ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 6, с. 764–785

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.25

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БЕЗ УСЛОВИЯ ЗНАКА НА МЛАДШИЙ ЧЛЕН

© **Л. М. Кожевникова**

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, г. Стерлитамак
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Елабуга
e-mail: kosul@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2024 г., после доработки 11.01.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка с суммируемой правой частью. Ограничения на структуру уравнения формулируются в терминах обобщённой N-функции. В отличие от предыдущих работ автора, отсутствует условие знака на младший член уравнения. В нерефлексивных пространствах Музилака–Орлича–Соболева в произвольной неограниченной строго липшицевой области доказывается существование ренормализованного решения задачи Дирихле для данного уравнения.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, неограниченная область, пространство Музилака–Орлича, ренормализованное решение, существование решения.

DOI: 10.31857/S0374064124060043, EDN: KWHVAO

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)+M(\mathrm{x},u)/u+b(\mathrm{x},u,\nabla u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0 \tag{2}$$

в неограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, с, возможно, бесконечной мерой Лебега, $\partial\Omega$ — её граница. Здесь функции $\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})=(a_1(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}),\ldots,a_n(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}))$, $b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})$ имеют рост, определяемый функцией Музилака–Орлича $M(\mathrm{x},z)$. При этом на функцию M и сопряжённую к ней функцию $\overline{M}$ не требуются дополнительные ограничения по переменной z (обычно это Δ_2-условие). Предполагается, что по переменной $\mathrm{x}\in\Omega$ функция M подчиняется условию log-гёльдеровской непрерывности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерефлексивного пространства Музилака–Орлича.

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры и, в частности, из пространства $L_1(\Omega)$. В работе [1] доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega, \tag{3}$$

с неоднородной анизотропной функцией Музилака–Орлича.

Авторы работ [2, 3] установили существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(\mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)+\mathrm{c}(u))+a_0(\mathrm{x},u,\nabla u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega,$$

с функцией $\mathrm{c}\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

В статье [4] доказаны существование и единственность в пространствах Музилака–Орлича энтропийных и ренормализованных решений задачи (3), (2), установлена их эквивалентность. Все перечисленные результаты получены для ограниченных областей Ω.

Трудность исследования задач в областях с бесконечной мерой состоит в том, что оказываются неприменимыми теоремы вложения и аналог неравенства типа Фридрихса, поэтому установить ключевое соотношение (см. (17)) весьма затруднительно. Автор решает эту проблему включением в уравнение (1) слагаемого $M(\mathrm{x},u)/u$. Кроме того, важную роль в полученных результатах имеет теорема об аппроксимации элементов нерефлексивного пространства Музилака–Орлича–Соболева гладкими функциями (см. лемму 1). В работе [5] без ограничений на меру строго липшицевой области Ω доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле (1), (2) в нерефлексивных пространствах Музилака–Орлича–Соболева, при этом на младший член $b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})$ уравнения (1) накладывается условие знакоопределённости по переменной $s_0\in\mathbb{R}$:

$$b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})s_0\geqslant 0. \tag{4}$$

Другим способом в работе [6] установлено существование энтропийного решения задачи Дирихле в неограниченных областях для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с сингулярным мерозначным потенциалом, при этом на сопряжённую функцию $\overline{M}$ накладывается Δ_2-условие и младший член уравнения удовлетворяет условию знака. Следует отметить, что впервые в неограниченных областях, допускающих бесконечную меру, для функции $M(\mathrm{x},z)=|z|^{p(\mathrm{x})}$ существование энтропийного и ренормализованного решений уравнения (1) в анизотропных пространствах с переменными показателями нелинейностей было установлено в работах [7–9]. Более подробный обзор результатов см. в [10].

В ограниченных областях вопросы существования энтропийных и ренормализованных решений нелинейных эллиптических задач без условия (4) исследовались в работах [11, 12] и др. В настоящей статье впервые без ограничений на меру строго липшицевой области Ω и без условия знакоопределённости (4) доказано существование ренормализованного решения задачи (1), (2) в нерефлексивных пространствах Музилака–Орлича–Соболева.

1. ПРОСТРАНСТВА МУЗИЛАКА–ОРЛИЧА–СОБОЛЕВА

Приведём необходимые сведения из теории обобщённых N-функций и пространств Музилака–Орлича (см. [13]).

Определение 1. Пусть функция $M(\mathrm{x},z)\colon\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(\mathrm{x},\cdot)$ — N-функция по $z\in\mathbb{R}$, т.е. она является выпуклой вниз, неубывающей при $z\in\mathbb{R}_+$, чётной, непрерывной, $M(\mathrm{x},0)=0$ для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и

$$\operatorname{vrai}\inf_{\mathrm{x}\in\Omega}M(\mathrm{x},z)>0\quad\text{для всех}\quad z\neq 0,\quad \lim_{z\to 0}\operatorname{vrai}\sup_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=0,\quad \lim_{z\to\infty}\operatorname{vrai}\inf_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=\infty;$$

2) $M(\cdot,z)$ — измеримая функция по $\mathrm{x}\in\Omega$ для любых $z\in\mathbb{R}$.

Такая функция $M(\mathrm{x},z)$ называется *функцией Музилака–Орлича* или *обобщённой N-функцией.*

Сопряжённая функция $\overline{M}(\mathrm{x},\cdot)$ к функции Музилака–Орлича $M(\mathrm{x},\cdot)$ в смысле Юнга для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и любых $z\geqslant 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(\mathrm{x},z)=\sup_{y\geqslant 0}\big(yz-M(\mathrm{x},y)\big).$$

Отсюда следует неравенство Юнга

$$|zy|\leqslant M(\mathrm{x},z)+\overline{M}(\mathrm{x},y),\quad z,y\in\mathbb{R},\quad \mathrm{x}\in\Omega. \tag{5}$$

Следует отметить, что $\overline{M}$ также является N-функцией (см. [13, §§ 13.4, 13.6]).

Если для каждой положительной константы l

$$\lim_{z\to 0}\operatorname{vrai}\sup_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{P(\mathrm{x},lz)}{M(\mathrm{x},z)}=0\quad\text{или}\quad \lim_{z\to\infty}\operatorname{vrai}\sup_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{P(\mathrm{x},lz)}{M(\mathrm{x},z)}=0, \tag{6}$$

то будем обозначать $P\prec\prec M$ и говорить, что “P растёт медленнее, чем M в нуле или на бесконечности”.

Функция Музилака–Орлича N *удовлетворяет* Δ_2*-условию*, если существуют константы $c>0$, $z_0\geqslant 0$ и функция $H\in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и любых $|z|\geqslant z_0$ справедливо неравенство

$$N(\mathrm{x},2z)\leqslant cN(\mathrm{x},z)+H(\mathrm{x}).$$

В настоящей работе не предполагается, что N-функция M и её сопряжённая функция $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2-условию.

Существуют три класса Музилака–Орлича:

1) $\mathcal{L}_M(\Omega)$ — обобщённый класс Музилака–Орлича, состоящий из измеримых функций $v\colon\Omega\to\mathbb{R}$ таких, что

$$\varrho_{M,\Omega}(v)=\int\limits_{\Omega}M(\mathrm{x},v(\mathrm{x}))\,d\mathrm{x}<\infty;$$

2) $L_M(\Omega)$ — обобщённое пространство Музилака–Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс $\mathcal{L}_M(\Omega)$, с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{M,\Omega}=\inf\big\{\lambda>0\colon\varrho_{M,\Omega}(v/\lambda)\leqslant 1\big\};$$

3) $E_M(\Omega)$ — наибольшее линейное пространство, содержащееся в классе $\mathcal{L}_M(\Omega)$.

Очевидно, $E_M(\Omega)\subset\mathcal{L}_M(\Omega)\subset L_M(\Omega)$. Заметим, что для любого $v\in E_M(\Omega)$ и любого $\mu>0$ справедливо неравенство $\varrho_{M,\Omega}(v/\mu)<\infty$. Кроме того, для любого $v\in L_M(\Omega)$ найдётся $\lambda>0$ такое, что $\varrho_{M,\Omega}(v/\lambda)<\infty$ [13, теорема 7.4].

Ниже в обозначениях $\|\cdot\|_{M,Q}$, $\varrho_{M,Q}(\cdot)$, $\|\cdot\|_{1,Q}$, $\|\cdot\|_{\infty,Q}$ будем опускать индекс Q, если $Q=\Omega$.

Далее рассмотрим следующие условия на функцию Музилака–Орлича $M(\mathrm{x},z)$.

Условие (M1,loc). Функция $M(\mathrm{x},z)$ локально интегрируема, т.е.

$$\varrho_{M,Q}(z)=\int\limits_{Q}M(\mathrm{x},z)\,d\mathrm{x}<\infty,\quad z\in\mathbb{R},$$

для любого измеримого множества $Q\subset\Omega$ такого, что $\operatorname{meas}Q<\infty$.

