

УДК 519.63+517.957

## РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ УЗАДЕЛЯ

© М. М. Хапаев<sup>1</sup>, М. Ю. Куприянов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва

e-mail: <sup>1</sup>vmhap@cs.msu.ru, <sup>2</sup>mkupr@pn.sinp.msu.ru

Поступила в редакцию 10.01.2024 г., после доработки 10.01.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассматривается нелинейная одномерная задача для уравнений теории сверхпроводимости, особенностью которой является нестандартное условие сопряжения Робена на внутренней границе и разрывное решение. Для задачи строится оптимальная однородная монотонная разностная схема, включая условие на интерфейсе. Используя решение серии эллиптических задач и метод Ньютона, решается полная система уравнений Узаделя, которые являются базовой математической моделью на микроуровне для описания токов и полей в сверхпроводниках с джозефсоновскими переходами. Приводятся результаты расчётов для задачи о грануле с абрикосовским вихрем.

*Ключевые слова:* разностная схема, разрывное решение, уравнения Узаделя.

DOI: 10.31857/S0374064124070118, EDN: KNDDON

### ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Узаделя [1] являются эффективным инструментом, позволяющим анализировать процессы как в устройствах слаботочной сверхпроводимости [2, 3], так и в сверхпроводниковых структурах, содержащих абрикосовские вихри [4–8]. Основная проблема при численном решении этой системы — нестандартные условия сопряжения решений на внутренних границах, являющихся границами раздела сред [9]. Эти условия по аналогии с третьей краевой задачей в работе [10, с. 164], где они получены для тонкого слабопроводящего слоя, называют *условиями Робена* [11]. Хорошо известно, что стандартные условия сопряжения, обеспечивающие непрерывность решения и потока, учитываются автоматически при численном решении задач как конечно-разностным методом, так и методом конечных элементов. Нестандартные условия подразумевают разрывное решение, что требует его особой аппроксимации [11].

Ранее при анализе структуры абрикосовских вихрей решались уравнения Узаделя для задач, в которых описывающие эти вихри функции имели радиальную симметрию, а их зависимости от расстояния  $r$  от центра вихря являлись непрерывными функциями [4–6]. Для разрывных решений был предложен смешанный метод конечных элементов [12], в котором использована кусочно-постоянная аппроксимация решений для каждой ячейки сетки, что приводит к необходимости применения сеток с малым шагом и значительно увеличивает время расчётов.

В настоящей работе предлагается простая конечно-разностная схема на стандартном трёхточечном шаблоне [13, с. 136], имеющая по крайней мере первый порядок аппроксимации и обладающая монотонностью. С помощью этой схемы решается задача о нахождении структуры абрикосовского вихря, центр которого расположен на оси сверхпроводящего цилиндра, помещённого в магнитное поле  $H$ , направленное параллельно его образующей. Сам цилиндр находится внутри сверхпроводящей матрицы из того же сверхпроводящего материала, но отделён от неё резкой границей, имеющей конечную прозрачность. Рассматриваемая математическая модель описывает структуру абрикосовского вихря в гранулированной сверхпроводящей плёнке, размер гранул в которой сравним с длиной когерентности сверхпроводника.

Предлагаемая разностная аппроксимация нестандартных условий сопряжения может быть обобщена на двумерные и трёхмерные схемы на регулярных прямоугольных сетках, а также на задачи с другими условиями сопряжения с разрывными решениями и потоками.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система уравнений для рассматриваемой задачи включает в себя нелинейные уравнения для компонент функций Грина  $\theta_n(r)$ , соответствующих бесконечной последовательности так называемых мацубаровских частот  $\Omega_n$ , и уравнения самосогласования для параметра порядка  $\Delta(r)$ ,  $r$  — радиальная компонента цилиндрической системы координат.

