ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 7, с. 867–875

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.923+517.925.44

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ, ВОЗМУЩЁННОГО ДЕЛЬТА-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© А. С. Печенцов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: pechentsovas@rambler.ru

Поступила в редакцию 11.02.2024 г., после доработки 11.03.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Посвящается 85-летию моего учителя
академика Виктора Антоновича Садовничего

В гильбертовом пространстве $L^2[0,+\infty)$ рассмотрено возмущение оператора Штурма–Лиувилля дельта-функцией Дирака. Гладкий потенциал, растущий на бесконечности, обеспечивает дискретность спектра невозмущённого оператора. Найдено распределение собственных значений возмущения и установлена асимптотика собственных значений в зависимости от параметров возмущения.

Ключевые слова: самосопряжённый оператор, дискретный спектр, собственное значение, асимптотика.

DOI: 10.31857/S0374064124070019, EDN: KOHKUF

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим в пространстве $L^2[0,+\infty)$ оператор $\mathcal{H}$, порождаемый выражением

$$l_{a,b}:=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)+a\delta(x-b)$$

и краевым условием Дирихле $y(0)=0$, где δ — дельта-функция Дирака, $a>0$, $b>0$, вещественнозначная функция (потенциал) $q(x)\in C^2[0,+\infty)$ монотонно стремится к $+\infty$, причём $q'(x)>0$, $q''(x)\geqslant 0$ при $x>0$. Невозмущённый оператор $\mathcal{H}_0$, соответствующий значению $a=0$, обладает дискретным спектром $\{\lambda_n^0\}_{n=0}^\infty$ таким, что $\lambda_{n+1}^0>\lambda_n^0$, $n=0,1,2,\ldots$, $\lambda_n^0\to+\infty$, $n\to\infty$. Собственная функция (с. ф.) $\phi_n(x)$, соответствующая собственному значению (с. з.) λ_n^0, имеет n положительных нулей [1, § 5.12]. Следуя работам [2, 3], зададим оператор $\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H}y=l_{a,b}[y]$$

с областью определения $\operatorname{Dom}\mathcal{H}_{a,b}:=\{y\in L^2[0,+\infty)\colon y(x)\in AC[0,+\infty),\ y'(x)\in AC([0,+\infty)\setminus\{b\}),$ $y'(b+)-y'(b-)=ay(b),\ y(0)=0,\ l_{a,b}[y]\in L^2[0,+\infty)\}$. Оператор $\mathcal{H}$ является самосопряжённым полуограниченным снизу с дискретным спектром $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ [4].

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция $q(x)$ трижды дифференцируема на полуоси $[0,+\infty)$, причём $q'(x)>0$, $q''(x)\geqslant 0$ при $x>0$ и $q^{(k)}(x)/q^{(k-1)}(x)=O(x^{-1})$, $x\to+\infty$, $k=1,2,3$. Тогда собственные значения λ_n оператора $\mathcal{H}$ удовлетворяют неравенствам*

$$\lambda_0^0<\lambda_0<\lambda_1^0,\quad \lambda_n^0\leqslant\lambda_n<\lambda_{n+1}^0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Если $q(x)=cx^k$, $k\geqslant 1$, $c>0$, то собственные значения λ_n оператора $\mathcal{H}$ при $n\to\infty$ имеют асимптотику*

$$\lambda_n=\alpha(k)n^{\frac{2k}{k+2}}\left(1-\frac{k}{2(k+2)n}-\frac{2ka}{\pi(k+2)\sqrt{\alpha(k)}}n^{-\frac{2k+2}{k+2}}\sin\left(\int\limits_0^b\sqrt{\lambda_n-q(t)}\,dt\right)\sin(\sqrt{\lambda_n}b)+o\left(n^{-\frac{2k+2}{k+2}}\right)\right),$$

где

$$\alpha(k)=\left(\frac{\pi kc^{1/k}\Gamma(3/2+1/k)}{\Gamma(3/2)\Gamma(1/k)}\right)^{2k/(k+2)},$$

$\Gamma(z)$ — *гамма-функция Эйлера.*

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x)$ В $L^2[0,+\infty)$

Для построения решения $y(x,\lambda)\in L^2[0,+\infty)$ уравнения

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x) \tag{1}$$

применим метод эталонных решений [5, 6]. В силу возрастания функции $q(x)$ уравнение $g(x)=\lambda$ при $\lambda>q(0)$ имеет единственное решение $p(\lambda)$, называемое *точкой поворота*, и эта точка поворота простая, т.е. $g'(p(\lambda))\neq 0$. Сделаем замену переменной

$$\zeta=\zeta(x,\lambda)=\operatorname{sgn}(x-p(\lambda))\left(\frac{3}{2}\int\limits_x^{p(\lambda)}\sqrt{|(\lambda-q(t))|}\,dt\right)^{2/3}.$$

