

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2023 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференц. уравнения”. 2023. Т. 59. № 8; за дополнительной информацией обращаться по адресу: deq@cs.msu.ru**)*)

EDN: QDQAKH

А. В. Ильин, А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова (МГУ ВМК, Москва, Россия) “О задаче стабилизации переключаемой интервальной линейной системы с соизмеримыми запаздываниями” (18.12.2023).

В настоящей работе исследуется задача цифровой стабилизации переключаемой интервальной линейной системы в случае, когда её режимы имеют различные запаздывания в управлении, а именно, рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\dot{x}(t) = [A_\sigma]x(t) + [b_\sigma]u(t - \theta_\sigma), \quad y(t) = [c_\sigma]x(t), \quad \sigma \in S_{0,\gamma}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — полунепрерывная справа кусочно-постоянная функция (ненаблюдаемый переключающий сигнал); $S_{0,\gamma}$ — множество переключающих сигналов σ , точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, γ — некоторое положительное число, а $l = 0, 1, 2, \dots$; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $y \in \mathbb{R}$ — измеряемый скалярный выход; $u \in \mathbb{R}$ — управляющий вход; $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ — композиция отображения $[A]: I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$ и переключающего сигнала σ ; $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$, $[c_\sigma] = [c] \circ \sigma$ и $\theta_\sigma = \theta \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $[b]: I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$ и $[c]: I \rightarrow \{[c_1], \dots, [c_m]\}$, $\theta: I \rightarrow \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ($[A_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$ ($i = \overline{1, m}$) — интервальные матрицы соответствующих размеров). Здесь $\theta_i > 0$ — величины постоянных запаздываний, причём θ_i/θ_j — рациональное число для любой пары $i, j \in I$.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим переключаемой системы (1), описываемый интервальной линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t) = [A_i]x(t) + [b_i]u(t - \theta_i), \quad y(t) = [c_i]x(t).$$

Решением уравнения состояния системы (1) при фиксированных тройках (c_i, A_i, b_i) ($c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = \overline{1, m}$), заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$), переключающем сигнале $\sigma \in S_{0,\gamma}$ и начальном условии $x(0) = x_0$ является решение соответствующей линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u(t - \theta_{\sigma(t)}), \quad x(0) = x_0.$$

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

Требуется для переключаемой линейной системы (1) с заданным числом $\gamma > 0$ и ненаблюдаемыми переключающими сигналами $\sigma \in S_{0,\gamma}$ построить цифровой регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor t/T \rfloor} u[jT]S(t-jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \notin [0, T), \end{cases} \quad (2)$$

$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \quad u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0, \quad (3)$$

обеспечивающий глобальную равномерную асимптотическую устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_\sigma]x(t) + [b_\sigma]u(t - \theta_\sigma), \\ v[(l+1)T] &= Qv[lT] + q[c_\sigma]x[lT], \quad \sigma(t) \in S_{0,\gamma}, \quad x(0) = x_0, \quad v[0] = v_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$u(t - \theta_i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\lfloor t - \theta_i/T \rfloor} (Hv[lT] + h[c_\sigma]x[lT])S(t - \theta_i - jT), & \text{если } t \geq \theta_i, \\ 0, & \text{если } 0 \leq t < \theta_i. \end{cases}$$

Система (4) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы, $l = \lfloor t/T \rfloor$, т.е.

$$lT \leq t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots$$

Здесь T — период квантования по времени t (считаем, что $T < \gamma$, существует $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\gamma = l_0 T$, и для любого i найдётся такое $l_i \in \mathbb{N}$, что $\theta_i = l_i T$), $[\cdot]$ — целая часть действительного числа, $Q \in R^{r \times r}$, $q \in R^{r \times 1}$, $H \in R^{1 \times r}$, $h \in R$ (r — порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определённые на последовательности $\{lT\}_{l=0}^\infty$, формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [1, с. 25].