Пусть  $t = T/T_c$  — безразмерная температура;  $\gamma_B > 0$  — параметр прозрачности границы; частоты  $\Omega_n = t(2n + 1)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ;  $r \in (0, \Gamma)$ ;  $\gamma$  — внутренняя граница,  $\gamma \in (0, \Gamma)$ ;  $Q(r) = (1 - r^2/\Gamma^2)/r$  — нормированный на  $\Phi_0/(2\pi\xi)$  векторный потенциал;  $\Phi_0$  — квант магнитного потока;  $\xi = (D/(2\pi T_c))^{1/2}$  — длина когерентности сверхпроводящего материала;  $D$  и  $T_c$  — коэффициент диффузии и критическая температура материала;  $\Gamma$  — зависящий от  $H$  радиус круглой вихревой ячейки [4–6]; радиус-вектор  $r$  и параметр порядка  $\Delta$  нормированы на  $\xi$  и  $\pi T_c$  соответственно. В этих обозначениях уравнения Узаделя для функции  $\theta_n(r)$  имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\theta_n(r)}{dr} \right) - F_n(\theta_n(r)) = 0, \quad (1)$$

$$F_n(\theta_n) = (\Omega_n + Q^2(r) \cos \theta_n) \sin \theta_n + \Delta(r) \cos \theta_n. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) должны быть дополнены условием ограниченности решения при  $r = 0$  и краевым условием при  $r = \Gamma$ :

$$|\theta_n(0)| < \infty, \quad \frac{d\theta_n}{dr}(\Gamma) = 0.$$

Условия на внутренней границе имеют вид ( $[u](x)$  — скачок функции  $u(s)$  в точке  $x$ )

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\theta_n}{dr} \right] (\gamma) &= 0, \\ \gamma_B \frac{d\theta_n}{dr}(\gamma - 0) &= \sin[\theta_n](\gamma). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, все функции  $\theta_n(r)$  и  $\Delta(r)$  при  $r = \gamma$  имеют разрыв первого рода. Кроме того, все функции  $\theta_n$  связаны уравнением самосогласования

$$\Delta(r) \ln t = 2t \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Delta(r)}{\Omega_n} - \sin \theta_n(r) \right) = 0. \quad (4)$$

## 2. МЕТОД НЬЮТОНА

Так как уравнения (1) содержат нелинейность, применим для её разрешения метод Ньютона, а для (3) — метод Пикара. В результате получим следующую последовательность линейных задач для каждого значения индекса  $n$ :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\tilde{\theta}_n^{k+1}(r)}{dr} \right) - q^k(r) \tilde{\theta}_n^{k+1}(r) = -f^k(r), \tag{5}$$

$$q^k(r) = F'_n(\theta_n^k)(r), \quad f^k(r) = F'_n(\theta_n^k)(r)\theta_n^k(r) - F_n(\theta_n^k)(r), \tag{6}$$

$$|\tilde{\theta}_n^{k+1}(0)| < \infty, \quad \frac{d\tilde{\theta}_n^{k+1}}{dr}(\Gamma) = 0, \tag{7}$$

$$\left[ \frac{d\tilde{\theta}_n}{dr} \right](\gamma) = 0, \quad \gamma_B \frac{d\tilde{\theta}_n^{k+1}}{dr}(\gamma - 0) = [\tilde{\theta}_n^{k+1}](\gamma) \frac{\sin[\theta_n^k](\gamma)}{[\theta_n^k](\gamma)}, \tag{8}$$

где  $k$  — индекс итераций по методу Ньютона.

Для улучшения сходимости метода Ньютона используется релаксационная модификация, описанная в [14, с. 48]:

$$\theta_n^{k+1} = \omega \tilde{\theta}_n^{k+1} + (1 - \omega) \theta_n^k.$$

Релаксационный параметр  $\omega$  вычисляется с помощью норм невязок  $r1$  для  $\tilde{\theta}_n^{k+1}$  и  $r0$  для  $\theta_n^k$  [14] для исходной задачи (1)–(3) по формуле

$$\omega = \frac{r1}{r1 + r0}. \tag{9}$$

Начальное приближение для  $n = 0$  выбирается из линейного приближения [6]. Далее выбирается  $\theta_{n+1}^0 = \theta_n$ .

## 3. УРАВНЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

Для приближённого решения уравнения самосогласования и определения функции  $\Delta(r)$  ограничимся конечным числом членов ряда. Пусть  $l$  — индекс итераций для определения  $\Delta(r)$ ,  $M$  — число удерживаемых членов ряда в (4), тогда уравнение для метода Пикара–Зейделя имеет вид

$$\Delta^{l+1}(r) \ln t = 2t \sum_{n=0}^M \left( \frac{\Delta^{l+1}(r)}{\Omega_n} - \sin \theta_n^l(r) \right) = 0, \tag{10}$$

откуда легко выражается  $\Delta^{l+1}(r)$ . Начальное приближение  $\Delta^0(r)$  берётся из решения линеаризованной задачи.

