

УДК 519.63

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОНСЕРВАТИВНОСТЬ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ПОДВИЖНЫХ И ФИКСИРОВАННЫХ СЕТКАХ

© А. О. Гусев¹, О. С. Мажорова²*Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва**e-mail: ¹aogus@mail.ru, ²olgamazhor@mail.ru**Поступила в редакцию 02.03.2024 г., после доработки 02.03.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Предложена консервативная разностная схема для уравнения теплопроводности в двумерной области с подвижными границами. Изложение ведётся на примере двухфазной задачи Стефана. С помощью динамической замены переменных область с внутренней подвижной границей отображается в прямоугольную область с фиксированными границами, совпадающими с координатными линиями. Разностная схема построена с помощью интегро-интерполяционного метода на неподвижной прямоугольной сетке. Получены формулы, позволяющие вычислять якобиан замены переменных и скорость границы контрольного объёма, удовлетворяющие дискретному аналогу уравнения переноса якобиана и обеспечивающие выполнение геометрического закона сохранения в физической системе координат. Доказано, что предложенная разностная схема наследует основные свойства исходной дифференциальной задачи.

Ключевые слова: задача с подвижной границей, геометрическая консервативность, подвижная сетка, метод выпрямления фронта, фазовый переход.

DOI: 10.31857/S0374064124070059, EDN: KNLGXC

ВВЕДЕНИЕ

Тепломассоперенос в областях с подвижными границами играет важную роль во многих физико-химических процессах. Большое разнообразие задач, исследование которых предполагает совместное решение уравнений переноса и уравнений, описывающих движение границы, стимулирует разработку и исследование различных методов их численного решения. Центральное место здесь занимают конечно-разностные алгоритмы, в которых подвижная граница выделяется явным образом и определяется положением закреплённых на ней узлов сетки. Уравнения, описывающие эволюцию системы, аппроксимируются либо в физической системе координат на подвижной сетке, согласованной с формой границы, либо в специальной системе координат, в которой расчётная область имеет фиксированные границы, совпадающие с координатными линиями. На уровне постановки дифференциальной задачи эти подходы эквивалентны.

На подвижных неортогональных сетках конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений, описывающих процессы переноса массы, энергии и импульса, строятся, как правило, с помощью интегро-интерполяционного метода (метод контрольного объёма) [1, § 12.4]. В рамках данного подхода процесс построения дискретной модели сводится к вычислению потоков искомых величин в центрах границ контрольного объёма. При этом требуется вычислять значения сеточных функций и их производных в узлах, в которых

они не определены. Интерполяцию соответствующих величин необходимо осуществлять таким образом, чтобы на разностном уровне выполнялись различные формы записи законов сохранения и основные свойства (кососимметричность конвективных членов, самосопряжённость и отрицательная определённость диссипативных членов и т.д.), присущие исходной дифференциальной задаче.

На подвижных сетках, наряду с законами сохранения массы, импульса и энергии, в дискретной среде необходимо обеспечить выполнение закона сохранения площади элементарного объёма — соотношения, связывающего изменение площади расчётной ячейки со скоростью движения её границ. В работах [2–4] показано, что нарушение геометрического закона сохранения приводит к возникновению в сеточных уравнениях схемных источников/стоков внутренней и кинетической энергии, массы и т.д. В расчётах на подвижных сетках скорости движения границ ячейки аппроксимируются таким образом, чтобы в дискретной среде выполнялся закон сохранения площади (см., например, [5–7]). На неподвижной сетке в области, полученной в результате нестационарного преобразования системы координат, математическая модель дополняется уравнением переноса якобиана, обеспечивающим выполнение закона сохранения площади в исходной системе координат. При этом сеточный аналог уравнения переноса якобиана решается совместно с уравнениями, описывающими процессы переноса энергии, импульса и массы в дискретной среде (см., например, [8–11]).

Выполнение закона сохранения площади ячейки играет ключевую роль при моделировании фазовых переходов. В статье [12] на примере модельной задачи о кристаллизации бинарного соединения показано, что в случае нарушения этого закона полученная в расчётах масса кристаллизовавшегося вещества может более чем на 50% отличаться от истинного значения.

В настоящей работе в двумерном приближении рассмотрена задача о фазовом переходе в чистом веществе в области переменной ширины. Математическая модель учитывает процессы теплопереноса в твёрдой и жидкой фазах, движение фронта кристаллизации и выделение теплоты на нём. Для решения задачи с внутренней подвижной границей, положение которой необходимо определять в ходе решения задачи, применяется модификация метода выпрямления фронта [13]. Уравнения, полученные в результате преобразования системы координат, аппроксимируются на фиксированной сетке. Построена консервативная разностная схема, в которой выполнен дискретный аналог закона сохранения внутренней энергии. Формулы для вычисления скорости движения границы ячейки получены из закона сохранения площади восьмиугольного в физической области контрольного объёма. Для этого была использована дискретная замена переменных. Вычисленные таким образом скорости удовлетворяют неявной аппроксимации уравнения переноса якобиана.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачу о фазовом переходе в чистом веществе рассмотрим в области переменной ширины $\Omega(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \in [0, g(y)], y \in [0, L]\}$ в декартовой системе координат Oxy . Здесь $x = g(y)$ — боковая граница области, прямая $x = 0$ является осью симметрии. Твёрдая фаза находится в подобласти $\Omega^0(t, x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \in [0, g(y)], y \in [0, f(t, x)]\}$, жидкая — в подобласти $\Omega^1(t, x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \in [0, g(y)], y \in [f(t, x), L]\}$, где $y = f(t, x)$ — граница раздела фаз, положение которой изменятся в ходе процесса (рис. 1).

Твёрдая и жидкая фазы имеют одинаковые плотности $\rho^{\text{cr}} = \rho^{\text{li}} = \rho$ и удельные теплоёмкости $c_p^{\text{cr}} = c_p^{\text{li}} = c_p$ и различные коэффициенты теплопроводности — k^{cr} и k^{li} соответственно.

Распределение температуры в области описывается уравнением теплопроводности

$$\partial_t T = \nabla \cdot (\varkappa \nabla T). \quad (1)$$

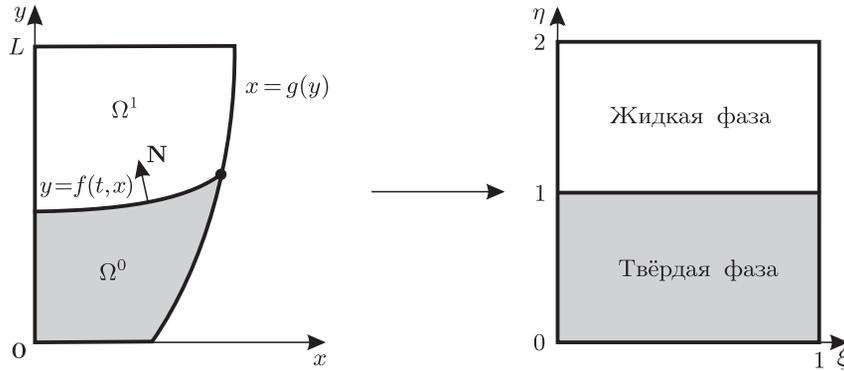


Рис. 1. Преобразование системы координат.

Здесь $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_t = \partial/\partial t$. Коэффициент температуропроводности является кусочно-постоянной функцией: $\kappa(x, y) = \kappa^{cr}$ при $(x, y) \in \Omega^1$, $\kappa(x, y) = \kappa^0$ при $(x, y) \in \Omega^0$, где $\kappa^{cr} = k^{cr}/(c_p \rho)$ и $\kappa^0 = k^0/(c_p \rho)$.

На межфазной границе температура равна температуре фазового перехода

$$T|_{y=f(t,x)} = T_{\text{melt}} \tag{2}$$

и выполняется закон сохранения энергии (условие Стефана)

$$(k^{cr} \nabla T \cdot \mathbf{N})|_{y=f(t,x)-0} - (k^0 \nabla T \cdot \mathbf{N})|_{y=f(t,x)+0} = \lambda \rho v^{\text{ph}}(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{N}). \tag{3}$$

Здесь λ — скрытая теплота плавления, $v^{\text{ph}} = v^{\text{ph}}(t, x)$ — скорость движения границы раздела фаз, \mathbf{N} — единичная нормаль к межфазной границе, направленная в жидкую фазу, \mathbf{e}_y — единичный вектор в направлении оси y .

