

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.622

СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ
УРАВНЕНИЙ С ФАКТОРИЗОВАННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© П. Н. Вабищевич

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова**Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь**e-mail: vab@cs.msu.ru, vabishchevich@gmail.com**Поступила в редакцию 10.01.2024 г., после доработки 10.01.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

При приближённом решении задачи Коши для эволюционных уравнений оператор задачи часто можно представить в виде суммы более простых операторов. Это даёт возможность строить операторно-разностные схемы расщепления, когда переход на новый слой по времени обеспечивается решением задач для отдельных операторных слагаемых. В статье рассмотрены нестационарные задачи, основная особенность которых связана с представлением оператора задачи в виде произведения оператора A и его сопряжённого оператора A^* . На основе трансформации исходного уравнения к системе двух уравнений строятся аппроксимации по времени для эволюционных уравнений второго порядка, когда аддитивное представление имеет место для оператора A . Предложены безусловно устойчивые схемы расщепления, исследования которых выполнены с привлечением общих результатов теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем в гильбертовых пространствах.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, факторизованный оператор, трёхслойная схема, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0374064124070024, EDN: KOFBCW

ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих прикладных задач необходимо приближённо решить задачу Коши для эволюционных уравнений первого и второго порядков и их систем. Можно выделить класс нестационарных задач, характерной особенностью которых является то, что основная часть оператора задачи представляется произведением двух операторов. В качестве примера можно привести задачи с квадратом эллиптического оператора второго порядка, в частности, эволюционные уравнения второго порядка с бигармоническим оператором являются типичными для механики тонких тел [1, гл. 1; 2, гл. 13].

При аппроксимации по времени основное внимание уделяется безусловно устойчивым неявным схемам [3, гл. 6; 4, гл. 9]. В теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [5, гл. 2, 3; 6, гл. 2, 4] получены не улучшаемые результаты по устойчивости двух- и трёхслойных схем в конечномерных гильбертовых пространствах. Основные недостатки неявных схем связаны со сложностью нахождения приближённого решения на новом слое по времени. Вычислительная сложность решения нестационарных задач может быть уменьшена при переходе к решению последовательности более простых задач.

Упрощение задачи на новом слое по времени наиболее просто реализуется для эволюционных задач, когда оператор задачи представляется в виде суммы простых операторов. Для таких задач строятся аддитивные операторно-разностные схемы, которые связаны с той

или иной неоднородной аппроксимацией по времени для отдельных слагаемых оператора задачи. Традиционный подход основан на явно-неявных аппроксимациях [7; 8, гл. 4], когда одна часть оператора задачи берётся с нижнего слоя по времени (явная аппроксимация), а другая — с верхнего (неявная аппроксимация). Наиболее последовательно эта идея аппроксимации по времени реализуется при построении схем расщепления [9; 10, гл. 3, 4], в этом случае переход на новый слой во времени осуществляется решением эволюционных задач для отдельных операторных членов.

Можно выделить эволюционные задачи, в которых оператор представлен как произведение двух или более операторов. В качестве примера отметим нестационарные задачи с переменными весовыми множителями, которые рассмотрены в работе [6, гл. 3, 5]. Для упрощения задач с произведением операторов на новом слое по времени строятся специальные временные аппроксимации, например, в статье [11] построены схемы, основанные на решении дискретной задачи на новом временном уровне с одним операторным коэффициентом. В работе [12] рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения второго порядка, в которой оператор задачи включает в себя произведение оператора A на его сопряжённый оператор A^* , построены безусловно устойчивые схемы, вычислительная реализация которых обеспечивается раздельным решением задач для операторов A и A^* и их отдельных операторных слагаемых.

В настоящей работе строятся схемы расщепления на основе аддитивного представления для отдельных операторных множителей A и A^* , когда $A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha$. Переход на новый слой по времени обеспечивается решением более простых задач для $A_\alpha^* A_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. За счёт введения новых искомым величин выполняется трансформация от эволюционного уравнения второго порядка к системе эволюционных уравнений первого порядка с аддитивным представлением операторной матрицы. Схемы расщепления для системы уравнений строятся и исследуются на основе теории аддитивных операторно-разностных схем.