В отличие от [12] мы не использовали многошаговое ускорение последовательных итераций, так как в нашем случае одномерной задачи и однородной сверхпроводящей среды сходимость оказалась достаточно быстрой. Ускорение может потребоваться для задач с нормальными металлами и ферромагнетиками.

## 4. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Для численного решения линейных уравнений (5)–(8) применим метод конечных разностей. Будем использовать обозначения и результаты [13]. Метод основан на совмещении точки сопряжения с одним из узлов сетки.

Схема строится на некоторой неравномерной сетке  $r_i, i = 0, 1, \dots, m-1, m, m+1, \dots, N$ , причём  $r_m = \gamma$ . Таким образом, внутренняя граница  $\gamma$  совпадает с внутренним узлом сетки с номером  $1 < m < N - 1$ . Например, можно использовать равномерные сетки на каждом отрезке  $[0, \gamma]$  и  $[\gamma, \Gamma]$  с приблизительно равными шагами  $h_i = r_i - r_{i-1}, i = \overline{1, N}$ . Напомним, что  $r_{i+0.5} = r_i + h_{i+1}/2, r_{i-0.5} = r_i - h_i/2$ . Будем обозначать через  $y_i$  решение разностной задачи в узлах сетки.

Рассмотрим известную схему [13, с. 173]

$$4y_{r,0} - q(0)y_0 = -f_0, \quad i = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{r_i}(r_{i-1/2}y_{\bar{r}})_r - q_i y_i = -f_i, \quad i = 1, \dots, m-1, m, m+1, \dots, N, \tag{12}$$

$$-y_{\bar{r},N} = 0.5h_N f_N, \quad i = N. \tag{13}$$

**Предложение.** *Разностная схема (12) на равномерной сетке имеет второй порядок точности  $O(h^2)$  [13, с. 176]. Условие (11) учитывает требование ограниченности решения (7) при  $r=0$  [13, с. 174].*

После простых стандартных преобразований разностная схема (11)–(13) сводится к системе разностных уравнений

$$A_m y_{m-1} - C_m y_m + B_m y_{m+1} = -F_m$$

с трёхдиагональной матрицей.

### 5. АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ НА ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЕ

Условия сопряжения на внутренней границе  $\gamma$  в обозначениях разностной схемы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dr}(\gamma-0) &= \frac{dy}{dr}(\gamma+0), \\ \beta_k \frac{dy}{dr}(\gamma-0) &= [y](\gamma), \quad \beta_k = \frac{\gamma_B[\theta^k](\gamma)}{\sin([\theta^k](\gamma))}. \end{aligned}$$

Рассмотрим аппроксимацию этих условий в точке сопряжения  $r_m$ . Будем полагать, что  $y_m = y(\gamma-0)$  является левым предельным значением, а  $y_m^* = y(\gamma+0)$  — правым, так что  $[y](r_m) = y_m^* - y_m$ :

$$\begin{aligned} \frac{y_m - y_{m-1}}{h_m} &= \frac{y_{m+1} - y_m^*}{h_{m+1}}, \\ \beta_k \frac{y_m - y_{m-1}}{h_m} &= \beta_k \frac{y_{m+1} - y_m^*}{h_{m+1}} = y_m^* - y_m. \end{aligned} \tag{14}$$

Исключая в этих формулах  $y_m^*$ , получаем следующее разностное уравнение для узла  $m$ :

$$-\left(\frac{\beta_k}{h_m} + \frac{h_{m+1}}{h_m}\right)y_{m-1} + \left(1 + \frac{\beta_k}{h_m} + \frac{h_{m+1}}{h_m}\right)y_m - y_{m+1} = 0. \tag{15}$$

Уравнение для узла  $m+1$  имеет вид

$$A_{m+1}y_m^* - C_{m+1}y_{m+1} + B_{m+1}y_{m+2} = -F_{m+1}. \tag{16}$$

Используя соотношение (14), можно исключить  $y_m^*$  в (16). В результате получается трёхточечное разностное соотношение с доминирующим центральным коэффициентом (при условии неотрицательности функций  $q(r)$  в (5)):

$$\bar{A}_{m+1}y_m - \bar{C}_{m+1}y_{m+1} + B_{m+1}y_{m+2} = -F_{m+1}, \tag{17}$$

где  $\bar{A}_{m+1} = A_{m+1}/(1 + \beta_k/h_{m+1})$ ,  $\bar{C}_{m+1} = \bar{A}_{m+1} + B_{m+1} + 0.5(h_{m+1} + h_{m+2})r_m q(r_m)$ .