Из симметрии следует, что на оси $x = 0$

$$\partial_x T = 0. \tag{4}$$

На боковой границе области Ω — кривой $x = g(y)$ — тепловой поток равен нулю:

$$(k \nabla T \cdot \tilde{\mathbf{N}})|_{x=g(y)} = 0. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{N}}$ — внешняя нормаль к границе $x = g(y)$. На торцах области Ω — прямых $y = 0$, $y = L$ — заданы значения температуры

$$T|_{y=0} = T_b(t), \quad T|_{y=L} = T_t(t). \tag{6}$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Основу метода решения задачи (1)–(6) составляет модификация метода выпрямления фронта [13]. Физическая область $\Omega(t, x, y)$ отображается в расчётную область $\Omega(\tilde{t}, \xi, \eta)$ так, что в новой системе координат положение границы раздела фаз фиксировано и совпадает с координатной линией $\eta = \text{const}$, а боковой границы — с координатной линией $\xi = \text{const}$. Области Ω^0 и Ω^1 в новой системе координат становятся прямоугольниками (см. рис. 1): границы $x = 0$, $x = g(y)$ переходят в прямые $\xi = 0$, $\xi = 1$, а границы $y = 0$, $y = f(t, x)$, $y = L$ — в прямые $\eta = 0$, $\eta = 1$, $\eta = 2$ соответственно. Расчётная (\tilde{t}, ξ, η) и физическая (t, x, y) системы координат связаны соотношениями

$$\tilde{t} = t, \quad \xi = \xi(t, x, y), \quad \eta = \eta(t, x, y). \tag{7}$$

При наличии в физической области $\Omega(t, x, y)$ твёрдой и жидкой фаз преобразование координат (7) является невырожденным, т.е. $J^{(x,y)} = \partial(\tilde{t}, \xi, \eta)/\partial(t, x, y) \neq 0$. Запишем задачу (1)–(6) в расчётной системе координат. Частные производные преобразуются следующим образом:

$$\partial_t T = \partial_{\tilde{t}} T + \partial_{\xi} T \partial_t \xi + \partial_{\eta} T \partial_t \eta, \quad \partial_x T = \partial_{\xi} T \partial_x \xi + \partial_{\eta} T \partial_x \eta, \quad \partial_y T = \partial_{\xi} T \partial_y \xi + \partial_{\eta} T \partial_y \eta. \quad (8)$$

Для вычисления коэффициентов $\partial_t \xi$, $\partial_t \eta$, $\partial_x \xi$, $\partial_x \eta$, $\partial_y \xi$, $\partial_y \eta$ используем обратное к (7) преобразование координат

$$t = \tilde{t}, \quad x = \chi(\tilde{t}, \xi, \eta), \quad y = \varphi(\tilde{t}, \xi, \eta). \quad (9)$$

В этом случае можно показать, что [14, § 12.1]

$$\begin{aligned} \partial_x \xi &= \partial_{\eta} y / J^{(\xi, \eta)}, & \partial_y \xi &= -\partial_{\eta} x / J^{(\xi, \eta)}, & \partial_t \xi &= -(\partial_{\tilde{t}} x \partial_{\eta} y - \partial_{\tilde{t}} y \partial_{\eta} x) / J^{(\xi, \eta)}, \\ \partial_x \eta &= -\partial_{\xi} y / J^{(\xi, \eta)}, & \partial_y \eta &= \partial_{\xi} x / J^{(\xi, \eta)}, & \partial_t \eta &= (\partial_{\tilde{t}} x \partial_{\xi} y - \partial_{\tilde{t}} y \partial_{\xi} x) / J^{(\xi, \eta)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\partial_{\xi} x = \partial_{\xi} \chi, \quad \partial_{\eta} x = \partial_{\eta} \chi, \quad \partial_t x = \partial_t \chi, \quad \partial_{\xi} y = \partial_{\xi} \varphi, \quad \partial_{\eta} y = \partial_{\eta} \varphi, \quad \partial_t y = \partial_t \varphi,$$

$J^{(\xi, \eta)} = \partial(t, x, y) / \partial(\tilde{t}, \xi, \eta)$ — якобиан преобразования (9):

$$J^{(\xi, \eta)} = \partial_{\xi} x \partial_{\eta} y - \partial_{\eta} x \partial_{\xi} y = \partial_{\xi} \chi \partial_{\eta} \varphi - \partial_{\xi} \varphi \partial_{\eta} \chi.$$

В дальнейшем для краткости будем опускать верхний индекс у $J^{(\xi, \eta)}$, т.е. $J^{(\xi, \eta)} = J$.

2.1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПЛОЩАДИ

Рассмотрим в физической системе координат контрольный объём $S^{(x,y)}(t)$, ограниченный положительно ориентированным замкнутым контуром $\partial S^{(x,y)}(t)$, движущимся со скоростью $v_g = (v_g^x(t, x, y), v_g^y(t, x, y))$, $x, y \in \partial S^{(x,y)}(t)$. Из транспортной теоремы Рейнольдса [1, § 1.2] следует, что изменение площади контрольного объёма удовлетворяет уравнению [2, 3, 15, 16]

$$d_t \left(\int_{S^{(x,y)}(t)} dx dy \right) = \int_{\partial S^{(x,y)}} v_g \cdot \mathbf{n} d\gamma, \quad (11)$$

здесь \mathbf{n} — вектор внешней нормали к контуру $\partial S^{(x,y)}(t)$. Уравнение (11) выражает закон сохранения площади контрольного объёма.

С помощью теоремы Остроградского–Гаусса запишем уравнение (11) как

$$d_t \left(\int_{S^{(x,y)}(t)} dx dy \right) = \int_{S^{(x,y)}(t)} \nabla \cdot v_g dx dy, \quad (12)$$

где $v_g = (d_t x, d_t y)$, $x, y \in S^{(x,y)}(t)$, — поле скоростей точек, принадлежащих области $S^{(x,y)}(t)$. Пусть $S^{(\xi, \eta)}$ — образ контрольного объёма $S^{(x,y)}(t)$ при отображении (7). Уравнение (12) в расчётной системе координат примет вид

$$d_{\tilde{t}} \left(\int_{S^{(\xi, \eta)}} J d\xi d\eta \right) = \int_{S^{(\xi, \eta)}} (\nabla^{(\xi, \eta)} \cdot v_g) J d\xi d\eta.$$

Здесь $\nabla^{(\xi, \eta)}$ — оператор дивергенции в расчётной системе координат, $\nabla^{(\xi, \eta)} \cdot v_g = [\partial_{\xi} v_g^x \partial_x \xi + \partial_{\eta} v_g^x \partial_x \eta] + [\partial_{\xi} v_g^y \partial_y \xi + \partial_{\eta} v_g^y \partial_y \eta]$. С помощью соотношений (8), (10) нетрудно показать, что

$$(\nabla^{(\xi, \eta)} \cdot v_g) J = \partial_{\xi} [\partial_{\eta} y v_g^x - \partial_{\eta} x v_g^y] + \partial_{\eta} [-\partial_{\xi} y v_g^x + \partial_{\xi} x v_g^y]. \quad (13)$$

Обозначим соответственно через U и V выражения в квадратных скобках в формуле (13) и перепишем закон сохранения объёма ячейки в расчётной системе координат в виде

$$d_{\tilde{t}} \int_{S^{(\xi,\eta)}} J d\xi d\eta = \int_{S^{(\xi,\eta)}} (\partial_{\xi}U + \partial_{\eta}V) d\xi d\eta. \quad (14)$$

Контрольный объём $S^{(\xi,\eta)}$ является неподвижным, поэтому из интегрального тождества (14) следует уравнение переноса якобиана

$$\partial_{\tilde{t}}J = \partial_{\xi}U + \partial_{\eta}V \quad (15)$$

— закон сохранения объёма ячейки в дифференциальной форме. С учётом формул замены переменных (10) получим, что $U = -J\xi_{\tilde{t}}$, $V = -J\eta_{\tilde{t}}$. Таким образом, из уравнения (15) следует, что в расчётной системе координат $\partial_{\tilde{t}}J + J\xi_{\tilde{t}} + J\eta_{\tilde{t}} = 0$, т.е.

$$d_{\tilde{t}}J = 0.$$

2.2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В РАСЧЁТНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В уравнении (1) с помощью соотношений (8), (10) перейдём к координатам (\tilde{t}, ξ, η) . Для производной по времени имеем

$$\partial_{\tilde{t}}T = \partial_{\tilde{t}}T + \partial_{\xi}T \partial_{\tilde{t}}\xi + \partial_{\eta}T \partial_{\tilde{t}}\eta. \quad (16)$$

После умножения (16) на якобиан преобразования (9) получим

$$J\partial_{\tilde{t}}T = J\partial_{\tilde{t}}T - U\partial_{\xi}T - V\partial_{\eta}T. \quad (17)$$

Из уравнения (15) следует, что $T\partial_{\tilde{t}}J - T\partial_{\xi}U - T\partial_{\eta}V = 0$. Данное соотношение позволяет записать производную по времени (17) в дивергентной форме:

$$\mathcal{T}(T) = J\partial_{\tilde{t}}T = \partial_{\tilde{t}}(JT) - \partial_{\xi}(UT) - \partial_{\eta}(VT). \quad (18)$$

Диссипативные члены в уравнении (1) преобразуются следующим образом:

$$\mathcal{D}(T) = J\nabla \cdot (\varkappa \nabla T) = [\partial_{\xi}\mathcal{W}^{\xi} + \partial_{\eta}\mathcal{W}^{\eta}].$$

Компоненты вектора теплового потока $\mathcal{W} = (\mathcal{W}^{\xi}, \mathcal{W}^{\eta})$ в расчётной системе координат имеют вид [14, § 12.1]

$$\mathcal{W}^{\xi} = \varkappa[L^{\xi\xi}\partial_{\xi}T + L^{\xi\eta}\partial_{\eta}T], \quad \mathcal{W}^{\eta} = \varkappa[L^{\eta\eta}\partial_{\eta}T + L^{\eta\xi}\partial_{\xi}T]. \quad (19)$$

Метрические коэффициенты $L^{\xi\xi}$, $L^{\xi\eta}$, $L^{\eta\xi}$, $L^{\eta\eta}$ вычисляются по формулам

$$L^{\xi\xi} = [(\partial_{\eta}\varphi)^2 + (\partial_{\eta}\chi)^2]/J, \quad L^{\xi\eta} = L^{\eta\xi} = -[\partial_{\xi}\chi \partial_{\eta}\chi + \partial_{\eta}\varphi \partial_{\xi}\varphi]/J, \quad L^{\eta\eta} = [(\partial_{\xi}\chi)^2 + (\partial_{\xi}\varphi)^2]/J.$$

Таким образом, уравнение теплопроводности (1) в расчётной системе координат имеет вид

$$\partial_{\tilde{t}}(JT) - \partial_{\xi}(UT) - \partial_{\eta}(VT) = \partial_{\xi}\mathcal{W}^{\xi} + \partial_{\eta}\mathcal{W}^{\eta}. \quad (20)$$

2.3. УСЛОВИЕ СТЕФАНА В РАСЧЁТНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Используя представление тепловых потоков (19), запишем условие Стефана в расчётной системе координат:

$$W^{\eta}|_{\eta=1-0} - W^{\eta}|_{\eta=1+0} = \lambda\rho\chi_{\xi}v^{\text{ph}}. \quad (21)$$

Замечание. В дальнейшем для краткости там, где это не вызывает разночтений, знак \sim над \tilde{t} будем опускать.