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения второго порядка в конечномерном гильбертовом пространстве H (для упрощения ограничимся однородным уравнением):

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + B \frac{dw}{dt} + A^* A w = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$w(0) = w^0, \quad \frac{dw}{dt}(0) = \tilde{w}^0. \quad (2)$$

Будем считать, что операторы A и B в (1) постоянны (не зависят от t) и являются положительным и неотрицательным соответственно:

$$A > 0, \quad B \geq 0. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) возникает, например, после дискретизации по пространственным переменным при численном решении начально-краевых задач для гиперболических уравнений. Ключевая особенность рассматриваемой задачи связана с тем, что оператор A входит в уравнение (1) как произведение $A^* A$. Типичным примером частного случая $A = A^*$ является бигармонический оператор.

Для функций $u, v \in H$ определено скалярное произведение (u, v) и норма $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. С самосопряжённым положительно определённым оператором S свяжем гильбертово пространство H_S со скалярным произведением $(u, v)_S = (Su, v)$ и нормой $\|u\|_S = (u, v)_S^{1/2}$.

Предметом настоящего исследования является аппроксимация по времени для уравнения (1). Интересны, прежде всего, безусловно устойчивые схемы для приближённого решения задачи (1)–(3), которые удобны для вычислительной реализации. При получении соответствующих оценок устойчивости приближённого решения сопоставим их с априорными оценками для дифференциальной задачи.

Умножим уравнение (1) скалярно в H на dw/dt и получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{dw}{dt} \right\|^2 + \|Aw\|^2 \right) + \left(B \frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) = 0.$$

С учётом (2), (3) из этого равенства следует оценка

$$\left\| \frac{dw}{dt} \right\|^2 + \|Aw\|^2 \leq \|\tilde{w}^0\| + \|Aw^0\|, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

обеспечивающая устойчивость решения задачи (1)–(3) по начальным данным.

Будем использовать равномерную сетку по времени с шагом τ и обозначим $u^n = u(t^n)$, $t^n = n\tau$, $n = 0, \dots, N$, $N\tau = T$. В качестве базовой схемы для численного решения задачи (1)–(3) будем применять трёхслойную схему с весом σ ($\sigma = \text{const}$):

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + B \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} + A^* A (\sigma u^{n+1} + (1 - 2\sigma)u^n + \sigma u^{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5)$$

при начальных условиях

$$u^0 = w^0, \quad u^1 = \bar{w}^1. \quad (6)$$

Задание второго начального условия (6) требует отдельного обсуждения. На решениях задачи (1), (2) имеем

$$w(\tau) = w(0) + \tau \frac{dw}{dt}(0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 w}{dt^2}(\tau) + \mathcal{O}(\tau^3) = w^0 + \tau \tilde{w}^0 - \frac{\tau^2}{2} B \frac{dw}{dt}(\tau) - \frac{\tau^2}{2} A^* A w(\tau) + \mathcal{O}(\tau^3).$$

Простейшие явные аппроксимации дают значения

$$\bar{w}^1 = \left(I - \frac{\tau^2}{2} A^* A \right) w^0 + \tau \left(I - \frac{\tau}{2} B \right) \tilde{w}^0,$$

где I — единичный оператор в H . При их использовании нужно обеспечить повышенные требования к гладкости начальных условий (3). В силу этого будем ориентироваться на неявные аппроксимации

$$\left(I + \frac{\tau}{2} B + \frac{\tau^2}{2} A^* A \right) \bar{w}^1 = \left(I + \frac{\tau}{2} B \right) w^0 + \tau \tilde{w}^0$$

при нахождении решения на момент времени $t = \tau$.

Разностная схема (5), (6) аппроксимирует задачу (1), (2) со вторым порядком по τ . Сформулируем условия безусловной устойчивости этой схемы.

Теорема 1. *Трёхслойная операторно-разностная схема (5), (6) для приближённого решения задачи (1)–(3) безусловно устойчива при $\sigma \geq 1/4$, причём для решения выполнена оценка*

$$\left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right\|_C^2 + \left\| A \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right\|^2 \leq \left\| \frac{\bar{w}^1 - w^0}{\tau} \right\|_C^2 + \left\| A \frac{\bar{w}^1 + w^0}{2} \right\|^2 \quad (7)$$

для всех $n = 1, \dots, N-1$ при

$$C = I + (\sigma - 1/4) A^* A.$$

Доказательство. Принимая во внимание равенство

$$u^n = \frac{u^{n+1} + 2u^n + u^{n-1}}{4} - \frac{\tau^2}{4} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2},$$

перепишем (5) в виде

$$C \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + B \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} + A^* A \frac{u^{n+1} + 2u^n + u^{n-1}}{4} = 0. \quad (8)$$