В качестве эталонных решений возьмём функции

$$u=u(x,\lambda)=B(x,\lambda)\mathrm{Ai}(\zeta),\quad v=v(x,\lambda)=B(x,\lambda)\mathrm{Bi}(\zeta),$$

где $B(x,\lambda)=\big(\zeta'(x,\lambda)\big)^{-1/2}$, $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$ — функции Эйри, причём вронскиан $W[\mathrm{Ai}(z),\mathrm{Bi}(z)]=1/\pi$ [7, гл. 11, § 1],

$$-u''+(q-\lambda)u=K(x,\lambda)u,$$

$$K(x,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{5}{36}\,\dfrac{\lambda-q}{Q_1^2(x,\lambda)}-\dfrac{1}{4}\,\dfrac{q''}{\lambda-q}-\dfrac{5}{16}\left(\dfrac{q'}{\lambda-q}\right)^2, & Q_1(x,\lambda)=\displaystyle\int\limits_x^{p(\lambda)}\sqrt{\lambda-q(t)}\,dt,\quad 0\leqslant x<p(\lambda),\\[2ex] \dfrac{5}{36}\,\dfrac{q-\lambda}{Q_2^2(x,\lambda)}+\dfrac{1}{4}\,\dfrac{q''}{q-\lambda}-\dfrac{5}{16}\left(\dfrac{q'}{\lambda-q}\right)^2, & Q_2(x,\lambda)=\displaystyle\int\limits_{p(\lambda)}^{x}\sqrt{q(t)-\lambda}\,dt,\quad p(\lambda)\leqslant x.\end{cases}$$

Следовательно, решение $y(x,\lambda)$ уравнения (1) формально удовлетворяет интегральному уравнению [8]

$$y(x,\lambda)=u(x,\lambda)-\int\limits_x^{+\infty}G(x,s,\lambda)K(s,\lambda)y(s,\lambda)\,ds, \tag{2}$$

где

$$G(x,s,\lambda)=u(x,\lambda)v(s,\lambda)-u(s,\lambda)v(x,\lambda).$$

Если потенциал $q(x)$ трижды дифференцируем на полуоси $[0,+\infty)$ и при $x\to+\infty$ удовлетворяет условиям

$$\frac{q'(x)}{q(x)}=O(x^{-1}),\quad \frac{q''(x)}{q'(x)}=O(x^{-1}),\quad \frac{q'''(x)}{q''(x)}=O(x^{-1}),$$

то при $\lambda\to+\infty$ справедлива оценка [9, гл. 22, лемма 22.27(1)]

$$J(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{|K(s,\lambda)|}{\sqrt{|\lambda-q(s)|}}\,ds=O\biggl(\frac{1}{p(\lambda)\sqrt{\lambda}}\biggr).$$

Следовательно, метод итераций для решения интегрального уравнения (2) приводит к решению $y_1(x,\lambda)$ уравнения (1), имеющему представление

$$y_1(x,\lambda)=u(x,\lambda)+r_1(x,\lambda), \tag{3}$$

в котором при $\lambda\to+\infty$ выполняется равномерная по x оценка

$$|r_1(x,\lambda)|=O\biggl(\frac{1}{p(\lambda)\sqrt{\lambda}}\biggr) \tag{4}$$

на всей полуоси $x\geqslant 0$. При фиксированном λ и $x\to+\infty$ справедливо представление [9, гл. 22, лемма 22.27(2)]

$$y_1(x,\lambda)=u(x,\lambda)\biggl(1+O\biggl(\frac{1}{x\sqrt{q(x)}}\biggr)\biggr)=B(x,\lambda)\mathrm{Ai}(\zeta)\biggl(1+O\biggl(\frac{1}{x\sqrt{q(x)}}\biggr)\biggr). \tag{5}$$

Для функции Эйри при $x\to+\infty$ справедлива асимптотика [7, гл. 11, § 1]

$$\mathrm{Ai}(x)=\frac{\exp\{-2x^{3/2}/3\}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}(1+O(x^{-3/2})),$$

при $x>p(\lambda)$ —

$$B(x,\lambda)=\biggl(3/2\int\limits_{p(\lambda)}^{x}\sqrt{q(t)-\lambda}\,dt\biggr)^{1/6}(g(x)-\lambda)^{-1/4},$$

поэтому

$$u(x,\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}(q(x)-\lambda)^{1/4}}\exp\biggl\{-\int\limits_{p(\lambda)}^{x}\sqrt{q(t)-\lambda}\,dt\biggr\}(1+o(1)),\quad x\to+\infty,$$

принадлежит пространству $L^2[0,+\infty)$, и в силу (3), (4) решение $y_1(x,\lambda)\in L^2[0,+\infty)$.

3. УРАВНЕНИЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА $\mathcal{H}$

Рассмотрим второе решение $y_2(x,\lambda)$ уравнения (1) с условиями в точке b:

$$y_2(b,\lambda)=0,\quad y_2'(b,\lambda)=1,$$

которое удовлетворяет интегральному уравнению [4, гл. 1, лемма 1.7(1)]

$$y_2(x,\lambda)=\frac{\sin\bigl(\sqrt{\lambda}(x-b)\bigr)}{\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_b^x\sin\bigl(\sqrt{\lambda}(x-s)\bigr)q(s)y_2(s,\lambda)\,ds.$$

Собственная функция $\psi(x,\lambda)$ оператора $\mathcal{H}$ на луче $x\in[b,+\infty)$ пропорциональна функции $y_1(x,\lambda)$, а на отрезке $0\leqslant x\leqslant b$ допускает представление

$$\psi(x,\lambda)=C_1(\lambda)y_1(x,\lambda)+C_2(\lambda)y_2(x,\lambda),$$

где коэффициенты $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ определяются из условий

$$\psi(x,\lambda)\in C[0,+\infty)\quad\text{и}\quad \psi'(b+,\lambda)-\psi'(b-,\lambda)=a\psi(b,\lambda).$$

Из системы линейных уравнений

$$C_1(\lambda)y_1(b,\lambda)+C_2(\lambda)y_2(b,\lambda)=y_1(b,\lambda), \quad C_1(\lambda)y_1'(b,\lambda)+C_2(\lambda)y_2'(b,\lambda)=y_1'(b,\lambda)-ay_1(b,\lambda)$$

находим

$$C_1(\lambda)=1, \quad C_2(\lambda)=-ay_1(b,\lambda).$$

Таким образом,

$$\psi(x,\lambda)=\begin{cases} y_1(x,\lambda)-ay_1(b,\lambda)y_2(x,\lambda), & 0\leqslant x\leqslant b,\\ y_1(x,\lambda), & x>b. \end{cases}$$

С учётом граничного условия $y(0)=0$ заключаем, что спектр оператора $\mathcal{H}$ совпадает с множеством корней целой функции

$$\Delta(\lambda):=\psi(0,\lambda)=y_1(0,\lambda)-ay_1(b,\lambda)y_2(0,\lambda)=0. \tag{6}$$

Собственные значения $\{\lambda_n^0\}_{n=0}^{\infty}$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ представляют собой нули функции $y_1(0,\lambda)$, занумерованные в порядке возрастания, а фунции $\phi_n(x)=y_1(x,\lambda_n^0)$ являются собственными функциями оператора $\mathcal{H}_0$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство теоремы 1 базируется на следующих трёх леммах.

Лемма 1. *На луче $(-\infty,\lambda_0^0]$ оператор $\mathcal{H}$ не имеет собственных значений.*

Доказательство. Поскольку при $-\infty<\lambda<\lambda_0^0$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x,\lambda)}{y_1(x,\lambda)}\right)=\frac{W[y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda)]}{y_1^2(x,\lambda)}=\frac{y_1(b,\lambda)}{y_1^2(x,\lambda)},$$

то по теореме Лагранжа существует точка ξ_b, $0<\xi_b<b$, такая, что

$$\frac{y_2(b,\lambda)}{y_1(b,\lambda)}-\frac{y_2(0,\lambda)}{y_1(0,\lambda)}=\frac{y_1(b,\lambda)b}{y_1^2(\xi_b,\lambda)}$$

и, следовательно,

$$\frac{\psi(0,\lambda)}{y_1(0,\lambda)}=1+a\frac{y_1^2(b,\lambda)b}{y_1^2(\xi_b,\lambda)}>0,$$

поэтому $\psi(0,\lambda)$ не обращается в нуль на интервале $(-\infty,\lambda_1^0)$. Собственная функция $\phi_0(x)=$ $=y_1(x,\lambda_0^0)$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ не имеет нулей при $x>0$ и в силу (5) является положительной при $x>0$, и тогда $y_1'(0,\lambda_0^0)>0$. Из равенства

$$W[y_1(0,\lambda),y_2(0,\lambda)]=W[y_1(b,\lambda),y_2(b,\lambda)] \tag{7}$$

получаем $y_1(b,\lambda_0^0)=-y_1'(0,\lambda_0^0)y_2(0,\lambda_0^0)$. Следовательно, $y_2(0,\lambda_0^0)<0$, поэтому

$$\Delta(\lambda_0^0):=\psi(0,\lambda_0^0)=ay_1'(0,\lambda_0^0)y_2^2(0,\lambda_0^0)>0.$$