Условие (M2). Функция $M(\mathrm{x},z)$ удовлетворяет log-гёльдеровой непрерывности по x, а именно: существуют константы $c>0$, $b\geqslant 1$ такие, что для всех $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\overline{\Omega}$, $|\mathrm{x}-\mathrm{y}|\leqslant 1/2$, $z\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$M(\mathrm{x},z)\leqslant\max\big\{|z|^{-c/\log|\mathrm{x}-\mathrm{y}|},b^{-c/\log|\mathrm{x}-\mathrm{y}|}\big\}M(\mathrm{y},z).$$

Заметим, что из условия (M2) следует непрерывность функции $M(\cdot,z)$ по $\mathrm{x}\in\overline{\Omega}$ для любых $z\in\mathbb{R}$.

Пусть функции M и $\overline{M}$ подчиняются условию (M1,loc). Тогда пространство $E_M(\Omega)$ является замыканием по норме $\|\cdot\|_M$ простых интегрируемых функций (см. [13, теорема 7.6]). Пространство $E_M(\Omega)$ сепарабельное и $(E_M(\Omega))^* = L_{\overline{M}}(\Omega)$. Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то $E_M(\Omega) = \mathcal{L}_M(\Omega) = L_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$ сепарабельное. Пространство $L_M(\Omega)$ рефлексивное тогда и только тогда, когда функции Музилака–Орлича M и $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2-условию.

Для $v \in L_M(\Omega)$ справедливо неравенство $\|v\|_M \leqslant \varrho_M(v)+1$.

Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v \in L_M(\Omega)$:

$$v^j \underset{j\to\infty}{\overset{M}{\to}} v,$$

если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \varrho_M\left((v^j - v)/\lambda\right) = 0.$$

Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Также для двух сопряжённых функций Музилака–Орлича M и $\overline{M}$ верно: если $u \in L_M(\Omega)$ и $v \in L_{\overline{M}}(\Omega)$, то выполняется неравенство Гёльдера

$$\left|\int\limits_\Omega u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}\right| \leqslant 2\|u\|_M\|v\|_{\overline{M}}.$$

Определим пространство Музилака–Орлича–Соболева $W^1L_M(\Omega) = \{v \in L_M(\Omega)\colon |\nabla v| \in L_M(\Omega)\}$ с нормой $\|v\|^1_M = \|v\|_M + \||\nabla v|\|_M$. Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $W^1L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v \in W^1L_M(\Omega)$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \varrho_M\big((v^j - v)/\lambda\big) = 0, \quad \lim_{j\to\infty} \varrho_M\big(|\nabla v^j - \nabla v|/\lambda\big) = 0.$$

Для краткости записи введём обозначения $(L_M(\Omega))^n = \mathrm{L}_M(\Omega)$, $(L_M(\Omega))^{n+1} = \mathbf{L}_M(\Omega)$, $(E_M(\Omega))^n = \mathrm{E}_M(\Omega)$, $(E_M(\Omega))^{n+1} = \mathbf{E}_M(\Omega)$. Пространство $W^1L_M(\Omega)$ отождествляется с подпространством произведения $\mathbf{L}_M(\Omega)$ и является замкнутым по слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_M, \mathbf{E}_{\overline{M}})$. Пространство $\mathring{W}^1L_M(\Omega)$ определим как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_M, \mathbf{E}_{\overline{M}})$ в $W^1L_M(\Omega)$. Пространство $\mathring{W}^1L_M(\Omega)$ банахово (см. [13, теорема 10.2]).

Определение 2. Область Ω подчиняется сегментному свойству, если существует открытое покрытие $\{\Theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ множества $\overline{\Omega}$ и соответствующие ненулевые векторы $\mathrm{z}_i \in \mathbb{R}^n$ такие, что $(\overline{\Omega}\bigcap\Theta_i) + t\mathrm{z}_i \subset \Omega$ для любых $t \in (0,1)$ и $i \in \mathbb{N}$.

Сформулируем теорему о плотности гладких функций в пространстве Музилака–Орлича–Соболева (см. [15, теорема 3]).

Лемма 1. *Предположим, что область Ω удовлетворяет сегментному свойству, а N-функция M удовлетворяет условию (M2), и пусть $\overline{M}$ удовлетворяет условию (M1,loc). Тогда для любого $v \in \mathring{W}^1L_M(\Omega)$ существует последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что*

$$v^j \underset{j\to\infty}{\overset{M}{\to}} v \quad \text{модулярно в } \mathring{W}^1L_M(\Omega), \quad j\to\infty.$$

Примеры функций Музилака–Орлича M, удовлетворяющих условиям леммы 1:

1. N-функция $M(\mathrm{x},z) = M(z)$;

2. $M_1(\mathrm{x},z) = |z|^{p(\mathrm{x})}$, $M_2(\mathrm{x},z) = |z|^{p(\mathrm{x})}\log(1+|z|)$, $M_3(\mathrm{x},z) = |z|\log^{p(\mathrm{x})}(1+|z|)$, $M_4(\mathrm{x},z) = e^{|z|^{p(\mathrm{x})}} - 1$, где $p\colon \Omega \to [p^-, p^+]$, $p^- = \inf_{\mathrm{x}\in\Omega} p(\mathrm{x}) > 1$, $p^+ = \sup_{\mathrm{x}\in\Omega} p(\mathrm{x}) < \infty$, и существует константа $c > 0$ такая, что для всех $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \overline{\Omega}$, $|\mathrm{x}-\mathrm{y}| \leqslant 1/2$, выполняется неравенство

$$|p(\mathrm{x}) - p(\mathrm{y})| \leqslant -c/\log|\mathrm{x}-\mathrm{y}|.$$

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Предполагается, что функции

$$\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})\colon \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})\colon \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), измеримы по $\mathrm{x}\in\Omega$ для $\mathbf{s}=(s_0,\mathrm{s})=(s_0,s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и выполнено

Условие (M). Существуют неотрицательные функции $\psi\in E_{\overline{M}}(\Omega)$, $\phi\in L_1(\Omega)$ и положительные константы $\widehat{a}$, $\overline{a}$, $\overline{d}$, $\widehat{d}$ такие, что для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и для любых $s_0\in\mathbb{R}$, $\mathrm{s},\mathrm{t}\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{s}\neq\mathrm{t}$, справедливы неравенства

$$\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})\cdot\mathrm{s}\geqslant\overline{a}M(\mathrm{x},\overline{d}|\mathrm{s}|)-\phi(\mathrm{x}),\tag{7}$$

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})|\leqslant\psi(\mathrm{x})+\widehat{a}\overline{M}^{-1}(\mathrm{x},M(\mathrm{x},\widehat{d}|\mathrm{s}|))+\widehat{a}\overline{M}^{-1}(\mathrm{x},P(\mathrm{x},s_0)),\tag{8}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})-\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{t}))\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{t})>0.\tag{9}$$

Здесь функция Музилака–Орлича $M(\mathrm{x},z)$ подчиняется условию (M2), сопряжённая к M функция $\overline{M}(\mathrm{x},z)$ удовлетворяет условию (M1,loc). Функция Музилака–Орлича $P(\mathrm{x},z)$ такая, что $P\prec\prec M$ в окрестности нуля и на бесконечности, $\mathrm{s}\cdot\mathrm{t}=\sum_{i=1}^n s_it_i$, $|\mathrm{s}|=\left(\sum_{i=1}^n s_i^2\right)^{1/2}$.

Кроме того, пусть существуют неотрицательная функция $\Phi_0\in L_1(\Omega)$ и непрерывная положительная функция $\widehat{b}\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $\widehat{b}\in L_1(\mathbb{R}^+)$ такие, что при п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ для всех $s_0\in\mathbb{R}$, $\mathrm{s}\in\mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$|b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})|\leqslant\widehat{b}(|s_0|)\left(M(\mathrm{x},\widetilde{d}|\mathrm{s}|)+\Phi_0(\mathrm{x})\right),\quad \widetilde{d}\leqslant\overline{d}.\tag{10}$$

Определим срезающую функцию $T_k(r)=\max\{-k,\min(k,r)\}$. Через $\mathring{\mathcal{T}}^1_M(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$ таких, что $T_k(u)\in\mathring{W}^1L_M(\Omega)$ при любом $k>0$. Для любой функции $u\in\mathring{\mathcal{T}}^1_M(\Omega)$ и любого $k>0$ имеем $\nabla T_k(u)=\chi_{\{|u|<k\}}\nabla u\in\mathrm{L}_M(\Omega)$, где χ_Q — характеристическая функция измеримого множества Q и ∇u — обобщённый градиент u. Введём обозначение $\langle u\rangle=\int_\Omega u\,d\mathrm{x}$.