При использовании переменных

$$s^n = \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, \quad r^n = \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}$$

уравнение (8) даёт соотношение

$$C \frac{r^{n+1} - r^n}{\tau} + B \frac{r^{n+1} + r^n}{2} + A^* A \frac{s^{n+1} + s^n}{2} = 0,$$

домножив которое на

$$2(s^{n+1} - s^n) = \tau(r^{n+1} + r^n),$$

получим

$$(Cr^{n+1}, r^{n+1}) + (A^* As^{n+1}, s^{n+1}) \leq (Cr^n, r^n) + (A^* As^n, s^n).$$

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая, что $C > 0$ при $\sigma \geq 1/4$, получаем искомую оценку (7). Теорема доказана.

Априорная оценка (7) выступает дискретным аналогом оценки (4). На новом $(n+1)$ -м слое по времени для схемы (5), (6) решается задача

$$(I + \tau B/2 + \sigma \tau^2 A^* A)u^{n+1} = \varphi^n \quad (9)$$

с известной правой частью

$$\varphi^n = (2 + (2\sigma - 1)\tau^2 A^* A)u^n - (1 - \tau B/2 + \sigma \tau^2 A^* A)u^{n-1}.$$

Вычислительные трудности решения этой дискретной задачи обусловлены не только сложностью операторов A , B , но и необходимостью работать с факторизованным оператором A^*A . Схемы расщепления базируются на аддитивном представлении операторов уравнения и использовании явно-неявных аппроксимаций по времени для упрощения задачи на новом слое.

Рассмотрим новый класс задач, сложность которых на новом слое по времени обусловлена прежде всего факторизованным оператором A^*A . Будем считать, что для операторов A и B имеет место аддитивное представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha, \quad B = \sum_{\alpha=1}^p B_\alpha, \quad B_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (10)$$

Построим аддитивные операторно-разностные схемы и вместо задачи (9) решим p более простых задач

$$(I + \sigma_B \tau B_\alpha \tau + \sigma_A \tau^2 A_\alpha^* A_\alpha)v_\alpha^{n+1} = \varphi_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

для нахождения приближённого решения u^{n+1} .

2. ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Схемы расщепления для задачи (1), (2), (10) будем строить на основе перехода от уравнения (1) к системе двух уравнений:

$$\frac{dw}{dt} + Bw + A^*y = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dt} - Aw = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (12)$$

Удобно записать систему (11), (12) в виде векторного уравнения первого порядка. Для нахождения вектора $\mathbf{w} = \{w, y\}$ получим задачу Коши

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{w} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (13)$$

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}^0, \quad (14)$$

где $\mathbf{w}^0 = \{w^0, y^0\}$. С учётом (2), (3) начальное условие для уравнения (12) следует из уравнения (11):

$$A^*y^0 = -Bw^0 - \tilde{w}^0.$$

Для операторной матрицы $\mathbf{A}$ имеем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} B & A^* \\ -A & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Будем рассматривать задачу (13)–(15) на прямой сумме пространств $\mathbf{H} = H \oplus H$, когда для $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{H}$ скалярное произведение и норма определяются как

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (w_1, w_2) + (y_1, y_2), \quad \|\mathbf{w}\| = (\mathbf{w}, \mathbf{w})^{1/2}.$$

Принимая во внимание (3), получаем

$$\mathbf{A} \geq 0. \quad (16)$$

Неотрицательность оператора $\mathbf{A}$ позволяет нам рассчитывать на априорные оценки для решений $\mathbf{w}$ задачи (13)–(15). Домножив уравнение (13) скалярно в $\mathbf{H}$ на $\mathbf{w}$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|^2 + (\mathbf{A}\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0.$$

Отсюда с учётом (16) имеем априорную оценку

$$\|\mathbf{w}(t)\|^2 \leq \|\mathbf{w}^0\|^2, \quad (17)$$

которую можно записать в виде неравенства

$$\|w(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 \leq \|w^0\|^2 + \|y^0\|^2$$

при рассмотрении решения задачи Коши для системы уравнений (11), (12).

3. СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

Для численного решения задачи Коши (13)–(15) будем использовать двухслойные схемы с весами. Приближённое решение $\mathbf{u}^n = \{u^n, v^n\}$ на новом слое по времени находится из задачи

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{A}(\sigma \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \sigma) \mathbf{u}^n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (18)$$

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{w}^0. \quad (19)$$

Для этой схемы при стандартных ограничениях $\sigma \geq 1/2$ имеем дискретный аналог априорной оценки (17):

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \leq \|\mathbf{w}^0\|^2, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (20)$$

Вычислительная реализация схемы (18), (19) связана с формулированием отдельных задач для нахождения компонент решения на новом слое по времени. Уравнение (18) даёт

$$\begin{aligned} (I + \sigma \tau B) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \sigma \tau A^* \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} + B u^n + A^* v^n &= 0, \\ \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \sigma \tau A \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - A u^n &= 0. \end{aligned}$$

Подставив выражение $v^{n+1} - v^n$ из второго уравнения в первое, получим

$$(I + \sigma \tau B + \sigma^2 \tau^2 A^* A) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (B + \sigma \tau A^* A) u^n + A^* v^n = 0. \quad (21)$$

Аналогичная задача решается при использовании трёхслойной схемы (5) при аппроксимации исходного эволюционного уравнения второго порядка (1). После решения задачи для нахождения u^{n+1} рассчитывается v^{n+1} :

$$v^{n+1} = v^n + \sigma \tau A(u^{n+1} - u^n) + \tau A u^n. \quad (22)$$

Можно строить схемы расщепления для приближённого решения задачи Коши (13)–(15), которые связываются с аддитивным расщеплением оператора [9; 10, гл. 3]. Принимая во внимание (10) и (15), для операторной матрицы $\mathbf{A}$ имеем аддитивное представление

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^p \mathbf{A}_\alpha, \quad \mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (23)$$

в котором

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} B_\alpha & A_\alpha^* \\ -A_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (24)$$

После расщепления (23), (24) можно использовать различные аддитивные операторно-разностные схемы для приближённого решения задачи (13)–(15). Особо выделим случай двухкомпонентного расщепления ($p=2$), когда применяются операторные аналогии классических схем переменных направлений [3, гл. 9; 10, гл. 4], среди которых отметим факторизованные схемы. При большем числе операторных слагаемых ($p \geq 2$) используются схемы покомпонентного расщепления первого и второго порядков аппроксимации по времени [9; 10, гл. 5], которые базируются на понятии суммарной аппроксимации [3, гл. 9]. Среди схем полной аппроксимации выделим регуляризованные (аддитивно-усреднённые) схемы [10, гл. 6]

и векторные аддитивные схемы [10, гл. 8]. Рассмотрим возможности построения обычных схем покомпонентного расщепления для приближённого решения задачи (13)–(15), (23), (24).

При использовании схемы покомпонентного расщепления приближённое решение на новом слое по времени определяется последовательным решением p задач:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+\alpha/p} - \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \mathbf{A}_\alpha(\sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (25)$$

Сформулируем основной результат об устойчивости по начальным данным рассматриваемой схемы расщепления.

Теорема 2. Аддитивная операторно-разностная схема (19), (25) для приближённого решения задачи (13)–(15) безусловно устойчива при расщеплении (23), (24) и $\sigma \geq 1/2$ с выполнением оценки (20).

Доказательство. Домножим скалярно в $\mathbf{H}$ уравнение (25) на $\sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}$. Принимая во внимание (23), получаем

$$(\mathbf{u}^{n+\alpha/p} - \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}, \sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}) \leq 0. \quad (26)$$

С учётом того что

$$\sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p} = (\mathbf{u}^{n+\alpha/p} + \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p})/2 + (\sigma - 1/2)(\mathbf{u}^{n+\alpha/p} - \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}),$$

при ограничениях на вес $\sigma \geq 1/2$ для левой части (26) имеем

$$2(\mathbf{u}^{n+\alpha/p} - \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}, \sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}) \geq \|\mathbf{u}^{n+\alpha/p}\|^2 - \|\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}\|^2.$$

Приходим к неравенствам

$$\|\mathbf{u}^{n+\alpha/p}\|^2 \leq \|\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

из которых следует искомая оценка устойчивости (20). Теорема доказана.