Таким образом, λ_0^0 не является собственным значением оператора $\mathcal{H}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *На интервале $(\lambda_0^0,\lambda_1^0)$ оператор $\mathcal{H}$ имеет только одно собственное значение λ_0.*

Доказательство. Найдём значение функции $\Delta(\lambda)$ в точке $\lambda=\lambda_1^0$:

$$\Delta(\lambda_1^0)=\psi(0,\lambda_1^0)=-ay_1(b,\lambda_1^0)y_2(0,\lambda_1^0).$$

В силу (7) имеем $y_2(0,\lambda_1^0)=-y_1(b,\lambda_1^0)/y_1'(0,\lambda_1^0)$. Поэтому $\psi(0,\lambda_1^0)=ay_1^2(b,\lambda_1^0)/y_1'(0,\lambda_1^0)$, причём $y_1'(0,\lambda_1^0)<0$ (собственная функция $\phi_1(x)=y_1(x,\lambda_1^0)$ оператора $\mathcal{H}_0$ имеет один положительный нуль x_1^0, в котором $y_1'(x_1^0,\lambda_1^0)>0$, следовательно, $y_1'(0,\lambda_1^0)<0$). Если b не является нулём с. ф. $\phi_1(x)=y_1(x,\lambda_1^0)$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$, то $\Delta(\lambda_1^0)<0$. Тогда на концах отрезка $[\lambda_0^0,\lambda_1^0]$ непрерывная функция $\Delta(\lambda)$ принимает значения разных знаков, следовательно, на интервале $(\lambda_0^0,\lambda_1^0)$ существует нуль этой функции, обозначим его λ_0. Если b является нулём с. ф. $\phi_1(x)=y_1(x,\lambda_1^0)$, то $\Delta(\lambda_1^0)=0$ и λ_1^0 является с. з. оператора $\mathcal{H}$. В этом случае возьмём $\tilde\lambda$ из достаточно малой левой полуокрестности точки λ_1^0, в которой $\Delta(\tilde\lambda)<0$. Тогда на концах отрезка $[\lambda_0^0,\tilde\lambda]$ непрерывная функция $\Delta(\lambda)$ принимает значения разных знаков и на интервале $(\lambda_0^0,\tilde\lambda)$ существует нуль этой функции. Покажем, что λ_0 является единственным нулём функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(\lambda_0^0,\lambda_1^0)$.

Предположим, что существует ещё один нуль функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(\lambda_0^0,\lambda_1^0)$, обозначим его $\widetilde\lambda$ и для определённости будем считать, что $\lambda_0<\widetilde\lambda$. Нули решения уравнения (1) являются непрерывными функциями от λ [10, гл. 3, лемма 3.1] и при увеличении λ каждый нуль x_λ передвигается вправо [10, гл. 3, теорема 3.2]. Поэтому функция $\psi(x,\widetilde\lambda)$ имеет положительный нуль $\widetilde x_{1,\widetilde\lambda}$ — результат сдвига вправо нуля $\widetilde x_{1,\lambda_0}=0$ при увеличении λ от λ_0 до $\widetilde\lambda$. Решение $\phi_1(x)=y_1(x,\lambda_1^0)$ уравнения (1) при $\lambda=\lambda_1^0$ имеет только один положительный нуль x^0_{1,λ_1^0} — результат сдвига вправо нуля $x^0_{1,\lambda_0^0}=0$ решения $y_1(x,\lambda_0^0)$ при увеличении λ от λ_0^0 до λ_1^0, причём $\widetilde x_{1,\widetilde\lambda}\leqslant x^0_{1,\lambda_1^0}$. По теореме Штурма [10, гл. 3, теорема 3.1] между двумя нулями $\widetilde x_{2,\widetilde\lambda}=0<\widetilde x_{1,\widetilde\lambda}$ решения $\psi(x,\widetilde\lambda)$ уравнения (1) при $\lambda=\widetilde\lambda<\lambda_1^0$ заключён по крайней мере один нуль решения $\phi_1(x)=y_1(x,\lambda_1^0)$ уравнения (1) при $\lambda=\lambda_1^0$. Полученное противоречие доказывает единственность нуля функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(\lambda_0^0,\lambda_1^0)$, а следовательно, единственность с. з. λ_0 оператора $\mathcal{H}$ на интервале $(\lambda_0^0,\lambda_1^0)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *На промежутке $[\lambda_n^0,\lambda_{n+1}^0)$ оператор $\mathcal{H}$ имеет только одно собственное значение λ_n, $n\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Delta(\lambda)$ на отрезке $[\lambda_n^0,\lambda_{n+1}^0]$, $n\in\mathbb{N}$. Из равенства (7) следует, что

$$\Delta(\lambda_n^0)\Delta(\lambda_{n+1}^0)=a^2\frac{y_1^2(b,\lambda_n^0)y_1^2(b,\lambda_{n+1}^0)}{y_1'(0,\lambda_n^0)y_1'(0,\lambda_{n+1}^0)}=a^2\frac{y_1^2(b,\lambda_n^0)y_1^2(b,\lambda_{n+1}^0)}{\phi_n'(0)\phi_{n+1}'(0)}.$$

