ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 7, с. 967–989

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕДУЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ И СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЭЛЕМЕНТА ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

© П. С. Соловьев[1], С. И. Соловьев[2]

Казанский (Приволжский) федеральный университет

e-mail: [1]pavel.solovev.kpfu@mail.ru, [2]sergey.solovev.kpfu@mail.ru

Поступила в редакцию 26.11.2023 г., после доработки 03.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Исследована симметричная задача на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра в гильбертовом пространстве, которое является векторной решёткой с конусом положительных элементов. Установлено существование положительного простого минимального собственного значения, соответствующего единственному нормированному положительному собственному элементу. Изучена аппроксимация задачи в конечномерном подпространстве. Получены результаты о сходимости и погрешности приближений к минимальному собственному значению и соответствующему положительному собственному элементу. Разработаны и обоснованы вычислительные методы решения матричных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие теоретические выводы.

Ключевые слова: собственное значение, положительный собственный элемент, задача на собственные значения, гильбертово пространство, векторная решётка, конус, конечномерная аппроксимация, итерационный метод, метод конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0374064124070093, EDN: KNEQAH

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на собственные значения с линейной и нелинейной зависимостями от спектрального параметра применяются в различных областях науки и техники [1–4]. Значительный интерес исследователей к изучению положительных относительно конуса решений задач на собственные значения был вызван знаменитыми классическими результатами О. Перрона, Г. Фробениуса, Р. Йентча, М.А. Рутмана, М.Г. Крейна и М.А. Красносельского (см. обзор в [5]), ими были изучены задачи на собственные значения с линейной зависимостью от спектрального параметра в банаховых пространствах с телесным конусом. Развитие классических результатов для задач на собственные значения с линейной зависимостью от спектрального параметра в банаховых пространствах с банаховой решёткой изложено в книгах [6, с. 400; 7, с. 63]. При дальнейшем обобщении этих результатов для задач на собственные значения в пространствах Соболева были выявлены следующие трудности: конус в пространстве Соболева не является телесным, пространство Соболева является векторной, но не банаховой решёткой [8, с. 149].

В настоящей работе предложен новый подход, позволяющий преодолеть отмеченные трудности для симметричных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра в гильбертовом пространстве, которое является векторной решёткой с конусом положительных элементов. Сформулированы новые достаточные условия на билинейные формы симметричной вариационной задачи на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра, гарантирующие существование в конусе единственного нормированного собственного элемента, соответствующего положительному простому минимальному собственному значению. Построена конечномерная аппроксимация симметричной вариационной задачи на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра в конечномерном подпространстве исходного гильбертова пространства, установлены результаты о сходимости и погрешности приближений к минимальному собственному значению и к положительному собственному элементу. В статье разработаны также вычислительные методы нахождения решений матричных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра. Изложенные численные методы могут быть применены для решения и исследования прикладных задач физики плазмы и механики конструкций [1–4].

1. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Обозначим через $\mathbb{R}$ множество вещественных чисел. Пусть V — вещественное бесконечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением (u,v) и нормой $\|v\|=\sqrt{(v,v)}$, $u,v\in V$.

Предположим, что выполнено следующее

Условие A.1. Пространство V является векторной решёткой с конусом положительных элементов K. Каждому элементу $v\in V$ поставлены в соответствие единственные элементы $v^+, v^-, |v|\in K$, где $v=v^+-v^-$, $|v|=v^++v^-$, v^+ — положительная часть элемента v, v^- — его отрицательная часть, $|v|$ — модуль элемента v [8, с. 146].

Для заданного числа $\tau>0$ обозначим $\Lambda=(\tau,\infty)$ и введём при фиксированном $\eta\in\Lambda$ симметричные билинейные формы $a(\eta)\colon V\times V\to\mathbb{R}$ и $b(\eta)\colon V\times V\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям.

Условие A.2. Билинейная форма $a(\eta)$ является положительно определённой и ограниченной, т.е. существуют положительные непрерывные функции $\alpha_1(\eta)$, $\alpha_2(\eta)$, $\eta\in\Lambda$, такие, что
$$\alpha_1(\eta)\|v\|^2\leqslant a(\eta,v,v)\leqslant\alpha_2(\eta)\|v\|^2,\quad v\in V,\quad \eta\in\Lambda.$$

Условие A.3. Билинейная форма $b(\eta)$ является положительной и вполне непрерывной, т.е. $b(\eta,v,v)>0$ для $v\in V\setminus\{0\}$ и $b(\eta,v_j,v_j)\to b(\eta,v,v)$ при $j\to\infty$, если $v_j\rightharpoonup v$ в V при $j\to\infty$. Здесь символ $\rightharpoonup$ обозначает слабую сходимость в гильбертовом пространстве V.

Условие A.4. Имеют место соотношения $\|a(\eta)-a(\mu)\|\to 0$, $\|b(\eta)-b(\mu)\|\to 0$ при $\eta\to\mu$. Здесь норма симметричной билинейной формы $c\colon V\times V\to\mathbb{R}$ определяется по формуле
$$\|c\|=\sup_{v\in V,\,\|v\|=1}|c(v,v)|.$$

Согласно условию A.4 для билинейной формы $b(\eta)$ существует положительная непрерывная функция $\beta_2(\eta)$, $\eta\in\Lambda$, такая, что $b(\eta,v,v)\leqslant\beta_2(\eta)\|v\|^2$ для любого $v\in V$ при фиксированном параметре $\eta\in\Lambda$ [3].

Условие A.5. Справедлива сходимость функционала Рэлея $R(\eta,v)\to 0$ при $\eta\to\infty$, где $R(\eta,v)=a(\eta,v,v)/b(\eta,v,v)$, $\eta\in\Lambda$, $v\in V\setminus\{0\}$.

Условие A.6. Выполняется неравенство $b(\eta,u,v)\geqslant 0$ для любых $\eta\in\Lambda$, $u,v\in K$.

Условие A.7. Справедливы соотношения $a(\eta,v^+,v^-)=b(\eta,v^+,v^-)=0$ для любых $\eta\in\Lambda$, $v\in V$.

Условие А.8. Множество $\dot{K}=\dot{K}(\eta)=\{u\colon u\in K,\ \ b(\eta,u,v)>0$ для любых $v\in K\setminus\{0\}\}$ непусто и не зависит от параметра $\eta\in\Lambda$.

Условие А.9. Если $\eta\in\Lambda$, $u\in K\setminus\{0\}$, $a(\eta,u,v)\geqslant 0$ для любого $v\in K$, то $u\in\overset{*}{K}$, где $\overset{*}{K}$ — непустое подмножество множества $\dot{K}$.

Сформулируем вариационную задачу на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра:

$$\lambda\in\Lambda,\quad u\in V\setminus\{0\}:\quad a(\lambda,u,v)=b(\lambda,u,v)\quad \text{для любого } v\in V. \tag{1}$$

Число λ, удовлетворяющее уравнению (1), называется *собственным значением задачи* (1), а элемент u — соответствующим *собственным элементом*. Для фиксированного $\eta\in\Lambda$ введём параметрическую задачу на собственные значения

$$\gamma(\eta)\in\mathbb{R},\quad w\in V\setminus\{0\}:\quad a(\eta,w,v)=\gamma(\eta)b(\eta,w,v)\quad \text{для любого } v\in V. \tag{2}$$

Известно [2], что существуют конечнократные собственные значения $\gamma_k=\gamma_k(\eta)$, $k=0,1,\ldots$, параметрической задачи (2), занумерованные с учётом кратности, $0<\gamma_0\leqslant\gamma_1\leqslant\ldots\leqslant\gamma_k\leqslant\ldots$, $\gamma_k\to\infty$ при $k\to\infty$, и соответствующие собственные элементы $w_k=w_k(\eta)$, $k=0,1,\ldots$, $a(\eta,w_i,w_j)=\gamma_i\delta_{ij}$, $b(\eta,w_i,w_j)=\delta_{ij}$, $i,j=0,1,\ldots$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Для фиксированного $\eta\in\Lambda$ справедливо следующее вариационное свойство:

$$\gamma_0(\eta)=R(w_0(\eta))=\min_{v\in V\setminus\{0\}}R(\eta,v). \tag{3}$$

Положим $\gamma_0(\tau+0)=\lim_{\eta\to\tau}\gamma_0(\eta)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия А.1–А.9 и $\gamma_0(\tau+0)>1$. Тогда существует положительное простое минимальное собственное значение λ_0, $\gamma_0(\lambda_0)=1$, задачи (1), соответствующее единственному нормированному положительному собственному элементу $u_0\in\overset{*}{K}$, $u_0=w_0(\lambda_0)$, $a(\lambda_0,u_0,u_0)=1$, $b(\lambda_0,u_0,u_0)=1$.*

Доказательство. Для $w_0=w_0(\eta)$, $\eta\in\Lambda$, согласно условиям А.1 и А.7 справедливы соотношения

$$b(\eta,w_0,w_0)=b(\eta,w_0^+-w_0^-,w_0^+-w_0^-)=b(\eta,w_0^+,w_0^+)+b(\eta,w_0^-,w_0^-)-2b(\eta,w_0^+,w_0^-)=$$

$$=b(\eta,w_0^+,w_0^+)+b(\eta,w_0^-,w_0^-)+2b(\eta,w_0^+,w_0^-)=b(\eta,w_0^++w_0^-,w_0^++w_0^-)=b(\eta,|w_0|,|w_0|)=1.$$

Аналогично получим $a(\eta,w_0,w_0)=a(\eta,|w_0|,|w_0|)=\gamma_0(\eta)$. Поэтому из вариационного свойства (3) выводим, что на элементе $|w_0|$ достигается минимум функционала Рэлея, т.е.

$$\gamma_0(\eta)=R(\eta,w_0)=R(\eta,|w_0|)=\min_{v\in V\setminus\{0\}}R(\eta,v).$$

Следовательно, элемент $|w_0|\in K$ является собственным элементом, соответствующим минимальному собственному значению $\gamma_0(\eta)$ параметрической задачи (2), и справедливо тождество $a(\eta,|w_0|,v)=\gamma_0(\eta)b(\eta,|w_0|,v)$ для любого $v\in V$. Отсюда с учётом условия А.6 получим соотношения $a(\eta,|w_0|,v)=\gamma_0(\eta)b(\eta,|w_0|,v)\geqslant 0$ для любого $v\in K$. В силу условия А.9 выводим $|w_0|\in\overset{*}{K}$.

Пусть существуют два линейно независимых собственных элемента $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$, соответствующих минимальному собственному значению $\gamma_0(\eta)$. С помощью процесса ортогонализации определим два ортонормированных собственных элемента v_1 и v_2, соответствующих минимальному собственному значению $\gamma_0(\eta)$:

$$v_1=\frac{\widetilde{v}_1}{\|\widetilde{v}_1\|_{b(\eta)}},\quad v_2=\frac{\widetilde{v}_2-b(\eta,\widetilde{v}_2,v_1)v_1}{\|\widetilde{v}_2-b(\eta,\widetilde{v}_2,v_1)v_1\|_{b(\eta)}}.$$

Тогда элементы $|v_1|, |v_2| \in \overset{*}{K}$ также являются собственными элементами, соответствующими минимальному собственному значению $\gamma_0(\eta)$. Кроме того, $v_1 = |v_1|$ или $v_1 = -|v_1|$, $v_2 = |v_2|$ или $v_2 = -|v_2|$. Следовательно, получим $b(\eta, v_1, v_2) = \alpha b(\eta, |v_1|, |v_2|) = 0$, где $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$. Но это противоречит неравенству $b(\eta, |v_1|, |v_2|) > 0$ для элементов $|v_1|, |v_2| \in \overset{*}{K}$ в силу условия A.8. Таким образом, исходные собственные элементы $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ линейно зависимы, а соответствующее собственное значение $\gamma_0(\eta)$ является простым и выполняется неравенство $\gamma_0(\eta) < \gamma_1(\eta)$.

Предположим, что существует собственный элемент w_i, принадлежащий конусу K и соответствующий собственному значению $\gamma_i(\eta)$ при $\gamma_0(\eta) < \gamma_i(\eta)$ для $i > 0$. Тогда в силу ортогональности получим соотношение $b(\eta, w_i, w_0) = b(\eta, w_i, |w_0|) = 0$, но это противоречит свойству билинейной формы $b(\eta, w_i, |w_0|) > 0$ для элемента $|w_0| \in \overset{*}{K}$. В результате установлена единственность нормированного собственного элемента $|w_0| = |w_0(\eta)|$ в конусе K.