3. СЕТКА И СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. СЕТКА

В расчётной области $\Omega(\xi, \eta)$ введём прямоугольную сетку $\omega_h^{(\xi, \eta)} = \omega_h^\xi \times \omega_h^\eta$, где $\omega_h^\xi = \{\xi_i, i = \overline{0, M}, \xi_0 = 0, \xi_M = 1\}$, $\omega_h^\eta = \{\eta_j, j = \overline{0, N}, \eta_0 = 0, \eta_{j^*} = 1, \eta_N = 2\}$, шаги сетки $h_{i+1/2}^\xi = \xi_{i+1} - \xi_i$, $h_{j+1/2}^\eta = \eta_{j+1} - \eta_j$, а также полупелые узлы $\xi_{i+1/2} = (\xi_{i+1} + \xi_i)/2$, $\eta_{j+1/2} = (\eta_{j+1} + \eta_j)/2$. Расчётную область $\Omega(\xi, \eta)$ разобьём на прямоугольные ячейки $S_{ij}^{(\xi, \eta)}$ с вершинами в точках $(\xi_{i\pm 1/2}, \eta_{j\pm 1/2})$; длины сторон ячейки $S_{ij}^{(\xi, \eta)}$ равны $\bar{h}_i^\xi = 0.5(h_{i+1/2}^\xi + h_{i-1/2}^\xi)$ и $\bar{h}_j^\eta = 0.5(h_{j+1/2}^\eta + h_{j-1/2}^\eta)$, её площадь $\bar{S}_{ij}^{(\xi, \eta)} = \bar{h}_i^\xi \bar{h}_j^\eta$. Также рассмотрим ячейки $S_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)}$ с вершинами в точках $(\xi_{i+\alpha}, \eta_{j+\beta})$, $\alpha, \beta = 0, 1$. Сетка по времени $\omega_\tau = \{t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \tau, k = 0, 1, \dots\}$, где τ — шаг по времени. Для обозначения узлов сетки также будем использовать локальную географическую нотацию: $f_{ij} = f_P$, $f_{i+1, j} = f_E$, $f_{i, j+1} = f_N$, $f_{i+1/2, j} = f_e$, $f_{i, j+1/2} = f_n$, $f_{i+1/2, j+1/2} = f_{ne}$ и т.д. Контрольный объём $S_P^{(\xi, \eta)} = \bigcup_{q=1}^4 S_q^{(\xi, \eta)}$.

В физической области $\Omega(t, x, y)$ введём подвижную сетку, согласованную с формой границы раздела $\omega_h^{(x, y)}(t) = \{(x_{ij}(t), y_{ij}(t)), i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}\}$, таким образом, чтобы $x_{ij}(t) = \chi(t, \xi_i, \eta_j)$, $y_{ij}(t) = \varphi(t, \xi_i, \eta_j)$. В этом случае узлы $(x_{ij^*}(t), y_{ij^*}(t))$, $i = \overline{0, M}$, в ходе всего процесса закреплены на межфазной границе и движутся со скоростью фронта кристаллизации. Сетка $\omega_h^{(x, y)}(t)$ разбивает физическую область на четырёхугольные ячейки $S_{i+1/2, j+1/2}^{(x, y)}(t)$ с вершинами в точках $(x_{i+\alpha, j+\beta}, y_{i+\alpha, j+\beta})$, $\alpha, \beta = 0, 1$. Соединим середины противоположащих границ данных ячеек отрезками прямых. Полученные отрезки разбивают физическую область на восьмиугольные ячейки $S_{ij}^{(x, y)}(t)$, $i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}$, являющиеся образом ячеек $S_{ij}^{(\xi, \eta)}$ в расчётной области при отображении (9), т.е. $S_{ij}^{(x, y)}(t_k) = \{(x = \chi(t_k, \xi, \eta), y = \varphi(t_k, \xi, \eta)) : (\xi, \eta) \in S_{ij}^{(\xi, \eta)}\}$ (рис. 2); обозначим $S_P^{(x, y)} = \bigcup_{q=1}^4 S_q^{(x, y)}$, $\bar{S}_q^{(x, y)}$ — площадь ячейки $S_q^{(x, y)}$.

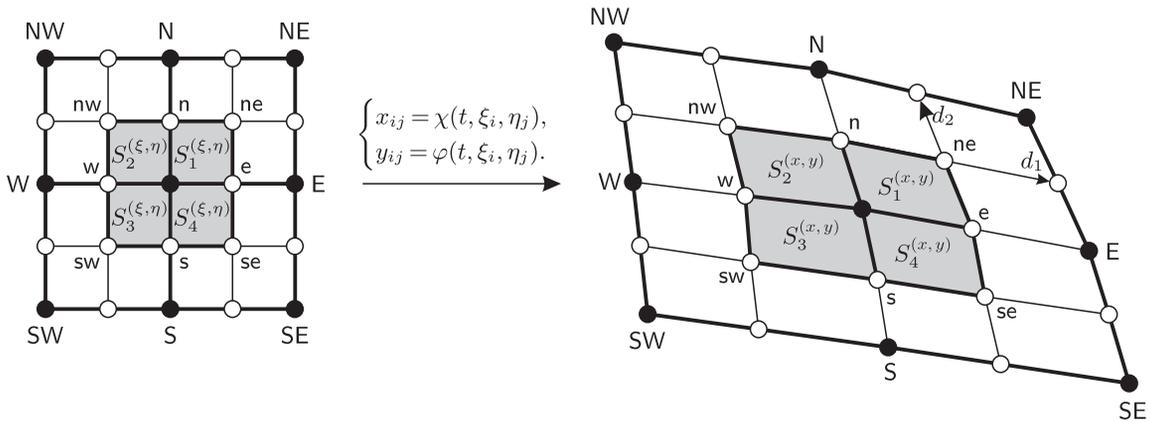


Рис. 2. Фиксированная сетка в расчётной системе координат (слева) и соответствующая ей подвижная сетка в физической системе координат (справа).

3.2. СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Сеточную функцию $T_{ij}^k = T(t_k, \xi_i, \eta_j)$ будем относить к узлам сетки $\omega_h^{(\xi, \eta)}$. Доопределим эту функцию внутри расчётных ячеек: $T(t_k, \xi, \eta) = T_{ij}^k$ при $(\xi, \eta) \in S_{ij}^{(\xi, \eta)}$. В точках $(\xi_i, \eta_{j\pm 1/2})$ и $(\xi_{i\pm 1/2}, \eta_j)$ температуру доопределим следующим образом: $T_{i, j\pm 1/2} = 0.5[T_{ij} + T_{i, j\pm 1}]$, $T_{i\pm 1/2, j} = 0.5[T_{i, j} + T_{i\pm 1, j}]$. Температуропроводность κ относится к центрам ячеек $S_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)}$.

Введём множество индексов узлов сетки $\omega_h^{(\xi,\eta)}: (\bar{I} \times \bar{J})$, а также множество индексов внутренних узлов сетки $\omega_h^{(\xi,\eta)}: (I \times J)$. Рассмотрим пространство сеточных функций $D_h(\omega^{(\xi,\eta)}) = \{f_{ij}, (i, j) \in (\bar{I} \times \bar{J}): f_{ij} = 0, (i, j) \in (\bar{I} \times \bar{J}) \setminus (I \times J)\}$. В пространстве сеточных функций $D_h(\omega^{(\xi,\eta)})$ определим скалярное произведение

$$(f, g) = \sum_{(i,j) \in (I \times J)} f_{ij} g_{ij} J_{ij} \bar{S}_{ij}^{(\xi,\eta)}. \tag{22}$$

Введём сеточные операторы разностного дифференцирования. Для пространственных производных в направлении оси ξ имеем $f_{ij,\xi} = (f_{i+1j} - f_{ij})/h_{i+1/2}^\xi$, $f_{ij,\bar{\xi}} = f_{i-1j,\xi}$, разностные аппроксимации пространственных производных в направлении оси η : $f_{ij,\eta} = (f_{ij+1} - f_{ij})/h_{j+1/2}^\eta$, $f_{ij,\bar{\eta}} = f_{ij-1,\eta}$. Разностную производную по времени обозначим через $f_{ij,t} = (\hat{f}_{ij} - f_{ij})/\tau$, где $\hat{f}_{ij} = f(t_k + \tau, \xi_i, \eta_j)$. Линейную комбинацию значений сеточной функции с нижнего и верхнего временных слоёв обозначим $f^{(\sigma)} = \sigma \hat{f} + (1 - \sigma)f$.

В работе [17] для двухфазной задачи Стефана в прямоугольной области на подвижной сетке, согласованной с формой границы раздела фаз, построена разностная схема, алгебраически эквивалентная схеме, построенной методом выпрямления фронта, и доказано, что схемы переходят друг в друга с помощью замены переменных аналогично дифференциальному случаю. Данное обстоятельство показывает, что аппроксимации операторов на фиксированной сетке могут быть получены в результате замены переменных в соответствующих дискретных выражениях, построенных на подвижной сетке. Воспользуемся этим свойством при конструировании разностной схемы.