Так как $\phi_n'(0)\phi_{n+1}'(0)<0$, то $\Delta(\lambda_n^0)\Delta(\lambda_{n+1}^0)<0$, если b не является нулём с. ф. $\phi_n(x),\phi_{n+1}(x)$. В этом случае непрерывная функция $\Delta(\lambda)$ на концах отрезка $[\lambda_n^0,\lambda_{n+1}^0]$, $n=0,1,2,\ldots$, принимает значения с разными знаками. Следовательно, существует нуль $\lambda_n\in(\lambda_n^0,\lambda_{n+1}^0)$ функции $\Delta(\lambda)$. Если b является нулём с. ф. $\phi_n(x)$, то $\Delta(\lambda_n^0)=0$ и λ_n^0 является с. з. оператора $\mathcal{H}$. Доказательство единственности с. з. λ_n на промежутке $[\lambda_n^0,\lambda_{n+1}^0)$ проведём по индукции. При $n=0$ справедливость этого утверждения доказана в лемме 2. Предположим, что на промежутке $[\lambda_n^0,\lambda_{n+1}^0)$, $n\in\mathbb{N}$, оператор $\mathcal{H}$ имеет только одно с. з. λ_n, $n\in\mathbb{N}$. Заметим, что с. ф. $\phi_{n+1}(x)$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ имеет $n+1$ положительных нулей [1, § 5.12] $0=x^0_{n+1,0}<x^0_{n+1,1}<x^0_{n+1,2}<\ldots<x^0_{n+1,n+1}$, а с. ф. $\psi_n(x)=\psi(x,\lambda_n)$ оператора $\mathcal{H}$ имеет n положительных нулей $0=x_{n,0}<x_{n,1}<x_{n,2}<\ldots<x_{n,n}$. При переходе на следующий промежуток $[\lambda_{n+1}^0,\lambda_{n+2}^0)$ с. ф. $\phi_{n+2}(x)$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ будет иметь $n+2$ положительных нулей: $0=x^0_{n+2,0}<x^0_{n+2,1}<x^0_{n+2,2}<\ldots<x^0_{n+2,n+2}$, а с. ф. $\psi_{n+1}(x)=\psi(x,\lambda_{n+1})$ оператора $\mathcal{H}$ будет иметь $n+1$ положительных нулей: $0=x_{n+1,0}<x_{n+1,1}<x_{n+1,2}<\ldots<x_{n+1,n+1}$. Допустим, что на промежутке $[\lambda_{n+1}^0,\lambda_{n+2}^0)$ существует ещё с. з. $\widetilde\lambda$ (помимо λ_{n+1}) оператора $\mathcal{H}$, для определённости считаем, что $\lambda_{n+1}<\widetilde\lambda$. Тогда с. ф. $\widetilde\psi(x)=\psi(x,\widetilde\lambda)$, отвечающая с. з. $\widetilde\lambda$, будет иметь $n+2$ положительных нулей: $0=\widetilde{x_0}<\widetilde{x_1}<\widetilde{x_2}<\ldots<\widetilde x_{n+2}$ (результат сдвига вправо нулей $0 = x_{n+1,0} < x_{n+1,1} < x_{n+1,2} < \ldots < x_{n+1,n+1}$ при увеличении λ от λ_{n+1} до $\widetilde{\lambda}$). По теореме Штурма [10, гл. 3, теорема 3.1] между этими двумя нулями решения $\widetilde{\psi}(x)$ уравнения (1) при $\lambda = \widetilde{\lambda} < \lambda^0_{n+2}$ заключён по крайней мере один нуль решения $\phi_{n+2}(x) = y_1(x, \lambda^0_{n+2})$ того же уравнения при $\lambda = \lambda^0_{n+2}$. Следовательно, с. ф. $\phi_{n+2}(x)$ должна иметь не менее $n+3$ положительных нулей. Полученное противоречие доказывает единственность с. з. на промежутке $[\lambda^0_n, \lambda^0_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

5. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА $\mathcal{H}$

Из доказанной теоремы 1 следует, что с. з. λ_n имеют представление $\lambda_n = \lambda^0_n + \epsilon_n$, $0 \leqslant \epsilon_n < \lambda^0_{n+1} - \lambda^0_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Для нахождения асимптотики λ^0_n при $n \to \infty$ потребуется наложить дополнительные ограничения на "правильность" роста потенциала $q(x)$. Если $q''(x) = o((q'(x))^{4/3})$ при $x \to +\infty$, то [1, § 7.3]

$$n \sim \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{p(\lambda^0_n)} \sqrt{\lambda^0_n - q(t)}\, dt, \quad n \to \infty.$$

В частности, при $q(x) = cx^k$, $k \geqslant 1$, $c > 0$, вычисляя

$$I(\lambda^0_n) = \int\limits_0^{p(\lambda^0_n)} \sqrt{\lambda^0_n - ct^k}\, dt = \frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(1/k)}{kc^{1/k}\,\Gamma(3/2 + 1/k)} (\lambda^0_n)^{\frac{k+2}{2k}}, \tag{8}$$

получаем при $n \to \infty$ эквивалентность

$$\lambda^0_n \sim \alpha(k) n^{\frac{2k}{k+2}}, \quad \alpha(k) = \left(\frac{\pi k c^{1/k}\,\Gamma(3/2 + 1/k)}{\Gamma(3/2)\,\Gamma(1/k)}\right)^{\frac{2k}{k+2}}. \tag{9}$$

Пример 1 [11, 12]. Если $q(x) = x$, то

$$\lambda^0_n = \left(\frac{3}{2}\pi n\right)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{6n} + \left(\frac{5}{108\pi^2} - \frac{1}{144}\right)\frac{1}{n^2} + O(n^{-3})\right), \quad n \to \infty,$$

и справедлива асимптотика

$$\lambda_n = \left(\frac{3}{2}\pi n\right)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{a \sin^2(b(3\pi n/2)^{1/3})}{(3\pi n/2)^{4/3}} + O(n^{-5/3})\right), \quad n \to \infty.$$

Пример 2 [13]. Если $q(x) = (x^2 - 2)/4$, то $\lambda^0_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, и справедлива асимптотика

$$\lambda_n = 2n - 1 + \sqrt{2} a \pi^{-3/2} \frac{\sin^2(b\sqrt{2n})}{\sqrt{n}} + O(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Для потенциалов $q(x) = cx^k$, $k \geqslant 1$, $c > 0$, уточним асимптотику (9) для λ^0_n при $n \to \infty$. Из (3), (4) следует, что λ^0_n являются корнями уравнения

$$B(0, \lambda^0_n)\mathrm{Ai}(\zeta(0, \lambda^0_n)) + O\big((\lambda^0_n)^{-\frac{k+2}{2k}}\big) = 0.$$

При $x < p(\lambda)$

$$B(x, \lambda) = \left(\frac{3}{2} \int\limits_x^{p(\lambda)} \sqrt{\lambda - ct^k}\, dt\right)^{1/6} (\lambda - q(x))^{-1/4}, \tag{10}$$

поэтому в силу (8)

$$B(0,\lambda_n^0)=\frac{(3I(\lambda_n^0)/2)^{1/6}}{(\lambda_n^0)^{1/4}}=O\big((\lambda_n^0)^{\frac{1-k}{6k}}\big)$$

и, следовательно, λ_n^0 являются корнями уравнения

$$\mathrm{Ai}(\zeta(0,\lambda_n^0))=O\big((\lambda_n^0)^{-\frac{2k+7}{6k}}\big),\quad n\to\infty.$$

Корни последнего уравнения лежат вблизи нулей функции Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ при $\lambda_n^0\to+\infty$ и имеют вид

$$\zeta(0,\lambda_n^0)=a_n+\epsilon_n,\quad \mathrm{Ai}(a_n)=0,\quad \epsilon_n\to 0,\quad n\to\infty. \tag{11}$$

Для нулей функции Эйри известно полное асимптотическое разложение по степеням n при $n\to\infty$ [7, с. 388]

$$a_n\sim-\bigg(\frac{3}{8}\pi(4n-1)\bigg)^{2/3},\quad n\to\infty.$$

Так как

$$\zeta(0,\lambda_n^0)=-\bigg(\frac{3}{2}I(\lambda_n^0)\bigg)^{2/3}=-\bigg(\frac{3}{2}\alpha_k\bigg)^{2/3}(\lambda_n^0)^{\frac{k+2}{3k}},$$

то в силу (11)

$$\lambda_n^0\sim\alpha(k)\bigg(n-\frac{1}{4}\bigg)^{\frac{2k}{k+2}},\quad n\to\infty.$$