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (4) называем *глобально равномерно асимптотически устойчивой*, а регулятор (2), (3) *стабилизирующим*, если при любых фиксированных тройках (c_i, A_i, b_i) ($c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = \overline{1, m}$) для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma \in S_{0,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено:

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ v[lT] \end{matrix} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad l = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor.$$

Для решения поставленной задачи предлагается применять подходы, разработанные в статьях [2–4], где исследовались проблемы цифровой стабилизации переключаемых интервальных линейных систем и переключаемых линейных систем с запаздыванием в управлении, одинаковом для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для решения первой проблемы в [3, 4] используется метод дискретизации переключаемой интервальной системы с дальнейшим поиском динамического дискретного регулятора на основе линейных матричных неравенств. В работе [2] предлагается подход для решения второй проблемы, включающий два основных шага — переход от исходной непрерывной системы к её точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. Модифицируя указанные подходы с учётом наличия соизмеримых запаздываний в режимах исходной переключаемой системы (1), разработана общая схема построения цифрового регулятора (2), (3), включающая следующие основные шаги:

1) переход от непрерывной системы (1) к её точной дискретной модели с учётом, что на её входе используется фиксатор нулевого порядка (точная дискретная модель фактически представляет собой семейство переключаемых дискретных систем с режимами, описываемыми

мыми системами разностных уравнений, вообще говоря, различных динамических порядков, не содержащих запаздываний);

2) построение интервального расширения для полученной дискретной модели;

3) приведение режимов полученной переключаемой линейной интервальной дискретной системы к единому порядку на основе метода расширения динамического порядка [5, с. 205];

4) построение процедуры численного поиска стабилизирующего дискретного регулятора вида (3) с использованием достаточного условия устойчивости переключаемых интервальных дискретных систем на основе метода функций Ляпунова [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Литература. 1. Поляков, К.Ю. Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие / К.Ю. Поляков. — СПб. : СПбГМТУ, 2002. — 154 с. 2. Фурсов, А.С. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении / А.С. Фурсов, С.И. Миняев, В.С. Гусева // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1132–1141. 3. Фурсов, А.С. Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы / А.С. Фурсов, С.И. Миняев, Ю.М. Мосолова // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 11. — С. 1545–1559. 4. Фурсов, А.С. Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы / А.С. Фурсов, Ю.М. Мосолова, С.И. Миняев // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1516–1527. 5. Фурсов, А.С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов / А.С. Фурсов. — М. : Аргмак-Медиа, 2016. — 238 с.

В. Е. Хартовский (ФИТМ ГрГУ имени Я. Купалы, Гродно, Беларусь) “К вопросу назначения конечного спектра линейной системе нейтрального типа” (16.10.2023).

Объект исследования — линейная автономная система нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - D(\lambda_h)\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — решение уравнения (1); $u(t) \in \mathbb{R}^l$ — управление, выбираемое из класса кусочно-непрерывных функций; $y(t) \in \mathbb{R}^r$ — наблюдаемый выход; λ_h — оператор сдвига, определяемый для заданного $h > 0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$, $k \in \mathbb{N}$;

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i C_i, \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i B_i,$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$.

Пусть $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ — единичная матрица, $W(p) = p(I_n - D(e^{-ph})) - A(e^{-ph})$ — характеристическая матрица уравнения (1). Спектр (множество собственных значений) разомкнутой ($u \equiv 0$) системы (1) совпадает с множеством корней уравнения $\det W(p) = 0$, которое в подробной записи имеет вид $\sum_{i=0}^n p^i g_i(e^{ph}) = 0$, где $g_i(\cdot)$ — некоторые полиномы, $g_n(0) = 1$. Из этого уравнения видно, что спектр системы (1) состоит из бесконечного числа чисел.