3.3. АППРОКСИМАЦИЯ МЕТРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Разностные аппроксимации пространственных производных функций χ_{ij}^k и φ_{ij}^k в узлах сетки введём естественным образом:

$$[\partial_\xi \chi]_h = \chi_{ij,\xi}, \quad [\partial_\eta \chi]_h = \chi_{ij,\eta}, \quad [\partial_\xi \varphi]_h = \varphi_{ij,\xi}, \quad [\partial_\eta \varphi]_h = \varphi_{ij,\eta}.$$

Переинтерполяция производных χ_ξ , χ_η , φ_ξ , φ_η в центр ячейки $S_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}$ осуществляется с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \chi_{i+1/2,j+1/2,\xi} &= 0.5(\chi_{ij,\xi} + \chi_{i+1j,\xi}), & \chi_{i+1/2,j+1/2,\eta} &= 0.5(\chi_{ij,\eta} + \chi_{i+1j,\eta}), \\ \varphi_{i+1/2,j+1/2,\xi} &= 0.5(\varphi_{ij,\xi} + \varphi_{i+1j,\xi}), & \varphi_{i+1/2,j+1/2,\eta} &= 0.5(\varphi_{ij,\eta} + \varphi_{i+1j,\eta}). \end{aligned} \tag{23}$$

Для вычисления якобиана преобразования в точке $(\xi_{i+1/2}, \eta_{j+1/2})$ воспользуемся тем, что

$$J_{i+1/2,j+1/2} \approx \frac{1}{\bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}} \int_{S_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}} J d\xi d\eta, \quad \int_{S_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}} J d\xi d\eta = \bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)},$$

откуда $J_{i+1/2,j+1/2} \approx \bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)} / \bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}$. Здесь $\bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)} = h_{i+1/2}^\xi h_{j+1/2}^\eta$. Площадь ячейки $S_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)}$ вычислим следующим образом: $\bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)} = (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{k}$, где $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ — векторы, соединяющие середины противоположных сторон ячейки $S_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)}$ (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= 0.5[(x_{i+1j+1} + x_{i+1j}) - (x_{ij+1} + x_{ij}), (y_{i+1j+1} + y_{i+1j}) - (y_{ij+1} + y_{ij}), 0], \\ \mathbf{d}_2 &= 0.5[(x_{i+1j+1} + x_{ij+1}) - (x_{i+1j} + x_{ij}), (y_{i+1j+1} + y_{ij+1}) - (y_{i+1j} + y_{ij}), 0], \end{aligned}$$

вектор \mathbf{k} — единичный орт, сонаправленный с осью Oz . Векторы $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{k}$ образуют правую тройку, поэтому $\overline{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} &= 0.25([x_{i+1j+1} - x_{ij+1}] + [x_{i+1j} - x_{ij}])([y_{i+1j+1} - y_{i+1j}] + [y_{ij+1} - y_{ij}]) - \\ &- 0.25([x_{i+1, j+1} - x_{i+1j}] + [x_{ij+1} - x_{ij}])([y_{i+1j+1} - y_{ij+1}] + [y_{i+1j} - y_{ij}]). \end{aligned} \quad (24)$$

Утверждение 1. В расчётной системе координат площадь ячейки $S_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)}$ вычисляется по формуле

$$\overline{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} = \left[\frac{\chi_{ij, \xi} + \chi_{ij+1, \xi}}{2} \frac{\varphi_{ij, \eta} + \varphi_{i+1j, \eta}}{2} - \frac{\chi_{ij, \eta} + \chi_{i+1j, \eta}}{2} \frac{\varphi_{ij, \xi} + \varphi_{ij+1, \xi}}{2} \right] h_{i+1/2}^{\xi} h_{j+1/2}^{\eta}. \quad (25)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $x_{ij}(t) = \chi(t, \xi_i, \eta_j)$, $y_{ij}(t) = \varphi(t, \xi_i, \eta_j)$. Тогда

$$\begin{aligned} x_{i+1j} - x_{ij} &= \chi(t, \xi_{i+1j}, \eta_{ij}) - \chi(t, \xi_{ij}, \eta_{ij}) = \chi_{\xi} h_{i+1/2}^{\xi}, \\ y_{ij+1} - y_{ij} &= \varphi(t, \xi_{ij}, \eta_{ij+1}) - \varphi(t, \xi_{ij}, \eta_{ij}) = \varphi_{\eta} h_{j+1/2}^{\eta}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} x_{i+1j+1} - x_{ij+1} &= \chi_{i+1j+1, \xi} h_{i+1/2}^{\xi}, & y_{i+1j+1} - y_{i+1j} &= \varphi_{i+1j, \eta} h_{j+1/2}^{\eta}, \\ x_{i, j+1} - x_{ij} &= \chi_{\eta} h_{j+1/2}^{\eta}, & y_{i+1j} - y_{ij} &= \varphi_{\xi} h_{i+1/2}^{\xi} \end{aligned}$$

и т.д. Поэтому формулу (24) для вычисления площади ячейки $S_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)}$ можно записать следующим образом:

$$\overline{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} = [\chi_{i+1/2j+1/2, \xi} \varphi_{i+1/2j+1/2, \eta} - \chi_{i+1/2j+1/2, \eta} \varphi_{i+1/2j+1/2, \xi}] h_{i+1/2}^{\xi} h_{j+1/2}^{\eta}.$$

Утверждение доказано.

Учитывая, что $J_{i+1/2j+1/2} = \overline{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} / \overline{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)}$, $\overline{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)} = h_{i+1/2}^{\xi} h_{j+1/2}^{\eta}$, из формулы (25) получаем следующую аппроксимацию якобиана в расчётной области:

$$J_{i+1/2j+1/2} = \chi_{i+1/2j+1/2, \xi} \varphi_{i+1/2j+1/2, \eta} - \chi_{i+1/2j+1/2, \eta} \varphi_{i+1/2j+1/2, \xi}. \quad (26)$$

Метрические коэффициенты $L^{\xi\xi}$, $L^{\xi\eta}$, $L^{\eta\eta}$ вычисляются в центрах ячеек $S_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)}$ естественным образом с помощью формул (23), (26).

4. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В качестве контрольного объёма выберем ячейку $S_{ij}^{(\xi, \eta)}$. В рамках интегро-интерполяционного метода построение разностных аналогов операторов $\mathcal{T}(T)$, $\mathcal{D}(T)$, по-существу, состоит в вычислении соответствующих потоков в центрах границ контрольного объёма. При этом требуется вычислять значения сеточных функций и их производных в узлах, в которых они не определены. Критерием в выборе способа интерполяции является выполнение на разностном уровне законов сохранения, присущих исходной дифференциальной задаче.

4.1. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ПЛОЩАДИ ЯЧЕЙКИ

При аппроксимации производной по времени $\mathcal{T}(T)$ в расчётной системе координат необходимо вычислять якобиан J в центре контрольного объёма $S_P^{(\xi,\eta)}$ в точке (x_{ij}, y_{ij}) , а также скорости U и V в потоковых точках $(x_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}, y_{i\pm 1/2, j\pm 1/2})$. При этом величины J_P, U_e, U_w, V_n, V_s должны удовлетворять дискретному аналогу закона сохранения площади в форме (14). Построим полностью неявную аппроксимацию уравнения переноса якобиана (15), согласованную с законом изменения площади (11) восьмиугольной ячейки в физической системе координат ячейки $S_P^{(x,y)}$. Формулы для вычисления J_P, U_e, U_w, V_n, V_s получим с помощью замены переменных (9) в выражениях, обеспечивающих выполнение тождества (11) на подвижной сетке.

Перейдём к построению соответствующей аппроксимации. Проинтегрируем уравнение (15) по ячейке $S_P^{(\xi,\eta)}$ и отрезку $[t_k, t_{k+1}]$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \partial_t J d\xi d\eta dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} [\partial_\xi U + \partial_\eta V] d\xi d\eta dt. \quad (27)$$

Интеграл в левой части равенства (27) аппроксимируем следующим образом:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \partial_t J d\xi d\eta dt \approx (\hat{J}_P - J_P) \bar{S}_P^{(\xi,\eta)}. \quad (28)$$

Для интеграла в правой части (27) с учётом формулы Остроградского–Гаусса имеем

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} [\partial_\xi U + \partial_\eta V] d\xi d\eta dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\partial S_P^{(\xi,\eta)}} [UN^\xi + VN^\eta] d\gamma dt = \tau (\hat{h}_P^\eta \hat{U}_e + \hat{h}_P^\xi \hat{V}_n - \hat{h}_P^\xi \hat{U}_w - \hat{h}_P^\eta \hat{V}_s). \quad (29)$$

Выражения (28), (29) разделим на шаг τ . Полностью неявная аппроксимация уравнения переноса якобиана (15) имеет вид

$$(J_P)_t \bar{S}_P^{(\xi,\eta)} = [\hat{U}_e - \hat{U}_w] \hat{h}_P^\eta + [\hat{V}_n - \hat{V}_s] \hat{h}_P^\xi. \quad (30)$$

Построим формулы для вычисления J_P, U_e, U_w, V_n, V_s , обеспечивающие выполнение закона сохранения площади ячейки (11) в физической системе координат в форме

$$(\bar{S}^{(x,y)})_t = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\partial S^{(x,y)}(t)} v_g(t) \cdot \mathbf{n}(t) d\gamma dt. \quad (31)$$

(Запись закона сохранения площади ячейки в форме (31) можно получить, проинтегрировав (11) по отрезку $[t_k, t_{k+1}]$ и разделив результат на шаг τ .) Для вычисления якобиана преобразования в центре контрольного объёма воспользуемся тем, что

$$J_P \approx \frac{1}{\bar{S}_P^{(\xi,\eta)}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} J d\xi d\eta = \bar{S}_P^{(x,y)} / \bar{S}_P^{(\xi,\eta)}. \quad (32)$$

