^\rho\},\quad \rho<1,\quad y\in D,$$

$$u(y')=0,\quad \frac{\partial u(y')}{\partial n}\to 0,\quad y'\to\infty,\quad y'\in\partial D,$$

тогда $u(y)\equiv 0$.

Если D — неограниченная область, лежащая внутри слоя наименьшей ширины, определяемого неравенством $0\leqslant y_m\leqslant \pi/\rho$, $\rho>0$, то имеет место

Теорема 4 [6]. *Пусть гармоническая функция $u(y)$ удовлетворяет условиям*

$$|u(y)|+|\operatorname{grad}u(y)|\leqslant C\exp\{\exp\{\rho|y|\}\},\quad \rho<1,\quad y\in D,$$

$$u(y')=0,\quad \left|\frac{\partial u(y')}{\partial n}\right|\leqslant C|y|^\mu,\quad \mu=\mathrm{const},\quad y'\in\partial D,$$

тогда $u(y)\equiv 0$.

Пусть бигармоническая функция $u(y)$ определена в области $D=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\colon y_2>0\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5 [16]. *Если выполнены условия*

$$\sum_{k=0}^{1}\big(|\Delta^k u(y)|+|\operatorname{grad}\Delta^{(1-k)}u(y)|\big)\leqslant C\exp\{|y|^\rho\},\quad \rho<1,\quad y\in D,\tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{1}\left(|\Delta^k u(y_1,0)|+\left|\frac{\partial\Delta^k u(y_1,0)}{\partial n}\right|\right)<C,$$

то $u(y)\equiv 0$.

Теорема 6 [16]. *Если выполнены условия (1) и*

$$u(y_1,0)=0,\quad \sum_{k=0}^{1}\left(|\Delta^k u(y_1,0)|+\left|\frac{\partial\Delta^k u(y_1,0)}{\partial n}\right|\right)\to 0\quad \textit{при}\quad y_1\to\infty,$$

то $u(y)\equiv 0$.

Цель настоящей статьи — доказать подобный результат для бигармонических функций (доказать теорему типа Фрагмена–Линделёфа для бигармонических функций с помощью формул карлемановского типа для решений задачи Коши для билапласиана).

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Введём функцию Карлемана $\Phi_\sigma(y,x)$ для бигармонических функций, определённых в области $D=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\colon y_1\in\mathbb{R},\ 0<y_2<h,\ h=\pi/\rho,\ 0<\rho<1\}$:

$$\Phi_\sigma(y,x)=C\int\limits_{\sqrt{s}}^{+\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{\exp\{\sigma\omega+\omega^2-a\operatorname{ch}(i\rho_1(\omega-h/2))\}}{\omega-x_2}\right](u^2-s)\,du, \tag{2}$$

где $x=(x_1,x_2)$, $s=|x'-y'|$, $x'=(x_1,0)$, $y'=(y_1,0)$, $\alpha^2=s$, $\omega=iu+y_2$, $s>0$, $\sigma\geqslant 0$, $a\geqslant 0$, $\rho_1<\rho$.

Теорема 7. *Функция $\Phi_\sigma(y,x)$, определённая формулой (2), имеет вид*

$$\Phi_\sigma(y,x)=C(r^2\ln r+G_\sigma(y,x)),\quad r=|y-x|,$$

и является бигармонической функцией, где $G_\sigma(y,x)$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^2\setminus\{x\}$ по переменной y.

Доказательство. Учитывая, что

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\exp\{\sigma\omega+\omega^2-a\operatorname{ch}(i\rho_1(\omega-h/2))\}}{\omega-x_2}\right]=\operatorname{Im}\left[\frac{\exp\{\sigma\omega+\omega^2-a\operatorname{ch}(i\rho_1(\omega-h/2))\}-1}{\omega-x_2}\right]+\operatorname{Im}\left[\frac{1}{\omega-x_2}\right],$$

преобразуем функцию $\Phi_\sigma(y,x)$:

$$\Phi_\sigma(y,x)=C\int\limits_{\sqrt{s}}^{+\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{\exp\{\sigma\omega+\omega^2-a\operatorname{ch}(i\rho_1(\omega-h/2))\}-1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)\,du+C\int\limits_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{u(u^2-s)}{u^2+(y_2-x_2)^2}\,du.$$

Разбивая интервал интегрирования и используя подстановку $u^2+(y_2-x_2)^2=t$, $u^2-s=t-r^2$, перепишем второе слагаемое в виде

$$\int\limits_{\sqrt{s}}^{\sqrt{1+s}}\frac{u(u^2-s)}{u^2+(y_2-x_2)^2}\,du=1+2r^2\ln r-r^2\ln(1+r^2).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_\sigma(y,x)=C\int\limits_{\sqrt{s}}^{+\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{\exp\{\sigma\omega+\omega^2-a\operatorname{ch}(i\rho_1(\omega-h/2))\}-1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)\,du+$$
$$+1+2r^2\ln r-r^2\ln(1+r^2)+C\int\limits_{\sqrt{1+s}}^{+\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)\,du.$$

Обозначив

$$G'_\sigma(y,x)=C\int\limits_{\sqrt{s}}^{+\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{\exp\{\sigma\omega+\omega^2-a\operatorname{ch}(i\rho_1(\omega-h/2))\}-1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)\,du+$$
$$+1-r^2\ln(1+r^2)+C\int\limits_{\sqrt{1+s}}^{+\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)\,du,$$

получим $\Phi_\sigma(y,x)=C(r^2\ln r+G_\sigma(y,x))$, где гармоническая функция $G_\sigma(y,x)$ является бигармонической по y при $s>0$. Теорема доказана.