Задача назначения конечного спектра заключается в построении регулятора с обратной связью такого, чтобы замкнутая система имела наперёд заданный конечный набор собственных значений, состоящий, как правило, из произвольных чисел с отрицательными действительными частями. Такая задача исследовалась многими авторами, наиболее важные

результаты в этом направлении, а также решение более общей задачи модального управления (управления при помощи обратной связи коэффициентами характеристического уравнения) обсуждаются в работах [1, 2] (см. Введение). В статье [3] для систем запаздывающего типа с одним входом предложен алгебраический подход, позволяющий с единой позиции подойти к решению задач назначения конечного спектра и полной управляемости. При исследовании проблемы управления коэффициентами характеристического уравнения системы нейтрального типа (1) установлено [4], что в случае выполнения условия модальной управляемости исходную задачу можно свести к аналогичной задаче для системы запаздывающего типа с одним входом и дальнейшее исследование провести методами, описанными в [3]. Там же показано, что задача назначения конечного спектра разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача модальной управляемости. Систематизация подхода [4], а также исследование ослабленного варианта задачи модальной управляемости выполнены в статье [5, с. 321]. В настоящем сообщении методы [4, 5] обобщены на задачу назначения конечного спектра. Однако, в отличие от работ [4, 5], регулятор построен по неполным измерениям, определяемым наблюдаемым выходом (2). Основная идея заключена в модификации структуры регуляторов [4; 5, с. 321] посредством встраивания в их внутренний контур системы точной оценки решения, основанной на использовании конструкций финитных наблюдателей, разработанных в [5, 6]. Перейдём к постановке задачи.

Определим регулятор с обратной связью по выходу следующего вида:

$$u(t) = \mathfrak{R}_{01}[x_1(t)] + \mathfrak{R}_{00}[y(t)], \quad \dot{x}_1(t) = \mathfrak{R}_{11}[x_1(t)] + \mathfrak{R}_{10}[y(t)]. \quad (3)$$

Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ — вспомогательная переменная, операторы $\mathfrak{R}_{ij}[\cdot]$ определяются на множестве непрерывных функций $\varphi(t)$, имеющих кусочно-непрерывную производную, по правилу

$$\mathfrak{R}_{ij}[\varphi(t)] = R_{ij}^0(\lambda_h)\varphi(t) + \lambda_h R_{ij}^1(\lambda_h)\dot{\varphi}(t) + \int_0^{h_0} \widehat{R}_{ij}(s)\varphi(t-s)ds, \quad (4)$$

где $R_{ij}^0(\lambda_h)$, $R_{ij}^1(\lambda_h)$ — заданные полиномиальные матрицы, $\widehat{R}_{ij}(s)$ — заданные кусочно-непрерывные матричные функции, $h_0 > 0$. Каждому оператору вида (4) поставим в соответствие матрицу

$$\mathcal{R}_{ij}(p) = R_{ij}^0(e^{-ph}) + pe^{-ph}R_{ij}^1(e^{-ph}) + \int_0^{h_0} \widehat{R}_{ij}(s)e^{-ps}ds.$$

Выпишем характеристическую матрицу замкнутой системы (1)–(3):

$$W_1(p) = \begin{bmatrix} W(p) - B(e^{-ph})\mathcal{R}_{00}(p)C(e^{-ph}) & -B(e^{-ph})\mathcal{R}_{01}(p) \\ -\mathcal{R}_{10}(p)C(e^{-ph}) & pI_{n_1} - \mathcal{R}_{11}(p) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Задача 1. Пусть задан произвольный полином $d(p)$ с вещественными коэффициентами. Требуется построить регулятор вида (3) такой, что определитель характеристической матрицы (5) замкнутой системы (1)–(3) совпадает с полиномом $d(p)$, т.е. $\det W_1(p) = d(p)$.

Получен критерий существования регулятора (3), обеспечивающего решение задачи 1.