Восьмиугольная ячейка $S^{(x,y)}$ образована четырьмя четырехугольниками $S_i^{(x,y)}$ (см. рис. 2), $i = \overline{1, 4}$, поэтому

$$J_P = (\bar{S}_1^{(x,y)} + \bar{S}_2^{(x,y)} + \bar{S}_3^{(x,y)} + \bar{S}_4^{(x,y)}) / \bar{S}_P^{(\xi,\eta)}. \quad (33)$$

Подставив выражение (33) в аппроксимацию уравнения переноса якобиана (30), получим

$$(\bar{S}^{(x,y)})_t = \hbar^\eta [\widehat{U}_e - \widehat{U}_w] + \hbar^\xi [\widehat{V}_n - \widehat{V}_s]. \tag{34}$$

Проводя выкладки, аналогичные приведённым при доказательстве утверждения 1, можно показать, что следующие формулы позволяют точно определить площади четырехугольников $S_i^{(x,y)}$:

$$\bar{S}_1^{(x,y)} = [0.5(\chi_{n,\xi} + \chi_\xi) 0.5(\varphi_{e,\eta} + \varphi_\eta) - 0.5(\chi_{e,\eta} + \chi_\eta) 0.5(\varphi_{n,\xi} + \varphi_\xi)] 0.25 h_e^\xi h_n^\eta, \tag{35}$$

$$\bar{S}_2^{(x,y)} = [0.5(\chi_{n,\bar{\xi}} + \chi_{\bar{\xi}}) 0.5(\varphi_{w,\eta} + \varphi_\eta) - 0.5(\chi_{w,\eta} + \chi_\eta) 0.5(\varphi_{n,\bar{\xi}} + \varphi_{\bar{\xi}})] 0.25 h_w^\xi h_n^\eta, \tag{36}$$

$$\bar{S}_3^{(x,y)} = [0.5(\chi_{s,\bar{\xi}} + \chi_{\bar{\xi}}) 0.5(\varphi_{w,\bar{\eta}} + \varphi_{\bar{\eta}}) - 0.5(\chi_{w,\bar{\eta}} + \chi_{\bar{\eta}}) 0.5(\varphi_{s,\bar{\xi}} + \varphi_{\bar{\xi}})] 0.25 h_w^\xi h_s^\eta, \tag{37}$$

$$\bar{S}_4^{(x,y)} = [0.5(\chi_{s,\xi} + \chi_\xi) 0.5(\varphi_{e,\bar{\eta}} + \varphi_{\bar{\eta}}) - 0.5(\chi_{e,\bar{\eta}} + \chi_{\bar{\eta}}) 0.5(\varphi_{s,\xi} + \varphi_\xi)] 0.25 h_e^\xi h_s^\eta. \tag{38}$$

Вычислим разностную производную площади контрольного объёма по времени в уравнении (34) из закона сохранения площади ячейки (31). В этом случае уравнение (34) преобразуется к виду

$$\Delta S = \tau (\hbar_p^\eta [\widehat{U}_e - \widehat{U}_w] + \hbar_p^\xi [\widehat{V}_n - \widehat{V}_s]), \tag{39}$$

где

$$\Delta S = \widehat{S}_p^{(x,y)} - \bar{S}_p^{(x,y)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\partial S^{(x,y)}(t)} v_g(t) \cdot \mathbf{n}(t) d\gamma dt. \tag{40}$$

Определённый интеграл (40) по величине равен площади геометрической фигуры, которую замечает граница ячейки $S^{(x,y)}(t)$ при движении со скоростью $v_g(t)$ на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ (см., например, [3, 15]). Вычислим интеграл (40) из геометрических соображений. Рассмотрим для этого контрольный объём $S^{(x,y),(0.5)} = \{(x, y) : x = 0.5[x(t_k) + x(t_{k+1})], y = 0.5[y(t_k) + y(t_{k+1})], [x(t_k), y(t_k)] \in S^{(x,y)}, [x(t_{k+1}), y(t_{k+1})] \in \widehat{S}^{(x,y)}\}$, образованный четырьмя четырехугольными контрольными объёмами $S_i^{(x,y),(0.5)}$ такими, что $S^{(x,y),(0.5)} = \bigcup_{q=1}^4 S_i^{(x,y),(0.5)}$. Границы ячеек $S^{(x,y)}$, $S^{(x,y),(0.5)}$, $\widehat{S}^{(x,y)}$ будем считать положительно ориентированными (рис. 3).

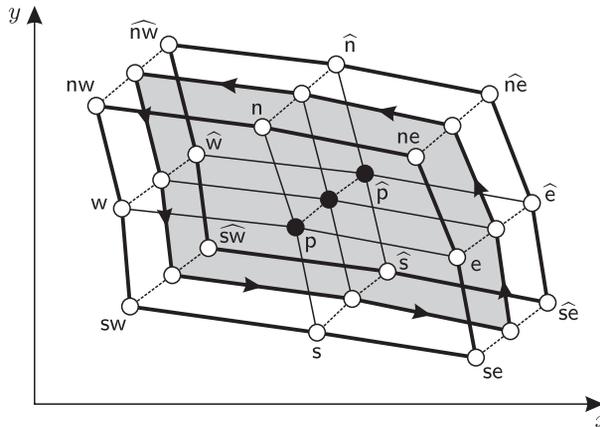


Рис. 3. Контрольные объёмы ячеек $S^{(x,y)}$, $S^{(x,y),(0.5)}$ (выделен серым цветом) и $\widehat{S}^{(x,y)}$.

Для вычисления ΔS воспользуемся формулой

$$\Delta S = [(\Delta \mathbf{S}_1^n \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_2^n \cdot \mathbf{k})] + [(\Delta \mathbf{S}_3^s \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^s \cdot \mathbf{k})] + [(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k})] + [(\Delta \mathbf{S}_2^w \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_3^w \cdot \mathbf{k})]. \quad (41)$$

Здесь $\Delta \mathbf{S}_i^\gamma$ — вектор, длина которого равна площади четырёхугольника S_i^γ . Четырёхугольник S_i^γ в ходе движения сетки замечает граница ячейки $S_i^{(x,y)}$, содержащая узел с индексом $\gamma = n, s, e, w$ (рис. 4). Вектор $\Delta \mathbf{S}_i^\gamma$ найдём как

$$\Delta \mathbf{S}_i^\gamma = (\delta \mathbf{r}_i^\gamma \times \mathbf{d}_i^\gamma), \quad (42)$$

где вектор $\delta \mathbf{r}_i^\gamma$ соединяет середины сторон ячеек $S_i^{(x,y)}$ и $\widehat{S}_i^{(x,y)}$, содержащие узел с индексом γ ; \mathbf{d}_i^γ — граница ячейки $S_i^{(x,y),(0.5)}$, содержащая узел с индексом γ , $\gamma = n, s, e, w$ (см. рис. 4).

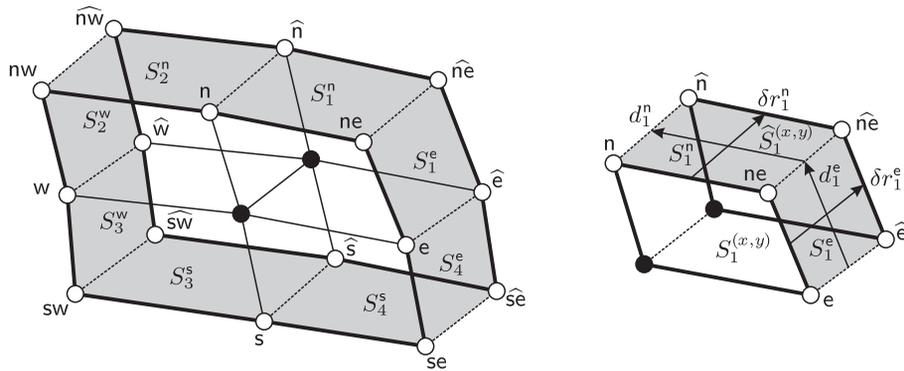


Рис. 4. Изменение площади ячейки $S^{(x,y)}(t)$ (слева) (четырёхугольники S_i^γ , которые замечает граница ячейки в ходе движения, выделены серым цветом) и ячейки $S_1^{(x,y)}(t)$ (справа).

Замечание. Выполнение равенства (41) можно проверить непосредственной подстановкой, вычислив площади соответствующих ячеек в координатной форме.

Подставив формулу (41) для вычисления определённого интеграла (40) в уравнение (39), получим

$$\begin{aligned} & (\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_2^w \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_3^w \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_1^n \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_2^n \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_3^s \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^s \cdot \mathbf{k}) = \\ & = \tau (\hbar_p^\eta [\widehat{U}_e - \widehat{U}_w] + \hbar_p^\xi [\widehat{V}_n - \widehat{V}_s]). \end{aligned}$$

Положим

$$\widehat{U}_e = [(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k})] / \hbar_p^\eta \tau, \quad \widehat{U}_w = -[(\Delta \mathbf{S}_2^w \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_3^w \cdot \mathbf{k})] / \hbar_p^\eta \tau, \quad (43)$$

$$\widehat{V}_n = [(\Delta \mathbf{S}_1^n \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_2^n \cdot \mathbf{k})] / \hbar_p^\xi \tau, \quad \widehat{V}_s = -[(\Delta \mathbf{S}_3^s \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^s \cdot \mathbf{k})] / \hbar_p^\xi \tau. \quad (44)$$

По построению использование формул (33), (35)–(38) для вычисления якобиана преобразования в центре ячейки и формул (43), (44) для вычисления компонент вектора скорости в центрах границ контрольного объёма обеспечивает выполнение в дискретной среде закона сохранения площади ячейки в форме (31).