Окончательно разностная схема состоит из уравнений (11)–(13) для  $i \neq m$ , уравнения (15) для  $i = m$  и модифицированного уравнения (17) для  $i = m + 1$ . При условии  $q^k(r) \geq 0$  эта схема монотонна.

Для вычисления невязок, необходимых для модифицированного метода Ньютона, используется разностная схема

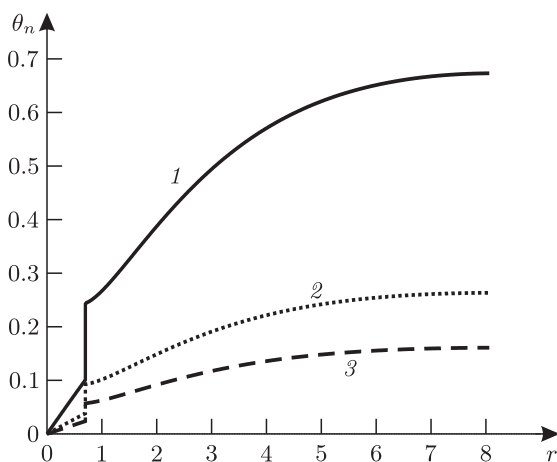
$$(r_{i-1/2}\theta_{n,\bar{r}}^k)_r - r_i F_n(\theta_n^k)(r_i) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

с соответствующими аппроксимациями краевых условий при  $i = 0$  и  $i = N$ .

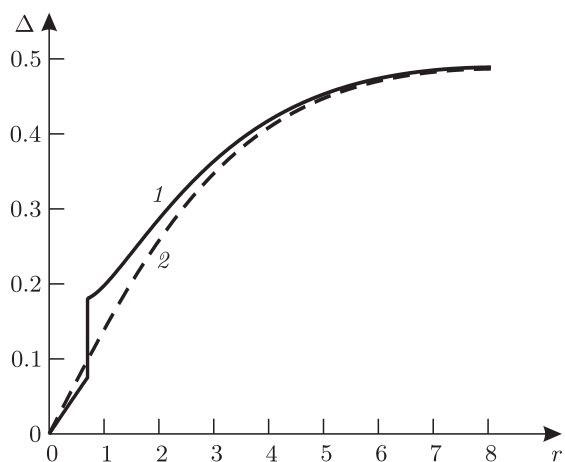
### 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Для проведения расчётов и сравнения с результатами физических исследований на языке C++ была написана программа, решающая полную постановку описанной системы уравнений, включая итерации для решения уравнения самосогласования (4), метод Ньютона для нелинейных задач и прогонку для линейных разностных уравнений. Результаты вычислений выводятся в виде файлов, предназначенных для построения графиков с помощью известной программы Gnuplot. Размеры гранулы  $\gamma$  и области  $\Gamma$ , а также температуру  $t$ , прозрачность  $\gamma_B$ , число  $M$  (10) частот  $\Omega_n$  и желаемую точность можно задать в командной строке.

На рис. 1, 2 представлены результаты расчётов, выполненных для температуры  $t = 0.6$ , радиуса сверхпроводящей гранулы (внутренней границы)  $\gamma = 0.7$ , радиуса круглой вихревой решетки  $\Gamma = 8.16$  (внешняя граница), параметра прозрачности  $\gamma_B = 1$ . Для сравнения на рис. 2 приведена кривая для  $\gamma_B = 0$ , что соответствует гладкому решению, совпадающему с координатной зависимостью  $\Delta(r)$ , рассчитанному ранее в работах [4–6].



**Рис. 1.** Результаты расчётов функции  $\theta_n(r)$  ( $n = \overline{1, 3}$ ): 1 –  $\Omega_1 = 3t$ ; 2 –  $\Omega_2 = 5t$ ; 3 –  $\Omega_3 = 7t$ . Представлен скачок решения на внутренней границе  $\gamma = 0.7$ .