Доказательство теоремы 2. Требуется найти асимптотику при $\lambda\to+\infty$ корней уравнения (6), в котором для решения $y_1(x,\lambda)$ справедливо представление (3) с оценкой (4), а для решения $y_2(x,\lambda)$ справедливо представление [1, § 1.7, лемма 1.7(2)]

$$y_2(x,\lambda)=\frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-b))}{\sqrt{\lambda}}+O(\lambda^{-1}),$$

причём оценки выполняются равномерно по x. Функция Эйри $\mathrm{Ai}(-x)$ имеет следующее асимптотическое представление при $x\to+\infty$ [7, с. 377]:

$$\mathrm{Ai}(-x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}\bigg\{\cos\bigg(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{\pi}{4}\bigg)+O(x^{-3})\bigg\}.$$

Тогда, в силу (10), получаем асимптотическое представление при $\lambda\to+\infty$ эталонного решения

$$u(x,\lambda)=B(x,\lambda)\mathrm{Ai}(\zeta(x,\lambda))=\frac{1}{\sqrt{\pi}(\lambda-q(x))^{1/4}}\bigg\{\cos\bigg(\frac{2}{3}(-\zeta(x,\lambda))^{3/2}-\frac{\pi}{4}\bigg)+O((-\zeta)^{-3})\bigg\},$$

а уравнение на собственные значения оператора $\mathcal{H}$ при $\lambda\to+\infty$ можем записать как

$$\cos\bigg(\frac{2}{3}(-\zeta(0,\lambda))^{3/2}-\frac{\pi}{4}\bigg)-\frac{a}{\sqrt{\lambda}}\cos\bigg(\frac{2}{3}(-\zeta(b,\lambda))^{3/2}-\frac{\pi}{4}\bigg)\sin(\sqrt{\lambda}b)=O\big(\lambda^{-\frac{k+2}{2k}}\big). \tag{12}$$

Корни уравнения (12) лежат вблизи нулей функции $\cos(2(-\zeta(0,\lambda))^{3/2}/3-\pi/4)$ при $\lambda\to+\infty$ и имеют вид

$$\frac{2}{3}(-\zeta(0,\lambda_n))^{3/2}-\frac{\pi}{4}=\pi n-\frac{\pi}{2}+\epsilon_n,\quad \epsilon_n\to 0,\quad n\to\infty.$$

Так как
$$\frac{2}{3}(-\zeta(0,\lambda_n))^{3/2}=I(\lambda_n)=\frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(1/k)}{kc^{1/k}\,\Gamma(3/2+1/k)}(\lambda_n)^{\frac{k+2}{2k}},$$
то асимптотика собственных значений будет следующей:
$$\lambda_n=\alpha(k)n^{\frac{2k}{k+2}}\bigg(1-\frac{k}{2(k+2)n}+\frac{2k}{\pi(k+2)}\frac{\epsilon_n}{n}+O(n^{-2})\bigg),\quad n\to\infty. \tag{13}$$

Учитывая равенство
$$\frac{2}{3}(-\zeta(b,\lambda_n))^{3/2}=\frac{2}{3}(-\zeta(0,\lambda_n))^{3/2}-\int\limits_0^b\sqrt{\lambda_n-q(t)}\,dt$$
и асимптотики $\sin\varepsilon_n=\varepsilon_n+O(\varepsilon_n^3)$, $\cos\varepsilon_n=1+O(\varepsilon_n^2)$ при $n\to\infty$, из (12) получаем оценку для ε_n:
$$\varepsilon_n=-a\sin\bigg(\int\limits_0^b\sqrt{\lambda_n-q(t)}\,dt\bigg)\sin\big(\sqrt{\lambda_n}b\big)\,(\alpha(k))^{-1/2}n^{-\frac{k}{k+2}}+o\big(n^{-\frac{k}{k+2}}\big).$$

Ввиду (13) получаем
$$\lambda_n=\alpha(k)n^{\frac{2k}{k+2}}\bigg(1-\frac{k}{2(k+2)n}-\frac{2ka}{\pi(k+2)\sqrt{\alpha(k)}}n^{-\frac{2k+2}{k+2}}\sin\bigg(\int\limits_0^b\sqrt{\lambda_n-q(t)}\,dt\bigg)\sin\big(\sqrt{\lambda_n}b\big)+o\big(n^{-\frac{2k+2}{k+2}}\big)\bigg).$$