Введём обозначение

$$A = -\sigma y_2 - y_2^2 + s + a\,\mathrm{ch}(\rho_1\alpha)\cos(\rho_1(y_2 - h/2)).$$

Теорема 8. *Для функции* $\Phi_\sigma(y,x)$ *справедливо неравенство*

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \leqslant Ce^{-A}(\sigma r + 1). \tag{3}$$

Доказательство. С помощью подстановки $u^2 - s = r^2 t$ получим

$$\Phi_\sigma(y,x) = C\int\limits_{\sqrt{s}}^{+\infty} \mathrm{Im}\,\frac{\exp\bigl\{\sigma(iu+y_2)+(iu+y_2)^2 - a\,\mathrm{ch}(i\rho_1(iu+y_2-h/2))\bigr\}}{(iu+y_2)-x_2}(u^2-s)\,du =$$

$$= C\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{Im}\,\frac{\exp\bigl\{\sigma(i\sqrt{r^2t+s}+y_2)+(i\sqrt{r^2t+s}+y_2)^2\bigr\}}{\exp\bigl\{a\cos(\rho_1(i\sqrt{r^2t+s}+y_2-h/2))\bigr\}\bigl(i\sqrt{r^2t+s}+y_2-x_2\bigr)}\,\frac{r^4t\,dt}{\sqrt{r^2t+s}}.$$

Введём обозначения

$$A_1 = \sigma y_2 + y_2^2 - r^2t - s - a\,\mathrm{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2)),$$

$$A_2 = (\sigma + 2y_2)\sqrt{r^2t+s} - a\,\mathrm{sh}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\sin(\rho_1(y_2-h/2)),$$

$$Q = \exp\{\sigma y_2 + y_2^2\}.$$

Тогда функцию $\Phi_\sigma(y,x)$ можно переписать в виде

$$\Phi_\sigma(y,x) = r^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{Q\bigl((y_2-x_2)\sin A_2 - \sqrt{r^2t+s}\cos A_2\bigr)}{\exp\bigl\{a\,\mathrm{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2))\bigr\}(t+1)\exp\{r^2t+s\}}\,\frac{t\,dt}{\sqrt{r^2t+s}} =$$

$$= r^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{Q(y_2-x_2)\sin A_2}{\exp\bigl\{a\,\mathrm{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2))\bigr\}(t+1)\exp\{r^2t+s\}}\,\frac{t\,dt}{\sqrt{r^2t+s}} -$$

$$- r^2\int\limits_0^{\infty}\frac{Q\cos A_2}{\exp\bigl\{a\,\mathrm{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2))\bigr\}(t+1)}\,\frac{t\,dt}{\exp\{r^2t+s\}}.$$

Обозначим

$$J_1 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{Q(y_2-x_2)\sin A_2}{\exp\bigl\{a\,\mathrm{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2))\bigr\}(t+1)\exp\{r^2t+s\}}\,\frac{t\,dt}{\sqrt{r^2t+s}}, \tag{4}$$

$$J_2 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{Q\cos A_2}{\exp\bigl\{a\,\mathrm{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2))\bigr\}(t+1)}\,\frac{t\,dt}{\exp\{r^2t+s\}},$$

тогда $\Phi_\sigma(y,x) = r^2J_1 - r^2J_2$. Учитывая, что

$$|\sin A_2| \leqslant \Bigl|\sin\bigl(\sigma\sqrt{r^2t+s}\bigr)\cos\bigl(2y_2\sqrt{r^2t+s}+\mathrm{sh}\bigl(\rho_1\sqrt{r^2t+s}\bigr)\bigr)\sin(\rho_1\beta_2) +$$

$$+ \sin(2t\alpha y_2 + \mathrm{sh}(\rho_1\alpha t)\sin(\rho_1\beta_2))\cos(\sigma\alpha t)\Bigr| \leqslant C\sigma\sqrt{r^2t+s},$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{p-1/2}dt}{\exp\{at\}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2p-1)}{2^p}\,\frac{\sqrt{\pi}}{a^{p+1/2}}, \qquad \int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{\exp\{r^2t\}} = \frac{C}{r^2},$$