Определение 3. *Ренормализованным решением задачи* (1), (2) называется функция $u\in\mathring{\mathcal{T}}^1_M(\Omega)$ такая, что при всех $k>0$ выполнены условия

1) $b(\mathrm{x},u,\nabla u)\in L_1(\Omega)$;
2) $T_k(u)M(\mathrm{x},u)/u\in L_1(\Omega)$;
3) $\mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)\chi_{\{\Omega\colon |u|<k\}}\in\mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega)$;
4) $\lim_{h\to\infty}\int_{\{\Omega\colon h\leqslant|u|<h+1\}}M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla u|)d\mathrm{x}=0$,

и для любых функций $S\in C_0^1(\mathbb{R})$, $\xi\in C_0^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\big\langle(b(\mathrm{x},u,\nabla u)+M(\mathrm{x},u)/u-f)S(u)\xi\big\rangle+\big\langle\mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)\cdot(S'(u)\xi\nabla u+S(u)\nabla\xi)\big\rangle=0.\tag{11}$$

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть область Ω строго липшицева и выполнено условие (M), тогда существует ренормализованное решение задачи (1), (2).*

Следует отметить, что в работе [16] без ограничений на меру строго липшицевой области Ω при тех же требованиях на функцию M для уравнения

$$-\operatorname{div}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)+M(\mathrm{x},u)/u+b(\mathrm{x},u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega,$$

при условии монотонности функции $b(\cdot,s_0)$ установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле и доказана их единственность.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Предположим, что область Ω строго липшицева и выполнено условие (M). Заметим, что из условия строгой липшицевости следует сегментное свойство. Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Приведем теорему Витали в следующей форме (см. [17, гл. III, § 6, теорема 15]).

Лемма 2. *Пусть $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций из $L_1(\Omega)$ такая, что*

$$v^j \to v \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j\to\infty. \tag{12}$$

Для сходимости

$$v^j \to v \quad \text{сильно в } L_1(\Omega), \quad j\to\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ имела равностепенно абсолютно непрерывные интегралы: для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta>0$ и измеримое множество $Q_\varepsilon\subset\Omega$, $\operatorname{meas} Q_\varepsilon<\infty$, такие, что

(i) $\int_Q |v^j(\mathrm{x})|\,d\mathrm{x}<\varepsilon$ для любого $Q\subset\Omega$, $\operatorname{meas} Q<\delta$, $j\in\mathbb{N}$;

(ii) $\int_{\Omega\setminus Q_\varepsilon} |v^j(\mathrm{x})|\,d\mathrm{x}<\varepsilon$, $j\in\mathbb{N}$.

Замечание 1. Очевидно, что в случае $\operatorname{meas}\Omega<\infty$ условие (ii) вытекает из условия (i).

Пользуясь выпуклостью функции $\overline{M}$, из (8) выводим оценку

$$3\overline{M}\left(\mathrm{x},\frac{|\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})|}{3\widehat{a}}\right)\leqslant M(\mathrm{x},\widehat{d}|\mathrm{s}|)+\overline{M}\left(\mathrm{x},\frac{\psi}{\widehat{a}}\right)+P(\mathrm{x},s_0)=M(\mathrm{x},\widehat{d}|\mathrm{s}|)+\Psi(\mathrm{x})+P(\mathrm{x},s_0) \tag{13}$$

с функцией $\Psi\in L_1(\Omega)$. Применяя (5), (13), для $\mathrm{s}^1,\mathrm{s}^2\in\mathbb{R}^n$ и любого $\mu>0$ устанавливаем неравенства

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}^1)|\,|\mathrm{s}^2|\leqslant 3\widehat{a}\mu\left(\overline{M}\left(\mathrm{x},\frac{|\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}^1)|}{3\widehat{a}}\right)+M\left(\mathrm{x},\frac{|\mathrm{s}^2|}{\mu}\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant\widehat{a}\mu\left(M(\mathrm{x},\widehat{d}|s^1|)+P(\mathrm{x},s_0)+3M\left(\mathrm{x},\frac{|\mathrm{s}^2|}{\mu}\right)+\Psi(\mathrm{x})\right). \tag{14}$$

Заметим, что ввиду $P\prec\prec M$, согласно (6), для любого $\varepsilon>0$ найдётся число $C(\varepsilon)$ такое, что для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и $z\in\mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$P(\mathrm{x},z)\leqslant C(\varepsilon)M(\mathrm{x},\varepsilon z). \tag{15}$$

Предложение 1 (см. [5, предложение 1]). *Пусть $v\colon\Omega\to\mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что при всех $k\geqslant 1$ $T_k(v)\in \mathring{W}^1L_M(\Omega)$ и выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\{\Omega:\ |v|\geqslant k\}}\frac{M(\mathrm{x},v)}{|v|}\,d\mathrm{x}\leqslant C_1, \tag{16}$$

тогда для любого $\varepsilon>0$ найдётся $k_0(C_1,M,\varepsilon)$ такое, что справедливо неравенство

$$\operatorname{meas}\{\Omega\colon |v|\geqslant k\}<\varepsilon, \quad k\geqslant k_0. \tag{17}$$

Лемма 3 (см. [14, лемма 2]). *Пусть $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность функций из $L_M(\Omega)$ такая, что имеет место сходимость (12), тогда $v\in L_M(\Omega)$ и $v^j\rightharpoonup v$, $j\to\infty$, в топологии $\sigma(L_M,E_{\overline{M}})$ пространства $L_M(\Omega)$.*

Следствием теоремы Витали является

Лемма 4 (см. [15, лемма 2]). *Пусть* v, $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *— функции из* $L_M(\Omega)$ *и*

$$v^j \overset{M}{\to} v \quad \textit{модулярно в } L_M(\Omega), \quad j\to\infty.$$

Тогда $v^j \rightharpoonup v$, $j\to\infty$, *в топологии* $\sigma(L_M, L_{\overline{M}})$ *пространства* $L_M(\Omega)$.

Лемма 5. *Пусть* $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *— ограниченная последовательность функций из* $L_\infty(\Omega)$ *такая, что имеет место сходимость (12), тогда* $v\in L_\infty(\Omega)$, $v^j\rightharpoonup v$, $j\to\infty$, *в топологии* $\sigma(L_\infty, L_1)$ *пространства* $L_\infty(\Omega)$.

Если, кроме того, $g\in L_M(\Omega)(E_M(\Omega))$, *то*

$$v^j g\to vg \quad \textit{модулярно (сильно) в } L_M(\Omega)(E_M(\Omega)), \quad j\to\infty.$$

Доказательство леммы 5 следует из теоремы Лебега.

Замечание 2. Пусть $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, v — измеримые в области Ω функции такие, что имеет место сходимость (12). Тогда

$$\chi_{\{\Omega:\,|v^j|\leqslant k\}}\to\chi_{\{\Omega:\,|v|\leqslant k\}} \quad \text{п.в. на } \Omega, \quad j\to\infty,$$

для k таких, что

$$\operatorname{meas}\{\Omega\colon |v|=k\}=0. \tag{18}$$

Таких k, для которых условие (18) не выполнено, может быть не более чем счётное множество. Положительные числа k, для которых выполнено условие (18), будем называть "правильными" для функции v (см. [18, лемма 9]).

Лемма 6 (см. [13, определение 9.1, лемма 9.2]). *Пусть* $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *— последовательность функций из* $E_M(\Omega)$. *Для сходимости*

$$v^j\to 0 \quad \textit{в } E_M(\Omega), \quad j\to\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого измеримого множества $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, $\operatorname{meas}\widetilde{\Omega}<\infty$,

$$v^j\to 0 \quad \textit{по мере в } \widetilde{\Omega}, \quad j\to\infty,$$

и семейство функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *имело равностепенно абсолютно непрерывные нормы: для любого* $\varepsilon>0$ *существует измеримое множество* $Q_\varepsilon\subset\Omega$, $\operatorname{meas} Q_\varepsilon<\infty$, *и* $\delta>0$ *такие, что*

(iii) $\|v^j\chi_Q\|_M<\varepsilon$ *для любого* $Q\subset Q_\varepsilon$, $\operatorname{meas} Q<\delta$, $j\in\mathbb{N}$;

(iv) $\|v^j\chi_{\Omega\setminus Q_\varepsilon}\|_M<\varepsilon$, $j\in\mathbb{N}$.

Лемма 7. *Пусть функция* M *подчиняется условию (M1,loc), тогда для любой функции* $v\in E_M(Q)$, $\operatorname{meas}(Q)<\infty$, *её норма абсолютно непрерывна, т.е. выполнены условия (iii), (iv).*

Доказательство следует из [13, лемма 13.16] и плотности ограниченных функций в $E_M(Q)$.