Теорема 1. Задача 1 разрешима для любого полинома $d(p)$, $\deg d(p) \geq 2n + r + 4$, имеющего по крайней мере два вещественных корня (возможно, равных между собой), тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- 1) $\text{rank}[W(p), B(e^{-ph})] = n$, $p \in \mathbb{C}$;
- 2) $\text{rank}[I_n - D(p), B(p)] = n$, $p \in \mathbb{C}$;

$$3) \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{C};$$

$$4) \operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(p) \\ C(p) \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Условия 1), 2) представляют собой критерий модальной управляемости системы (1). Условия 3), 4) необходимы и достаточны для существования финитного наблюдателя для системы (1), (2). Эти же условия определяют критерий финальной наблюдаемости системы (1), (2) — условия существования непрерывной операции восстановления “отрезка решения” $x(t)$, $t \in [t_0 - mh, t_0]$, при некотором достаточно большом $t_0 > 0$, по результатам наблюдения $y(t)$, $t \in [0, t_0]$ (при известном управлении $u(t)$, $t > 0$).

Литература. 1. Хартовский, В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей / В.Е. Хартовский. — Гродно : ГрГУ, 2022. — 500 с. 2. Зайцев, В.А. Модальное управление и стабилизация линейных систем статической обратной связью по выходу / В.А. Зайцев, И.Г. Ким. — Ижевск : Изд. центр «Удмуртский университет», 2022. — 184 с. 3. Метельский, А.В. Алгебраический подход к стабилизации дифференциальной системы запаздывающего типа / А.В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1119–1131. 4. Метельский, А.В. Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1506–1521. 5. Метельский, А.В. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Автоматика и телемеханика. — 2019, № 12. — С. 80–102. 6. Метельский, А.В. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 265–285.

Е. И. Атамась (МГУ ВМК, Москва, Россия) “Один метод реализации интервальных систем” (20.11.2023).

Задача реализации управляемой линейной системы является классической и для стационарных систем давно имеет полное решение. Построение реализации тривиально в случае скалярных систем и немногим более сложно для векторных систем. В данном сообщении мы зададимся вопросом о методах построения реализации для интервальных передаточных матриц, т.е. матриц, элементами которых являются рациональные выражения с интервальными коэффициентами [1], например, в случае матриц размера 1×1 будем иметь

$$W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0},$$

где $b_i = [\underline{b}_i, \bar{b}_i]$, $a_i = [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ — вещественные интервалы.

Из-за привлечения интервальных вычислений непосредственный перенос многих методов построения реализации, известных для систем с точечными параметрами, оказывается невозможен. В работе [2] был предложен подход для скалярных систем, основанный на использовании канонической формы управляемости/наблюдаемости. К сожалению, обобщить его на векторные системы крайне затруднительно: построение известных аналогов таких канонических форм сопряжено с заменами координат, что в интервальном случае практически невозможно.

Попробуем применить для решения поставленной задачи алгоритм реализации Гилберта. Суть его состоит в разложении передаточной матрицы в сумму элементарных дробей, после чего каждая из них реализуется отдельно тривиальным образом. Однако в интервальной арифметике классический способ разложения в элементарные дроби на основе метода неопределённых коэффициентов также оказывается малоприменим, поскольку приводит к решению

интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Для получения более простого подхода сделаем следующие предположения о передаточной функции $W(s)$. Будем считать, что $W(s)$ физически реализуема, т.е. степень числителя каждого её элемента строго меньше степени знаменателя, а все полюсы системы простые и вещественные. В этом случае можно записать равенство

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \dots + \frac{A_n}{s-p_n},$$

где p_i — интервальные корни многочлена $a(s)$. Сделанное нами предположение о простоте корней позволяет использовать относительно простые алгоритмы для их поиска (см., например, [3]), а также вычислять коэффициенты A_i , для этого применим хорошо известную формулу $A_i = b(p_i)/a_i(p_i)$, где $a_i(s) = a(s)/(s-p_i)$. Тогда нам потребуется лишь вычислить значения интервальных полиномов в интервальных точках, что является простой операцией. Так, каждой дроби вида $A_i/(s-p_i)$ будет соответствовать часть реализации

$$\dot{x}_i = p_i I x + A_i u, \quad y_i = I x_i,$$

где I — единичная матрица соответствующего размера.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет строить реализацию векторной интервальной системы при указанных ограничениях.