Из непрерывности билинейных форм согласно условию A.4 вытекает непрерывность функций $\gamma_k = \gamma_k(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, $k = 0, 1, \ldots$ [3].

Докажем, что уравнение $\gamma_0(\eta) = 1$, $\eta \in \Lambda$, имеет наименьший корень λ_0. Действительно, имеем $\gamma_0(\eta) \to 0$ при $\eta \to \infty$, $\eta \in \Lambda$, так как согласно условию A.5 и свойству (3) для фиксированного элемента $w \in V \setminus \{0\}$ справедливо соотношение

$$\gamma_0(\eta) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\eta, v) \leqslant R(\eta, w) \to 0 \quad \text{при } \eta \to \infty, \quad \eta \in \Lambda.$$

Кроме того, по предположению теоремы $\gamma_0(\tau + 0) > 1$. Отсюда заключаем, что существует наименьший корень λ_0, который определяет минимальное собственное значение задачи (1).

Собственному значению λ_0 соответствует единственный нормированный положительный собственный элемент $|u_0| \in \overset{*}{K}$, $u_0 = w_0(\lambda_0)$, $a(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$, $b(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$. Теорема доказана.

2. КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ

Определим семейство конечномерных подпространств V_h пространства V размерности $N+1$, $N = N_h$, где h — положительный параметр дискретизации. Предположим выполненным следующее требование предельной плотности семейства подпространств V_h в пространстве V.

Условие B.1. Для любого элемента $v \in V$ имеет место сходимость $\varepsilon_h(v) \to 0$ при $h \to 0$, где

$$\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\|.$$

Для замкнутых подпространств V_1 и V_2 пространства V обозначим через $c|_{V_1 \times V_2}\colon V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ сужение билинейной формы $c\colon V \times V \to \mathbb{R}$ на множество $V_1 \times V_2$. Зададим норму билинейной формы $c|_{V_1 \times V_2}\colon V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ равенством

$$\|c|_{V_1 \times V_2}\| = \sup_{u \in V_1,\ v \in V_2,\ \|u\| = \|v\| = 1} |c(u, v)|.$$

Введём при фиксированном параметре $\eta \in \Lambda$ симметричные билинейные формы $a_h(\eta)\colon V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ и $b_h(\eta)\colon V_h \times V_h \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям.

Условие B.2. Билинейные формы $a_h(\eta)$ и $b_h(\eta)$ являются положительными, т.е. $a_h(\eta, v^h, v^h) > 0$ и $b_h(\eta, v^h, v^h) > 0$ для произвольного $v^h \in V_h \setminus \{0\}$, $\eta \in \Lambda$.

Условие B.3. Билинейные формы $a_h(\eta)$ и $b_h(\eta)$ непрерывны, т.е.

$$\|(a_h(\eta) - a_h(\mu))|_{V_h \times V_h}\| \to 0, \quad \|(b_h(\eta) - b_h(\mu))|_{V_h \times V_h}\| \to 0$$

при $\eta \to \mu$, $\eta, \mu \in \Lambda$.

Условие B.4. Справедливы условия аппроксимации билинейных форм

$$\|(a_h(\eta)-a(\eta))|_{V_h\times V_h}\|\to 0, \quad \|(b_h(\eta)-b(\eta))|_{V_h\times V_h}\|\to 0$$

при $h\to 0,\ \eta\in\Lambda$.

Согласно условиям A.2, A.3 и B.4 при достаточно малых h существуют положительные непрерывные функции $\overline{\alpha}_1(\eta),\ \overline{\alpha}_2(\eta),\ \overline{\beta}_2(\eta),\ \eta\in\Lambda$, такие, что

$$\overline{\alpha}_1(\eta)\|v^h\|^2\leqslant a_h(\eta,v^h,v^h)\leqslant\overline{\alpha}_2(\eta)\|v^h\|^2, \quad b_h(\eta,v^h,v^h)\leqslant\overline{\beta}_2(\eta)\|v^h\|^2$$

для любого $v^h\in V_h,\ \eta\in\Lambda$.

Условие B.5. Для $R_h(\eta,v^h)=a_h(\eta,v^h,v^h)/b_h(\eta,v^h,v^h),\ \eta\in\Lambda,\ v^h\in V_h\setminus\{0\}$, справедлива сходимость $R_h(\eta,v^h)\to 0$ при $\eta\to\infty$.

Введём конечномерную задачу на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра

$$\lambda^h\in\Lambda, \quad u^h\in V_h\setminus\{0\}: \quad a_h(\lambda^h,u^h,v^h)=b_h(\lambda^h,u^h,v^h) \quad \text{для любого } v^h\in V_h. \tag{4}$$

Для фиксированного $\eta\in\Lambda$ сформулируем параметрическую задачу на собственные значения

$$\gamma^h(\eta)\in\mathbb{R}, \quad w^h\in V_h\setminus\{0\}: \quad a_h(\eta,w^h,v^h)=\gamma^h(\eta)b_h(\eta,w^h,v^h) \quad \text{для любого } v^h\in V_h. \tag{5}$$

Известно [2], что существуют конечнократные собственные значения $\gamma_k^h=\gamma_k^h(\eta),\ k=\overline{0,N}$, параметрической задачи (5), занумерованные с учётом кратности, $0<\gamma_0^h\leqslant\gamma_1^h\leqslant\ldots\leqslant\gamma_N^h$, и соответствующие собственные элементы $w_k^h=w_k^h(\eta)$, $k=\overline{0,N}$, $a_h(\eta,w_i^h,w_j^h)=\gamma_i^h\delta_{ij}$, $b_h(\eta,w_i^h,w_j^h)=$ $=\delta_{ij},\ i,j=\overline{0,N}$. Для фиксированного $\eta\in\Lambda$ справедливо следующее вариационное свойство:

$$\gamma_0^h(\eta)=R_h(w_0^h(\eta))=\min_{v^h\in V_h\setminus\{0\}}R_h(\eta,v^h). \tag{6}$$

Положим $\gamma_0^h(\tau+0)=\lim_{\eta\to\tau}\gamma_0^h(\eta)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия B.2, B.3, B.5 и* $\gamma_0^h(\tau+0)>1$. *Тогда существует положительное минимальное собственное значение* λ_0^h, $\gamma_0^h(\lambda_0^h)=1$, *задачи (4), соответствующее нормированному собственному элементу* $u_0^h=w_0^h(\lambda_0^h)$, $a_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=1$, $b_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=1$.

Доказательство. Из непрерывности билинейных форм согласно условию B.3 вытекает непрерывность функций $\gamma_k^h=\gamma_k^h(\eta),\ \eta\in\Lambda,\ k=\overline{0,N}$ [3]. Покажем, что уравнение $\gamma_0^h(\eta)=1$, $\eta\in\Lambda$, имеет наименьший корень λ_0^h. Действительно, имеем $\gamma_0^h(\eta)\to 0$ при $\eta\to\infty,\ \eta\in\Lambda$, так как согласно условию B.5 и свойству (6) для фиксированного элемента $w^h\in V_h\setminus\{0\}$ справедливо соотношение

$$\gamma_0^h(\eta)=\min_{v^h\in V_h\setminus\{0\}}R_h(\eta,v^h)\leqslant R_h(\eta,w^h)\to 0 \quad \text{при} \quad \eta\to\infty, \quad \eta\in\Lambda.$$

Кроме того, по предположению теоремы $\gamma_0^h(\tau+0)>1$. Отсюда заключаем, что существует наименьший корень λ_0^h, который определяет минимальное собственное значение задачи (4). Собственному значению λ_0^h соответствует нормированный собственный элемент $u_0^h=w_0^h(\lambda_0^h)$, $a_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=1,\ b_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=1$. Теорема доказана.

Обозначим для $v\in V,\ v^h\in V_h,\ \eta\in\Lambda$

$$\|v\|_{a(\eta)}=a(\eta,v,v), \quad \|v\|_{b(\eta)}=b(\eta,v,v), \quad \|v^h\|_{a_h(\eta)}=a_h(\eta,v^h,v^h), \quad \|v^h\|_{b_h(\eta)}=b_h(\eta,v^h,v^h).$$

Введём оператор ортогонального проектирования $P_h(\eta)\colon V\to V_h$ с помощью соотношения $a(\eta,u-P_h(\eta)u,v^h)=0$ для любого элемента $v^h\in V_h$, где $u\in V$. Имеем $\|u-P_h(\eta)u\|\to 0$ при $h\to 0$, так как

$$\sqrt{\alpha_1(\eta)}\,\|u-P_h(\eta)u\|\leqslant\|u-P_h(\eta)u\|_{a(\eta)}\leqslant\|u-v^h\|_{a(\eta)}\leqslant\sqrt{\alpha_2(\eta)}\,\|u-v^h\|,$$

$$\|u-P_h(\eta)u\|\leqslant\sqrt{\frac{\alpha_2(\eta)}{\alpha_1(\eta)}}\inf_{v^h\in V_h}\|u-v^h\|=\sqrt{\frac{\alpha_2(\eta)}{\alpha_1(\eta)}}\,\varepsilon_h(u)\to 0$$

при $h\to 0$, $v^h\in V_h$.

Одним и тем же символом c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от h, и считать h достаточно малым. Обозначим через λ_0 минимальное собственное значение задачи (1), через $u_0\in\overset{*}{K}$ — соответствующий собственному значению λ_0 положительный собственный элемент такой, что $a(\lambda_0,u_0,u_0)=b(\lambda_0,u_0,u_0)=1$. Обозначим через λ_0^h минимальное собственное значение задачи (4), через u_0^h — соответствующий собственному значению λ_0^h собственный элемент такой, что $a_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=b_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=1$, $a(\lambda_0,u_0^h,u_0)=b(\lambda_0,u_0^h,u_0)>0$. Предположим, что функция $\gamma_0(\eta)$, $\eta\in\Lambda$, является убывающей в некоторой окрестности точки λ_0.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия A.1–A.9, B.1–B.5 и* $\gamma_0(\tau+0)>1$. *Тогда имеет место сходимость* $\lambda_0^h\to\lambda_0$, $\|u_0^h-u_0\|\to 0$ *при* $h\to 0$.

Доказательство. Для фиксированного $\eta\in\Lambda$ из результатов [2] получим сходимость $\gamma_0^h(\eta)\to\gamma_0(\eta)$ при $h\to 0$. Следовательно, справедлива сходимость $\lambda_0^h\to\lambda_0$ при $h\to 0$.

Так как $b_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=1$, то получим $\overline{\alpha}_1(\lambda_0^h)\|u_0^h\|^2\leqslant a_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=\gamma_0^h(\lambda_0^h)=1$, отсюда $\|u_0^h\|\leqslant 1/(\overline{\alpha}_1(\lambda_0^h))^{1/2}\leqslant c$. Поэтому для произвольной последовательности $h'\to 0$ найдётся подпоследовательность $h''\to 0$, $u_0^h\rightharpoonup w$ в V при $h=h''\to 0$, $w\in V$.

Теперь для любого элемента $v\in V$ положим $v^h=P_h(\lambda_0)v$. Тогда справедливы следующие предельные свойства: $a_h(\lambda_0^h,u_0^h,v^h)\to a(\lambda_0,w,v)$, $b_h(\lambda_0^h,u_0^h,v^h)\to b(\lambda_0,w,v)$ при $h=h''\to 0$.

С помощью предельного перехода в равенстве $a_h(\lambda_0^h,u_0^h,v^h)=b_h(\lambda_0^h,u_0^h,v^h)$ при $h=h''\to 0$ получим $a(\lambda_0,w,v)=b(\lambda_0,w,v)$ для произвольного $v\in V$. Так как $1=b_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)\to b(\lambda_0,w,w)$ при $h=h''\to 0$, то $b(\lambda_0,w,w)=1$ и $w\in K$. Действительно, предположив противное ($-w\in K$), находим $w=-u_0$, и поэтому $b(\lambda_0,u_0^h,u_0)\to -b(\lambda_0,u_0,u_0)=-1$ при $h=h''\to 0$, $u_0\in K$, но это противоречит предположению теоремы $b(\lambda_0,u_0^h,u_0)>0$. В результате установлено, что λ_0 и $w=u_0$ являются минимальным собственным значением и соответствующим положительным собственным элементом задачи (1).