Лемма 8. *Пусть* g^j, $j\in\mathbb{N}$, g *— такие функции из пространства* $L_1(\Omega)$, *что* $g^j\geqslant 0$ *п.в. в* Ω,

$$g^j\to g \quad \textit{сильно в } L_1(\Omega), \quad j\to\infty,$$

и пусть v^j, $j\in\mathbb{N}$, v *— измеримые функции в* Ω *такие, что имеет место сходимость (12) и*

$$|v^j|\leqslant g^j \quad \textit{п.в. в } \Omega, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$\lim_{j\to\infty}\langle v^j-v\rangle=0, \quad j\to\infty.$$

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ

4.1. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Положим
$$f^m(\mathrm{x}) = T_m f(\mathrm{x})\chi_{\Omega(m)}, \quad \Omega(m) = \{\mathrm{x}\in\Omega\colon |\mathrm{x}|<m\}, \quad m\in\mathbb{N}.$$
Несложно показать, что
$$f^m \to f \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m\to\infty, \tag{19}$$
и при этом
$$|f^m(\mathrm{x})| \leqslant |f(\mathrm{x})|, \quad |f^m(\mathrm{x})| \leqslant m\chi_{\Omega(m)}, \quad \mathrm{x}\in\Omega, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

Рассмотрим уравнения
$$-\operatorname{div}\mathrm{a}^m(\mathrm{x},u,\nabla u) + a_0^m(\mathrm{x},u,\nabla u) = f^m(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x}\in\Omega, \quad m\in\mathbb{N}, \tag{21}$$
с функциями
$$\mathrm{a}^m(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}) = \mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(s_0),\mathrm{s}), \quad a_0^m(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}) = b^m(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}) + M(\mathrm{x},s_0)/s_0,$$
где $\mathrm{a}^m(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}) = (a_1^m(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}),\ldots,a_n^m(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}))$, $b^m(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}) = T_m b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})\chi_{\Omega(m)}$. Очевидно, что
$$|b^m(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})| \leqslant |b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})|, \quad |b^m(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})| \leqslant m\chi_{\Omega(m)}, \quad \mathrm{x}\in\Omega, \quad (s_0,\mathrm{s})\in\mathbb{R}^{n+1}. \tag{22}$$

Для каждого $m\in\mathbb{N}$ существует обобщённое решение $u^m\in \mathring{W}^1 L_M(\Omega(m))$ уравнения (21) [19, теорема 13]. Продолжим u^m нулём на $\Omega\setminus\Omega(m)$, тогда для любой функции $v\in\mathring{W}^1 L_M(\Omega(l))\cap$ $\cap L_\infty(\Omega(l))$, $l\leqslant m$, выполняется интегральное равенство
$$\big\langle (b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m) + M(\mathrm{x},u^m)/u^m - f^m(\mathrm{x}))v\big\rangle + \big\langle \mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla v\big\rangle = 0, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

4.2. ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ

Установим априорные оценки для последовательности $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Пусть
$$\widehat{B}(s_0) = \frac{1}{\overline{a}}\int\limits_0^{s_0}\widehat{b}(|z|)\,dz,$$
тогда $0\leqslant\widehat{B}(s_0)\leqslant\widehat{B}(+\infty) = \overline{a}^{-1}\int_0^\infty\widehat{b}(|z|)dz = C_0<\infty$, $s_0\in\mathbb{R}^+$. Очевидно, что функция $\widehat{b}$ ограничена на $\mathbb{R}^+$, следовательно, справедлива оценка $\widehat{b}(|s_0|)\leqslant\widehat{C}$, $s_0\in\mathbb{R}$.

Положив в (23) $v = T_{k,h}(u^m)e^{2\widehat{B}(|u^m|)} = T_k(u^m - T_h(u^m))e^{2\widehat{B}(|u^m|)}$, $h,k>0$, будем иметь
$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}} \mathrm{a}\big(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m\big)\cdot\nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x} +$$
$$+\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}\big(b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m) + M(\mathrm{x},u^m)/u^m\big)T_{k,h}(u^m)e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x} +$$
$$+\frac{2}{\overline{a}}\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\widehat{b}(|u^m|)|T_{k,h}(u^m)|\,d\mathrm{x} \leqslant k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}}|f^m|e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}.$$

Далее выводим

$$\int\limits_{\{h\leqslant |u^m|<k+h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}+\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{u^m}T_{k,h}(u^m)e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}+$$

$$+\frac{2}{\overline{a}}\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\widehat{b}(|u^m|)|T_{k,h}(u^m)|\,d\mathrm{x}\leqslant$$

$$\leqslant k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}}|f|e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}+\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)||T_{k,h}(u^m)|e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}. \tag{24}$$

С учётом (7) и (10) оценим третий интеграл в левой части неравенства (24):

$$\frac{2}{\overline{a}}\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\widehat{b}(|u^m|)|T_{k,h}(u^m)|\,d\mathrm{x}\geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}\left(M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla u^m|)-\frac{\phi}{\overline{a}}\right)e^{2\widehat{B}(|u^m|)}\widehat{b}(|u^m|)|T_{k,h}(u^m)|\,d\mathrm{x}\geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}\left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|-\widehat{b}(|u^m|)\left(\frac{\phi}{\overline{a}}+\Phi_0\right)\right)e^{2\widehat{B}(|u^m|)}|T_{k,h}(u^m)|\,d\mathrm{x}\geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}\left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|-\widehat{C}\left(\frac{\phi}{\overline{a}}+\Phi_0\right)\right)e^{2\widehat{B}(|u^m|)}|T_{k,h}(u^m)|\,d\mathrm{x}. \tag{25}$$

Объединяя оценки (24), (25), выводим неравенство

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}}\big(\mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla u^m+\phi\big)\,d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}}\left(\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}+|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|\right)|T_{k,h}(u^m)|\,d\mathrm{x}\leqslant C_4\int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}}(k\phi_1+\phi)\,d\mathrm{x}, \tag{26}$$

где ϕ_1 — положительная функция из пространства $L_1(\Omega)$. Отсюда следует соотношение

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}}\big(\mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla u^m+\phi\big)\,d\mathrm{x}+k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k+h\}}\left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|+\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)d\mathrm{x}\leqslant$$

$$\leqslant C_4\int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}}(k\phi_1+\phi)\,d\mathrm{x}\leqslant C_5k+C_6,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{27}$$

В частности, полагая в (26) $h=0$, устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\{|u^m|<k\}}\big(\mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)+\phi\big)\,d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|+\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)|T_k(u^m)|\,d\mathrm{x}\leqslant C_5k+C_6,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{28}$$

Отсюда, применяя (7), выводим

$$\overline{a}\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla u^m|)\,d\mathrm{x}+k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}}\left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|+\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)d\mathrm{x}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{a}\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla u^m|)\,d\mathrm{x}+\int\limits_{\Omega}\left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|+\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)|T_k(u^m)|\,d\mathrm{x}\leqslant$$

$$\leqslant C_6+C_5k,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{29}$$

Из неравенства (28) имеем

$$\int\limits_{\Omega} M(\mathrm{x},T_k(u^m))\,d\mathrm{x}=\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},u^m)\,d\mathrm{x}+\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} M(\mathrm{x},k)\,d\mathrm{x}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},u^m)\,d\mathrm{x}+k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}}\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\,d\mathrm{x}=\int\limits_{\Omega}\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{u^m}T_k(u^m)\,d\mathrm{x}\leqslant$$

$$\leqslant C_5k+C_6,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{30}$$

Кроме того, из (29) следует оценка

$$\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla u^m|)\,d\mathrm{x}=\int\limits_{\Omega} M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla T_k(u^m)|)\,d\mathrm{x}\leqslant C_7(k),\quad m\in\mathbb{N}. \tag{31}$$

Из (28), (10), (31) в частности, имеем

$$\|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)\|_1\leqslant C_8(k),\quad m\in\mathbb{N}, \tag{32}$$

а из оценок (30), (31) выводим

$$\|T_k(u^m)\|_M+\|\nabla T_k(u^m)\|_M\leqslant C_9(k),\quad m\in\mathbb{N}.$$

4.3. СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ

Из оценки (29), согласно предложению 1, имеем

$$\operatorname{meas}\{|u^m|\geqslant\rho\}\to 0\quad\text{равномерно по } m\in\mathbb{N},\quad \rho\to\infty. \tag{33}$$

Из (27) при $k=1$ для любого $h>0$ получаем

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<1+h\}}\big(\mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla u^m+\phi\big)\,d\mathrm{x}+\int\limits_{\{\Omega:\,|u^m|\geqslant h+1\}}\left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|+\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)d\mathrm{x}\leqslant$$

$$\leqslant C_4\int\limits_{\{\Omega:\,|u^m|\geqslant h\}}(\phi_1+\phi)\,d\mathrm{x},\quad m\in\mathbb{N}.$$

Ввиду того, что $\phi_1,\phi\in L_1(\Omega)$ и интеграл в правой части последнего неравенства абсолютно непрерывен для любого $\varepsilon>0$, учитывая (33), можно выбрать достаточно большое $\widetilde{h}(\varepsilon)>1$ такое, что для $h\geqslant\widetilde{h}$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\{h-1\leqslant|u^m|<h\}}\big(\mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla u^m+\phi\big)\,d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\{\Omega:\,|u^m|\geqslant h\}}\left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|+\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)d\mathrm{x}<\frac{\varepsilon}{2},\quad m\in\mathbb{N}. \tag{34}$$

Так же как и в работе [5], устанавливаются сходимость по подпоследовательности

$$u^m \to u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \to \infty, \tag{35}$$

и для любого $k > 0$ сходимости

$$T_k(u^m) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(\mathrm{L}_M, \mathrm{E}_{\overline{M}}) \text{ в } \mathring{W}^1 L_M(\Omega), \quad m \to \infty, \tag{36}$$

$$T_k(u^m) \to T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \to \infty. \tag{37}$$

Выполняя предельный переход в (30), заключаем, что $M(\mathrm{x}, T_k(u))$, $(M(\mathrm{x}, u)/u)T_k(u) \in L_1(\Omega)$. Таким образом, условие 2) определения 3 выполнено.