Литература. 1. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтэр; пер. с англ. С.И. Куликова. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. — 467 с. 2. Атамась, Е.И. О переходе между различными представлениями интервальных управляемых систем / Е.И. Атамась // Вестн. Московского ун-та. Серия 15: Вычислит. математика и кибернетика. — 2023. — № 4. — С. 3–8. 3. Hansen, E.R. Sharp bounds on interval polynomial roots / E.R. Hansen // Reliable Computing. — 2002. — № 8. — P. 115–122.

А. И. Астровский (БГЭУ, Минск, Беларусь) “Наблюдаемость линейных нестационарных систем с ограничением на выходную функцию” (11.12.2023).

В классической постановке задачи наблюдаемости [1] для линейных систем предполагалось, что выходная функция системы в момент t линейно связана с состоянием системы в этот же момент и её измерения всегда доступны наблюдателю. Вместе с тем в приложениях (например, в теории электрических цепей, в навигационной теории, в медицинских исследованиях и т.д.) есть задачи наблюдения для линейных систем, у которых выходная функция может быть измерена тогда и только тогда, когда фазовый вектор принадлежит некоторому заданному множеству из пространства $\mathbb{R}^n$. Задачи наблюдения такого типа относят к специальному нелинейному классу задач наблюдения и называют *задачами наблюдения с ограничениями на выходную функцию*. Задачи наблюдения с геометрически ограниченными наблюдениями исследовались, например, в [2–4] для стационарных систем при ограничениях на фазовый вектор в виде конусов в конечномерном пространстве.

Рассмотрим для линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений задачи наблюдаемости при условии, что выходная функция системы может быть измерена тогда и только тогда, когда она положительна:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y^+(t) = y^+(t, x_0) = [c(t)x(t)]^+, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ — n -вектор-столбец состояния системы (1) в момент t ; $n \times n$ -матричная функция $A(t)$ и n -вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T ; $[c(t)x(t)]^+ = \max\{0, c(t)x(t)\}$ для каждого $t \in T$.

Говорят, что начальные состояния $x_0^1 = x_0^1(t_0)$ и $x_0^2 = x_0^2(t_0)$ из $\mathbb{R}^n$ системы (1) *положительно различимы*, если соответствующие им выходные функции $y_1^+(t) = y^+(t, x_0^1)$ и $y_2^+(t) = y^+(t, x_0^2)$ не совпадают тождественно на отрезке T , т.е. $y_1^+(t) \not\equiv y_2^+(t)$, $t \in T$. Система (1) *положительно наблюдаема*, если любые два начальные состояния из $\mathbb{R}^n$ положительно различимы.

Свойство положительной наблюдаемости накладывает довольно жёсткие требования на систему наблюдения. Например, при $n=1$ любая стационарная система вида (1) не является положительно наблюдаемой (хотя она наблюдаема при $c \neq 0$). Скалярная нестационарная система наблюдения со знакопеременной функцией $c(t)$, $t \in T$, служит примером положительно наблюдаемой системы.

Отождествим систему $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $y(t) = c(t)x(t)$, $t \in T$, с парой (A, c) . Пусть $h_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, являются компонентами n -вектор-строки $h(t) = c(t)F(t, t_0)$, где $F(t, t_0)$ — фундаментальная матрица системы (1): $\dot{F}(t, t_0) = A(t)F(t, t_0)$, $t \in T$, $F(t_0, t_0) = E_n$.

Система (1) задаёт отображение “начальное состояние” $\rightarrow$ “выходная функция”, которое действует по правилу $\mathcal{O}_T(x_0) = ([h(t)x_0]^+, t \in T)$. Понятно, что система (1) положительно наблюдаема тогда и только тогда, когда отображение $\mathcal{O}_T$ инъективно. Очевидно, что наблюдаемость пары (A, c) является необходимым и достаточным условием положительной наблюдаемости системы (1).