Докажем сходимость $\|u_0^h-u_0\|\to 0$ при $h=h''\to 0$. Сначала получим предельные соотношения при $h=h''\to 0$:

$$\overline{\alpha}_1(\lambda_0^h)\|u_0^h-P_h(\lambda_0)u_0\|^2\leqslant a_h(\lambda_0^h,u_0^h-P_h(\lambda_0)u_0,u_0^h-P_h(\lambda_0)u_0)=$$
$$=a_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)-2a_h(\lambda_0^h,u_0^h,P_h(\lambda_0)u_0)+a_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)\to 0,$$

где $a_h(\lambda_0^h,u_0^h,P_h(\lambda_0)u_0)\to a(\lambda_0,u_0,u_0)=1$, $a_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)\to a(\lambda_0,u_0,u_0)=1$, $a_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=1$ при $h=h''\to 0$. Теперь выводим сходимость $\|u_0^h-u_0\|\leqslant\|u_0^h-P_h(\lambda_0)u_0\|+$ $+\|u_0-P_h(\lambda_0)u_0\|\to 0$ при $h=h''\to 0$.

Пусть для некоторой последовательности $h'\to 0$ имеет место неравенство $\|u_0^h-u_0\|\geqslant c$ при $h=h'\to 0$. Тогда, повторяя проведённые рассуждения, получаем, что найдётся подпоследовательность $h''\to 0$, для которой $\|u_0^h-u_0\|\to 0$ при $h=h''\to 0$, что приводит к противоречию с предыдущим неравенством.

Итак, для произвольной последовательности $h'\to 0$ установлена сходимость $\|u_0^h-u_0\|\to 0$ при $h=h'\to 0$, а это эквивалентно $\|u_0^h-u_0\|\to 0$ при $h\to 0$. Теорема доказана.

Предположим, что билинейные формы удовлетворяют следующим условиям.

Условие A.10. Существуют непрерывные функции $\alpha_3(\eta,\mu)$, $\beta_3(\eta,\mu)$, $\eta,\mu\in\Lambda$, такие, что для любого $v\in V$

$$|a(\eta,v,v)-a(\mu,v,v)|\leqslant\alpha_3(\eta,\mu)\,|\eta-\mu|\,\|v\|^2,$$

$$|b(\eta,v,v)-b(\mu,v,v)|\leqslant\beta_3(\eta,\mu)\,|\eta-\mu|\,\|v\|^2.$$

Условие B.6. Существуют непрерывные функции $\overline{\alpha}_3(\eta,\mu)$, $\overline{\beta}_3(\eta,\mu)$, $\eta,\mu\in\Lambda$, такие, что для любого $v^h\in V_h$

$$|a_h(\eta,v^h,v^h)-a_h(\mu,v^h,v^h)|\leqslant\overline{\alpha}_3(\eta,\mu)\,|\eta-\mu|\,\|v^h\|^2,$$

$$|b_h(\eta,v^h,v^h)-b_h(\mu,v^h,v^h)|\leqslant\overline{\beta}_3(\eta,\mu)\,|\eta-\mu|\,\|v^h\|^2.$$

Введём следующие обозначения:

$$\delta_1^h(u_0)=\delta_{1a}^h(u_0)+\delta_{1b}^h(u_0),\qquad \delta_2^h(u_0)=\delta_{2a}^h(u_0)+\delta_{2b}^h(u_0),$$

$$\delta_{1a}^h(u_0)=\sup_{v^h\in V_h,\,\|v^h\|=1}|a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|,$$

$$\delta_{1b}^h(u_0)=\sup_{v^h\in V_h,\,\|v^h\|=1}|b_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|,$$

$$\delta_{2a}^h(u_0)=|a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)|,$$

$$\delta_{2b}^h(u_0)=|b_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)|.$$

Обозначим $\Delta(\eta,\mu)=(\gamma_0(\eta)-\gamma_0(\mu))/(\eta-\mu)$, $\Delta_h(\eta,\mu)=(\gamma_0^h(\eta)-\gamma_0^h(\mu))/(\eta-\mu)$, $\eta,\mu\in\Lambda$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия A.1–A.10, B.1–B.6, $\gamma_0(\tau+0)>1$ и существует число $\varkappa>0$ такое, что $-\Delta(\lambda_0,\eta)\geqslant c_0>0$ при любом $\eta\in(\lambda_0-\varkappa,\lambda_0)\cup(\lambda_0,\lambda_0+\varkappa)$. Тогда имеют место оценки погрешности*

$$|\lambda_0^h-\lambda_0|\leqslant c[\delta_2^h(u_0)+(\varepsilon_h(u_0)+\delta_1^h(u_0))^2],\qquad \|u_0^h-u_0\|\leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0)+\delta_1^h(u_0)).$$

Доказательство. Через $U_0=\{v\colon v=\alpha u_0,\alpha\in\mathbb{R}\}$ обозначим собственное подпространство, соответствующее минимальному собственному значению λ_0. Введём обозначения

$$\varepsilon^h=\sup_{u\in U_0,\|u\|=1}\varepsilon_h(u),$$

$$\delta_1^h=\|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times V_h}\|+\|(b_h(\lambda_0)-b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times V_h}\|,$$

$$\delta_2^h=\|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times P_h(\lambda_0)U_0}\|+\|(b_h(\lambda_0)-b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times P_h(\lambda_0)U_0}\|.$$

Согласно [2] справедлива оценка

$$|\gamma_0^h(\lambda_0)-\gamma_0(\lambda_0)|\leqslant c\,[\delta_2^h+(\varepsilon^h+\delta_1^h)^2]. \tag{7}$$

Оценим величины, входящие в правую часть неравенства (7). Из соотношения

$$\alpha_2(\lambda_0)\|u_0\|^2\geqslant a(\lambda_0,u_0,u_0)=b(\lambda_0,u_0,u_0)=1$$

получим $\|u_0\| \geqslant 1/\sqrt{\alpha_2(\lambda_0)}$, отсюда выводим оценку

$$\varepsilon^h = \sup_{u\in U_0,\|u\|=1} \varepsilon_h(u) = \frac{\varepsilon_h(u_0)}{\|u_0\|} \leqslant \sqrt{\alpha_2(\lambda_0)}\varepsilon_h(u_0).$$

Кроме того, находим

$$\delta_1^h = \|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times V_h}\| + \|(b_h(\lambda_0)-b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times V_h}\| \leqslant$$
$$\leqslant c\,(\delta_{1a}^h(u_0)+\delta_{1b}^h(u_0)) = \delta_1^h(u_0),$$
$$\delta_2^h = \|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times P_h(\lambda_0)U_0}\| + \|(b_h(\lambda_0)-b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times P_h(\lambda_0)U_0}\| \leqslant$$
$$\leqslant c\,(\delta_{2a}^h(u_0)+\delta_{2b}^h(u_0)) = \delta_2^h(u_0).$$

Здесь были использованы следующие оценки:

$$\|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times V_h}\| = \sup_{u^h\in P_h(\lambda_0)U_0,\ v^h\in V_h,\ \|u^h\|=\|v^h\|=1} |(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))(u^h,v^h)| =$$
$$= \sup_{u^h\in P_h(\lambda_0)U_0\setminus\{0\},\ v^h\in V_h,\ \|v^h\|=1} \frac{|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))(u^h,v^h)|}{\|u^h\|} =$$
$$= \sup_{v^h\in V_h,\ \|v^h\|=1} \frac{|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))(P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|}{\|P_hu_0\|} \leqslant$$
$$\leqslant c \sup_{v^h\in V_h,\ \|v^h\|=1} |a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h) - a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)| = c\,\delta_{1a}^h(u_0),$$
$$\|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times P_h(\lambda_0)U_0}\| = \sup_{u^h,v^h\in P_h(\lambda_0)U_0,\ \|u^h\|=\|v^h\|=1} |(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))(u^h,v^h)| =$$
$$= \sup_{u^h,v^h\in P_h(\lambda_0)U_0\setminus\{0\}} \frac{|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))(u^h,v^h)|}{\|u^h\|\ \|v^h\|} = \frac{|(a_h(\lambda_0)-a(\lambda_0))(P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)|}{\|P_h(\lambda_0)u_0\|\ \|P_h(\lambda_0)u_0\|} \leqslant$$
$$\leqslant c\,|a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0) - a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)| = c\,\delta_{2a}^h(u_0),$$

а также аналогичные оценки

$$\|(b_h(\lambda_0)-b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times V_h}\| \leqslant c\,\delta_{1b}^h(u_0), \quad \|(b_h(\lambda_0)-b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0\times P_h(\lambda_0)U_0}\| \leqslant \delta_{2b}^h(u_0),$$

где учтено, что $\|P_h(\lambda_0)u_0\| = \|P_h(\lambda_0)u_0-u_0+u_0\| \geqslant \|u_0\| - \|u_0-P_h(\lambda_0)u_0\| \geqslant c$.

Так как $\Delta_h(\eta,\mu)\to\Delta(\eta,\mu)$ при $h\to 0$, $\eta,\mu\in\Lambda$, то из (7) для $c_1>0$ выводим

$$c_1|\lambda_0^h-\lambda_0| \leqslant |\gamma_0^h(\lambda_0)-\gamma_0^h(\lambda_0^h)| = |\gamma_0^h(\lambda_0)-\gamma_0(\lambda_0)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,[\delta_2^h + (\varepsilon^h+\delta_1^h)^2] \leqslant c\,[\delta_2^h(u_0) + (\varepsilon_h(u_0)+\delta_1^h(u_0))^2].$$

Отсюда вытекает первая оценка теоремы.

Обозначим $\xi_i^h = b_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,w_i^h)$, $i=\overline{0,N}$, где $w_i^h = w_i^h(\lambda_0^h)$, $i=\overline{0,N}$, — собственные элементы параметрической задачи (5) при $\eta=\lambda_0^h$. Так как собственные элементы w_i^h, $i=\overline{0,N}$, составляют ортонормированный базис в конечномерном пространстве V_h, то для элемента $P_h(\lambda_0)u_0\in V_h$ справедливо представление

$$P_h(\lambda_0)u_0 = \sum_{i=0}^N \xi_i^h w_i^h = \xi_0^h w_0^h + \sum_{i=1}^N \xi_i^h w_i^h = \xi_0^h w_0^h + z^h, \quad z^h = \sum_{i=1}^N \xi_i^h w_i^h.$$

Из неравенства $\gamma_1(\lambda_0)-\gamma_0(\lambda_0)>0$ выводим

$$\gamma_1^h(\lambda_0^h)-1=\gamma_1^h(\lambda_0^h)-\gamma_0(\lambda_0)=(\gamma_1(\lambda_0)-\gamma_0(\lambda_0))+(\gamma_1^h(\lambda_0^h)-\gamma_1^h(\lambda_0))+(\gamma_1^h(\lambda_0)-\gamma_1(\lambda_0))\geqslant c,$$

так как $\gamma_1^h(\lambda_0^h)-\gamma_1^h(\lambda_0)\to 0$ и $\gamma_1^h(\lambda_0)-\gamma_1(\lambda_0)\to 0$ при $h\to 0$ согласно [2, 3]. Положим

$$\nu_h(u_0)=\sup_{v^h\in V_h,\ \|v^h\|=1}|a_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|.$$

Для оценки величины $\nu_h(u_0)$ предварительно проведём следующие преобразования:

$$a_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)=$$
$$=(a(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))+(a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))-$$
$$-(b_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))+(a_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))-$$
$$-(b_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))-(a(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))+$$
$$+(b(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)),$$

$$a(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)=$$
$$=(a(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))-(b(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))+$$
$$+a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0-u_0,v^h)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0-u_0,v^h)+a(\lambda_0,u_0,v^h)-b(\lambda_0,u_0,v^h)=$$
$$=(a(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))-(b(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h))-$$
$$-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0-u_0,v^h).$$

Было учтено, что $a(\lambda_0,u_0,v^h)-b(\lambda_0,u_0,v^h)=0$, $a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0-u_0,v^h)=0$ для любого элемента $v^h\in V_h$.