оценим J_1:

$$|J_1| \leqslant C\left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{(y_2-x_2)\sin A_2}{\exp\{a\operatorname{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2))\}\exp\{r^2t+s\}\sqrt{r^2t+s}}\frac{t\,dt}{(t+1)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^{+\infty} \frac{|y_2-x_2|}{\sqrt{r^2t+s}}\frac{\sigma\sqrt{r^2t+s}}{\exp\{a\operatorname{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2))\}}\frac{dt}{\exp\{r^2t+s\}} \leqslant C\frac{\sigma e^{-A}}{r}.$$

Теперь учитывая, что

$$\left|\frac{\cos A_2}{\exp\{a\operatorname{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2))\}(t+1)}\right| \leqslant Ce^{-A},$$

оценим выражение J_2:

$$|J_2| \leqslant \left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\exp\{a\operatorname{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})\cos(\rho_1(y_2-h/2))\}}\frac{t\,dt}{\exp\{r^2t+s\}}\right| \leqslant \frac{Ce^{-A}}{r^2}.$$

Таким образом,

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \leqslant Ce^{-A}r^2\left(\frac{\sigma}{r}+\frac{1}{r^2}\right) = Ce^{-A}(\sigma r+1).$$

Теорема доказана.

Теорема 9. *Для нормальной производной функции* $\Phi_\sigma(y,x)$ *справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right| \leqslant Ce^{-A}\left((1+\sigma+\sigma^2)\left(1+\frac{1}{r}\right)+\sigma(r+r^2)+\sigma^2r+r\right).$$

Доказательство. Вычислив частную производную от функции (4), оценим следующие интегралы:

$$Cr^2\int\limits_0^{+\infty}\sin A_2\frac{\partial A_2}{\partial y_j}e^{-A_1}\frac{t\,dt}{t+1}, \quad Cr^2\int\limits_0^{+\infty}\cos A_2 e^{-A_1}\frac{\partial A_1}{\partial y_j}\frac{t\,dt}{t+1}.$$

С учётом равенства

$$\frac{\partial A_1}{\partial y_j} = -2(y_j-x_j)(t+1)+(\sigma+1)\rho_1\operatorname{sh}(\rho_1(\rho_1\sqrt{r^2t+s}))\cos(\rho_1(y_2-h/2))\frac{(y_j-x_j)(t+1)}{\sqrt{r^2t+s}}, \quad j=1,2,$$

будем иметь

$$\left|\frac{\partial A_1}{\partial y_j}\right| \leqslant r(t+1)+\frac{\sigma r(t+1)}{\sqrt{r^2t+s}}\operatorname{sh}(\rho_1(\rho_1\sqrt{r^2t+s})), \quad j=1,2.$$

Аналогичным образом можно получить оценку

$$\left|\frac{\partial A_2}{\partial y_j}\right| \leqslant \frac{r(t+1)(\sigma+2y_2)}{\sqrt{r^2t+s}}+\operatorname{ch}(\rho_1(\rho_1\sqrt{r^2t+s}))\frac{r(t+1)}{\sqrt{r^2t+s}}, \quad j=1,2.$$

Тогда

$$Cr^2\int\limits_0^{+\infty}e^{-A_1}\sin A_2\frac{r(t+1)(\sigma+2y_2)}{\sqrt{r^2t+s}}\frac{t\,dt}{t+1}+Cr^2\int\limits_0^{+\infty}e^{-A_1}\sin A_2\frac{r(t+1)}{\sqrt{r^2t+s}}\operatorname{ch}(\rho_1(\rho_1\sqrt{r^2t+s}))\frac{t\,dt}{t+1}+$$

$$+Cr^2\int\limits_0^{+\infty}e^{-A_1}\cos A_2r(t+1)\frac{t\,dt}{t+1}+Cr^2\int\limits_0^{+\infty}e^{-A_1}\cos A_2\frac{\sigma r(t+1)}{\sqrt{r^2t+s}}\operatorname{sh}(\rho_1(\rho_1\sqrt{r^2t+s}))\frac{t\,dt}{t+1}=$$

$$=Cr^2\int\limits_0^{+\infty}r\sigma(\sigma+2y_2)e^{-A_1}t\,dt+Cr^2\int\limits_0^{+\infty}\sigma r\rho_1\sin(\rho_1(y_2-h/2))\operatorname{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})e^{-A_1}t\,dt+$$

$$+Cr^2\int\limits_0^{+\infty}re^{-A_1}t\,dt+Cr^2\sigma\int\limits_0^{\infty}\operatorname{sh}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})e^{-A_1}t^{-1/2}\,dt,$$

отсюда получим

$$\left|\frac{\partial J_1}{\partial y_1}\right|<Ce^{-A}\left(\frac{\sigma}{r^2}+\frac{\sigma^2}{r^2}\right),\quad \left|\frac{\partial J_1}{\partial y_2}\right|<Ce^{-A}\left(\sigma+\frac{\sigma}{r}+\frac{\sigma^2}{r}+\frac{\sigma}{r^2}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^3}\right). \tag{5}$$