Хорошо известно [1], что необходимым и достаточным условием наблюдаемости пары (A, c) является линейная независимость системы функций $\{h_1(t), \dots, h_n(t)\}$ на T .

Говорят, что система функций $\{b_1(t), \dots, b_n(t)\}$ *вполне линейно независима* на отрезке T , если любая нетривиальная линейная комбинация этих функций $g_1b_1(t) + \dots + g_nb_n(t)$ может быть равна нулю только на множестве меры ноль. Точку $\tau^* \in (t_0, t_1)$ называют *корнем-узлом* для непрерывной функции $\omega : T \rightarrow \mathbb{R}$, если $\omega(\tau^*) = 0$ и при переходе через эту точку τ^* значения функции меняют знак.

Система непрерывных функций $\{b_1(t), \dots, b_n(t)\}$ на отрезке T называется [5, 6] *системой функций Чебышёва порядка $n-1$* , если любая нетривиальная линейная комбинация этих функций $\omega(g, t) = g_1b_1(t) + \dots + g_nb_n(t)$ имеет не более $n-1$ корней на T .

Непосредственно из определения положительной наблюдаемости следует

Лемма 1. *Для положительной наблюдаемости системы (1) необходимо, чтобы каждая нетривиальная линейная комбинация $\omega(g, t) = g_1h_1(t) + \dots + g_nh_n(t)$ по системе функций $\{h_1(t), \dots, h_n(t)\}$ имела хотя бы один корень-узел на промежутке (t_0, t_1) .*

Из определения положительной наблюдаемости и леммы 1 вытекает

Теорема 1. *Система (1) положительно наблюдаема на отрезке T , если для пары (A, c) функции $h_1(t), \dots, h_n(t)$ вполне линейно независимы на T и у каждого нетривиального многочлена $\omega(g, t)$ по этим функциям существует хотя бы один корень-узел на интервале (t_0, t_1) .*

Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ систему наблюдения второго порядка: $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = 0$, $y^+(t) = [\sin^3(t)x_1(t) + tx_2(t)]^+$. Для этой системы функции $h_1(t) = \sin^3(t)$, $h_2(t) = t \sin^3(t) + t$ вполне линейно независимы на отрезке $[-1, 1]$. Любой нетривиальный многочлен $\omega(g, t) = g_1 \sin^3(t) + g_2(t \sin^3(t) + 1)$ по этим функциям имеет точку $t = 0$ в качестве корня-узла. Следовательно, данная система в силу теоремы 1 положительно наблюдаема на $[-1, 1]$.

Покажем, что ни одно из условий теоремы 1 нельзя опустить. Как следует из леммы 1, наличие хотя бы одного корня-узла у каждого многочлена $\omega(g, t)$, $t \in (t_0, t_1)$, является необходимым условием положительной наблюдаемости системы (1). Ниже приведём пример системы (1), для которой функции $h_1(t), \dots, h_n(t)$ не вполне линейно независимы на T , у каждого нетривиального многочлена $\omega(g, t)$ существует по крайней мере один корень-узел на (t_0, t_1) и система (1) не является положительно наблюдаемой.

Пусть $n=2$ и $\dot{x}_1(t)=0$, $\dot{x}_2(t)=0$, $y(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)$, $t \in T=[-1, 2]$, где непрерывные функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} c_1(t) &= t, \quad t \in [-1, 0); \quad c_1(t) = -t^2(t-1), \quad t \in [0, 1); \quad c_1(t) = t-1, \quad t \in [1, 2]; \\ c_2(t) &= t, \quad t \in [-1, 0); \quad c_2(t) = -t(t-1), \quad t \in [0, 1); \quad c_2(t) = 1-t, \quad t \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что в приведённом примере $h_1(t)=c_1(t)$, $h_2(t)=c_2(t)$ и система функций $\{h_1(t), h_2(t)\}$ линейно независима, но не вполне линейно независима на T . Функции $\omega(g, t)$, $g=(g_1, g_2)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega(g, t) &= (g_1 + g_2)t, \quad t \in [-1, 0); \quad \omega(g, t) = -t(t-1)(g_1t + g_2), \quad t \in [0, 1); \\ \omega(g, t) &= (g_1 - g_2)(t-1), \quad t \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что каждый нетривиальный многочлен $\omega(g, t)$ имеет корень-узел. Для начального момента времени $t_0 = -1$ начальные состояния $(x_{01}^1, x_{02}^1) = (-1, -1)$ и $(x_{01}^2, x_{02}^2) = (-2, 0)$ порождают выходные функции