Теперь при $\|v^h\|=1$ оценим следующие выражения:

$$|a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|\leqslant c\,\delta_{1a}^h(u_0),$$
$$|b_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|\leqslant c\,\delta_{1b}^h(u_0),$$
$$|a_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\alpha}_3(\lambda_0^h,\lambda_0)\,|\lambda_0^h-\lambda_0|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|\,\|v^h\|\leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0)+\delta_1^h(u_0)),$$
$$|b_h(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\beta}_3(\lambda_0^h,\lambda_0)\,|\lambda_0^h-\lambda_0|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|\,\|v^h\|\leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0)+\delta_1^h(u_0)),$$
$$|a(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_3(\lambda_0^h,\lambda_0)\,|\lambda_0^h-\lambda_0|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|\,\|v^h\|\leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0)+\delta_1^h(u_0)),$$
$$|b(\lambda_0^h,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)|\leqslant$$
$$\leqslant\beta_3(\lambda_0^h,\lambda_0)\,|\lambda_0^h-\lambda_0|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|\,\|v^h\|\leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0)+\delta_1^h(u_0)),$$
$$|b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0-u_0,v^h)|\leqslant\beta_2(\lambda_0)\,\|P_h(\lambda_0)u_0-u_0\|\,\|v^h\|\leqslant c\,\varepsilon_h(u_0).$$

В результате получим

$$\nu_h(u) = \sup_{v^h \in V_h,\, \|v^h\|=1} |a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)).$$

Установим теперь оценку $\|z^h\| \leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0))$. Имеют место соотношения

$$a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, z^h) = a_h(\lambda_0^h, z^h, z^h), \quad b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, z^h) = b_h(\lambda_0^h, z^h, z^h),$$
$$a_h(\lambda_0^h, z^h, z^h) \geqslant \gamma_1^h(\lambda_0^h) b_h(\lambda_0^h, z^h, z^h),$$

с помощью которых находим

$$\|z^h\|\,\nu_h(u_0) \geqslant a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, z^h) - b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, z^h) =$$
$$= a_h(\lambda_0^h, z^h, z^h) - b_h(\lambda_0^h, z^h, z^h) \geqslant \frac{\gamma_1^h(\lambda_0^h) - 1}{\gamma_1^h(\lambda_0^h)} a_h(\lambda_0^h, z^h, z^h) \geqslant c^{-1}\,\|z^h\|^2.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка.

Теперь, применяя установленные оценки, имеем

$$\|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\| = \|z^h\| \leqslant c\,\nu_h(u_0) \leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)).$$

Далее, используя оценки

$$\big|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0^h)}\big| \leqslant \frac{\big|\|P_h(\lambda_0)u_0\|^2_{b_h(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|^2_{b_h(\lambda_0^h)}\big|}{\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} + \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0^h)}} \leqslant$$
$$\leqslant c\,|\lambda_0^h - \lambda_0| \leqslant c\,[\delta_2^h(u_0) + (\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0))^2] \leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)),$$
$$\big|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)}\big| \leqslant \frac{\big|\|P_h(\lambda_0)u_0\|^2_{b(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|^2_{b_h(\lambda_0)}\big|}{\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} + \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)}} \leqslant c\,\delta_1^h(u_0),$$
$$\|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} \leqslant c\,\varepsilon_h(u_0), \quad \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)),$$

получаем соотношения

$$\xi_0^h = \xi_0^h \|w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} = \|\xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \leqslant$$
$$\leqslant \|u_0\|_{b(\lambda_0)} + \|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} + \big|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0^h)}\big| +$$
$$+ \big|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)}\big| + \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \leqslant 1 + c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)),$$
$$\xi_0^h = \xi_0^h \|w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} = \|\xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \geqslant$$
$$\geqslant \|u_0\|_{b(\lambda_0)} - \|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} - \big|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0^h)}\big| -$$
$$- \big|\,\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)}\big| - \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \leqslant 1 - c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)).$$

Следовательно, $|1 - \xi_0^h| \leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0))$.

В итоге приходим ко второй оценке теоремы:

$$\sqrt{\overline{\alpha}_1(\lambda_0^h)}\|u_0^h - P_h(\lambda_0)u_0\| \leqslant \|P_h(\lambda_0)u_0 - w_0^h\|_{a_h(\lambda_0^h)} \leqslant$$

$$\leqslant \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{a_h(\lambda_0^h)} + \|w_0^h - \xi_0^h w_0^h\|_{a_h(\lambda_0^h)} =$$

$$= \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{a_h(\lambda_0^h)} + |1-\xi_0^h| \leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)),$$

$$\|u_0^h - u_0\| \leqslant \|u_0^h - P_h(\lambda_0)u_0\| + \|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\| \leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)).$$

Теорема доказана.

3. МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

В пространстве V_h зададим базис $\varphi_j,\ j=\overline{0,N}$. Положим $\mathbb{H}=\mathbb{R}^{N+1}$. Определим симметричные квадратные матрицы $A(\eta)$ и $B(\eta)$ порядка $N+1$ с элементами $a_{ij}(\eta)=a_h(\eta,\varphi_i,\varphi_j)$, $b_{ij}(\eta)=b_h(\eta,\varphi_i,\varphi_j)$, $i,j=\overline{0,N}$, $\eta\in\Lambda$. Согласно условиям B.2 и B.3 матрицы $A(\eta)$ и $B(\eta)$ являются симметричными положительно определёнными матрицами с элементами, непрерывно зависящими от параметра $\eta\in\Lambda$.

В этом пункте для краткости будем опускать индекс h в обозначениях собственных значений $\lambda_0=\lambda_0^h,\ \gamma_k=\gamma_k(\eta)=\gamma_k^h(\eta),\ k=\overline{0,N}$, конечномерных задач (4) и (5).

Конечномерная задача (4) эквивалентна следующей матричной задаче на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра:

$$\lambda\in\Lambda,\quad y\in\mathbb{H}\setminus\{0\}:\quad A(\lambda)y=B(\lambda)y. \tag{8}$$

Число λ, удовлетворяющее уравнению (8), называется *собственным значением задачи* (8), а вектор y — соответствующим *собственным вектором.* Для фиксированного $\eta\in\Lambda$ конечномерная задача (5) эквивалентна следующей матричной задаче на собственные значения:

$$\gamma(\eta)\in\mathbb{R},\quad z\in\mathbb{H}\setminus\{0\}:\quad A(\eta)z=\gamma(\eta)B(\eta)z. \tag{9}$$

Существуют собственные значения $\gamma_k=\gamma_k(\eta)$, $k=\overline{0,N}$, $0<\gamma_0\leqslant\gamma_1\leqslant\ldots\leqslant\gamma_N$, параметрической задачи (9) и соответствующие собственные векторы $z^{(k)}=z^{(k)}(\eta),\ k=\overline{0,N},\ (A(\eta)z^{(i)},z^{(j)})=$ $=\gamma_i\delta_{ij},\ (B(\eta)z^{(i)},z^{(j)})=\delta_{ij},\ i,j=\overline{0,N}$.

Пусть выполнены условия A.1–A.9, B.2, B.3, B.5 и $\gamma_0(\tau+0)>1$. Тогда по теореме 2 существует положительное минимальное собственное значение $\lambda_0,\ \gamma_0(\lambda_0)=1$, задачи (8), соответствующее нормированному собственному вектору $y^{(0)}=z^{(0)}(\lambda_0),\ (A(\lambda_0)y^{(0)},y^{(0)})=1$, $(B(\lambda_0)y^{(0)},y^{(0)})=1$. Согласно теоремам 1 и 3 для достаточно малых h собственное значение λ_0 является простым.

Предположим, что функция $\gamma_0(\eta)$, $\eta\in\Lambda$, является убывающей в некоторой окрестности точки λ_0. Обозначим через μ_1 минимальный корень уравнения $\gamma_0(\eta)=1,\ \eta\in(\lambda_0,\infty)$, если этот корень существует, иначе полагаем $\mu_1=\infty$. Обозначим через λ_1 минимальный корень уравнения $\gamma_1(\eta)=1,\ \eta\in\Lambda$, если этот корень существует, иначе полагаем $\lambda_1=\infty$. Положим $\varkappa=\min\{\mu_1-\lambda_0,\lambda_1-\lambda_0\},\ M=(\tau,\lambda_0+\varkappa)$.

Лемма. *Для произвольной симметричной квадратной матрицы C порядка $N+1$ найдётся обратимая матрица G такая, что $G^\top CG=D$, $D=\operatorname{diag}\{E_p,-E_q,O_r\}$, где E_n и O_n — единичная и нулевая матрицы порядка n, $p+q+r=N+1$. Тройка чисел (p,q,r) определяется лишь матрицей C и называется инерцией матрицы C. Числа p, q и r равны соответственно количеству положительных, отрицательных и нулевых собственных значений матрицы C.*

Доказательство леммы приведено, например, в книге [9, с. 318].

В следующей теореме развиваются результаты работ [10–12].

Теорема 5. *Пусть для фиксированного числа* $\eta \in M$ *имеет место треугольное разложение* $A(\eta) - B(\eta) = L(\eta)D(\eta)L^\top(\eta)$, *где* $D(\eta)$ — *диагональная матрица,* $L(\eta)$ — *нижняя треугольная матрица с единичными диагональными элементами. Тогда выполняются соотношения* $q(A(\eta) - B(\eta)) = q(\Delta - \eta E) = q(D(\eta))$, *где* E — *единичная матрица порядка* $N+1$, $q(C)$ — *количество отрицательных собственных значений матрицы* C, $\Delta = \mathrm{diag}\{\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa, \ldots, \lambda_0 + \varkappa\}$ — *диагональная матрица порядка* $N+1$.

Доказательство. По сформулированной лемме справедливо соотношение $q(A(\eta) - B(\eta)) = q(D(\eta))$ при $\eta \in M$. Через $Q = (z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots, z^{(N)})$ обозначим квадратную матрицу со столбцами $z^{(k)} = z^{(k)}(\eta)$, $k = \overline{0, N}$, при фиксированном $\eta \in M$. Тогда $Q^\top B(\eta) Q = E$, $Q^\top A(\eta) Q = \Delta(\eta)$, $\Delta(\eta) = \mathrm{diag}\{\gamma_0(\eta), \gamma_1(\eta), \ldots, \gamma_N(\eta)\}$, где $\gamma_i(\eta)$, $i = \overline{0, N}$, — собственные значения линейной параметрической задачи на собственные значения (9) при фиксированном $\eta \in M$, соответствующие собственным векторам $z^{(k)} = z^{(k)}(\eta)$, $k = \overline{0, N}$. Матрица Q имеет обратную, поскольку столбцы матрицы линейно независимы. Следовательно, применяя лемму и равенство $Q^\top (A(\eta) - B(\eta)) Q = \Delta(\eta) - E$, находим $q(A(\eta) - B(\eta)) = q(\Delta(\eta) - E)$, $\eta \in M$.

Чтобы обосновать соотношение $q(\Delta(\eta) - E) = q(\Delta - \eta E)$, $\eta \in M$, выделим следующие возможности.

1. Пусть $\lambda_0 < \eta < \lambda_0 + \varkappa$. Установим равенства $q(\Delta(\eta) - E) = q(\Delta - \eta E) = 1$. Из соотношений $\gamma_0(\eta) - 1 < \gamma_0(\lambda_0) - 1 = 0$, $\gamma_i(\eta) - 1 \geqslant \gamma_1(\eta) - 1 \geqslant 0$, $i = \overline{1, N}$, выводим $q(\Delta(\eta) - E) = 1$, $q(\Delta - \eta E) = 1$. Отсюда требуемое соотношение доказано.

2. Пусть $\tau < \eta \leqslant \lambda_0$. Проверим соотношения $q(\Delta(\eta) - E) = q(\Delta - \eta E) = 0$. Имеют место неравенства $\gamma_i(\eta) - 1 \geqslant \gamma_0(\eta) - 1 \geqslant \gamma_0(\lambda_0) - 1 = 0$, $i = \overline{0, N}$, из которых находим $q(\Delta(\eta) - E) = 0$, $q(\Delta - \eta E) = 0$, что даёт требуемое соотношение. Теорема доказана.

Согласно теореме 5 выводим, что число собственных значений задачи (8), меньших заданного числа $\eta \in M$, равно количеству отрицательных компонент $q(D(\eta))$ диагональной матрицы $D(\eta)$ из треугольного разложения теоремы 5. Чтобы найти числа $q(D(\eta))$, можно применить метод исключения Гаусса, тогда $q(D(\eta))$ будет числом отрицательных ведущих элементов гауссова исключения неизвестных, применённого к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей $A(\eta) - B(\eta)$ [13, с. 50]. Изложенный способ деления спектра и метод деления отрезка пополам дают возможность вычислить с заданной точностью минимальное собственное значение λ_0 задачи (8). Этот подход позволяет эффективно решать задачи сравнительно небольшой размерности. Для решения задач высокой размерности более предпочтительны излагаемые далее методы, обобщающие на более широкий класс нелинейных задач на собственные значения методы работы [4].

Зададим при фиксированном $\eta \in \Lambda$ симметричную положительно определённую матрицу $C(\eta)$ порядка $N+1$, для которой известны постоянные $\delta_0(\eta)$ и $\delta_1(\eta)$, $0 < \delta_0(\eta) \leqslant \delta_1(\eta)$, такие, что $\delta_0(\eta)(C(\eta)z, z) \leqslant (A(\eta)z, z) \leqslant \delta_1(\eta)(C(\eta)z, z)$, $z \in \mathbb{H}$. Для $\eta \in \Lambda$ обозначим $\|z\|^2_{B(\eta)} = (B(\eta)z, z)$, $z \in \mathbb{H}$. В следующих алгоритмах применяется QR-разложение [14, с. 115].