Аналогичным образом вычислим оценку для частных производных J_2:

$$\left|\frac{\partial J_2}{\partial y_1}\right|<Ce^{-A}\left(\frac{\sigma^2}{r^3}+\frac{\sigma}{r^3}+\frac{1}{r^3}\right),\quad \left|\frac{\partial J_2}{\partial y_2}\right|<Ce^{-A}\left(\frac{\sigma}{r^3}+\frac{\sigma}{r^2}+\frac{\sigma}{r}+\frac{1}{r^2}\right). \tag{6}$$

Используя приведённые выше оценки и формулы

$$\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_j}=(J_1-J_2)\frac{\partial r^2}{\partial y_j}+r^2\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial y_j},\quad j=1,2,$$

находим

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right|\leqslant Ce^{-A}\left(\sigma+\sigma^2+\frac{1}{r}+\frac{\sigma}{r}+\frac{\sigma^2}{r}\right),$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right|\leqslant Ce^{-A}\left(1+\sigma+\sigma r+\sigma r^2+\sigma^2r+r+\frac{\sigma^2}{r}+\frac{1}{r}\right).$$

В итоге, используя выражение для производной по направлению, получаем неравенство

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|=\left|r(J_1-J_2)+r^2\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial n}\right|\leqslant Ce^{-A}\left((1+\sigma+\sigma^2)\left(1+\frac{1}{r}\right)+\sigma(r+r^2)+\sigma^2r+r\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 10. *Для лапласиана функции $\Phi_\sigma(y,x)$ справедлива оценка*

$$|\Delta\Phi_\sigma(y,x)|\leqslant Ce^{-A}\left(\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)(1+\sigma+\sigma^2)+\sigma+\sigma^2+\sigma r\right).$$

Доказательство. С учётом формул

$$\frac{\partial^2\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_j^2}=\frac{\partial^2r^2}{\partial y_j^2}(J_1-J_2)+2\frac{\partial r^2}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}(J_1-J_2)+r^2\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}(J_1-J_2),\quad j=1,2,$$

и гармоничности функции J_1-J_2 будем иметь

$$\Delta\Phi_\sigma(y,x)=4(J_1-J_2)+2\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial r^2}{\partial y_j}\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial y_j}.$$

Учитывая оценки (3), (5), (6), получаем

$$|\Delta\Phi_\sigma(y,x)|\leqslant\left(\frac{\sigma}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+(y_1-x_1)\left(\frac{\sigma}{r^2}+\frac{\sigma^2}{r^2}+\frac{\sigma^2}{r^3}+\frac{\sigma}{r^3}+\frac{1}{r^3}\right)+$$

$$+Ce^{-A}(y_2-x_2)\left(\sigma+\frac{\sigma}{r}+\frac{\sigma}{r^2}+\frac{\sigma^2}{r}+\frac{\sigma^2}{r^2}+\frac{\sigma^2}{r^3}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right).$$

Отсюда вытекает неравенство утверждения теоремы.

Теорема 11. *Для нормальной производной лапласиана функции $\Phi_\sigma(y,x)$ имеет место оценка*

$$\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|\leqslant Ce^{-A}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+(\sigma+\sigma^2)\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)+\frac{\sigma^3}{r^2}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Сначала докажем следующие неравенства:

$$\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right|\leqslant Ce^{-A}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\sigma\left(1+r+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)+\sigma^2\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{\sigma}{r^2}\right)\right), \tag{8}$$

$$\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right|\leqslant Ce^{-A}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\sigma^2\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{\sigma}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)+\frac{\sigma}{r}+\frac{\sigma}{r^2}\right). \tag{9}$$

Пусть $\psi(y,x)$ — гармоническая функция в пространстве $\mathbb{R}^2$, тогда справедливо равенство $\Delta r^2\psi(y,x)=\psi_1(y,x)$, где

$$\psi_1(y,x)=4\psi(y,x)+4(y_1-x_1)\frac{\partial\psi(y,x)}{\partial y_1}+(y_2-x_2)\frac{\partial\psi(y,x)}{\partial y_2}.$$

Так как функция $\Phi_\sigma(y,x)$ тоже является гармонической в $\mathbb{R}^2$ по переменной y (включая и точку x), можно записать

$$\Delta\Phi_\sigma(y,x)=C\left(J_1-J_2+(y_1-x_1)\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial y_1}+(y_2-x_2)\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial y_2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}=2\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial y_1}+(y_1-x_1)\frac{\partial^2(J_1-J_2)}{\partial y_1^2}+(y_2-x_2)\frac{\partial^2(J_1-J_2)}{\partial y_1\partial y_2},$$

$$\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}=2\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial y_2}+(y_1-x_1)\frac{\partial^2(J_1-J_2)}{\partial y_1\partial y_2}+(y_2-x_2)\frac{\partial^2(J_1-J_2)}{\partial y_2^2}.$$