Получим формулы для вычисления скоростей U и V в расчётной системе координат. Для этого выполним дискретное преобразование координат (9) в соотношениях (43), (44).

Утверждение 2. Закон сохранения площади ячейки (14) в форме

$$(J_P)_t = [\widehat{U}_e - \widehat{U}_w] / \hbar^\xi + [\widehat{V}_n - \widehat{V}_s] / \hbar^\eta$$

выполняется, если якобиан преобразования J в центре ячейки вычисляется по формулам (33), (35)–(38), а скорости U и V в центрах грани контрольного объёма — с помощью формул

$$\widehat{U}_e = \frac{1}{2\hbar^\eta} \left[\left(\frac{\chi_{ne,t} + \chi_{e,t}}{2} \varphi_{e,\eta}^{(0.5)} - \frac{\varphi_{ne,t} + \varphi_{e,t}}{2} \chi_{e,\eta}^{(0.5)} \right) h_n^\eta + \left(\frac{\chi_{se,t} + \chi_{e,t}}{2} \varphi_{e,\bar{\eta}}^{(0.5)} - \frac{\varphi_{se,t} + \varphi_{e,t}}{2} \chi_{e,\bar{\eta}}^{(0.5)} \right) h_s^\eta \right], \quad (45)$$

$$\widehat{U}_w = \frac{1}{2\hbar^\eta} \left[\left(\frac{\chi_{nw,t} + \chi_{w,t}}{2} \varphi_{w,\eta}^{(0.5)} - \frac{\varphi_{nw,t} + \varphi_{w,t}}{2} \chi_{w,\eta}^{(0.5)} \right) h_n^\eta + \left(\frac{\chi_{sw,t} + \chi_{w,t}}{2} \varphi_{w,\bar{\eta}}^{(0.5)} - \frac{\varphi_{sw,t} + \varphi_{w,t}}{2} \chi_{w,\bar{\eta}}^{(0.5)} \right) h_s^\eta \right], \quad (46)$$

$$\widehat{V}_n = \frac{1}{2\hbar^\xi} \left[\left(\frac{\varphi_{ne,t} + \varphi_{n,t}}{2} \chi_{n,\xi}^{(0.5)} - \frac{\chi_{ne,t} + \chi_{n,t}}{2} \varphi_{n,\xi}^{(0.5)} \right) h_e^\xi + \left(\frac{\varphi_{nw,t} + \varphi_{n,t}}{2} \chi_{n,\bar{\xi}}^{(0.5)} - \frac{\chi_{nw,t} + \chi_{n,t}}{2} \varphi_{n,\bar{\xi}}^{(0.5)} \right) h_w^\xi \right], \quad (47)$$

$$\widehat{V}_s = \frac{1}{2\hbar^\xi} \left[\left(\frac{\varphi_{se,t} + \varphi_{s,t}}{2} \chi_{s,\xi}^{(0.5)} - \frac{\chi_{se,t} + \chi_{s,t}}{2} \varphi_{s,\xi}^{(0.5)} \right) h_e^\xi + \left(\frac{\varphi_{sw,t} + \varphi_{s,t}}{2} \chi_{s,\bar{\xi}}^{(0.5)} - \frac{\chi_{sw,t} + \chi_{s,t}}{2} \varphi_{s,\bar{\xi}}^{(0.5)} \right) h_w^\xi \right]. \quad (48)$$

Доказательство. Получим выражение для определения $\widehat{U}_e = [(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k})] / \hbar^\eta \tau$ в расчётной системе координат. Для вычисления $\Delta \mathbf{S}_1^e$ воспользуемся формулой (42). Векторы $\delta \mathbf{r}_1^e$, \mathbf{d}_1^e имеют следующие координаты (см. рис. 4):

$$\delta \mathbf{r}_1^e = 0.5([\widehat{x}_{ne} + \widehat{x}_e] - [x_{ne} + x_e], [\widehat{y}_{ne} + \widehat{y}_e] - [y_{ne} + y_e], 0),$$

$$\mathbf{d}_1^e = 0.5([\widehat{x}_{ne} + x_{ne}] - [\widehat{x}_e + x_e], [\widehat{y}_{ne} + y_{ne}] - [\widehat{y}_e + y_e], 0).$$

Таким образом,

$$(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) = 0.5([\widehat{x}_{ne} - x_{ne}] + [\widehat{x}_e - x_e])[y_{ne} - y_e]^{(0.5)} - 0.5([\widehat{y}_{ne} - y_{ne}] + [\widehat{y}_e - y_e])[x_{ne} - x_e]^{(0.5)}. \quad (49)$$

С учётом равенств $x_{ij}(t) = \chi(t, \xi_i, \eta_j)$, $y_{ij}(t) = \varphi(t, \xi_i, \eta_j)$ запишем члены, входящие в выражение (49), в расчётной системе координат. Получим, что $(\widehat{x}_{ne} - x_{ne}) = \tau \chi_{ne,t}$, $(\widehat{x}_e - x_e) = \tau \chi_{e,t}$, $y_{ne} - y_e = \varphi_{e,\eta} 0.5 h_n^\eta$ и т.д. Тогда

$$(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) = [0.5\tau(\chi_{ne,t} + \chi_{e,t})\varphi_{e,\eta}^{(0.5)} - 0.5\tau(\varphi_{ne,t} + \varphi_{e,t})\chi_{e,\eta}^{(0.5)}] 0.5 h_n^\eta. \quad (50)$$

Аналогично

$$(\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k}) = [0.5\tau(\chi_{se,t} + \chi_{e,t})\varphi_{e,\bar{\eta}}^{(0.5)} - 0.5\tau(\varphi_{se,t} + \varphi_{e,t})\chi_{e,\bar{\eta}}^{(0.5)}] 0.5 h_s^\eta. \quad (51)$$

Подставив выражения (50) и (51) в $\widehat{U}_e = [(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k})] / \hbar^\eta \tau$, получим формулу (45). Точно также строятся формулы (46)–(48). Утверждение доказано.

4.2. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Проинтегрируем уравнение теплопроводности (20) по ячейке $S_P^{(\xi,\eta)}$ и отрезку времени $[t_k, t_{k+1}]$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \mathcal{T}(T) d\xi d\eta dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \mathcal{D}(T) d\xi d\eta dt. \quad (52)$$

Учитывая (18), интеграл в левой части равенства (52) можно записать в виде

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \mathcal{T}(T) d\xi d\eta dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \partial_t \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} JT d\xi d\eta dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} [\partial_\xi(UT) + \partial_\eta(VT)] d\xi d\eta dt.$$

Тогда аппроксимация производной по времени в расчётной системе координат примет вид

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\widehat{T}) = (JT)_t - [\widehat{U}_e \widehat{T}_e - \widehat{U}_w \widehat{T}_w] / \hbar^\xi - [\widehat{V}_n \widehat{T}_n - \widehat{V}_s \widehat{T}_s] / \hbar^\eta. \quad (53)$$

Величины J_P , U_e , U_w , V_n , V_s в (53) вычисляются по формулам (33), (35)–(38), (45)–(48). В этом случае справедливо следующее

Утверждение 3. В расчётной системе координат оператор $\mathcal{T}_{h,\tau}(\widehat{T})$ допускает неди-
вергентную форму записи в виде

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\widehat{T}) = J_P T_t - [h_e^\xi \widehat{U}_e \widehat{T}_e + h_w^\xi \widehat{U}_w \widehat{T}_w] / 2\hbar^\xi - [h_n^\eta \widehat{V}_n \widehat{T}_n + h_s^\eta \widehat{V}_s \widehat{T}_s] / 2\hbar^\eta. \quad (54)$$

Доказательство. Преобразуем первое слагаемое в (53) с помощью формулы разностного дифференцирования произведения

$$(fg)_t = f_t g + \widehat{f} g_t$$

и получим

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\widehat{T}) = J_P T_t + J_t \widehat{T}_P - [\widehat{U}_e \widehat{T}_e - \widehat{U}_w \widehat{T}_w] / \hbar^\xi - [\widehat{V}_n \widehat{T}_n - \widehat{V}_s \widehat{T}_s] / \hbar^\eta. \quad (55)$$

Выражение для J_t в (55) запишем с учётом уравнения переноса якобиана (30). После приведения подобных слагаемых (55) примет вид

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\widehat{T}) = J_P T_t - [\widehat{U}_e (\widehat{T}_e - \widehat{T}_P) + \widehat{U}_w (\widehat{T}_P - \widehat{T}_w)] / \hbar^\xi - [\widehat{V}_n (\widehat{T}_n - \widehat{T}_P) + \widehat{V}_s (\widehat{T}_P - \widehat{T}_s)] / \hbar^\eta.$$

Воспользуемся тем, что $\widehat{T}_e = 0.5(\widehat{T}_P + \widehat{T}_E)$, $\widehat{T}_w = 0.5(\widehat{T}_P + \widehat{T}_W)$, $\widehat{T}_n = 0.5(\widehat{T}_P + \widehat{T}_N)$, $\widehat{T}_s = 0.5(\widehat{T}_P + \widehat{T}_S)$. Тогда

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\widehat{T}) = J_P T_t - [h_e^\xi \widehat{U}_e \widehat{T}_e + h_w^\xi \widehat{U}_w \widehat{T}_w] / 2\hbar^\xi - [h_n^\eta \widehat{V}_n \widehat{T}_n + h_s^\eta \widehat{V}_s \widehat{T}_s] / 2\hbar^\eta.$$

Утверждение доказано.