Метод 1. *Метод простой итерации.* Построим последовательности η^n, x^n, $n = 0, 1, \ldots$, согласно следующему алгоритму: зададим вектор y^0, вычислим минимальный корень η^0 уравнения $R(\eta^0, y^0) = 1$, найдём вектор $x^0 = y^0 / \|y^0\|_{B(\eta^0)}$. Для $n = 0, 1, \ldots$ выполним следующие действия: вычислим параметр $\tau^n = 2/(\delta_0(\eta^n) + \delta_1(\eta^n))$, найдём вектор $z^n = C(\eta^n)^{-1}(A(\eta^n) - B(\eta^n))x^n$, вычислим вектор $y^{n+1} = x^n - \tau^n z^n$ и минимальный корень η^{n+1} уравнения $R(\eta^{n+1}, y^{n+1}) = 1$, найдём вектор $x^{n+1} = y^{n+1} / \|y^{n+1}\|_{B(\eta^{n+1})}$.

Метод 2. *Метод наискорейшего спуска.* Построим последовательности η^n, x^n, $n = 0, 1, \ldots$, согласно следующему алгоритму: зададим вектор y^0, вычислим минимальный корень η^0 уравнения $R(\eta^0, y^0) = 1$, найдём вектор $x^0 = y^0 / \|y^0\|_{B(\eta^0)}$. Для $n = 0, 1, \ldots$ выполним следующие действия: найдём вектор $z^n=C(\eta^n)^{-1}(A(\eta^n)-B(\eta^n))x^n$, сформируем матрицу Y_n со столбцами x^n и z^n, построим QR-разложение $Y_n=Q_nR_n$, вычислим минимальный корень η^{n+1} уравнения $\psi_n(\eta^{n+1})=1$ и вектор $v_n(\eta^{n+1})$, где $\psi_n(\eta)$ и $v_n(\eta)$ — минимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор задачи $Q_n^\top A(\eta)Q_nv_n(\eta)=\psi_n(\eta)Q_n^\top B(\eta)Q_nv_n(\eta)$, определим вектор $y^{n+1}=Q_nv_n(\eta^{n+1})$, найдём вектор $x^{n+1}=y^{n+1}/\|y^{n+1}\|_{B(\eta^{n+1})}$.

Метод 3. *Локально оптимальный метод сопряжённых градиентов.* Построим последовательности η^n, x^n, $n=0,1,\ldots$, согласно следующему алгоритму: зададим вектор y^0, вычислим минимальный корень η^0 уравнения $R(\eta^0,y^0)=1$, найдём вектор $x^0=y^0/\|y^0\|_{B(\eta^0)}$. Для $n=0$ выполним следующие действия: найдём вектор $z^n=C(\eta^n)^{-1}(A(\eta^n)-B(\eta^n))x^n$, сформируем матрицу Y_n со столбцами x^n и z^n, построим QR-разложение $Y_n=Q_nR_n$, вычислим минимальный корень η^{n+1} уравнения $\psi_n(\eta^{n+1})=1$ и вектор $v_n(\eta^{n+1})$, где $\psi_n(\eta)$ и $v_n(\eta)$ — минимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор задачи $Q_n^\top A(\eta)Q_nv_n(\eta)=\psi_n(\eta)Q_n^\top B(\eta)Q_nv_n(\eta)$, определим вектор $y^{n+1}=Q_nv_n(\eta^{n+1})$, найдём вектор $x^{n+1}=y^{n+1}/\|y^{n+1}\|_{B(\eta^{n+1})}$. Для $n=1,2,\ldots$ выполним следующие действия: найдём вектор $z^n=C(\eta^n)^{-1}(A(\eta^n)-B(\eta^n))x^n$, сформируем матрицу Y_n со столбцами x^{n-1}, x^n и z^n, построим QR-разложение $Y_n=Q_nR_n$, вычислим минимальный корень η^{n+1} уравнения $\psi_n(\eta^{n+1})=1$ и вектор $v_n(\eta^{n+1})$, где $\psi_n(\eta)$ и $v_n(\eta)$ — минимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор задачи $Q_n^\top A(\eta)Q_nv_n(\eta)=\psi_n(\eta)Q_n^\top B(\eta)Q_nv_n(\eta)$, определим вектор $y^{n+1}=Q_nv_n(\eta^{n+1})$, найдём вектор $x^{n+1}=y^{n+1}/\|y^{n+1}\|_{B(\eta^{n+1})}$.

Теорема 6. *Пусть последовательности η^n, x^n, $n=0,1,\ldots$, вычислены по одному из методов 1–3, $\eta^0<\lambda_0+\varkappa$. Тогда имеет место сходимость $\eta^n\to\lambda_0$, $x^n\to y^{(0)}$, $(x^n,y^{(0)})>0$, при $n\to\infty$, и справедливы неравенства $\lambda_0\leqslant\ldots\leqslant\eta^n\leqslant\ldots\leqslant\eta^1\leqslant\eta^0<\lambda_0+\varkappa$.*

Доказательство. Докажем сходимость метода 1. Для заданного вектора $v^0\in\mathbb{H}$, $\|v^0\|_{B(\eta)}=1$, определим вектор $v^1\in\mathbb{H}$ и числа ν^0 и ν^1 при фиксированном параметре $\eta\in\Lambda$ по формулам

$$\widetilde{v}^1=v^0-\tau^0w^0,\quad \tau^0=\frac{2}{\delta_0(\eta)+\delta_1(\eta)},\quad w^0=C(\eta)^{-1}(A(\eta)-\nu^0B(\eta))v^0,$$

$$v^1=\frac{\widetilde{v}^1}{\|\widetilde{v}^1\|_{B(\eta)}},\quad \nu^0=R(\eta,v^0),\quad \nu^1=R(\eta,v^1).$$

Пусть $\gamma_0(\eta)$ и $\gamma_1(\eta)$ — собственные значения параметрической задачи (9) при $\eta\in M$, $\gamma_0(\eta)<\gamma_1(\eta)$. Предположим, что $\nu^0<\gamma_1(\eta)$. Тогда согласно [15] справедливы неравенства $\gamma_0(\eta)\leqslant\nu^1\leqslant\nu^0$ и выполняется оценка

$$\frac{\nu^1-\gamma_0(\eta)}{\gamma_1(\eta)-\nu^1}\leqslant\rho^2(\eta)\frac{\nu^0-\gamma_0(\eta)}{\gamma_1(\eta)-\nu^0},\tag{10}$$

где $0<\rho(\eta)<1$, $\rho(\eta)=1-(1-\xi(\eta))(1-\zeta(\eta))$, $\xi(\eta)=(1-\delta(\eta))/(1+\delta(\eta))$, $\delta(\eta)=\delta_0(\eta)/\delta_1(\eta)$, $\zeta(\eta)=\gamma_0(\eta)/\gamma_1(\eta)$, $\eta\in M$.

Обозначим $\rho_0=1-(1-\xi_0)(1-\zeta_0)$, $\xi_0=(1-d)/(1+d)$,

$$d=\min_{\eta\in[\lambda_0,\lambda_0+\varkappa]}\delta(\eta),\quad \zeta_0=\max_{\eta\in[\lambda_0,\lambda_0+\varkappa]}\zeta(\eta),\quad \eta\in M.$$

Заметим, что $0<d\leqslant1$, $0<\rho_0<1$, $\rho(\eta)\leqslant\rho_0$ при $\eta\in[\lambda_0,\lambda_0+\varkappa]$.

Поскольку $\varphi_{n+1}(\eta)=1$ при $\eta=\eta^{n+1}$ и $\nu^1=\varphi_{n+1}(\eta^n)\leqslant\nu^0=\varphi_n(\eta^n)=1$, то $\eta^{n+1}\leqslant\eta^n$. Также из $\gamma_0(\eta^n)\leqslant\varphi_n(\eta^n)=1$ получим $\lambda_0\leqslant\eta^n$.

Так как $\lambda_0\leqslant\eta^{n+1}\leqslant\eta^n<\lambda_0+\varkappa$, то выполняется неравенство

$$\frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1}\leqslant s_n\,\frac{1-\varphi_{n+1}(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1}+\rho_0^2\,\frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1},\quad s_n=\frac{\gamma_1(\eta^n)-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1},\tag{11}$$

для доказательства которого запишем соотношение

$$\frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1}=\frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1}-\frac{\varphi_{n+1}(\eta^n)-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-\varphi_{n+1}(\eta^n)}+\frac{\varphi_{n+1}(\eta^n)-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-\varphi_{n+1}(\eta^n)}.$$

Из неравенств $\lambda_0\leqslant\eta^{n+1}\leqslant\eta^n<\lambda_0+\varkappa$ получим $\gamma_0(\eta^n)\leqslant 1$, $\gamma_1(\eta^n)>1$, $\gamma_1(\eta^n)-\varphi_{n+1}(\eta^n)>0$. Следовательно, согласно (10) имеем

$$\frac{\varphi_{n+1}(\eta^n)-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-\varphi_{n+1}(\eta^n)}\leqslant\rho_0^2\,\frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1}. \tag{12}$$

Для функции $f(t)=(t-a_0)/(a_1-t)$, $t\in(a_0,a_1)$, при фиксированных a_0 и a_1, $a_0<a_1$, получим $f'(t)=(a_1-a_0)/(a_1-t)^2$, $t\in(a_0,a_1)$. Поэтому существует число $c\in(a,b)$, $a_0\leqslant a\leqslant b\leqslant a_1$, такое, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\leqslant f'(b)(b-a)$. Полагая $a_0=\gamma_0(\eta^n)$, $a_1=\gamma_1(\eta^n)$, $a=\varphi_{n+1}(\eta^n)$, $b=1$, где $b=1=\varphi_{n+1}(\eta^{n+1})\geqslant\varphi_{n+1}(\eta^n)=a$, и используя свойство функции $f(t)$, выводим соотношение

$$\frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1}-\frac{\varphi_{n+1}(\eta^n)-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-\varphi_{n+1}(\eta^n)}\leqslant s_n\frac{1-\varphi_{n+1}(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1},$$

которое с учётом (12) доказывает требуемое неравенство (11).

Докажем, что $\eta^n\to\lambda_0$ при $n\to\infty$. Так как $\eta^{n+1}\leqslant\eta^n$, $n=0,1,\ldots$, то существует число $\xi\in[\lambda_0,\lambda_0+\varkappa)$ такое, что $\eta^n\to\xi$ при $n\to\infty$. Тогда из соотношения $(B(\eta)y,y)\geqslant g(\eta)\|y\|^2$, $y\in\mathbb{H}$, $\eta\in M$, с непрерывной функцией $g(\eta)$, $\eta\in M$, и из условия нормировки $\|x^n\|_{B(\eta^n)}=1$, $n=0,1,\ldots$, выводим существование постоянной $c>0$ такой, что

$$\|x^n\|\leqslant\frac{\|x^n\|_{B(\eta^n)}}{\sqrt{g(\eta^n)}}=\frac{1}{\sqrt{g(\eta^n)}}\leqslant c,\quad n=0,1,\ldots,\quad c=\max_{\eta\in[\lambda_0,\lambda_0+\varkappa]}\frac{1}{\sqrt{g(\eta)}}.$$

Поэтому найдутся вектор $z\in\mathbb{H}$ и подпоследовательность x^{n_i+1}, $i=1,2,\ldots$, такие, что $x^{n_i+1}\to z$ при $i\to\infty$. Сходимость $1-\varphi_{n_i+1}(\eta^{n_i})\to 0$ при $i\to\infty$ вытекает из соотношений $0\leqslant 1-\varphi_{n_i+1}(\eta^{n_i})=$ $=R(\eta^{n_i+1},x^{n_i+1})-R(\eta^{n_i},x^{n_i+1})\to 0$ при $i\to\infty$, где учтено, что $R(\eta^{n_i+1},u^{n_i+1})\to R(\xi,z)$, $R(\eta^{n_i},u^{n_i+1})\to R(\xi,z)$ при $i\to\infty$.