Вычислительная реализация рассматриваемой схемы покомпонентного расщепления базируется на использовании системы уравнений

$$\begin{aligned} (I + \sigma\tau B_\alpha) \frac{u^{n+\alpha/p} - u^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \sigma\tau A_\alpha^* \frac{v^{n+\alpha/p} - v^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + B_\alpha u^{n+(\alpha-1)/p} + A_\alpha^* v^{n+(\alpha-1)/p} &= 0, \\ \frac{v^{n+\alpha/p} - v^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \sigma\tau A_\alpha \frac{u^{n+\alpha/p} - u^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} - A_\alpha u^{n+(\alpha-1)/p} &= 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Аналогично (21), (22) последовательно определяются отдельные компоненты решения $\mathbf{u}^{n+\alpha/p} = \{u^{n+\alpha/p}, v^{n+\alpha/p}\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$: сначала находится $u^{n+\alpha/p}$ из решения задачи

$$(I + \sigma\tau B_\alpha + \sigma^2\tau^2 A_\alpha^* A_\alpha) \frac{u^{n+\alpha/p} - u^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + (B_\alpha + \sigma\tau A_\alpha^* A_\alpha) u^{n+(\alpha-1)/p} + A_\alpha^* v^{n+(\alpha-1)/p} = 0,$$

а затем возможно рассчитать $w^{n+\alpha/p}$ по формуле

$$v^{n+\alpha/p} = v^{n+(\alpha-1)/p} + \sigma\tau A_\alpha (u^{n+\alpha/p} - u^{n+(\alpha-1)/p}) + \tau A_\alpha u^{n+(\alpha-1)/p}.$$

Технически громоздкое исследование сходимости приближённого решения к точному проводится стандартным образом, базируясь на полученных оценках устойчивости. Для используемой схемы покомпонентного расщепления (19), (23)–(25) имеет место (см., например, [3, гл. 9; 10, гл. 5]) сходимость с первым порядком по τ . Для повышения точности до второго порядка вычисления организованы по схеме

$$\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_p \rightarrow \mathbf{A}_p \rightarrow \mathbf{A}_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_1$$

при выборе $\sigma = 1/2$.

4. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Отметим принципиальную возможность применения предложенного подхода при построении схем расщепления для уравнений первого порядка с факторизованным оператором. Рассматривается задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + A^*Aw + Bw = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (27)$$

$$w(0) = w^0 \quad (28)$$

при ограничениях (3). Для решения этой задачи имеет место оценка устойчивости по начальным данным

$$\|w(t)\| \leq \|w^0\|, \quad 0 < t \leq T. \quad (29)$$

Построение схем расщепления для приближённого решения задачи (27)–(29) проводится с помощью перехода к системе уравнений

$$\frac{dw}{dt} + A^*y + Bw = 0, \quad (30)$$

$$y - Aw = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (31)$$

Система и условия (30), (31) записываются в виде векторного уравнения первого порядка

$$B \frac{d\mathbf{w}}{dt} + A\mathbf{w} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (32)$$

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}^0, \quad (33)$$

где $\mathbf{w}^0 = \{w^0, 0\}$. Для операторных матриц B и A справедливо представление

$$B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} B & A^* \\ -A & I \end{pmatrix}. \quad (34)$$

В пространстве H получим

$$B = B^* \geq 0, \quad A \geq 0. \quad (35)$$

Неотрицательность оператора B не позволяет нам рассчитывать на априорные оценки для решений $\mathbf{w}$ задачи (32)–(34), мы можем ограничиться оценками для отдельных компонент вектора $\mathbf{w}$. Домножив уравнение (32) скалярно в H на $\mathbf{w}$, придём к оценке (29).

В условиях (3), (10) используется аддитивное представление (23), в котором

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} B_\alpha & A_\alpha^* \\ -A_\alpha & p^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (36)$$