4.3. АППРОКСИМАЦИЯ ДИССИПАТИВНЫХ ЧЛЕНОВ

Используя формулу Остроградского–Гаусса, запишем оператор $\mathcal{D}(T)$ в виде

$$\mathcal{D}_h(T) \overline{S}_P^{(\xi,\eta)} = [\mathcal{W}_e^\xi - \mathcal{W}_w^\xi] \hbar^\eta + [\mathcal{W}_n^\eta - \mathcal{W}_s^\eta] \hbar^\xi. \quad (56)$$

Аппроксимируем потоки в выражении (56) [18, 19]. На “восточной” границе получим

$$\mathcal{W}_e^\xi \hbar^\eta = \int_{\partial S^{(\xi,\eta)}} \mathcal{W}^\xi d\eta = \int_{\partial S^{(\xi,\eta)}} [\mathcal{L}^{\xi\xi} \partial_\xi T + \mathcal{L}^{\xi\eta} \partial_\eta T] d\eta. \quad (57)$$

Здесь $\mathcal{L}^{\xi\xi} = \varkappa L^{\xi\xi}$, $\mathcal{L}^{\xi\eta} = \varkappa L^{\xi\eta}$; $\mathcal{L}^{\eta\eta}$, $\mathcal{L}^{\eta\xi}$ определяются аналогично: $\mathcal{L}^{\eta\eta} = \varkappa L^{\eta\eta}$, $\mathcal{L}^{\eta\xi} = \varkappa L^{\eta\xi}$. Для интегралов по границе ячейки в (57) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_e^{(\xi,\eta)}} \mathcal{L}^{\xi\xi} \partial_\xi T d\eta &\approx \mathcal{L}_e^{\xi\xi} T_\xi \hbar^\eta, & \mathcal{L}_e^{\xi\xi} &= [h_n^\eta \mathcal{L}_{ne}^{\xi\xi} + h_s^\eta \mathcal{L}_{se}^{\xi\xi}] / 2\hbar^\eta, \\ \int_{\partial S_e^{(\xi,\eta)}} \mathcal{L}^{\xi\eta} \partial_\eta T d\eta &\approx 0.5 [h_n^\eta \mathcal{L}_{ne}^{\xi\eta} T_{e,\eta} + h_s^\eta \mathcal{L}_{se}^{\xi\eta} T_{e,\bar{\eta}}]. \end{aligned}$$

Для вычисления разностных производных $T_{e,\eta}$, $T_{e,\bar{\eta}}$ будем использовать следующие формулы: $(T)_{e,\eta} = 0.5[T_{P,\eta} + T_{E,\eta}]$, $T_{e,\bar{\eta}} = 0.5[T_{P,\bar{\eta}} + T_{E,\bar{\eta}}]$. Поток через “северную” грань $\partial S_n^{(\xi,\eta)}$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{W}_n^\eta \hbar^\xi = \int_{\partial S_n^{(\xi,\eta)}} \mathcal{W}^\eta (\xi^\beta f) d\xi \approx \mathcal{L}_n^{\eta\eta} T_\eta \hbar^\xi + 0.5 [h_e^\xi \mathcal{L}_{ne}^{\eta\xi} T_{n,\xi} + h_w^\xi \mathcal{L}_{nw}^{\eta\xi} T_{n,\bar{\xi}}].$$

Здесь $\mathcal{L}_n^{\eta\eta} = [h_e^\xi \mathcal{L}_{ne}^{\eta\eta} + h_w^\xi \mathcal{L}_{nw}^{\eta\eta}] / (2h^\xi)$, $T_{n,\xi} = 0.5[T_{P,\xi} + T_{N,\xi}]$, $T_{n,\bar{\xi}} = 0.5[(T_{P,\bar{\xi}} + T_{N,\bar{\xi}})]$. Выражения для потоков через “западную” и “южную” грани вычисляются аналогичным образом.

Покажем, что построенный разностный оператор, аппроксимирующий диссипативные члены в уравнении теплопереноса, является самосопряжённым и отрицательно определённым.

Утверждение 4. В пространстве функций $D_h(\omega^{(\xi,\eta)})$ разностный оператор $\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f_{ij})/J_{i,j}$ отрицательно определён относительно сеточного скалярного произведения (22):

$$(\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, f) < 0.$$

Доказательство. Сеточное скалярное произведение $(\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, f)$ можно представить следующим образом [19]:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, f) = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in (I_\gamma \times J_\gamma)} h_{i+1/2}^\xi h_{j+1/2}^\eta [\mathcal{L}_{i+1/2,j+1/2}^{\xi\xi}(f_\xi)^2 + 2\mathcal{L}_{i+1/2,j+1/2}^{\xi\eta} f_\xi f_\eta + \mathcal{L}_{i+1/2,j+1/2}^{\eta\eta}(f_\eta)^2] - \\ & -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in (I_\gamma \times J_\gamma)} h_{i-1/2}^\xi h_{j+1/2}^\eta [\mathcal{L}_{i-1/2,j+1/2}^{\xi\xi}(f_{\bar{\xi}})^2 + 2\mathcal{L}_{i-1/2,j+1/2}^{\xi\eta} f_{\bar{\xi}} f_\eta + \mathcal{L}_{i-1/2,j+1/2}^{\eta\eta}(f_\eta)^2] - \\ & -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in (I_\gamma \times J_\gamma)} h_{i+1/2}^\xi h_{j-1/2}^\eta [\mathcal{L}_{i+1/2,j-1/2}^{\xi\xi}(f_\xi)^2 + 2\mathcal{L}_{i+1/2,j-1/2}^{\xi\eta} f_\xi f_{\bar{\eta}} + \mathcal{L}_{i+1/2,j-1/2}^{\eta\eta}(f_{\bar{\eta}})^2] - \\ & -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in (I_\gamma \times J_\gamma)} h_{i-1/2}^\xi h_{j-1/2}^\eta [\mathcal{L}_{i-1/2,j-1/2}^{\xi\xi}(f_{\bar{\xi}})^2 + 2\mathcal{L}_{i-1/2,j-1/2}^{\xi\eta} f_{\bar{\xi}} f_{\bar{\eta}} + \mathcal{L}_{i-1/2,j-1/2}^{\eta\eta}(f_{\bar{\eta}})^2]. \end{aligned}$$

Покажем, что квадратичные формы в квадратных скобках являются положительно определёнными, воспользовавшись критерием Сильвестра. Для углового минора первого порядка получим

$$\mathcal{L}_{pq}^{\xi\xi} = (\varphi_{pq,\bar{\eta}}^2 + \chi_{pq,\bar{\eta}}^2) / J_{pq} > 0, \quad p = i \pm 1/2, \quad q = j \pm 1/2,$$

так как $J_{pq} > 0$ для преобразования (9). Для углового минора второго порядка имеем

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{pq}^{\xi\xi} \mathcal{L}_{pq}^{\eta\eta} - (\mathcal{L}_{pq}^{\xi\eta})^2 = [(\varphi_{pq,\bar{\eta}}^2 + \chi_{pq,\bar{\eta}}^2)(\chi_{pq,\bar{\xi}}^2 + \varphi_{pq,\bar{\xi}}^2) - (\chi_{pq,\bar{\xi}} \chi_{pq,\bar{\eta}} + \varphi_{pq,\bar{\eta}} \varphi_{pq,\bar{\xi}})^2] / J_{pq}^2 = \\ & = (\varphi_{pq,\bar{\eta}} \chi_{pq,\bar{\xi}} - \varphi_{pq,\bar{\xi}} \chi_{pq,\bar{\eta}})^2 / J_{pq}^2 = 1 > 0, \quad p = i \pm 1/2, \quad q = j \pm 1/2. \end{aligned}$$

Таким образом, $(\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, f) < 0$. Утверждение доказано.

Утверждение 5. В пространстве функций $D_h(\omega^{(\xi,\eta)})$ разностный оператор $\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f_{ij})/J_{i,j}$ является самосопряжённым относительно сеточного скалярного произведения (22):

$$(\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, g) = (\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(g)/J, f).$$

Доказательство совпадает с доказательством утверждения 4 в работе [19].

4.4. АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВИЯ СТЕФАНА

Для аппроксимации условия Стефана (21) проинтегрируем уравнение теплопроводности (20) по ячейке $S_p^{(\xi,\eta)}$, содержащей границу раздела фаз. Область интегрирования разобьём на две подобласти: $S_p^{(\xi,\eta)+}$ — расположенную в жидкости и $S_p^{(\xi,\eta)-}$ — лежащую в твёрдой

фазе. В силу непрерывности температуры аппроксимация $\mathcal{T}^{(\xi,\eta)}(T)$ на межфазной границе, как и ранее, задаётся формулой (54). Проинтегрировав диссипативные члены по областям $S_{\text{p}}^{(\xi,\eta)+}$ и $S_{\text{p}}^{(\xi,\eta)-}$ и просуммировав полученные выражения, имеем [18, 19]

$$\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(T)\hbar^\xi\hbar^\eta = [\mathcal{W}_{\text{e}}^\xi - \mathcal{W}_{\text{w}}^\xi]\hbar^\eta + [\mathcal{W}_{\text{n}}^\eta - \mathcal{W}_{\text{s}}^\eta]\hbar^\xi + [\mathcal{W}_{\text{p}-}^\eta - \mathcal{W}_{\text{p}+}^\eta]\hbar^\xi.$$

Из условия Стефана (21) следует, что $\mathcal{W}_{\text{p}-}^\eta - \mathcal{W}_{\text{p}+}^\eta = (\lambda\rho\chi_\xi)_{\text{p}}v_{\text{ph}}$. Таким образом, на границе раздела фаз аппроксимация диссипативных членов (56) дополняется слагаемым, описывающим выделение/поглощение теплоты при смене агрегатного состояния вещества.