Теперь из соотношения

$$\frac{1-\gamma_0(\eta^{n_i})}{\gamma_1(\eta^{n_i})-1}\leqslant s_{n_i}\,\frac{1-\varphi_{n_i+1}(\eta^{n_i})}{\gamma_1(\eta^{n_i})-1}+\rho_0^2\,\frac{1-\gamma_0(\eta^{n_i})}{\gamma_1(\eta^{n_i})-1}$$

при $i\to\infty$ получим $0\leqslant 1-\gamma_0(\xi)\leqslant\rho_0^2(1-\gamma_0(\xi))$, где $0<\rho_0<1$. Поэтому число $\xi\in[\lambda_0,\lambda_0+\varkappa)$ является корнем уравнения $1-\gamma_0(\xi)=0$ и определяет собственное значение $\xi=\lambda_0$ задачи (8), и справедлива сходимость $\eta^n\to\lambda_0$ при $n\to\infty$.

Так как $x^{n_i+1}\to z$, $1=R(\eta^{n_i+1},x^{n_i+1})=R(\lambda_0,z)=R(\lambda_0,y^{(0)})$ при $i\to\infty$, то

$$1=R(\lambda_0,z)=R(\lambda_0,y^{(0)})=\min_{y\in\mathbb{H}}R(\lambda_0,y).$$

Поэтому $y^{(0)}=z$ является собственным вектором задачи (8), соответствующим собственному значению λ_0. В силу простоты собственного значения λ_0 выводим сходимость для всей последовательности $x^n\to y^{(0)}$, $(x^n,y^{(0)})>0$, при $n\to\infty$. Сходимость методов 2 и 3 вытекает из проведённого доказательства, так как каждый элемент последовательности η^n, $n=0,1,\ldots$, метода 1 не меньше соответствующего элемента последовательности η^n, $n=0,1,\ldots$, вычисленной по методу 2 или 3. Теорема доказана.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Проиллюстрируем приложения абстрактных результатов теорем 1–6 к обобщённой задаче на собственные значения для самосопряжённого эллиптического дифференциального оператора второго порядка с нелинейной зависимостью от спектрального параметра: найти числа λ и ненулевые функции $u(x)$, $x\in\Omega$, такие, что

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i(a_{ij}(\lambda,x)\partial_j u(x))+a_0(\lambda,x)u(x)=b_0(\lambda,x)u(x),\quad x\in\Omega;\qquad u(x)=0,\quad x\in\Gamma,\tag{13}$$

где Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ с непрерывной по Липшицу границей Γ [16, с. 66], $\partial_i=\partial/\partial x_i$, $i=\overline{1,n}$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$. При фиксированном $\eta\in\Lambda$ коэффициенты $a_{ij}(\eta,x)=a_{ji}(\eta,x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $a_0(\eta,x)$, $b_0(\eta,x)$, $x\in\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$, дифференциальной задачи (13) предполагаются заданными измеримыми вещественными функциями, для которых существуют непрерывные положительные функции $\widetilde{\alpha}_1(\eta)$, $\widetilde{\alpha}_2(\eta)$, $\widetilde{\beta}_1(\eta)$, $\widetilde{\beta}_2(\eta)$, $\eta\in\Lambda$, такие, что для п.в. $x\in\overline{\Omega}$

$$\widetilde{\alpha}_1(\eta)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\eta,x)\xi_j\xi_i\leqslant\widetilde{\alpha}_2(\eta)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\in\mathbb{R},$$

$$0\leqslant a_0(\eta,x)\leqslant\widetilde{\alpha}_2(\eta),\quad \widetilde{\beta}_1(\eta)\leqslant b_0(\eta,x)\leqslant\widetilde{\beta}_2(\eta),\tag{14}$$

$\widetilde{\alpha}_2(\eta)/\widetilde{\beta}_1(\eta)\to 0$ при $\eta\to\infty$, $\eta\in\Lambda$. Дополнительно предположим существование непрерывных положительных функций $\widetilde{\alpha}_3(\eta,\mu)$, $\widetilde{\beta}_3(\eta,\mu)$, $\eta,\mu\in\Lambda$, таких, что для п.в. $x\in\overline{\Omega}$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(\eta,x)-a_{ij}(\mu,x))\xi_j\xi_i\right|\leqslant\widetilde{\alpha}_3(\eta,\mu)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\in\mathbb{R},$$

$$|a_0(\eta,x)-a_0(\mu,x)|\leqslant\widetilde{\alpha}_3(\eta,\mu),\quad |b_0(\eta,x)-b_0(\mu,x)|\leqslant\widetilde{\beta}_3(\eta,\mu),\tag{15}$$

$\widetilde{\alpha}_3(\eta,\mu)\to 0$, $\widetilde{\beta}_3(\eta,\mu)\to 0$ при $\eta\to\mu$, $\eta,\mu\in\Lambda$.

Обозначим через $L_2(\Omega)$ вещественное пространство Лебега [16, с. 22] с нормой

$$|v|_0=\left(\int_\Omega (v(x))^2\,dx\right)^{1/2},$$

а через $W_2^1(\Omega)$ — вещественное пространство Соболева [16, с. 44] с нормой

$$\|v\|_1=\left(|v|_0^2+|v|_1^2\right)^{1/2},\quad |v|_1=\left(\sum_{i=1}^{n}|\partial_i v|_0^2\right)^{1/2}.$$

Определим вещественное гильбертово пространство $V=\{v\colon v\in W_2^1(\Omega), v(x)=0, x\in\Gamma\}$ с нормой $\|.\|=|.|_1$. Введём симметричные билинейные формы

$$a(\eta,u,v)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\eta,x)\partial_j u(x)\partial_i v(x)+a_0(\eta,x)u(x)v(x)\right)dx,$$

$$b(\eta,u,v)=\int_\Omega b_0(\eta,x)u(x)v(x)\,dx\tag{16}$$

для произвольных функций $u,v\in V$, $\eta\in\Lambda$.

Обобщённая постановка дифференциальной задачи на собственные значения (13) приводит к следующей вариационной задаче на собственные значения:

$$\lambda \in \Lambda, \quad u \in V \setminus \{0\}: \quad a(\lambda, u, v) = b(\lambda, u, v) \quad \text{для любого } v \in V. \tag{17}$$

Зададим конус K в пространстве V, состоящий из неотрицательных п.в. в области Ω функций $v \in V$. Через B будем обозначать открытый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть G_1 и G_2 — множества из $\mathbb{R}^n$. Множество G_1 называется *компактно вложенным* в множество G_2, если замыкание множества G_1 компактно и содержится во внутренности G_2; при этом используется обозначение $G_1 \Subset G_2$.

Из определения множества $\dot{K}$ согласно условию A.8 выводим, что положительные п.в. на Ω функции принадлежат множеству $\dot{K}$. Введём множество $\overset{*}{K}$, состоящее из функций u множества $\dot{K}$, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{ess.\,inf}_{x \in B} u(x) > 0$ для любого шара $B \Subset \Omega$. Функции из множества $\overset{*}{K}$ являются положительными п.в. функциями, не приближающимися сколь угодно близко к нулю внутри области Ω.

Теорема 7. *Пусть выполнены свойства (14), (15) и* $\gamma_0(\tau + 0) > 1$. *Тогда существует положительное простое минимальное собственное значение* λ_0, $\gamma_0(\lambda_0) = 1$, *задачи (17), соответствующее единственному нормированному положительному собственному элементу* $u_0 \in \overset{*}{K}$, $u_0 = w_0(\lambda_0)$, $a(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$, $b(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$.

Доказательство. Проверим выполнение условий A.1–A.9 для задачи (17).

Условие A.1 выполнено, так как пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$ является векторной решёткой [8, с. 149; 17, с. 203].

Учитывая свойства (14) и (15) на коэффициенты задачи (17) и компактность вложения пространства V в пространство $L_2(\Omega)$, убеждаемся в справедливости условий A.2–A.5.

Условие A.6 проверяется непосредственно с помощью определения (16) билинейной формы $b(\eta, u, v)$ и свойства (14) на коэффициенты задачи. Выполнение условия A.7 следует из [17, с. 203].

Множества $\dot{K}$ и $\overset{*}{K}$ из условий A.8 и A.9 являются непустыми, так как множество $\dot{K}$ содержит непрерывную функцию из V, положительную п.в. в Ω, а множество $\overset{*}{K}$ содержит непрерывную функцию из V, положительную всюду в Ω.

Условие A.9 устанавливается с помощью сильного принципа максимума для дифференциального оператора (13) вариационной задачи (17). Действительно, с помощью замены u на $-u$ из теоремы 8.19 в [18, с. 190] получим следующую формулировку сильного принципа максимума: если $\eta \in \Lambda$, $u \in W_2^1(\Omega)$, $a(\eta, u, v) \geqslant 0$ при произвольной функции $v \in K$ и для некоторого шара $B \Subset \Omega$ справедливо соотношение

$$\operatorname*{ess.\,inf}_{x \in B} u(x) = \operatorname*{ess.\,inf}_{x \in \Omega} u(x) \leqslant 0,$$

то функция u постоянна п.в. в Ω.

Пусть теперь $\eta \in \Lambda$, $u \in K \setminus \{0\}$, $a(\eta, u, v) \geqslant 0$ при произвольной функции $v \in K$. Тогда для любого шара $B \Subset \Omega$ справедливо неравенство $\operatorname{ess.\,inf}_{x \in B} u(x) > 0$. Для доказательства этого неравенства предположим противное, т.е. существует шар $B \Subset \Omega$ такой, что

$$\operatorname*{ess.\,inf}_{x \in B} u(x) = \operatorname*{ess.\,inf}_{x \in \Omega} u(x) = 0.$$

Тогда согласно сильному принципу максимума функция u равна нулю п.в. в Ω. Полученное противоречие устанавливает выполнение условия A.9.

Таким образом, условия A.1–A.9 выполнены для задачи (17), и поэтому результат теоремы 7 следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Пусть Ω — открытый многогранник в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ, $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$. Определим разбиение $\mathcal{T}_h$ множества $\overline{\Omega}$ на симплициальные конечные элементы с равным h максимальным диаметром. Предположим, что выполнены следующие требования [19, с. 48, 55, 61].

Условие C.1. Множество $\overline{\Omega}$ разбито на замкнутые n-симплексы e в пространстве $\mathbb{R}^n$: $\overline{\Omega}=\bigcup_{e\in\mathcal{T}_h} e$.

Условие C.2. Любая грань каждого n-симплекса e_1 является подмножеством границы Γ или гранью другого n-симплекса e_2.

Условие C.3. Найдётся не зависящая от h постоянная σ такая, что $h_e/\rho_e\leqslant\sigma$ для любого $e\in\bigcup_h\mathcal{T}_h$, $h_e=\operatorname{diam}(e)$, $\rho_e=\sup_{B\in\mathcal{B}(e)}\operatorname{diam}(B)$, где $\operatorname{diam}(e)$ — диаметр множества e, $\mathcal{B}(e)$ — множество всех замкнутых шаров из e.

Определим семейство конечномерных подпространств V_h пространства V размерности $N+1$, $N=N_h$, как множество непрерывных функций из пространства V, которые на каждом элементе $e\in\mathcal{T}_h$ являются полиномами степени не выше первой.

Для приближённого вычисления интеграла на конечном элементе e от непрерывной функции $\varphi(x)$, $x\in e$, применим квадратурную формулу [19, с. 181] по центру тяжести элемента $\int_e\varphi(x)\,dx\approx c_e\varphi(x_e)$, где $c_e=\operatorname{meas}(e)$ — мера элемента e, x_e — центр тяжести элемента e. Эта квадратурная формула точна для полиномов степени не выше первой. Обозначим $E_e(\varphi)=\int_e\varphi(x)\,dx-c_e\varphi(x_e)$. Тогда $E_e(\varphi)=0$ для любого полинома $\varphi\in\mathcal{P}_1(e)$, где $\mathcal{P}_1(e)$ — пространство полиномов степени не выше единицы.