Тогда, чтобы оценить $|\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)/\partial n|$, нам нужны оценки $|\partial^2(J_1-J_2)/\partial y_j^2|$, $|\partial^2(J_1-J_2)/\partial y_j\partial y_k|$, $j,k=1,2$. Заметив, что

$$\left|\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial y_1}\right|\leqslant Ce^{-A}\left(\frac{\sigma}{r^2}+\frac{\sigma}{r^3}+\frac{\sigma^2}{r^2}+\frac{\sigma^2}{r^3}+\frac{1}{r^3}\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2(J_1-J_2)}{\partial y_1^2}\right|\leqslant Ce^{-A}\left(\sigma+\frac{\sigma}{r}+\frac{\sigma}{r^2}+\frac{\sigma}{r^3}+\frac{\sigma^2}{r^2}+\frac{\sigma^2}{r^4}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^4}\right),$$

$$\left|\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial y_1\partial y_2}\right|\leqslant Ce^{-A}\left(\frac{\sigma^2}{r^4}+\frac{\sigma^3}{r^3}+\frac{\sigma^2}{r^3}+\frac{\sigma}{r^3}+\frac{\sigma^2}{r^2}+\frac{\sigma}{r^2}+\frac{\sigma^2}{r}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^4}\right),$$

получим неравенство (8).

С помощью оценок

$$\left|\frac{\partial(J_1-J_2)}{\partial y_2}\right| \leqslant Ce^{-A}\left(\sigma+\frac{\sigma}{r}+\frac{\sigma^2}{r}+\frac{\sigma}{r^2}+\frac{\sigma^2}{r^3}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2(J_1-J_2)}{\partial y_2^2}\right| \leqslant Ce^{-A}\left(\frac{\sigma}{r^3}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^4}\right)$$

получим неравенство (9). Из (8) и (9) вытекает оценка (7) теоремы.

Теорема 12. *Функция $\Phi_\sigma(y,x)$ при $\sigma>0$ и $y\neq x$ является функцией Карлемана в области D.*

Доказательство. На основании теорем 7–11 имеем

$$\int\limits_{\partial D}\left(|\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|+|\Delta\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|\right)|ds| \leqslant$$

$$\leqslant Ce^{-A}\left(1+\sigma+\sigma^2+\sigma r+\sigma r^2+\frac{\sigma}{r}+\frac{\sigma}{r^2}+\frac{\sigma}{r^3}+\frac{\sigma^2}{r^3}+\frac{\sigma^2}{r}+\frac{\sigma^2}{r^2}+\frac{\sigma^3}{r^2}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right).$$

Введём следующие обозначения:

$$L=\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial D}\left(|\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|\right)ds, \tag{10}$$

$$L_1=\{y=(y_1,y_2)\colon y_1\in\mathbb{R},\ y_2=0\},\quad L_2=\{y=(y_1,y_2)\colon y_1\in\mathbb{R},\ y_2=\pi/\rho\},\quad \partial D=L_1\cup L_2.$$

Выполняя преобразование $y_1-x_1=t$, $dy_1=dt$ и учитывая, что $0\leqslant x_2\leqslant\pi/\rho$, оценим (10):

$$L\leqslant Ce^{-A}\left(1+\sigma+\sigma^2+\sigma\sqrt{t^2+x_2^2}+\sigma(t^2+x_2^2)+\frac{\sigma}{\sqrt{t^2+x_2^2}}+\frac{\sigma}{t^2+x_2^2}+\frac{\sigma}{(t^2+x_2^2)^{3/2}}\right)+$$

$$+Ce^{-A}\left(\frac{\sigma^2}{\sqrt{t^2+x_2^2}}+\frac{\sigma^2}{t^2+x_2^2}+\frac{\sigma^2}{(t^2+x_2^2)^{3/2}}+\frac{\sigma^3}{t^2+x_2^2}+\frac{1}{t^2+x_2^2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+x_2^2}}+\frac{1}{(t^2+x_2^2)^{3/2}}\right).$$

На границе L_1 $A=a\operatorname{ch}(\rho_1 t)\cos(\rho_1(-h/2))+s$, кроме того, $\cos(\rho_1(-h/2))\neq 0$. Подбирая $a=1+\sigma$, получаем

$$\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{L_1}\left(|\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|\right)|ds|\leqslant Ce^{-A}c_\sigma^1,$$

где c_σ^1 — многочлен, зависящий от σ.

На границе L_2 аналогично показывается, что

$$\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{L_2}\left(|\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|\right)|ds|\leqslant Ce^{-A}c_\sigma^2,$$

где c_σ^2 — многочлен, зависящий от σ. Обозначив $\varepsilon(\sigma)=e^{-A}(c_\sigma^1+c_\sigma^2)$, имеем $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to+\infty$. Окончательно можем утверждать, что $L\leqslant C\varepsilon(\sigma)$, где $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to+\infty$. Теорема доказана.