**Рис. 2.** Зависимости параметра порядка  $\Delta(r)$  для задачи с внутренним интерфейсом с  $\gamma_B = 1$  (кривая 1) и для гладкого решения с прозрачной границей  $\gamma_B = 0$  (кривая 2).

Неравномерная сетка имела около 500 узлов. Неравномерность была связана с необходимостью совмещения внутренней границы  $\gamma$  с узлом сетки. Для вычислений использовалось  $M = 400$  членов ряда (мацубаровских частот). Итерации метода Ньютона и уравнения самосогласования проводились с точностью до  $10^{-5}$ .

В вычислениях для сходимости последовательных приближений уравнения самосогласования (10) потребовалось около 60 итераций, метод Ньютона сходился за 4–6 итераций. В целом время счёта для достаточно плотных сеток незначительно. В силу неравномерности сетки сходимость по величине скачка решения  $[\theta](\gamma) = y_m^* - y_m$  имела первый порядок. Условие сопряжения на внутренней границе для  $\Delta(r)$  выполнялось с точностью 0.5%.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен разностный метод решения одномерных эллиптических задач с нестандартным условием сопряжения на внутренней границе, приводящим к разрывным решениям. С его помощью решена задача о моделировании состояния сверхпроводниковой гранулы с вихрем. Предложенный простой разностный метод оказался достаточно эффективным.

Аналогичный разностный метод может быть применён для решения задач с нестандартными условиями сопряжения, в которых поток и решение не являются непрерывными и явно заданы скачки этих величин:  $[u] = \alpha$ ,  $[ku'] = \beta$ .

Метод аппроксимации условий сопряжения может быть обобщён на многомерные, в частности двумерные, задачи на регулярных прямоугольных сетках.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-12-00130).

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Usadel, K.D. Generalized diffusion equation for superconducting alloys / K.D. Usadel // Phys. Rev. Lett. — 1970. — V. 25, № 8. — P. 507–509.
2. Likharev, K.K. Superconducting weak links / K.K. Likharev // Rev. Mod. Phys. — 1979. — V. 51, № 1. — P. 101–159.
3. Golubov, A.A. The current-phase relation in Josephson junctions / A.A. Golubov, M.Yu. Kupriyanov, E. Il'ichev // Rev. Mod. Phys. — 2004. — V. 76, № 2. — P. 411–469.
4. Watts-Tobin, R. Density of states, entropy, and specific heat for dirty type II superconductors at arbitrary temperature / R. Watts-Tobin, L. Kramer, W. Pesch // J. Low Temp. Phys. — 1974. — V. 17. — P. 71–86.
5. Golubov, A.A. Theoretical investigation of Josephson tunnel-junctions with spatially inhomogeneous superconducting electrodes / A.A. Golubov, M.Yu. Kupriyanov // J. Low Temp. Phys. — 1988. — V. 70. — P. 83–130.
6. Golubov, A.A. Electronic structure of the Abrikosov vortex core in arbitrary magnetic fields / A.A. Golubov, U. Hartmann // Phys. Rev. Lett. — 1994. — V. 72, № 22. — P. 3602–3605.
7. Golubov, A.A. Abrikosov vortices in SF bilayers / A.A. Golubov, M.Yu. Kupriyanov, M.M. Khapaev // JETP Lett. — 2016. — V. 104. — P. 847–851.
8. Expansion of a superconducting vortex core into a diffusive metal / V.S. Stolyarov, C. Tristan, B. Christophe [et al.] // Nature Communications. — 2018. — V. 9, № 2277. — P. 1–8.

9. Куприянов, М.Ю. Влияние прозрачности границ на критический ток грязных SS'S структур / М.Ю. Куприянов, В.Ф. Лукичев // Журн. эксп. и теор. физики. — 1988. — Т. 94, № 6. — Р. 139–149.
10. Самарский, А.А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А.А. Самарский, В.Б. Андреев. — М. : Наука, 1976. — 352 с.
11. Kwak, D.Y. New finite element for interface problems having robin type jump / D.Y. Kwak, L. Seungwoo, H.A. Yunkyong // Int. J. Numer. Anal. Model. — 2017. — V. 14, № 4–5. — Р. 532.
12. Моделирование сверхпроводниковых SFN-структур с помощью метода конечных элементов / М.М. Хапаев, М. Ю. Куприянов, С. В. Бакурский и др. // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 7. — С. 984–992.
13. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 657 с.
14. Калиткин, Н.Н. Численные методы. Кн. 1 / Н.Н. Калиткин. — М. : Академия, 2013. — 304 с.