Предположим, что для фиксированного $\eta\in\Lambda$ функции $a_{ij}(\eta,x)=a_{ji}(\eta,x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $a_0(\eta,x)$, $b_0(\eta,x)$, $x\in e$, являются непрерывными для каждого элемента $e\in\mathcal{T}_h$. Зададим симметричные билинейные формы $a_h(\eta)\colon V_h\times V_h\to\mathbb{R}$ и $b_h(\eta)\colon V_h\times V_h\to\mathbb{R}$ для произвольных функций $u^h,v^h\in V_h$, $\eta\in\Lambda$, по формулам

$$a_h(\eta,u^h,v^h)=\sum_{e\in\mathcal{T}_h}c_e\biggl(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\eta,x_e)\partial_j u^h(x_e)\partial_i v^h(x_e)+a_0(\eta,x_e)u^h(x_e)v^h(x_e)\biggr),$$

$$b_h(\eta,u^h,v^h)=\sum_{e\in\mathcal{T}_h}c_e b_0(\eta,x_e)u^h(x_e)v^h(x_e).\tag{18}$$

Введём конечномерную задачу на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра:

$$\lambda^h\in\Lambda,\quad u^h\in V_h\setminus\{0\}:\quad a_h(\lambda^h,u^h,v^h)=b_h(\lambda^h,u^h,v^h)\quad\text{для любого } v^h\in V_h.\tag{19}$$

Теорема 8. *Пусть выполнены свойства (14), (15) и $\gamma_0(\tau+0)>1$. Тогда существует положительное минимальное собственное значение λ_0^h, $\gamma_0^h(\lambda_0^h)=1$, задачи (19), соответствующее нормированному собственному элементу $u_0^h=w_0^h(\lambda_0^h)$, $a_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=1$, $b_h(\lambda_0^h,u_0^h,u_0^h)=1$.*

Доказательство. Из свойств (14), (15) и свойств квадратурной формулы выводим справедливость условий B.2, B.3, B.5 билинейных форм (18), поэтому результат теоремы 8 вытекает из теоремы 2. Теорема доказана.

Для элемента $e\in\mathcal{T}_h$ и $i=\overline{0,m}$, $m\geqslant0$, будем использовать обозначения

$$|v|_{0,e}=\biggl(\int\limits_e(v(x))^2\,dx\biggr)^{1/2},\quad \|v\|_{m,e}=\biggl(\sum_{i=0}^m|v|_{i,e}^2\biggr)^{1/2},\quad |v|_{i,e}=\biggl(\sum_{|\alpha|=i}|\partial^\alpha v|_{0,e}^2\biggr)^{1/2},$$

$$|v|_{0,\infty,e}=\operatorname*{ess.\,sup}_{x\in e}|v(x)|,\quad \|v\|_{m,\infty,e}=\max_{i=\overline{0,m}}|v|_{i,\infty,e},\quad |v|_{i,\infty,e}=\max_{|\alpha|=i}|\partial^\alpha v|_{0,\infty,e},$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами α_i, $i=\overline{1,n}$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$, $\partial^\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Будем применять также стандартные обозначения $W_2^2(\Omega)$ и $W_\infty^m(e)$ при $m=1,2$ для функциональных пространств [16, с. 44].

Теорема 9. *Пусть выполнены свойства (14), (15) и $\gamma_0(\tau+0)>1$. Предположим, что для фиксированного $\eta\in\Lambda$ функции $a_{ij}(\eta,x)=a_{ji}(\eta,x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $a_0(\eta,x)$, $b_0(\eta,x)$, $x\in e$, принадлежат пространству $W_\infty^1(e)$ для каждого элемента $e\in\mathcal{T}_h$. Тогда имеют место сходимости $\lambda_0^h\to\lambda_0$ при $h\to 0$, $|u_0^h-u_0|_1\to 0$ при $h\to 0$.*

Доказательство. Из [19, с. 137] следует справедливость условия B.1.

Если $d\in W_\infty^1(e)$, то согласно [20] выполняется оценка $|E_e(d\varphi\psi)|\leqslant ch\,\|d\|_{1,\infty,e}\|\varphi\|_{1,e}\|\psi\|_{0,e}$ для любых $\varphi,\psi\in\mathcal{P}_1(e)$. Поэтому для произвольной функции $v^h\in V_h$ получим

$$|a_h(\eta,v^h,v^h)-a(\eta,v^h,v^h)|=$$

$$=\Bigg|\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{i,j=1}^n E_e(a_{ij}\partial_j v^h\partial_i v^h)+\sum_{e\in\mathcal{T}_h}E_e(a_0v^hv^h)\Bigg|\leqslant\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{i,j=1}^n|E_e(a_{ij}\partial_j v^h\partial_i v^h)|+\sum_{e\in\mathcal{T}_h}|E_e(a_0v^hv^h)|\leqslant$$

$$\leqslant ch\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{i,j=1}^n\|\partial_j v^h\|_{1,e}\,\|\partial_i v^h\|_{0,e}+ch\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\|v^h\|_{1,e}\,\|v^h\|_{0,e}\leqslant ch\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\|v^h\|_{1,e}^2\leqslant ch\,\|v^h\|_1^2\leqslant ch\,|v^h|_1^2,$$

$$|b_h(\eta,v^h,v^h)-b(\eta,v^h,v^h)|=\Bigg|\sum_{e\in\mathcal{T}_h}E_e(b_0v^hv^h)\Bigg|\leqslant ch\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\|v^h\|_{1,e}\,\|v^h\|_{0,e}\leqslant ch\,\|v^h\|_1^2\leqslant ch\,|v^h|_1^2.$$

Тогда выводим

$$\|(a_h(\eta)-a(\eta))|_{V_h\times V_h}\|=\sup_{v^h\in V_h,\ |v^h|_1=1}|a_h(\eta,v^h,v^h)-a(\eta,v^h,v^h)|\leqslant ch,$$

$$\|(b_h(\eta)-b(\eta))|_{V_h\times V_h}\|=\sup_{v^h\in V_h,\ |v^h|_1=1}|b_h(\eta,v^h,v^h)-b(\eta,v^h,v^h)|\leqslant ch.$$

Таким образом, выполнено условие аппроксимации B.4 для приближённых билинейных форм. Результат сходимости теперь вытекает из теоремы 3. Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть выполнены свойства (14), (15), $\gamma_0(\tau+0)>1$ и существует число $\varkappa>0$ такое, что $-\Delta(\lambda_0,\eta)\geqslant c_0>0$ при любом $\eta\in(\lambda_0-\varkappa,\lambda_0)\cup(\lambda_0,\lambda_0+\varkappa)$. Предположим, что $u_0\in W_2^2(\Omega)$, для фиксированного $\eta\in\Lambda$ функции $a_{ij}(\eta,x)=a_{ji}(\eta,x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $a_0(\eta,x)$, $b_0(\eta,x)$, $x\in e$, принадлежат пространству $W_\infty^2(e)$ для каждого элемента $e\in\mathcal{T}_h$, кроме того, существуют непрерывные положительные функции $\overline{\alpha}_3(\eta,\mu)$, $\overline{\beta}_3(\eta,\mu)$, $\eta,\mu\in\Lambda$, такие, что $\widetilde{\alpha}_3(\eta,\mu)=\overline{\alpha}_3(\eta,\mu)\,|\eta-\mu|$, $\widetilde{\beta}_3(\eta,\mu)=\overline{\beta}_3(\eta,\mu)\,|\eta-\mu|$, $\eta,\mu\in\Lambda$. Тогда выполняются оценки погрешности $|\lambda_0^h-\lambda_0|\leqslant ch^2$, $|u_0^h-u_0|_1\leqslant ch$.*

Доказательство. Если $d\in W_\infty^2(e)$, то согласно [20] для любых $\varphi,\psi\in\mathcal{P}_1(e)$ справедлива оценка $|E_e(d\varphi\psi)|\leqslant ch^2\,\|d\|_{2,\infty,e}\|\varphi\|_{1,e}\|\psi\|_{1,e}$. Поэтому для произвольных функций $u^h,v^h\in V_h$ получим

$$|a_h(\lambda_0,u^h,v^h)-a(\lambda_0,u^h,v^h)|=\Bigg|\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{i,j=1}^n E_e(a_{ij}\partial_j u^h\partial_i v^h)+\sum_{e\in\mathcal{T}_h}E_e(a_0u^hv^h)\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{i,j=1}^n|E_e(a_{ij}\partial_j u^h\partial_i v^h)|+\sum_{e\in\mathcal{T}_h}|E_e(a_0u^hv^h)|\leqslant$$

$$\leqslant ch^2\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{i,j=1}^n\|\partial_j u^h\|_{1,e}\,\|\partial_i v^h\|_{1,e}+ch^2\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\|u^h\|_{1,e}\,\|v^h\|_{1,e}\leqslant$$

$$\leqslant ch^2 \sum_{e\in\mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^{n} \|u^h\|_{1,e}\,\|v^h\|_{1,e} + ch^2 \sum_{e\in\mathcal{T}_h} \|u^h\|_{1,e}\,\|v^h\|_{1,e} \leqslant$$

$$\leqslant ch^2 \sum_{e\in\mathcal{T}_h} \|u^h\|_{1,e}\,\|v^h\|_{1,e} \leqslant ch^2\,\|u^h\|_1\,\|v^h\|_1 \leqslant ch^2\,|u^h|_1\,|v^h|_1,$$

$$|b_h(\lambda_0,u^h,v^h)-b(\lambda_0,u^h,v^h)| = \left|\sum_{e\in\mathcal{T}_h} E_e(b_0u^hv^h)\right| \leqslant \sum_{e\in\mathcal{T}_h} |E_e(b_0u^hv^h)| \leqslant$$

$$\leqslant ch^2 \sum_{e\in\mathcal{T}_h} \|u^h\|_{1,e}\,\|v^h\|_{1,e} \leqslant ch^2\,\|u^h\|_1\,\|v^h\|_1 \leqslant ch^2\,|u^h|_1\,|v^h|_1.$$

Отсюда имеем

$$\delta^h_{1a}(u_0) = \sup_{v^h\in V_h,\ |v^h|_1=1} |a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)| \leqslant ch^2,$$

$$\delta^h_{1b}(u_0) = \sup_{v^h\in V_h,\ |v^h|_1=1} |b_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,v^h)| \leqslant ch^2,$$

$$\delta^h_{2a}(u_0) = |a_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)-a(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)| \leqslant ch^2,$$

$$\delta^h_{2b}(u_0) = |b_h(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)-b(\lambda_0,P_h(\lambda_0)u_0,P_h(\lambda_0)u_0)| \leqslant ch^2,$$

$$\delta^h_1(u_0) = \delta^h_{1a}(u_0)+\delta^h_{1b}(u_0) \leqslant ch^2, \quad \delta^h_2(u_0) = \delta^h_{2a}(u_0)+\delta^h_{2b}(u_0) \leqslant ch^2.$$

Здесь было учтено, что $|P_h(\lambda_0)u|_1 \leqslant c$. Действительно, $|u-P_h(\lambda_0)u|_1 \to 0$ при $h\to 0$, тогда $\big|\,|u|_1-|P_h(\lambda_0)u|_1\big| \leqslant |u-P_h(\lambda_0)u|_1 \to 0$ при $h\to 0$, следовательно, $|P_h(\lambda_0)u|_1 \to |u|_1$ при $h\to 0$. Поэтому $|P_h(\lambda_0)u|_1 \leqslant c$.

Согласно [19, с. 136, 147, 148] для $u_0\in W^2_2(\Omega)$ имеем $\varepsilon_h(u_0)\leqslant c\,h$. Следовательно, по теореме 4 имеем $|\lambda^h_0-\lambda_0| \leqslant c[\delta^h_2(u_0)+(\varepsilon_h(u_0)+\delta^h_1(u_0))^2] \leqslant ch^2$, $|u^h_0-u_0|_1 \leqslant c\,(\varepsilon_h(u_0)+\delta^h_1(u_0)) \leqslant ch$. Таким образом, требуемые оценки теоремы доказаны.

Для иллюстрации установленных теоретических результатов приведём результаты численных экспериментов. В задаче (17) с билинейными формами (16) при $n=2$, $\Lambda=(0,\infty)$ возьмём область в виде усечённого квадрата и определим коэффициенты по формулам $a_{11}(\eta,x)=a_{22}(\eta,x)=p(\eta s(x))$, $a_{12}(\eta,x)=a_{21}(\eta,x)=0$, $a_0(\eta,x)=0$, $b_0(\eta,x)=r(\eta s(x))$, $p(\eta)= =0.3(\eta+1)^2$, $r(\eta)=e^\eta$, $s(x)=\cos(x_1)\cos(x_2)$. Полученная задача решалась с помощью схемы (19) на последовательности вложенных сеток уровней $m=\overline{1,8}$. На рис. 1 приведены начальная сетка уровня $m=1$ и сетки последующих уровней $m=2,3$, полученные измельчением сетки предыдущего уровня.