Далее докажем, что для любой функции $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ имеет место сходимость

$$\frac{M(\mathrm{x}, u^m)}{u^m} S(u^m) \to \frac{M(\mathrm{x}, u)}{u} S(u) \quad \text{в } L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{38}$$

Учитывая сходимость (35), имеем

$$\frac{M(\mathrm{x}, u^m)}{u^m} S(u^m) \to \frac{M(\mathrm{x}, u)}{u} S(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \to \infty. \tag{39}$$

Пусть Q — произвольное измеримое подмножество в области Ω, функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp} S \subset [-L, L]$ для $L > 0$ и $|S(r)| \leqslant L_1$ для любого $r \in \mathbb{R}$. С учётом монотонности функции $M(\mathrm{x}, s_0)/s_0$ по переменной s_0 получаем следующие соотношения:

$$\int\limits_Q \frac{M(\mathrm{x}, u^m)}{|u^m|} |S(u^m)|\, d\mathrm{x} = \int\limits_Q \frac{M(\mathrm{x}, u^m)}{|u^m|} |S(u^m)| \chi_{\{\Omega:\ |u^m| < L\}}\, d\mathrm{x} \leqslant \frac{L_1}{L} \int\limits_Q M(\mathrm{x}, L)\, d\mathrm{x}.$$

Отсюда, ввиду принадлежности $M(\mathrm{x}, L) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, заключаем равномерную интегрируемость последовательности $\big\{(M(\mathrm{x}, u^m)/|u^m|)|S(u^m)|\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ для любого $Q \subset \Omega$: $\operatorname{meas} Q < \infty$. Учитывая сходимость (39) и применяя лемму 2, устанавливаем сходимость (38).

4.4. МОДУЛЯРНАЯ СХОДИМОСТЬ ГРАДИЕНТОВ ОТ СРЕЗОК

Докажем сходимости

$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{модулярно в } \mathrm{L}_{M,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad m \to \infty, \tag{40}$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \to \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{41}$$

Повторяя рассуждения [10, шаг 5], при любом $k > 0$ устанавливаем

$$\|\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))\|_{\overline{M}} \leqslant C_{10}(k), \quad m \geqslant k. \tag{42}$$

Из оценки (42) следует сходимость по подпоследовательности

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup \tilde{\mathrm{a}}_k \quad \text{по топологии } \sigma(\mathrm{L}_{\overline{M}}, \mathrm{E}_M) \text{ в } \mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{43}$$

Для положительных вещественных чисел m, j, s обозначим через $\omega(m, j, s)$ любую величину такую, что

$$\lim_{s\to\infty} \lim_{j\to\infty} \lim_{m\to\infty} \omega(m, j, s) = 0.$$

Пусть h и k такие, что $h-1>k>0$. Согласно лемме 1 существует последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $C_0^\infty(\Omega)$:

$$v^j \to T_k(u) \quad \text{модулярно в } \mathring{W}^1 L_M(\Omega), \quad j\to\infty,$$

тогда

$$T_k(v^j) \to T_k(u) \quad \text{модулярно в } \mathring{W}^1 L_M(\Omega), \quad j\to\infty. \tag{44}$$

Отсюда, согласно лемме 2, следует, что найдётся $\lambda>0$ такое, что для последовательностей

$$\left\{M\left(\mathrm{x}, \frac{|T_k(u)-T_k(v^j)|}{\lambda}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}, \quad \left\{M\left(\mathrm{x}, \frac{|\nabla(T_k(u)-T_k(v^j))|}{\lambda}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$$

$$\text{выполнены условия (i), (ii)} \tag{45}$$

и справедлива сходимость по некоторой подпоследовательности $J\subset\mathbb{N}$ (см. [13, замечание 7.9]):

$$T_k(v^j)\to T_k(u), \quad \nabla T_k(v^j)\to\nabla T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j\to\infty. \tag{46}$$

Замечание 3. Пользуясь выпуклостью функции $M(\mathrm{x},\cdot)$ и принадлежностью $T_k(u)\in \in\mathring{W}^1 L_M(\Omega)$, несложно установить эквивалентность (45) условию

$$\left\{M\left(\mathrm{x}, \frac{|T_k(v^j)|}{\lambda_1}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}, \quad \left\{M\left(\mathrm{x}, \frac{|\nabla T_k(v^j)|}{\lambda_1}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}} \quad \text{подчиняются условиям (i), (ii)}$$

с некоторым $\lambda_1>0$.

Кроме того, согласно лемме 4 имеем

$$\nabla T_k(v^j) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(\mathrm{L}_M, \mathrm{L}_{\overline{M}}), \quad j\to\infty.$$

Полагаем

$$z^{mj}=T_k(u^m)-T_k(v^j), \quad z^j=T_k(u)-T_k(v^j), \quad m,j\in\mathbb{N},$$

$\varphi_k(\rho)=\rho\exp\{\gamma^2\rho^2\}$, где $\gamma=\widehat{b}_k/\overline{a}$, $\widehat{b}_k=\max\{\widehat{b}(|s|)\colon |s|\leqslant k\}$. Очевидно, что

$$\psi_k(\rho)=\varphi_k'(\rho)-2\gamma|\varphi_k(\rho)|\geqslant 1/2, \quad \rho\in\mathbb{R}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$1/2\leqslant\psi_k(z^{mj})\leqslant\max_{[-2k,2k]}\psi_k(\rho)=C_{11}(k), \quad m,j\in\mathbb{N}. \tag{47}$$

Ввиду (37), (46) имеем

$$\varphi_k(z^{mj})\to\varphi_k(z^j), \quad \varphi_k'(z^{mj})\to\varphi_k'(z^j), \quad \psi_k(z^{mj})\to\psi_k(z^j) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m\to\infty, \tag{48}$$

$$\varphi_k(z^j)\to\varphi_k(0)=0, \quad \varphi_k'(z^j)\to\varphi_k'(0)=1, \quad \psi_k(z^j)\to\psi_k(0)=1 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j\to\infty, \tag{49}$$

а также

$$|\varphi_k(z^{mj})|\leqslant\varphi_k(2k), \quad 1\leqslant\varphi_k'(z^{mj})\leqslant\varphi_k'(2k), \quad m,j\in\mathbb{N}, \tag{50}$$

$$|\varphi_k(z^j)|\leqslant\varphi_k(2k), \quad 1\leqslant\varphi_k'(z^j)\leqslant\varphi_k'(2k), \quad j\in\mathbb{N}. \tag{51}$$

Применяя (48)–(51), по лемме 5 устанавливаем сходимости

$$|\varphi_k(z^{mj})| \rightharpoonup |\varphi_k(z^j)| \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \text{ пространства } L_\infty(\Omega), \quad m\to\infty, \tag{52}$$

$$|\varphi_k(z^j)| \rightharpoonup 0 \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \text{ пространства } L_\infty(\Omega), \quad j\to\infty. \tag{53}$$

Кроме того, для любой функции $g\in E_M(\Omega)$, применяя лемму 5, устанавливаем сходимости

$$\varphi_k(z^{mj})g \to \varphi_k(z^j)g \quad \text{сильно в } E_M(\Omega), \quad m\to\infty, \tag{54}$$

$$\varphi_k(z^j)g \to 0 \quad \text{сильно в } E_M(\Omega), \quad j\to\infty. \tag{55}$$

Введём обозначения: χ_s^j, χ_s, ${}_k\chi^m$, ${}_k\chi$ — характеристические функции множеств $\{\mathrm{x}\in\Omega\colon |\nabla T_k(v^j)|\leqslant s\}$, $\{\mathrm{x}\in\Omega\colon |\nabla T_k(u)|\leqslant s\}$, $\{\mathrm{x}\in\Omega\colon |u^m|\geqslant k\}$, $\{\mathrm{x}\in\Omega\colon |u|\geqslant k\}$, соответственно. Будем рассматривать "правильные" k, s, для которых $\operatorname{meas}\{\Omega\colon |u|=k\}=0$ и $\operatorname{meas}\{\Omega\colon |\nabla T_k(u)|=s\}=0$.