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -2t, \quad t \in [-1, 0); \quad y_1(t) = t(t^2 - 1), \quad t \in [0, 1); \quad y_1(t) = 0, \quad t \in [1, 2]; \\ y_2(t) &= -2t, \quad t \in [-1, 0); \quad y_2(t) = 2t^2(t-1), \quad t \in [0, 1); \quad y_2(t) = 2(1-t), \quad t \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Понятно, что $y_1^+(t) = y_2^+(t)$, $t \in T$, т.е. начальные состояния $(x_{01}^1, x_{02}^1) \neq (x_{01}^2, x_{02}^2)$ порождают одну и ту же выходную функцию. Поэтому данная система положительно ненаблюдаема.

Простые примеры показывают, что только одно условие вполне линейной независимости системы функций $\{h_1(t), \dots, h_n(t)\}$ на отрезке T не гарантирует положительную наблюдаемость системы (1). Следовательно, положительная наблюдаемость и дифференциальная наблюдаемость [5–7] — существенно различные свойства систем наблюдения и одно из другого не следуют.

Лемма 2. *Для того чтобы у каждого нетривиального многочлена $\omega(g, t)$ по системе функций $\{h_1(t), \dots, h_n(t)\}$ существовал хотя бы один корень-узел на промежутке (t_0, t_1) , необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два неравенства:*

$$\min_{\|g\|=1, g \in \mathbb{R}^n} \max_{t \in T} \omega(g, t) > 0 \quad \text{и} \quad \max_{\|g\|=1, g \in \mathbb{R}^n} \min_{t \in T} \omega(g, t) < 0.$$

Доказательство леммы 2 следует из свойств непрерывных функций.

Теорема 2. *Если функции $h_1(t), \dots, h_n(t)$ образуют систему функций Чебышёва порядка $n-1$ на отрезке T , то система (1) не является положительно наблюдаемой.*

Доказательство теоремы 2 следует из того факта, что в линейной оболочке всякой системы функций Чебышёва существуют [8, 9] как строго положительные, так и строго отрицательные многочлены на T .

Исходя из теоремы 2, несложно привести примеры систем наблюдения, которые не являются положительно наблюдаемыми. Например, система (1) вида $\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\dot{x}_n(t) = 0$, $y(t) = x_1(t)$ наблюдаема на любом отрезке $[t_0, t_1]$, $t_0 \geq 0$, но она не является положительно наблюдаемой по выходу $y^+(t) = [x_1(t)]^+$ на отрезке $[t_0, t_1]$, так как соответствующие этой системе наблюдения функции $\{h_1(t), \dots, h_n(t)\} = \{1, t, \dots, t^{n-1}/(n-1)!\}$ образуют систему функций Чебышёва порядка $n-1$ на T .

Пусть $\mathcal{G}$ — множество всех невырожденных при каждом $t \in T$ квадратных $n \times n$ -матриц $G(t)$ с непрерывно дифференцируемыми элементами. Действие группы $\mathcal{G}$ на паре (A, c) определим стандартным образом: $G * (A, c) = (G^{-1}(t)A(t)G(t) - G^{-1}(t)\dot{G}(t), c(t)G(t))$, $G \in \mathcal{G}$.

Непосредственно из леммы 2.3 монографии [7] следует, что свойство положительной наблюдаемости инвариантно относительно действия группы $\mathcal{G}$ на множестве систем наблюдения (A, c) с непрерывными элементами.