Теорема 2 доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш, Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Э.Ч. Титчмарш ; пер. с англ. В.Б. Лидского ; под ред. Б.М. Левитана. — М. : ИЛ, 1960. — Т. 1. — 278 с.
2. Савчюк, А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 1. — С. 897–912.
3. Савчюк, А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2003. — Т. 64. — С. 159–212.
4. Albeverio, S. Spectral theory of semibounded Sturm–Liouville operators with local interactions on a discrete set / S. Albeverio, A. Kostenko, M. Malamud // J. Math. Phys. — 2010. — V. 51, — Art. 102102.
5. Аленицын, А.Г. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля в случае предельного круга / А.Г. Аленицын // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 3. — С. 428–437.
6. Муртазин, Х.Х. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля / Х.Х. Муртазин, Т.Г. Амангильдин // Мат. сб. — 1979. — Т. 110 (151), № 1 (9). — С. 135–139.
7. Олвер, Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер ; пер. с англ. Ю.А. Брычкова ; под ред. А.П. Прудникова. — М. : Наука, 1990. — 528 с.
8. Giertz, M. On the solutions in $L^2[-\infty,+\infty)$ of $y''(x)+(\lambda-q(x))y(x)=0$ when q is rapidly increasing / M. Giertz // Proc. London Math. Soc. — 1964. — Ser. 3, № 14. — P. 53–73.
9. Титчмарш, Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Э.Ч. Титчмарш ; пер. с англ. В.Б. Лидского ; под ред. Б.М. Левитана. — М. : ИЛ, 1961. — Т. 2. — 550 с.

10. Левитан, Б.М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. — М. : Наука, 1988. — 512 с.
11. Печенцов, А.С. Распределение спектра одного сингулярного положительного оператора Штурма–Лиувилля, возмущённого δ-функцией Дирака / А.С. Печенцов // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 8. — С. 1058–1063.
12. Печенцов, А.С. Распределение спектра одного сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, возмущённого δ-функцией Дирака / А.С. Печенцов, А.Ю. Попов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 168–179.
13. Печенцов, А.С. Распределение спектра оператора Вебера, возмущённого δ-функцией Дирака / А.С. Печенцов // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1032–1038.

DISTRIBUTION OF SPECTRUM OF STURM–LIOUVILLE OPERATOR PERTURBED BY DELTA INTERACTION

A. S. Pechentsov

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: pechentsovas@rambler.ru

We consider singular Sturm–Liouville operator, perturbed by Dirac delta function. The smooth potention grows at infinity and ensures the discreteness of the spectrum of the unperturbed operator. We study the distribution of the perturbed operator and establish asymptotic behavior of the eigenvalues depending on the parameters of the perturbation.

Keywords: self-adjoint operator, discrete spectrum, eigenvalue, asymptotic.

REFERENCES

1. Titchmarsh, E.C., *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Eguations*, Oxford: Clarendon Press, 1946, vol. 1.
2. Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A., Sturm–Liouville operators with singular potentials, *Math. Notes*, 1999, vol. 66, no. 6, pp. 741–753.
3. Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A., Sturm–Liouville operators with distribution potentials, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2003, vol. 64, pp. 143–192.
4. Albeverio, S., Kostenko, A., Malamud, M. Spectral theory of semibounded Sturm–Liouville operators with local interaction on a discrete set, *J. Math. Phys.*, 2010, vol. 51, art. 102102.
5. Alenizin, A.G., Asimptotika spektra operatora Sturma–Liouville v sluchae predelnogo kruga (Asymptotic behavior of the spectrum of a Sturm–Liouville operator in the case of a limit circle), *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 428–437.
6. Murtazin, Kh.Kh. and Amangil'din T.G., The asymptotic expansion of the spectrum of a Sturm–Liouville operator, *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 38, no. 1, pp. 127–141.
7. Olver, F.W.J., *Asymptotics and Special Functions*, New York: Academic Press, 1974.
8. Giertz, M., On the solutions in $L^2[-\infty,+\infty)$ of $y''(x)+(\lambda-q(x))y(x)=0$ when q is rapidly increasing, *Proc. London Math. Soc.*, 1964, ser. 3, no. 14, pp. 53–73.
9. Titchmarsh, E.C., *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Eguations*, Oxford: Clarendon Press, 1946, vol. 2.
10. Levitan, B.M and Sargsyan, I.S., *Sturm–Liouville and Dirac Operators*, Dordrecht: Kluwer, 1991.
11. Pechentsov, A.S., Distribution of the spectrum of a singular positive Sturm–Liouville operator perturbed by the Dirac delta function, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 8, pp. 1029–1034.
12. Pechentsov, A.S. and Popov, A.Yu., Distribution of the spectrum of a singular Sturm–Liouville operator perturbed by the Dirac delta function, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 169–180.
13. Pechentsov, A.S., Spectral distribution of the Weber operator perturbed by the Dirac delta function, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1003–1009.