## FINITE DIFFERENCES SCHEME FOR DISCONTINUOUS SOLUTIONS OF USADEL EQUATIONS

М. М. Хапаев<sup>1</sup>, М. Ю. Куприянов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Lomonosov Moscow State University, Russia*

<sup>2</sup>*Skobeleva Institute of Nuclear Physics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

*e-mail: <sup>1</sup>vmhap@cs.msu.ru, <sup>2</sup>mkupr@pn.sinp.msu.ru*

In the paper we consider a nonlinear one-dimensional problem for equations of superconductivity theory. The peculiarity of the problem is a nonstandard Robin type junction condition on the inner boundary and a discontinuous solution. An optimal homogeneous monotone difference scheme including the condition at the interface is constructed for the problem. By means of solving a series of elliptic problems and Newton's method, we solve the complete system of the Usadel equations, which is the basic mathematical model at the microlevel for describing the currents and fields in superconductors with Josephson junctions. The results of calculations for the problem of a pellet with an Apricot vortex are presented.

*Keywords:* differences scheme, discontinuous solution, Usadel equations.

### FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 20-12-00130).

### REFERENCES

1. Usadel, K.D., Generalized diffusion equation for superconducting alloys, *Phys. Rev. Lett.*, 1979, vol. 25, no. 8, pp. 507–509.
2. Likharev, K.K., Superconducting weak links, *Rev. Mod. Phys.*, 1979, vol. 51, no. 1, pp. 101–159.
3. Golubov, A.A., Kupriyanov, M.Y., and Il'ichev, E., The current-phase relation in Josephson junctions, *Rev. Mod. Phys.*, 2004, vol. 76, no. 2, pp. 411–469.
4. Watts-Tobin, R., Kramer, L., and Pesch, W., Density of states, entropy, and specific heat for dirty type II superconductors at arbitrary temperature, *J. Low Temp. Phys.*, 1974, vol. 17, pp. 71–86.
5. Golubov, A.A. and Kupriyanov, M.Y., Theoretical investigation of Josephson tunnel-junctions with spatially inhomogeneous superconducting electrodes, *J. Low Temp. Phys.*, 1988, vol. 70, pp. 83–130.
6. Golubov, A.A. and Hartmann, U., Electronic structure of the Abrikosov vortex core in arbitrary magnetic fields, *Phys. Rev. Lett.*, 1994, vol. 72, no. 22, pp. 3602–3605.
7. Golubov, A.A., Kupriyanov, M.Y., and Khaapaev, M.M., Abrikosov vortices in SF bilayers, *JETP Lett.*, 2016, vol. 104, pp. 847–851.
8. Stolyarov, V.S., Tristan, C., Christophe, B. [et al.], Expansion of a superconducting vortex core into a diffusive metal, *Nature Communications*, 2018, vol. 9, no. 2277, pp. 1–8.

9. Kuprianov, M.Yu. and Lukichev, V.F., Influence of boundary transparency on the critical current of “dirty” SS’S structures, *J. Exp. Theor. Phys.*, 1988, vol. 67, no. 6, art. 1163.
10. Samarskii, A.A. and Andreev, V.B., *Raznostnie metody dlia ellipticheskikh uravnenii* (Finite Difference Methods for Elliptic Equations), Moscow: Nauka, 1976.
11. Kwak, D.Y., Seungwoo, L., and Yunkyong, H.A., New finite element for interface problems having robin type jump, *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2017, vol. 14, no. 4–5, p. 532.
12. Khapaev, M.M., Kupriyanov, M.Y., and Bakurskiy, S.V., Modeling superconductor SFN-structures using the finite element method, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 959–967.
13. Samarskii, A.A., *Teoria raznostnikh skhem* (Theory of Differential Schemes), Moscow: Nauka, 1977.
14. Kalitkin, N.N., *Chislennye metody. Kn. 1* (Numerical Methods. Book 1), Moscow: Academia, 2013.