Схемы расщепления строятся просто при положительности оператора B , что наблюдалось при рассмотрении эволюционного уравнения второго порядка (1). При предположении только о неотрицательности самосопряжённого оператора B , как в случае (35), устанавливается устойчивость соответствующих схем расщепления. Как можно легко убедиться, сходимость приближённого решения для схем суммарной аппроксимации уже не имеет места, поэтому при построении схем расщепления для задачи (32)–(36) мы должны ориентироваться на аддитивные операторно-разностные схемы полной аппроксимации.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Северо-Кавказского центра математических исследований по соглашению № 075-02-2022-892 и при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-11-00058).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dautray, K. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 1. Physical Origins and Classical Methods / K. Dautray, J.-L. Lions. — Berlin : Springer, 2000. — 722 p.
2. Fung, Y.C. Classical and Computational Solid Mechanics / Y.C. Fung, P. Tong, X. Chen. — New Jersey : World Scientific Publishing Company, 2017. — 860 p.
3. Samarskii, A.A. The Theory of Difference Schemes / A.A. Samarskii. — New York : Marcel Dekker, 2001. — 786 p.
4. LeVeque, R.J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems / R.J. LeVeque. — Philadelphia : SIAM, 2007. — 328 p.
5. Самарский, А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М. : Наука, 1973. — 415 с.
6. Samarskii, A.A. Difference Schemes with Operator Factors / A.A. Samarskii, P.P. Matus, P.N. Vabishchevich. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002. — 384 p.
7. Ascher, U.M. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations / U.M. Ascher, S.J. Ruuth, B.T.R. Wetton // SIAM J. Numer. Anal. — 1995. — V. 32, № 3. — P. 797–823.
8. Hundsdorfer, W.H. Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations / W.H. Hundsdorfer, J.G. Verwer. — Berlin : Springer, 2003. — 471 p.
9. Marchuk, G.I. Splitting and alternating direction methods / G.I. Marchuk // Handbook of Numerical Analysis / Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions. — North-Holland, 1990. — Vol. I. — P. 197–462.
10. Vabishchevich, P.N. Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes / P.N. Vabishchevich. — Berlin : De Gruyter, 2013. — 354 p.
11. Vabishchevich P.N. Operator-difference scheme with a factorized operator / P.N. Vabishchevich // Large-Scale Scientific Computing 10th Int. Conf. — Sozopol, Bulgaria, June 8–12, 2015. — P. 72–79.
12. Vabishchevich P.N. Splitting schemes for some second-order evolutionary equations / P.N. Vabishchevich // Int. J. Numer. Anal. Model. — 2022. — V. 19, № 1. — P. 19–32.

SPLITTING SCHEMES FOR EVOLUTION EQUATIONS WITH FACTORIZED OPERATOR

P. N. Vabishchevich

*Lomonosov Moscow State University, Russia
North-Caucasus Federal University, Stavropol, Russia
e-mail: vab@cs.msu.ru, vabishchevich@gmail.com*

In the approximate solution of the Cauchy problem for evolution equations, the problem operator can often be represented as a sum of simpler operators. This makes it possible to construct operator-difference splitting schemes, when the transition to a new level in time is provided by solving problems for separate operator summands. We consider nonstationary problems, the main feature of which is related to the representation of the problem operator as a product of the operator A by its conjugate operator A^* . Based on the transformation of the original equation to a system of two equations, we construct time approximations for second-order evolutionary equations when the additive representation

holds for the operator A . Unconditional stable splitting schemes are proposed, the study of which is carried out with the help of general results of the theory of stability (correctness) of operator-difference schemes in Hilbert spaces.

Keywords: evolution equation, factorized operator, three-level scheme, stability.

FUNDING

The work was carried out with support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the North Caucasus Center for Mathematical Research under agreement no. 075-02-2022-892, and with financial support from the Russian Science Foundation (project 24-11-00058).

REFERENCES

1. Dautray, K. and Lions, J.-L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 1. Physical Origins and Classical Methods*, Berlin: Springer, 2000.
2. Fung, Y.C., Tong, P., and Chen, X., *Classical and Computational Solid Mechanics*, New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2017.
3. Samarskii, A.A., *The Theory of Difference Schemes*, New York: Marcel Dekker, 2001.
4. LeVeque, R.J., *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*, Philadelphia: SIAM, 2007.
5. Samarskii, A.A. and Gulin, A.V., *Ustojchivost' raznostnykh skhem* (Stability of Difference Schemes), Moscow: Nauka, 1973.
6. Samarskii, A.A., Matus, P.P., and Vabishchevich, P.N., *Difference Schemes with Operator Factors*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
7. Ascher, U.M., Ruuth, S.J., and Wetton, B.T.R., Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1995, vol. 32, no. 3, pp. 797–823.
8. Hundsdorfer, W.H. and Verwer, J.G., *Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations*, Berlin: Springer, 2003.
9. Marchuk, G.I., Splitting and alternating direction methods, *Handbook of Numerical Analysis*, Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, 1990, vol. I, pp. 197–462.
10. Vabishchevich, P.N., *Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes*, Berlin: De Gruyter, 2013.
11. Vabishchevich, P.N., Operator-difference scheme with a factorized operator, *Large-Scale Scientific Computing 10th Int. Conf.*, Sozopol, Bulgaria, June 8–12, 2015, pp. 72–79.
12. Vabishchevich P.N., Splitting schemes for some second-order evolutionary equations, *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 19–32.