Положим $\eta_h(r)=\min\{1,\max\{0,h-r+1\}\}$, $r\in\mathbb{R}$. Для краткости записи будем использовать обозначения

$$\zeta_{h-1}^m=\eta_{h-1}(|u^m|), \quad \zeta_{h-1}=\eta_{h-1}(|u|), \quad \eta_R=\eta_R(|\mathrm{x}|).$$

Из (35), (46) для правильных k, s следуют сходимости

$$\zeta_{h-1}^m \to \zeta_{h-1} \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m\to\infty, \tag{56}$$

$$\chi_s^j \to \chi_s \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j\to\infty, \tag{57}$$

$${}_k\chi^m \to {}_k\chi \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m\to\infty. \tag{58}$$

Принимая в качестве тестовой функции в (23) $\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}$, получаем

$$\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla T_h(u^m))\cdot\nabla\Big(\varphi_k(z^{mj})\eta_R\zeta_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)}\Big)\,d\mathrm{x} +$$

$$+\int\limits_\Omega b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m)\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x} + \int\limits_\Omega \frac{M(\mathrm{x},u^m)}{u^m}\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x} -$$

$$-\int\limits_\Omega f^m\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x} = \sum_{i=1}^4 I_i = 0, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{59}$$

Оценим интегралы $I_2 - I_4$. Ввиду

$$\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\zeta_{h-1}^m\eta_R \leqslant \frac{M(\mathrm{x},h)}{h}\eta_R\in L_1(\Omega)$$

и сходимостей (52), (53) имеем

$$|I_3|\leqslant\int\limits_\Omega \frac{M(\mathrm{x},h)}{h}\eta_R|\varphi_k(z^{mj})|e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}\leqslant\omega_{h,R}(m)+e^{C_0}\int\limits_\Omega\frac{M(\mathrm{x},h)}{h}\eta_R|\varphi_k(z^j)|\,d\mathrm{x}=\omega_{h,R}(m,j). \tag{60}$$

Аналогично ввиду (20) и $f\in L_1(\Omega)$ находим

$$|I_4|\leqslant\int\limits_\Omega |f|\,|\varphi_k(z^{mj})|e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}\leqslant\omega(m)+e^{C_0}\int\limits_\Omega|f|\,|\varphi_k(z^j)|\,d\mathrm{x}=\omega(m,j). \tag{61}$$

Применяя (22), (10), оценим интеграл

$$-I_2 \leqslant \int_\Omega |b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m)|\, |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi^m_{h-1}\, d\mathrm{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega \widehat{b}(|u^m|) \big(M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla T_h(u^m)|) + \Phi_0(\mathrm{x})\big) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi^m_{h-1}\, d\mathrm{x}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Используя (7), выводим

$$-I_2 \leqslant \frac{1}{\overline{a}} \int_\Omega \big(\overline{a}\Phi_0(\mathrm{x}) + \phi(\mathrm{x})\big) |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|)\, d\mathrm{x} +$$

$$+ \int_\Omega \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\overline{a}} \big|\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)\big|\, |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\, d\mathrm{x} +$$

$$+ \int\limits_{\{|u^m|>k\}} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\overline{a}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_h(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi^m_{h-1}\, d\mathrm{x} = \sum_{i=1}^3 I_{2i}. \tag{62}$$

Учитывая, что $z^{mj} u^m \geqslant 0$ при $|u^m| \geqslant k$, получаем

$$I_1 \geqslant \int_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \varphi'_k(z^{mj}) \nabla z^{mj} \eta_R \zeta^m_{h-1} e^{\widehat{B}(|u^m|)}\, d\mathrm{x} -$$

$$- \int\limits_{\{\Omega:\ h-1 \leqslant |u^m| < h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla u^m |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\, d\mathrm{x} +$$

$$+ \int_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \varphi_k(z^{mj}) \nabla \eta_R \zeta^m_{h-1} e^{\widehat{B}(|u^m|)}\, d\mathrm{x} -$$

$$- \int_\Omega \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\overline{a}} \big|\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)\big|\, |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\, d\mathrm{x} +$$

$$+ \int\limits_{\{|u^m|>k\}} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\overline{a}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_h(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi^m_{h-1}\, d\mathrm{x} =$$

$$= I_{11} - I_{12} + I_{13} - I_{14} + I_{15}, \quad m \geqslant h. \tag{63}$$

Теперь, используя равенства $I_{15} = I_{23}$, $I_{22} = I_{14}$ и оценки интегралов (60)–(63), из (59) выводим неравенства

$$I_{11} - 2I_{22} \leqslant \omega_{h,R}(m, j) + I_{21} + I_{12} - I_{13}, \quad m \geqslant h. \tag{64}$$

Далее, учитывая (7), получаем

$$I_{12} + I_{21} + 2I_{22} \leqslant$$

$$\leqslant \varphi_k(2k) e^{C_0} \int\limits_{\{\Omega:\ h-1 \leqslant |u^m| < h\}} \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi\big)\, d\mathrm{x} + C_{11} \int_\Omega (\Phi_0(\mathrm{x}) + \phi(\mathrm{x})) |\varphi_k(z^{mj})|\, d\mathrm{x} +$$

$$+ \frac{2\widehat{b}_k}{\overline{a}} \int_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \eta_R\, d\mathrm{x} = I_{121} + I_{211} + I_{221}. \tag{65}$$

Ввиду (52), (53) имеем
$$I_{211}=\omega(m,j), \tag{66}$$
а благодаря (34) заключаем, что
$$I_{121}\leqslant\omega(h). \tag{67}$$

Применяя оценку (42) и сходимости (54), (55) с $g=\chi_{\Omega(R+1)}$, устанавливаем соотношения
$$|I_{13}|\leqslant C_{12}\int\limits_{\Omega(R+1)}|\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))|\,|\varphi_k(z^{mj})|\,d\mathrm{x}\leqslant$$
$$\leqslant C_{13}(h)\|\varphi_k(z^{mj})\|_{M,\Omega(R+1)}=\omega_{h,R}(m,j),\quad m\geqslant h. \tag{68}$$

Объединяя (64)–(68), получаем
$$I_5=I_{11}-I_{221}\leqslant\omega(h)+\omega_{h,R}(m,j),\quad m\geqslant h. \tag{69}$$

С помощью элементарных преобразований выводим равенства для I_5:
$$I_5=\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)\varphi_k'(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}-$$
$$-\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}-$$
$$-\frac{2\widehat{b}_k}{\overline{a}}\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)|\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}=$$
$$=\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}-$$
$$-\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}=$$
$$=\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot(\nabla T_k(u^m)-\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}+$$
$$+\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}-$$
$$-\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\varphi_k'(z^{mj})\chi_s^j\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}+$$
$$+\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}.$$

Очевидно равенство
$$I_5=\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot(\nabla T_k(u^m)-\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}-$$
$$-\frac{2\widehat{b}_k}{\overline{a}}\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\chi_s^j|\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{a}\big(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m)\big)-\zeta_{h-1}^m\mathrm{a}\big(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m)\big)\Big)\cdot\nabla T_k(v^j)_k\chi^m\chi_s^j\varphi_k'(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}=\sum_{i=1}^4 I_{5i},\quad m\geqslant h.\qquad(70)$$

Оценим интегралы $I_{52}-I_{54}$. Применяя (35), (48), (50), лемму 5 с $g=\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\eta_R\in\mathrm{E}_M(\Omega)$, получаем

$$\eta_R\nabla T_k(v^j)\chi_s^j|\varphi_k(z^{mj})|e^{\widehat{B}(|u^m|)}\to\eta_R\nabla T_k(v^j)\chi_s^j|\varphi_k(z^j)|e^{\widehat{B}(|u|)}\quad\text{сильно в } \mathrm{E}_M(\Omega),\quad m\to\infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (43), устанавливаем

$$I_{52}=-\frac{2\widehat{b}_k}{\overline{a}}\int\limits_{\Omega}\widetilde{\mathrm{a}}_k\cdot\nabla T_k(v^j)\chi_s^j|\varphi_k(z^j)|\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}\,d\mathrm{x}+\omega_R(m).$$

Применяя (46), (49), (51), (57), по теореме Лебега получаем

$$I_{52}=\omega_R(m,j).\qquad(71)$$

С учётом (35), (48), (50), (58), леммы 5 с $g=\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\eta_R\in\mathrm{E}_M(\Omega)$ имеем

$$\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\varphi_k'(z^{mj})_k\chi^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\to\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\varphi_k'(z^j)_k\chi\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}\quad\text{сильно в } \mathrm{E}_M(\Omega),\quad m\to\infty.$$

Отсюда, ввиду сходимостей (43), (56), устанавливаем

$$I_{53}=\int\limits_{\Omega}(\widetilde{\mathrm{a}}_k-\zeta_{h-1}\widetilde{\mathrm{a}}_h)\cdot\nabla T_k(v^j)_k\chi\chi_s^j\varphi_k'(z^j)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}\,d\mathrm{x}+\omega_R(m).$$

Далее, применяя (46), (49), (51), (57), по теореме Лебега заключаем

$$I_{53}=\int\limits_{\Omega}(\widetilde{\mathrm{a}}_k-\zeta_{h-1}\widetilde{\mathrm{a}}_h)\cdot\nabla T_k(u)_k\chi\chi_s\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}\,d\mathrm{x}+\omega_R(m,j)=\omega_R(m,j).\qquad(72)$$

Наконец, применив (48), (50), (56), лемму 5 с $g=\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\eta_R\in\mathrm{E}_M(\Omega)$, получим

$$\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\to\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^j)\zeta_{h-1}\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}$$
$$\text{сильно в } \mathrm{E}_M(\Omega),\quad m\to\infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (43), устанавливаем

$$I_{54}=\int\limits_{\Omega}\widetilde{\mathrm{a}}_h\cdot\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^j)\zeta_{h-1}\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}\,d\mathrm{x}+\omega_R(m).$$

Применяя (49), (51), (57), (44) и лемму 2 (см. замечание 3), получаем

$$\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^j)\eta_R\to\nabla T_k(u)(\chi_s-1)\eta_R\quad\text{модулярно в } \mathrm{L}_M(\Omega),\quad j\to\infty.$$