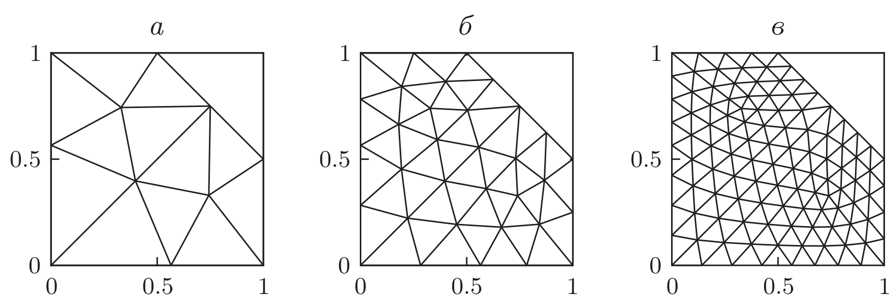

Рис. 1. Вложенные сетки: *а* — $m=1$; *б* — $m=2$; *в* — $m=3$.

На рис. 2 приведён график функции $\gamma_0(\eta)$ и отмечено минимальное собственное значение λ_0, найденное на сетке уровня $m=5$. На рис. 3 показаны изолинии приближённой положительной собственной функции $u_0(x)$ на сетке уровня $m=5$. Порядки сходимости ν_m для минимального собственного значения λ_0 вычислялись по формуле $\nu_m = \log_2\big((\lambda_0^{(m-2)}-\lambda_0^{(m-1)})/(\lambda_0^{(m-1)}-\lambda_0^{(m)})\big)$, где $\lambda_0^{(m)}$ — приближение для минимального собственного значения λ_0 на сетке уровня m. Полученные численные результаты (таблица) показывают хорошее согласование с теоретическими результатами теоремы 10.

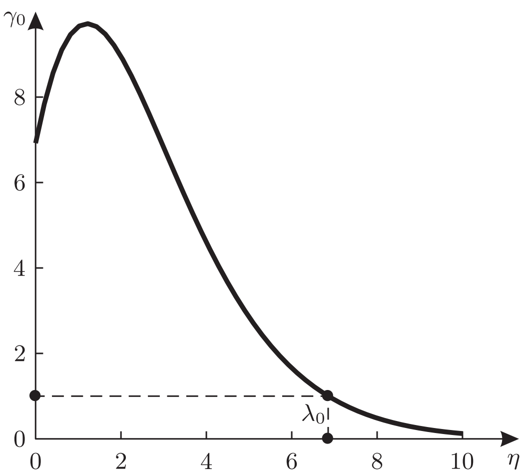

Рис. 2. График функции $\gamma_0(\eta)$.

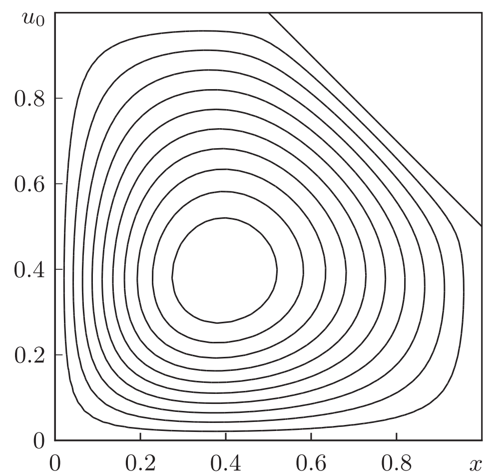

Рис. 3. Изолинии собственной функции $u_0(x)$.

Таблица. Порядки сходимости для разных m

m	3	4	5	6	7	8
$\lambda_0^{(m)}$	6.8887	6.8643	6.8581	6.8565	6.8561	6.8560
ν_m	0.7626	1.8362	1.9580	1.9876	1.9956	1.9981

Графики погрешности итерационных методов 1–3 в зависимости от числа итераций приведены на рис. 4, когда элементы матрицы $C(\eta)=C$ порядка $N+1$ выбирались по формуле

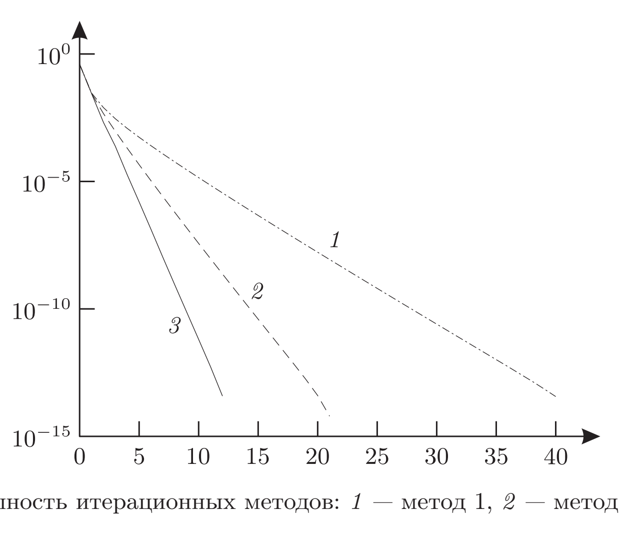

Рис. 4. Погрешность итерационных методов: *1* — метод 1, *2* — метод 2, *3* — метод 3.

$c_{ij} = c_h(\varphi_i, \varphi_j)$, $i, j = \overline{0, N}$, $\eta \in \Lambda$, для билинейной формы $c_h\colon V_h \times V_h \to \mathbb{R}$, задаваемой при произвольных функциях $u^h, v^h \in V_h$ по правилу

$$c_h(u^h, v^h) = \sum_{e \in \mathcal{T}_h} c_e \sum_{i=1}^{n} \partial_i u^h(x_e) \partial_i v^h(x_e),$$

φ_i, $i = \overline{0, N}$, — базисные функции пространства V_h [19, с. 63]. Численные эксперименты демонстрируют однозначное превосходство итерационного метода 3 по скорости сходимости.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания и предложения по улучшению оформления результатов статьи.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллин, И.Ш. Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения / И.Ш. Абдуллин, В.С. Желтухин, Н.Ф. Кашапов. — Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 2000. — 348 с.
2. Соловьев, С.И. Аппроксимация вариационных задач на собственные значения / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1022–1032.
3. Соловьев, С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.
4. Solov'ëv, S.I. Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems / S.I. Solov'ëv // Linear Algebra Appl. — 2006. — V. 41, № 1. — P. 210–229.
5. Богатов, Е.М. Об истории положительных операторов (1900-е—1960-е гг.) и вкладе М.А. Красносельского / Е.М. Богатов // Прикл. математика & Физика. — 2020. — Т. 52, № 2. — С. 105–127.
6. Вулих, Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. — М. : Наука, 1967. — 416 с.
7. Gazzola, F. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains / F. Gazzola, H.-C. Grunau, G. Sweers. — Berlin : Springer, 2010. — 423 p.
8. Bátkai, A. Positive operator semigroups. From finite to infinite dimensions / A. Bátkai, M.K. Fijavž, A. Rhandi. — Cham : Springer, 2017. — 364 p.
9. Воеводин, В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин. — М. : Наука, 1980. — 400 с.
10. Dautov, R.Z. The bisection method for symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly / R.Z. Dautov, A.D. Lyashko, S.I. Solov'ev // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 1994. — V. 9, № 5. — P. 417–427.
11. Samsonov, A.A. The bisection method for solving the nonlinear bar eigenvalue problem / A.A. Samsonov, P.S. Solov'ev, S.I. Solov'ev // J. Phys.: Conf. Ser. — 2019. — V. 1158. — Art. 042011.
12. Samsonov, A.A. Spectrum division for eigenvalue problems with nonlinear dependence on the parameter / A.A. Samsonov, P.S. Solov'ev, S.I. Solov'ev // J. Phys.: Conf. Ser. — 2019. — V. 1158. — Art. 042012.
13. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 552 с.
14. Парлетт, Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Б. Парлетт. — М. : Мир, 1983. — 384 с.
15. Knyazev, A.V. A geometric theory for preconditioned inverse iteration III: a short and sharp convergence estimate for generalized eigenvalue problems / A.V. Knyazev, K. Neymeyr // Linear Algebra Appl. — 2003. — V. 358, № 1–3. — P. 95–114.
16. Adams, R.A. Sobolev spaces / R.A. Adams. — New York : Academic Press, 1975. — 268 p.
17. Sauvigny, F. Partial Differential Equations 2. Functional Analytic Methods / F. Sauvigny. — London : Springer-Verlag, 2012. — 453 p.

18. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер ; пер. с англ. Л.Н. Купцова ; под ред. А.К. Гущина. — М. : Наука, 1989. — 464 с.
19. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле ; пер. с англ. Б.И. Квасова. — М. : Мир, 1980. — 512 с.
20. Banerjee, U. Estimation of the effect of numerical integration in finite element eigenvalue approximation / U. Banerjee, J.E. Osborn // Numer. Math. — 1990. — V. 56. — P. 735–762.

COMPUTATION OF THE LEADING EIGENVALUE AND THE CORRESPONDING EIGENELEMENT OF EIGENVALUE PROBLEMS WITH NONLINEAR DEPENDENCE ON THE SPECTRAL PARAMETER

P. S. Solov'ev[1], S. I. Solov'ev[2]

Kazan (Volga region) Federal University, Russia
e-mail: [1]pavel.solovev.kpfu@mail.ru, [2]sergey.solovev.kpfu@mail.ru

The paper studies the symmetric eigenvalue problem with nonlinear dependence on the spectral parameter in a Hilbert space which is a vector lattice with a cone of positive elements. The existence of a positive simple minimum eigenvalue corresponding to a single normalised positive eigenelement is established. The approximation of the problem in a finite-dimensional subspace is investigated. Results on the convergence and error of approximations to the minimum eigenvalue and the corresponding positive eigenelement are obtained. Computational methods for solving matrix eigenvalue problems with nonlinear dependence on the spectral parameter are developed and justified. The results of numerical experiments illustrating theoretical conclusions are given.

Keywords: eigenvalue, positive eigenelement, eigenvalue problem, Hilbert space, vector lattice, cone, finite-dimensional approximation, iterative method, finite element method.

REFERENCES

1. Abdullin, I.Sh., Zheltukhin, V.S., and Kashapov, N.F., *Vysokochastotnaya plazmenno-struinaya obrabotka materialov pri ponizhennykh davleniyakh. Teoriya i praktika primeneniya* (Radio-Frequency Plasma-Jet Processing of Materials at Reduced Pressures. Theory and Practice of Application), Kazan: Izd. Kazan. Univ., 2000.
2. Solov'ev, S.I., Approximation of variational eigenvalue problems, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1030–1041.
3. Solov'ev, S.I., Approximation of nonlinear spectral problems in the Hilbert space, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 934–947.
4. Solov'ëv, S.I., Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems, *Linear Algebra Appl.*, 2006, vol. 415, no. 1, pp. 210–229.
5. Bogatov, E.M., On the history of the positive operators (1900s—1960s) and the contribution of M.A. Krasnosel'skii, *Applied Mathematics & Physics*, 2020, vol. 52, no. 2, pp. 105–127.
6. Vulikh, B.Z., *Vvedenie v funktsional'nyi analiz* (Introduction to Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1967.
7. Gazzola, F., Grunau, H.-C., and Sweers, G., *Polyharmonic Boundary Value Problems. Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*, Berlin: Springer, 2010.
8. Bátkai, A., Fijavž, M.K., and Rhandi, A., *Positive Operator Semigroups. From Finite to Infinite Dimensions*, Cham: Springer, 2017.
9. Voevodin, V.V., *Lineinaya algebra* (Linear Algebra), Moscow: Nauka, 1980.
10. Dautov, R.Z., Lyashko, A.D., and Solov'ev, S.I., The bisection method for symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 1994, vol. 9, no. 5, pp. 417–427.
11. Samsonov, A.A., Solov'ev, P.S., and Solov'ev, S.I., The bisection method for solving the nonlinear bar eigenvalue problem, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, art. 042011.
12. Samsonov, A.A., Solov'ev, P.S., and Solov'ev, S.I., Spectrum division for eigenvalue problems with nonlinear dependence on the parameter, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, art. 042012.
13. Gantmakher, F.R., *Teoriya matrits* (Theory of Matrices), Moscow: Nauka, 1988.
14. Parlett, B., *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1980.

15. Knyazev, A.V. and Neymeyr, K., A geometric theory for preconditioned inverse iteration III: a short and sharp convergence estimate for generalized eigenvalue problems, *Linear Algebra Appl.*, 2003, vol. 358, no. 1–3, pp. 95–114.
16. Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.
17. Sauvigny, F., *Partial Differential Equations 2. Functional Analytic Methods*, London: Springer-Verlag, 2012.
18. Gilbarg, D. and Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Heidelberg: Springer, 1977.
19. Ciarlet P.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Amsterdam: North Holland, 1978.
20. Banerjee, U. and Osborn, J.E., Estimation of the effect of numerical integration in finite element eigenvalue approximation, *Numer. Math.*, 1990, vol. 56, pp. 735–762.