Для аппроксимации граничного условия (5) уравнение (20) необходимо проинтегрировать по приграничным ячейкам. Благодаря тому что аппроксимации условий на границе раздела фаз и границах областей согласованы с аппроксимациями соответствующих уравнений в регулярных точках, на разностном уровне выполнен закон сохранения энергии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для двухфазной задачи Стефана в области с искривленной боковой границей построена консервативная разностная схема, в которой на разностном уровне выполнен дискретный аналог закона сохранения внутренней энергии. Получена полностью неявная аппроксимация уравнения переноса якобиана, обеспечивающая выполнение закона сохранения площади ячейки в физической системе координат. Показано, что разностный оператор, аппроксимирующий диссипативные члены в уравнении теплопроводности, является самосопряжённым и отрицательно определённым. На основе предложенной в работе разностной схемы построен численный метод, разработан программный комплекс. Вычислительный алгоритм был использован для решения задачи о фазовом переходе в чистом веществе в областях с различной формой боковой границы. Расчёты показали, что, несмотря на то что в ходе процесса подвижная сетка в физической области существенно деформируется, разностные аналоги законов сохранения внутренней энергии и площади ячейки выполняются в дискретной среде с высокой точностью.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ferziger, J. Computational Methods for Fluid Dynamics / J. Ferziger, M. Peric. — Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 2002. — 421 p.
2. Thomas, P.D. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grid / P.D. Thomas, C.K. Lombard // AIAA J. — 1979. — V. 17. — P. 1030–1037.
3. Demirdzic, I. Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow / I. Demirdzic, M. Peric // Int. J. Numer. Methods Fluids. — 1988. — V. 8. — P. 1037–1050.
4. Vinokur, M. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation law / M. Vinokur // J. Comput. Phys. — 1989. — V. 81. — P. 1–52.
5. Авдошенко, А.Ю. Численный алгоритм моделирования пространственных течений несжимаемой жидкости на подвижных сетках / А.Ю. Авдошенко, С.Г. Черный, Д.В. Чирков // Вычислит. технологии. — 2012. — Т. 17, № 6. — С. 3–25.
6. Sjogreen, B. On high order finite-difference metric discretizations satisfying GCL on moving and deforming grids / B. Sjogreen, H.C. Yee, M. Vinokur // J. Comput. Phys. — 2014. — V. 265. — P. 211–220.
7. A moving mesh interface tracking method for simulation of liquid–liquid systems / A.H.L.M. Charin, Ž. Tuković, H. Jasak [et al.] // J. Comput. Phys. — 2017. — V. 334. — P. 419–441.

8. Rao, M. Moving boundary computation of the float zone process / M. Rao, W. Shyy // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* — 1997. — V. 40. — P. 1231–1261.
9. Kamakoti, R. Evaluation of geometric conservation law using pressure-based fluid solver and moving grid technique / R. Kamakoti, W. Shyy // *Int. J. Numer. Methods for Heat and Fluid Flow.* — 2003. — V. 14, № 7. — P. 851–865.
10. Kamakoti, R. Fluid-structure interaction for aeroelastic applications / R. Kamakoti, W. Shyy // *Progress in Aerospace Sciences.* — 2004. — V. 40, № 8. — P. 535–558.
11. Бахвалов, П.А. Рёберно-ориентированные схемы на подвижных гибридных сетках в коде NOISEtte / П.А. Бахвалов, В.А. Вершков // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2018. — 36 с.
12. Мажорова, О.С. Консервативные разностные схемы для термодиффузионной задачи Стефана / О.С. Мажорова, Ю.П. Попов, О.В. Щерица // *Дифференц. уравнения.* — 2013. — Т. 49, № 7. — С. 897–905.
13. Landau, H.G. Heat conduction in a melting solid / H.G. Landau // *J. Appl. Math.* — 1950. — V. 8. — P. 81–94.
14. Fletcher, C.A.J. *Computational Methods in Fluid Dynamics 2* / C.A.J. Fletcher. — Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 1988. — 484 p.
15. Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes / H. Zhang, M. Reggio, J.Y. Trepanier, R. Camarero // *Computers and Fluids.* — 1993. — V. 22, № 1. — P. 9–23.
16. Shyy, W. Structured moving grid and geometric conservation laws for fluid flow computation / W. Shyy, S. Pal, H.S. Udaykumar // *Numerical Heat Transfer. Part A: Applications.* — 1998. — V. 34, № 4. — P. 369–397.
17. Гусев, А.О. К вопросу об эквивалентности разностных методов решения задачи Стефана на подвижных и фиксированных сетках / А.О. Гусев, О.В. Щерица, О.С. Мажорова // *Дифференц. уравнения.* — 2021. — Т. 57, № 7. — С. 907–921.
18. Gusev, A.O. Conservative finite volume strategy for investigation of solution crystal growth techniques / A.O. Gusev, O.V. Shcheritsa, O.S. Mazhorova // *Computers and Fluids.* — 2020. — V. 202. — Art. 104501.
19. Гусев, А.О. О свойствах одного разностного метода решения двухфазной задачи Стефана / А.О. Гусев, О.В. Щерица, О.С. Мажорова // *Дифференц. уравнения.* — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 930–946.

GEOMETRIC CONSERVATION LAW FOR FINITE VOLUME DISCRETIZATION OF STEFAN PROBLEM ON BOUNDARY-FITTED GRIDS

A. O. Gusev¹, O. S. Mazhorova²

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia

e-mail: ¹aogus@mail.ru, ²olgamazhor@mail.ru

The conservative finite volume scheme for heat transfer problem in two-dimensional region with moving boundaries is presented. The two-phase Stefan problem is considered as an example. To track the moving interface between solid and liquid, the front-fixing technique is applied. The time varying physical domain is mapped to a fixed computational space with regular boundaries. Finite volume approximation of governing equations is constructed in computational domain on fixed rectangular grid. The geometric conservation law is incorporated into the numerical scheme. The Jacobian and the grid velocities of the control volume are evaluated to satisfy the discrete form of the Jacobian transport equation. This procedure guarantees the enforcing of space conservation law in the physical domain. The numerical scheme inherits the basic properties of the original differential problem.

Keywords: moving boundary problem, geometric conservation law, moving grids, boundary-fitted coordinate system, phase transition.

REFERENCES

1. Ferziger, J. and Peric, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
2. Thomas, P.D. and Lombard, C.K., Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grid, *AIAA J.*, 1979, vol. 17, pp. 1030–1037.
3. Demirdzic, I. and Peric, M., Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1988, vol. 8, pp. 1037–1050.
4. Vinokur, M., An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation law, *J. Comput. Phys.*, 1989, vol. 81, pp. 1–52.
5. Avdushenko, A.Yu., Cherny, S.G., and Chirkov, D.V., Chislennyi algoritmi modelirovaniya prostranstvennykh techeniy neszhimaemoy zhidkosti na podvizhnykh setkakh (Numerical method for incompressible fluid flow simulation on moving grids), *Vichislitelnie Tekhnologii*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 3–25.
6. Sjogreen, B., Yee, H.C., and Vinokur, M., On high order finite-difference metric discretizations satisfying GCL on moving and deforming grids, *J. Comput. Phys.*, 2014, vol. 265, pp. 211–220.
7. Charin, A.H.L.M., Tuković, Ž., Jasak, H., Silva, L.F.L.R., and Lage, P.L.C., A moving mesh interface tracking method for simulation of liquid–liquid systems, *J. Comput. Phys.*, 2017, vol. 334, pp. 419–441.
8. Rao, M. and Shyy, W., Moving boundary computation of the float zone process, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1997, vol. 40, pp. 1231–1261.
9. Kamakoti, R. and Shyy, W., Evaluation of geometric conservation law using pressure-based fluid solver and moving grid technique, *Int. J. Numer. Methods for Heat and Fluid Flow*, 2003, vol. 14, no. 7, pp. 851–865.
10. Kamakoti, R. and Shyy, W. Fluid-structure interaction for aeroelastic applications, *Progress in Aerospace Sci.*, 2004, vol. 40, no. 8, pp. 535–558.
11. Bakhvalov, P.A. and Vershkov, V.A., *Roberno-orientirovannyye skhemy na podvizhnykh gibridnykh setkakh v kode NOISEtte* (Edge-Based Schemes on Moving Hybrid Meshes in the NOISEtte Code), KIAM, 2018.
12. Mazhorova, O.S., Popov, Yu.P., and Shcheritsa, O.V., Conservative scheme for the thermodiffusion Stefan problem, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 869–882.
13. Landau, H.G., Heat conduction in a melting solid, *J. Appl. Math.*, 1950, vol. 8, pp. 81–94.
14. Fletcher, C.A.J., *Computational Methods in Fluid Dynamics 2*, Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.
15. Zhang, H., Reggio, M., Trepanier, J.Y., and Camarero, R., Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes, *Computers and Fluids*, 1993, vol. 22, no. 1, pp. 9–23.
16. Shyy, W., Pal, S., and Udaykumar, H.S., Structured moving grid and geometric conservation laws for fluid flow computation, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 1998, vol. 34, no. 4, pp. 369–397.
17. Gusev, A.O., Shcheritsa, O.V., and Mazhorova, O.S., Two equivalent finite volume schemes for Stefan problem on boundary-fitted grids: front-tracking and front-fixing techniques, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 876–890.
18. Gusev, A.O., Shcheritsa, O.V., and Mazhorova, O.S., Conservative finite volume strategy for investigation of solution crystal growth techniques, *Computers and Fluids*, 2020, vol. 202, art. 104501.
19. Gusev, A.O., Shcheritsa, O.V., and Mazhorova, O.S., On the properties of conservative finite volume scheme for the two-phase Stefan problem, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 930–946.