Обозначим через $A_{\rho_2}(D)$ пространство бигармонических функций, определённых в области D, имеющих непрерывные частные производные до третьего порядка вплоть до конечных точек границы ∂D и удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=0}^{1}(|\Delta^k u(y)|+|\operatorname{grad}\Delta^{(1-k)}u(y)|)\leqslant C\exp\{\exp\{\rho_2|y|\}\},\quad \rho_2<\rho_1,\quad y\in D.$$

Теорема 13. *Пусть для функции* $u\in A_{\rho_2}(D)$ *выполняются условия*

$$u(y)|_{\partial D}=0,\quad \sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial D}\left(|\Delta^k u(y)|+\left|\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial n}\right|\right)ds<C,$$

тогда $u(y)\equiv 0$.

Доказательство. Через $K(R,0)$ обозначим круг радиуса R с центром в нуле, $D\cap\cap K(R,0)=D_R^+$, $D\cap CK(R,0)=D_R^-$, $CK(R,0)$ — дополнение этого круга.

Допустим, что утверждение теоремы не имеет места: существует точка $x_0\in D$ такая, что $u(x_0)=a>0$. Возьмём положительное число R_1 такое, что $R_1\geqslant|x_0|+1$.

Из свойств функции $u(y)$ и теорем 7–12 следует, что для каждого положительного ε существует такое положительное число R_2, что для всех $R>R_2$ справедливо

$$\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial D_R^-}\left(\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)\frac{\partial\Delta^{(1-k)}u(y)}{\partial n}-\Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right)ds<\varepsilon,$$

$\partial D_R^-=L_1\cup L_2\cup L_3$, $L_1=\{y=(y_1,0)\colon |y_1|>R\}$, $L_2=\{y=(y_1,\pi/\rho)\colon |y_1|>R\}$, $L_3=D\cap\{y\colon |y|=R\}$.

Пусть $\max\{R_1,R_2,\pi/\rho\}=R_3$, $\rho(x_0,\partial D)$ — расстояние от точки x_0 до границы области D, $\rho(x_0,\partial D)=\mu$. Рассмотрим те значения ε, для которых $\varepsilon<\mu$. Переходя к полярным координатам, будем иметь

$$|J_1|\leqslant\left|\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{L_1\cup L_2}\left(\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)\frac{\partial\Delta^{(1-k)}u(y)}{\partial n}-\Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right)ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{L_1\cup L_2}\left|\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)+\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right|\left|\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial n}+\Delta^{1-k}u(y)\right||ds|\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{L_1\cup L_2}\left(|\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)|+\left|\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right|+\left|\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial n}\right|+|\Delta^{1-k}u(y)|\right)|ds|.$$

Поэтому для упомянутого ε существует R_4 такое, что для произвольного $R>R_4$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{L_1\cup L_2}\left|\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)+\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right|\left|\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial n}+\Delta^{1-k}u(y)\right||ds|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее оценим интеграл J_2 по L_3 (учитывая рост функции внутри области):

$$|J_2| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{1} \int\limits_{L_3} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right) ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{1} \int\limits_{L_3} \left|\Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right| \left|\frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} + \Delta^{1-k} u(y)\right| |ds| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{0}^{+\infty} \exp\{\exp\{\rho_2 |y|\}\} \sum_{k=0}^{1} \left|\Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right| dt.$$

При выполнении условия $\rho_2 < \rho_1$ подбираем σ так, чтобы $\exp\{\exp\{\rho_2|y|\}\}/\exp\{\sigma A\} < 1$. Тогда для того же положительного ε существует R_5 такое, что при $R > R_5$

$$|J_2| \leqslant \sum_{k=0}^{1} \int\limits_{L_3} \left|\Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right| \left|\frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} + \Delta^{1-k} u(y)\right| |ds| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если обозначим $R_6 = \max\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$, то получим

$$\sum_{k=0}^{1} \int\limits_{\partial(D \cap CK(R_2,0))} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right) ds < \varepsilon.$$

Рассмотрим в области $D_R^+ \setminus K(\varepsilon, x_0)$, где $R > R_5$, бигармонические функции $u(y)$ и $\Phi_\sigma(y,x)$, для которых применим формулу Гутцмера:

$$\iint\limits_{\partial(D_R^+ \setminus K(\varepsilon,x_0))} (u(y)\Delta^2 \Phi_\sigma(y,x_0) - \Phi_\sigma(y,x_0)\Delta^2 u(y))\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \int\limits_{\partial(D_R^+ \setminus K(\varepsilon,x_0))} \left(\Delta^k u(y) \frac{\partial \Delta^{1-k} \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n} - \Delta^{1-k} \Phi_\sigma(y,x_0) \frac{\partial \Delta^k u(y)}{\partial n}\right) ds.$$

Так как $\Delta^2 u(y) = 0$, получаем, что $\Delta^2 \Phi_\sigma(y,x) = 0$, $y \in D_R^+ \setminus K(\varepsilon, x_0)$, и

$$\sum_{k=0}^{1} \int\limits_{\partial D_R^+} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right) ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right) ds.$$