Тогда, ввиду принадлежности $\widetilde{\mathrm{a}}_h\zeta_{h-1}e^{\widehat{B}(|u|)}\in\mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega)$, имеем

$$I_{54}=\int\limits_{\Omega}\widetilde{\mathrm{a}}_h\cdot\nabla T_k(u)(\chi_s-1)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}\,d\mathrm{x}+\omega_R(m,j).$$

В силу того, что $\widetilde{\mathrm{a}}_h\cdot\nabla T_k(u)e^{\widehat{B}(|u|)}\in L_1(\Omega)$, находим
$$I_{54}=\omega_R(m,j,s). \tag{73}$$
Из (69)–(73) следует, что
$$I_{51}\leqslant\omega_{h,R}(m,j,s)+\omega(h). \tag{74}$$

Оценим теперь интеграл I_6:
$$0\leqslant I_6=\int\limits_\Omega\big(\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))-\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\big)\times$$
$$\times\big(\nabla T_k(u^m)-\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\big)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}=$$
$$=\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot(\nabla T_k(u^m)-\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}-$$
$$-\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\cdot(\nabla T_k(u^m)-\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\,d\mathrm{x}=I_{51}-I_{61}. \tag{75}$$

Из (35), (37) следует сходимость
$$\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)e^{\widehat{B}(|u^m|)}\to\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u),\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)e^{\widehat{B}(|u|)}\quad\text{п.в. в }\Omega,\quad m\to\infty,$$
а из (8), (15) имеем оценки
$$|\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)|\leqslant\widehat{a}\overline{M}^{-1}(\mathrm{x},M(\mathrm{x},\widehat{d}s))+\widehat{a}\overline{M}^{-1}(\mathrm{x},CM(\mathrm{x},k))+\psi(\mathrm{x}),\quad m,j\in\mathbb{N}.$$
Пользуясь ограниченностью функции $M(\cdot,z)$ по $\mathrm{x}\in\Omega(R+1)$ для любых $z\in\mathbb{R}$, устанавливаем оценку
$$|\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)|\eta_R\leqslant\psi(\mathrm{x})+C_{14}\eta_R\in\mathrm{E}_{\overline{M}}(\Omega),\quad m,j\in\mathbb{N}.$$
Отсюда, учитывая (47), (48), из лемм 6, 7 получаем сходимость
$$\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})e^{\widehat{B}(|u^m|)}\eta_R\to\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u),\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^j)e^{\widehat{B}(|u|)}\eta_R$$
$$\text{сильно в }\mathrm{E}_{\overline{M}}(\Omega),\quad m\to\infty. \tag{76}$$

Применяя (76), (36), выводим
$$I_{61}=\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u),\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\cdot(\nabla T_k(u)-\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^j)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}\,d\mathrm{x}+\omega_R(m),\quad j\in\mathbb{N}.$$

С учётом оценки (14) и сходимостей (46), (49), (57) по теореме Лебега устанавливаем
$$I_{61}=\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u),0)\cdot\nabla T_k(u)(1-\chi_s)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}\,d\mathrm{x}+\omega_R(m,j).$$

Наконец, благодаря $\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u),0)\cdot\nabla T_k(u)e^{\widehat{B}(|u|)}\eta_R\in L_1(\Omega)$ (см. (14)), получаем
$$I_{61}=\omega_R(m,j,s). \tag{77}$$

Объединяя (75), (77), (74) и применяя (47), выводим

$$I_7 = \int\limits_{\Omega} \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\big) \times$$

$$\times \big(\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j\big)\eta_R\, d\mathrm{x} \leqslant 2I_6 \leqslant \omega_{h,R}(m,j,s) + \omega(h). \tag{78}$$

Используя обозначение

$$q_s^m(\mathrm{x}) = (\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s),$$

имеем

$$0 \leqslant \int\limits_{\Omega(R)} q_s^m(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} \leqslant I_7 + \int\limits_{\Omega} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(v^j)\chi_s^j - \nabla T_k(u)\chi_s)\eta_R\, d\mathrm{x} -$$

$$- \int\limits_{\Omega} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s)\eta_R\, d\mathrm{x} +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\eta_R\, d\mathrm{x} = I_7 + I_{71} + I_{72} + I_{73}. \tag{79}$$

Для интегралов $I_{71} - I_{73}$ справедливы оценки (см. [5])

$$I_{71} = \omega_R(m,j), \quad I_{72} = \omega_R(m,s), \quad I_{73} = \omega_R(m,j,s). \tag{80}$$

Из (78)–(80) получаем

$$\int\limits_{\Omega(R)} q_s^m(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} \leqslant \omega_{R,h}(m,j,s) + \omega(h).$$

Ввиду того, что левая часть последнего неравенства не зависит от j, h, переходя последовательно к пределам по $m \to \infty$, $j \to \infty$, $s \to \infty$, устанавливаем соотношение

$$\lim_{s\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega(R)} q_s^m(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} \leqslant \omega(h).$$

Выполняя предельный переход при $h \to \infty$, выводим равенство

$$\lim_{s\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega(R)} q_s^m(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = 0.$$

По утверждению 1 из [5] ($Q = \Omega(R)$), ввиду произвольности $R > 0$, имеем сходимости (40), (41) и сходимость

$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \to \infty. \tag{81}$$

Далее, так же как и в работе [7], устанавливается сходимость по подпоследовательности

$$\nabla u^m \to \nabla u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \to \infty. \tag{82}$$

4.5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Используя оценку (42) и сходимости (37), (81), по лемме 3 устанавливаем слабую сходимость

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), \nabla T_k(u))$$

$$\text{в топологии } \sigma(\mathrm{L}_{\overline{M}}, \mathrm{E}_M) \text{ пространства } \mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega),\ m \to \infty. \tag{83}$$

Из непрерывности $b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ по (s_0, s) и сходимостей (35), (82) следует, что

$$b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m) \to b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \to \infty. \tag{84}$$

Из оценки (32), ввиду (84), согласно лемме Фату заключаем, что $b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in L_1(\Omega)$. Таким образом, условия 1), 3) определения 3 выполнены.

Далее сходимость

$$b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m) \to b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \quad \text{в } L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad m \to \infty, \tag{85}$$

устанавливается аналогично [10, шаг 6].

Докажем, что u является ренормализованным решением задачи (1), (2). Сначала докажем условие 4) определения 3. Применяя (7), из неравенства (27) получаем

$$\int\limits_{\{h \leqslant |u^m| < k+h\}} \overline{a} M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla u^m|)\, d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{|u^m| \geqslant k+h\}} \frac{M(\mathrm{x}, u^m)}{|u^m|}\, d\mathrm{x} \leqslant C_4 \int\limits_{\{|u^m| \geqslant h\}} (k\phi_1 + \phi)\, d\mathrm{x}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, пользуясь сходимостями (82), (35), применив теорему Лебега и лемму Фату, выполним предельный переход при $m \to \infty$ для правильных h и получим неравенство

$$\int\limits_{\{h \leqslant |u| < k+h\}} \overline{a} M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla u|)\, d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{|u| \geqslant k+h\}} \frac{M(\mathrm{x}, u)}{|u|}\, d\mathrm{x} \leqslant C_4 \int\limits_{\{|u| \geqslant h\}} (k\phi_1 + \phi)\, d\mathrm{x}. \tag{86}$$

Из (86), в частности, справедлива оценка вида (16). Тогда согласно предложению 1 имеем

$$\operatorname{meas}\{\Omega\colon |u| \geqslant h\} \to 0, \quad h \to \infty. \tag{87}$$

Выполняя предельный переход в (86), пользуясь (87), устанавливаем соотношение 4) определения 3.

Докажем равенство (11). Пусть $\xi \in C_0^1(\Omega)$, $\operatorname{supp}\xi \subset \Omega(l)$, $l \geqslant l_0$, и функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp} S \subset [-L, L]$, $L > 0$. Пусть $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — последовательных слабых решений уравнения (21). Взяв $S(u^m)\xi \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega) \bigcap L_\infty(\Omega)$ в качестве тестовой функции в (23), выводим

$$\begin{gathered} \big\langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi)\big\rangle + \\ + \big\langle (b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m) + M(\mathrm{x}, u^m)/u^m - f^m(\mathrm{x}))S(u^m)\xi\big\rangle = I^m + J^m = 0, \quad m \geqslant l_0. \end{gathered} \tag{88}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered} I^m = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi)\, d\mathrm{x} = \\ = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_L(u^m), \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla T_L(u^m) S'(u^m)\xi\, d\mathrm{x} + \\ + \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_L(u^m), \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla \xi S(u^m)\, d\mathrm{x} = I_1^m + I_2^m, \quad m \geqslant \max\{L, l_0\}. \end{gathered} \tag{89}$$

Ввиду сходимостей (35), (41), применяя лемму 8, устанавливаем

$$I_1^m = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_L(u), \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u) S'(u)\xi\, d\mathrm{x} + \omega(m), \quad m \to \infty. \tag{90}$$