Рассмотрим задачу положительной наблюдаемости для равномерно наблюдаемых [7] систем (A, c) . Всякая равномерно наблюдаемая пара (A, c) является [7] дифференциально наблюдаемой, и поэтому система функций $\{h_1(t), \dots, h_n(t)\}$ вполне линейно независима на T . Далее нам понадобится отображение, определённое по правилу

$$f(A, c)(t) = s_n(t)S^{-1}(t), \quad s_n(t) = s_{n-1}(t)A(t) + \dot{s}_{n-1}(t), \quad t \in T,$$

которое, как показано в [7], является полным инвариантом относительно действия группы $\mathcal{G}$ на множестве равномерно наблюдаемых систем. Обозначим через $\beta_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, компоненты n -вектор-функции $f(A, c)(t)$.

Теорема 3. Пусть пара (A, c) равномерно наблюдаема на отрезке T . Система (1) положительно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда каждое нетривиальное решение скалярного дифференциального уравнения $\xi^{(n)}(t) = \beta_1(t)\xi(t) + \beta_2(t)\xi^{(1)}(t) + \dots + \beta_n(t)\xi^{(n-1)}(t)$ имеет хотя бы один корень-узел на интервале (t_0, t_1) .

Доказательство теоремы 3 основано на возможности преобразования равномерно наблюдаемой пары (A, c) с помощью преобразования $z(t) = S(t)x(t)$, $t \in T$, к системе вида (1) с матрицей в форме Фробениуса [7] и вектором $c(t)S^{-1}(t) = (1, 0, \dots, 0)$.

Теорема 4. Пусть пара (A, c) равномерно наблюдаема на отрезке T и её полный инвариант $f(A, c)(t) = (\beta_1, \dots, \beta_n) = \text{const}$, $t \in T$. Система (1) положительно наблюдаема тогда и только тогда, когда уравнение $\lambda^n - \lambda\beta_1 - \dots - \lambda^{n-1}\beta_n = 0$ не имеет действительных корней.

Доказательство теоремы 4 следует из соотношения $s_n(t)S^{-1}(t) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Оказывается, что задача положительной наблюдаемости тесно связана с проблемой неосцилляции [10].

Теорема 5. Если пара (A, c) равномерно наблюдаема на отрезке T и дифференциальное уравнение $\xi^{(n)}(t) = \beta_1(t)\xi(t) + \beta_2(t)\xi^{(1)}(t) + \dots + \beta_n(t)\xi^{(n-1)}(t)$ неосцилляционно, то система (1) не является положительно наблюдаемой системой.

Доказательство теоремы 5 следует из теорем 1, 3 и свойств неосцилляции [10].

Литература. 1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с. 2. Brammer, R.F. Geometrically constrained observability / R.F. Brammer // SIAM J. Control. — 1974. — V. 12, № 3. — P. 449–459. 3. Sontag, E.D. Mathematical Control Theory / E.D. Sontag. — Berlin : Springer-Verlag, 1990. 4. Астровский, А.И. Положительная наблюдаемость линейных нестационарных систем / А.И. Астровский // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 1999. — № 2. — С. 33–39. 5. Weiss, L. The concepts of differential controllability and differential observability / L. Weiss // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — № 10. — P. 442–449. 6. Silverman, L.M. Controllability and observability in time-variable linear systems / L.M. Silverman, Н.Е. Meadows // SIAM J. Control. — 1967. — V. 5, № 1. — P. 64–73. 7. Астровский, А.И. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений / А.И. Астровский, И.В. Гайшун. — Минск : Беларус. навука, 2013. — 214 с. 8. Карлин, С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден; пер. с англ. под ред. С.М. Ермолова. — М. : Наука, 1976. — 568 с. 9. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. — М. : Наука, 1973. — 551 с. 10. Левин, А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ / А.Ю. Левин // Успехи мат. наук. — 1969. — Т. 24. Вып. 2 (146). — С. 43–96.