Введём следующие обозначения:

$$A(K(\varepsilon,x_0), u, \Phi_\sigma(y,x_0)) = \sum_{k=0}^{1} \int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)} \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n}\, ds -$$

$$- \sum_{k=0}^{1} \int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)} \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\, ds,$$

$$A^1(K(\varepsilon,x_0),u,\Phi_\sigma(y,x_0))=\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)}\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial n}\,ds,$$

$$A^2(K(\varepsilon,x_0),u,\Phi_\sigma(y,x_0))=\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)}\Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\,ds.$$

Можно показать, что при $\varepsilon\to 0$ $A(K(\varepsilon,x_0),u,\Phi_\sigma(y,x_0))\to u(x_0)$. Действительно, на основании теоремы о среднем значении существует ξ такое, что

$$A^1(K(\varepsilon,x_0),u,\Phi_\sigma(y,x_0))=C\varepsilon\sum_{k=0}^{1}\Delta^k\Phi_\sigma\frac{\partial\Delta^{1-k}u(\xi)}{\partial r}.$$

При $\varepsilon\to 0$ $A^1(K(\varepsilon,x_0),u,\Phi_\sigma(y,x_0))\to 0$. Выполним следующие преобразования:

$$A^2(K(\varepsilon,x_0),u,\Phi_\sigma(y,x_0))=\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)}\Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\,ds=$$

$$=\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)}\Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k(r^2\ln(1/r)+r^2G(y,x))}{\partial r}\,ds=$$

$$=\int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)}\Delta u(y)\frac{\partial(r^2\ln(1/r)+r^2G(y,x))}{\partial r}\,ds+\int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)}u(y)\frac{\partial\Delta(r^2\ln(1/r)+r^2G(y,x))}{\partial r}\,ds.$$

По теореме о среднем значении существуют $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$ и $\nu\in\partial K(\varepsilon,x_0)$ такие, что

$$A^2(K(\varepsilon,x_0),u,\Phi_\sigma(y,x_0))=C\varepsilon[\Delta u](\mu_1)+[u](\nu)\int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)}\frac{\partial\ln(1/r)}{\partial r}\,ds+\int\limits_{\partial K(\varepsilon,x_0)}u(y)\frac{\partial\Delta(r^2G(y,x))}{\partial r}\,ds=$$

$$=C\bigg(\varepsilon[\Delta u](\mu_1)+[u](\nu)+\varepsilon\frac{\partial G_1}{\partial r}(\mu_2)\bigg).$$

Так как при $\varepsilon\to 0$ $\nu\to x_0$, то окончательно имеем

$$A^2(K(\varepsilon,x_0),u,\Phi_\sigma(y,x_0))\to u(x_0),$$

т.е.

$$u(x_0)=\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial D}\bigg(\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial n}-\Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\bigg)\,ds.$$

С учётом неравенства $ac+bd\leqslant(a+b)(c+d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}^+)$ получим

$$|u(x_0)|\leqslant\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial D}\bigg|\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial n}-\Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\bigg|\,|ds|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{1}\int\limits_{\partial D}\bigg(|\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)|+\bigg|\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\bigg|\bigg)\bigg(\bigg|\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial n}\bigg|+|\Delta^{1-k}u(y)|\bigg)\,|ds|.$$

На основании теоремы 12 имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{1}\int_{\partial D}\left(|\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|\right)|ds|\leqslant C\varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to+\infty$. Следовательно, $u(y)\equiv 0$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 14. *Пусть для функции* $u\in A_{\rho_2}(D)$ *выполнено условие роста*

$$\Delta^k u(y)\big|_{\partial D}=0;\quad \frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial n}\bigg|_{y\in\partial D,}\to 0,\quad y\to\infty,\quad k=0,1,$$