Из сходимости (35) по лемме 5 получаем

$$S(u^m)\nabla\xi \to S(u)\nabla\xi \quad \text{сильно в } \mathrm{E}_M(\Omega), \quad m\to\infty.$$

Отсюда, учитывая сходимость (83), выводим

$$I_2^m = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_L(u), \nabla T_L(u))\cdot\nabla\xi S(u)\, d\mathrm{x} + \omega(m), \quad m\to\infty. \tag{91}$$

Объединив (89)–(91), будем иметь

$$\lim_{m\to\infty} I^m = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_L(u), \nabla T_L(u))\cdot(S'(u)\xi\nabla T_L(u) + S(u)\nabla\xi)\, d\mathrm{x} =$$

$$= \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\cdot(S'(u)\xi\nabla u + S(u)\nabla\xi)\, d\mathrm{x}. \tag{92}$$

По лемме 5 заключаем, что

$$S(u^m)\xi \rightharpoonup S(u)\xi \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1), \quad m\to\infty.$$

Тогда, ввиду сходимостей (19), (38), (85), устанавливаем соотношение

$$\lim_{m\to\infty} J^m = \int\limits_\Omega (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + M(\mathrm{x}, u)/u - f)S(u)\xi\, d\mathrm{x}. \tag{93}$$

Комбинируя (88), (92), (93), получаем равенство (11). Таким образом, приходим к выводу, что u является ренормализованным решением задачи (1), (2).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gwiazda, P. Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak–Orlicz space / P. Gwiazda, I. Skrzypczaka, A. Zatorska-Goldstein // J. Differ. Equat. — 2018. — V. 264. — P. 341–377.
2. Ait Khellou, M. Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak–Orlicz spaces / M. Ait Khellou, A. Benkirane // Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series. — 2016. — V. 43, № 2. — P. 164–187.
3. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data / M.S.B. Elemine Vall, T. Ahmedatt, A. Touzani, A. Benkirane // Bol. Soc. Paran. Mat. — 2018. — V. 36, suppl. 1. — P. 125—150.
4. Ying, Li. Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces / Li Ying, Y. Fengping, Zh. Shulin // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2021. — V. 61. — P. 1–20.
5. Кожевникова, Л.М. Существование энтропийного решения нелинейной эллиптической задачи в неограниченной области / Л.М. Кожевникова // Теор. мат. физика. — 2024. — Т. 218, № 1. — С. 124–148.
6. Вильданова, В.Ф. Энтропийное решение для уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве / В.Ф. Вильданова, Ф.Х. Мукминов // Мат. сб. — 2023. — Т. 214, № 11. — С. 37–62.

7. Кожевникова, Л.М. Энтропийные и ренормализованные решения анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей / Л.М. Кожевникова // Мат. сб. — 2019. — Т. 210, № 3. — С. 131–161.
8. Kozhevnikova, L.M. On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data / L.M. Kozhevnikova // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2020. — V. 65, № 3. — P. 337–367.
9. Kozhevnikova, L.M. On Solutions of Elliptic Equations with Variable Exponents and Measure Data in R^n / L.M. Kozhevnikova // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics, Dedicated to the Memory of Boris Sternin ; eds. V.M. Manuilov, A.S. Mishchenko, V.E. Nazaikinskii, B.-W. Schulze, W. Zhang. — Cham : Birkhäuser, 2021. — P. 221–239.
10. Кожевникова, Л.М. Существование решений нелинейных эллиптических уравнений с данными в виде меры в пространствах Музилака–Орлича / Л.М. Кожевникова, А.П. Кашникова // Мат. сб. — 2022. — Т. 213, № 4. — С. 38–73.
11. Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces / S.M. Douiri, A. Benkirane, M. Ait Khellou, Y. El Hadfi // Analysis and Mathematical Physics. — 2021. — V. 11, suppl. 66. — P. 1–26.
12. Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1 / T. Ahmdatt, M.S.B. Elemine Vall, A. Benkirane, A. Touzani // Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series. — 2017. — V. 44, suppl. 2. — P. 190–213.
13. Musielak, J. Orlicz Spaces and Modular Spaces / J. Musielak. — Berlin : Springer-Verlag, 1983. — 222 p.
14. Benkirane, A. An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces / A. Benkirane, M. Sidi El Vally // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2013. — V. 20, № 1. — P. 57–75.
15. Gossez's approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces / Y. Ahmida, I. Chlebicka, P. Gwiazda, A. Youssfi // J. Funct. Anal. — 2018. — V. 275, suppl. 9. — P. 2538–2571.
16. Kozhevnikova, L.M. On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1-data in unbounded domains / L.M. Kozhevnikova // Lobachevskii J. Math. — 2023. — V. 44, № 5. — P. 1879–1901.
17. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц ; пер. с англ. Л.И. Головиной и Б.С. Митягина ; под. ред. А.Г. Костюченко — М. : ИЛ, 1962. — 895 с.
18. Chlebicka, I. Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth / I. Chlebicka // Proc. of the Royal Society of Edinburgh. Sect. A. — 2023. — V. 153, № 2. — P. 588–618.
19. Benkirane, A. Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces / A. Benkirane, M. Sidi El Vally // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2014. — V. 21, № 5. — P. 787–811.

EXISTENCE OF A RENORMALIZED SOLUTION OF A QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATION WITHOUT THE SIGN CONDITION ON THE LOWEST TERM

L. M. Kozhevnikova

Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
Elabuga Institute of Kazan (Volga region) Federal University, Elabuga, Russia
e-mail: kosul@mail.ru

The paper considers a second-order quasilinear elliptic equation with an integrable right-hand side. Restrictions on the structure of the equation are formulated in terms of the generalized N-function. Unlike the author's previous works, there is no sign condition for the low-order term of the equation. In non-reflexive Musielak–Orlicz–Sobolev spaces in an arbitrary unbounded strictly Lipschitz domain, the existence of a renormalized solution to the Dirichlet problem of this equation is proven.

Keywords: quasi-linear elliptic equation, unbounded domain, Musielak–Orlicz space, renormalized solution, existence of a solution.

REFERENCES

1. Gwiazda, P., Skrzypczaka, I., and Zatorska-Goldstein, A., Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak-Orlicz space, *J. Differ. Equat.*, 2018, vol. 264, pp. 341–377.
2. Ait Khellou, M. and Benkirane, A., Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak–Orlicz spaces, *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 2016, vol. 43, no. 2, pp. 164–187.
3. Elemine Vall, M.S.B., Ahmedatt, T., Touzani, A., and Benkirane, A. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 2018, vol. 36, suppl. 1, pp. 125—150.
4. Ying, Li., Fengping, Y., and Shulin, Zh., Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2021, vol. 61, pp. 1–20.
5. Kozhevnikova, L.M., Existence of an entropic solution of a nonlinear elliptic problem in an unbounded domain, *Theor. Math. Phys.*, 2024, vol. 218, no. 1, pp. 106–128.
6. Vil'danova, V.F. and Mukminov, F.Kh., Entropy solution for an equation with measure-valued potential in a hyperbolic space, *Sb. Math.*, 2023, vol. 214, no. 11, pp. 1534–1559.
7. Kozhevnikova, L.M., Entropy and renormalized solutions of anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity exponents, *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 3, pp. 417–446.
8. Kozhevnikova, L.M., On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2020, vol. 65, no. 3, pp. 37–367.
9. Kozhevnikova, L.M., On Solutions of Elliptic Equations with Variable Exponents and Measure Data in R^n, in *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics, Dedicated to the Memory of Boris Sternin*, Cham: Birkhäuser, 2021, pp. 221–239.
10. Kashnikova, A.P., Kozhevnikova, L.M., Existence of solutions of nonlinear elliptic equations with measure data in Musielak–Orlicz spaces, *Sb. Math.*, 2022, vol. 213, no. 4, pp. 476–511.
11. Douiri, S.M., Benkirane, A., Ait Khellou, M., and El Hadfi, Y., Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces, *Analysis and Mathematical Physics*, 2021, vol. 11, suppl. 66, pp. 1–26.
12. Ahmdatt, T., Elemine Vall, M.S.B., Benkirane, A., and Touzani, A., Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1, *Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series*, 2017, vol. 44, suppl. 2, pp. 190–213.
13. Musielak, J., *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Berlin: Springer-Verlag, 1983.
14. Benkirane, A. and Sidi El Vally, M., An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2013, vol. 20, no. 1, pp. 57–75.
15. Ahmida, Y., Chlebicka, I., Gwiazda, P., and Youssfi, A., Gossez's approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *J. Funct. Anal.*, 2018, vol. 275, suppl. 9, pp. 2538–2571.
16. Kozhevnikova, L.M., On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1-data in unbounded domains, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 5, pp. 1879–1901.
17. Dunford, N. and Schwartz, J.T., *Linear Operators, V. I: General Theory*, New York, London: Interscience Publishers, 1958.
18. Chlebicka, I., Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth, *Proc. of the Royal Society of Edinburgh. Sect. A.*, 2023, vol. 153, no. 2, pp. 588–618.
19. Benkirane, A. and Sidi El Vally, M., Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2014, vol. 21, no. 5, pp. 787–811.