тогда $u(y)\equiv 0$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евграфов, М.А. Обобщение теоремы типа Фрагмена–Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве / М.А. Евграфов, И.А. Чегис // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 134, № 2. — С. 259–262.
2. Чегис, И.А. Теорема типа Фрагмена–Линделефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре / И.А. Чегис // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 136, № 3. — С. 556–559.
3. Леонтьев, А.Ф. Теорема типа Фрагмена–Линделефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре / А.Ф. Леонтьев // Изв. АН СССР. Сер. математическая. — 1963. — Т. 27. — С. 661–676.
4. Аршон, И.С. О росте функций, гармонических в цилиндре и ограниченных на его поверхности вместе с нормальной производной / И.С. Аршон, М.А. Евграфов // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 142, № 4. — С. 762–765.
5. Ярмухамедов, Ш.Я. Задача Коши для полигармонического уравнения / Ш.Я. Ярмухамедов // Докл. РАН. — 2003. — Т. 388, № 2. — С. 162–165.
6. Ашурова, З.Р. Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для гармонических функций многих переменных / З.Р. Ашурова // Докл. АН УзССР. — 1990. — Т. 5. — С. 6–8.
7. Ашурова, З.Р. О некоторых свойствах ядра Ярмухамедова / З.Р. Ашурова, Н.Ю. Жураева, У.Ю. Жураева // Int. J. of Innovative Research. — 2021. — V. 10. — P. 84–90.
8. Ashurova, Z.R. Growing polyharmonic functions and Cauchy problem / Z.R. Ashurova, N.Y. Juraeva, U.Y. Juraeva // J. of Critical Reviews. — 2020. — V. 7. — P. 371–378.
9. Ландис, Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е.М. Ландис. — М. : Наука, 1971. — 57 с.
10. Ярмухамедов, Ш.Я. Формула Грина в бесконечной области и её применение / Ш.Я. Ярмухамедов // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 2. — С. 305–308.
11. Жураева, Н.Ю. Об интегральном представлении полигармонических функций / Н.Ю. Жураева // Докл. АН РУз. — 2008. — Т. 3. — С. 18–20.
12. Жураева, Н.Ю. Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей, лежащих в m-мерном четном евклидовом пространстве / Н.Ю. Жураева, У.Ю. Жураева, У.М. Саидов // Uzbek. Math. J. — 2011. — V. 3. — P. 64–68.
13. Jurayeva, U.Yu. The Phragmen–Lindelof type theorems / U.Yu. Jurayeva // Uzbek. Math. J. — 2022. — V. 66. — P. 54–61.
14. Хасанов, А.Б. О задаче Коши для уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Уфимск. мат. журн. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 92–106.

15. Khasanov, A.B. On the Cauchy poblem for the three-dimensional Laplace equation / A.B. Khasanov, F.R. Tursunov // Russ. Math. — 2021. — V. 65. — P. 49–64.
16. Жураева, У.Ю. Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций / У.Ю. Жураева // Изв. вузов. Математика. — 2022. — № 10. — С. 42–65.

PHRAGMEN–LINDELOF TYPE THEOREMS

U. Yu. Juraeva

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Uzbekistan
e-mail: umida_ 9202@mail.ru

In this paper the Fragmen–Lindelof type theorems for biharmonic functions are proved.

Keywords: Phragmen–Lindelof type theorem, biharmonic function, Carleman function.

REFERENCES

1. Evgrafov, M.A., Chegis, I.A., Generalization of the Phragmen–Lindelof theorem on analytic functions to harmonic functions in space, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, vol. 134, no. 2, pp. 259–262.
2. Chegis, I.A., Phragmen–Lindelof type theorem for harmonic functions in a rectangular cylinder, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1961, vol. 136, no. 3, pp. 556–559.
3. Leontev, A.F., Phragmen–Lindelof type theorem for harmonic functions in a rectangular cylinder, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, 1963, vol. 27, pp. 661–676.
4. Arshon, I.S., Evgrafov, M.A., On the growth of functions, harmonic in a cylinder and bounded on its surface together with the normal derivative, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1962, vol. 142, no. 4, pp. 762–765.
5. Yarmukhammedov, Sh.Ya., Cauchy problem for a polyharmonic equation, *Dokl. RAN*, 2003, vol. 388, no. 2, pp. 162–165.
6. Ashurova, Z.R., Phragmen–Lindelof type theorems for harmonic functions of several variables, *Dokl. Akad. Nauk UzSSR*, 1990, vol. 5, pp. 6–8.
7. Ashurova, Z.R., Juraeva, N.Y., and Juraeva, U.Y., On some properties of the Yarmukhamedov kernel, *Int. J. of Innovative Research*, 2021, vol. 10, pp. 84–90.
8. Ashurova, Z.R., Juraeva, N.Y., and Juraeva, U.Y., Growing polyharmonic functions and Cauchy problem, *J. of Critical Reviews*, 2020, vol. 7, pp. 371–378.
9. Landis, E.M., *Uravneniya vtorogo poryatka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* (Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Types), Moscow: Nauka, 1971.
10. Yarmukhammedov, Sh.Ya., Green's formula in the infinite region and its application, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1985, vol. 285, no. 2, pp. 305–308.
11. Juraeva, N.Yu., On the integral representation of polyharmonic functions, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbek.*, 2008, vol. 3, pp. 18–20.
12. Juraeva, N.Yu., Juraeva, U.Yu., and Saidov, U.M., Carleman function for polyharmonic functions for some domains lying in m-dimensional even Euclidean space, *Uzbek. Math. J.*, 2011, vol. 3, pp. 64–68.
13. Juraeva, U.Yu., The Phragmen–Lindelof type theorems, *Uzbek. Math. J.*, 2022, vol. 66, pp. 54–61.
14. Khasanov, A.B., Tursunov, F.R., Of Cauchy problem for Laplace equation, *Ufa Math. J.*, 2019, vol. 11, no. 4, pp. 91–107.
15. Khasanov, A.B., Tursunov, F.R., On the Cauchy poblem for the three-dimensional Laplace equation, *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, pp. 49–64.
16. Juraeva, U.Yu., Theorems of the Phragmen–Lindelof type for biharmonic functions, *Russ. Math.*, 2022, no. 66, pp. 33–55.