ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 148–156

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С СИЛЬНО ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

С. А. Кащенко

Региональный научно-образовательный математический центр при Ярославском государственном университете имени П.Г. Демидова, г. Ярославль

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 20.06.2023 г., после доработки 19.07.2023 г.; принята к публикации 11.10.2023 г.

Исследована локальная динамика логистического уравнения с запаздыванием и с дополнительной обратной связью, содержащей большое запаздывание. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия. Показано, что они имеют бесконечную размерность. Хорошо известные методы изучения локальной динамики, основанные на применении теории инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм, здесь не применимы, поэтому использованы и развиты предложенные автором методы бесконечномерной нормализации. Построены специальные нелинейные краевые задачи параболического типа, играющие роль нормальных форм. Они определяют главные члены асимптотических разложений решений исходного уравнения, которые называют квазинормальными формами.

Ключевые слова: динамика, устойчивость, запаздывание, квазинормальные формы, логистическое уравнение.

DOI: 10.31857/S0374064124020014, EDN: QQOZTV

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u}(t) = -ru(t-1)[1+u(t)] \tag{1}$$

возникает в задачах математической экологии, биофизики, оптики и лазерной физики [1–4]. Здесь $r>0$ — мальтузианский коэффициент, и для решений уравнения (1) выполнено неравенство $u(t)\geqslant -1$. При условии

$$0<r<\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво, а при $r>\pi/2$ — неустойчиво, и в (1) имеется устойчивый цикл. Асимптотика решения при $r\gg 1$ приведена в работах [4, 5].

В данной статье рассмотрим ситуацию, когда выполняется условие (2) и уравнение (1) содержит сильно запаздывающую обратную связь

$$\dot{u}(t) = -ru(t-1)[1+u(t)] + au(t-T), \quad T\gg 1, \tag{3}$$

а, значит, величина $\varepsilon = T^{-1}$ является малым параметром:

$$0<\varepsilon\ll 1. \tag{4}$$

Роль большого запаздывания интересна. С одной стороны, результаты, полученные для бо́льших значений T, позволяют сформулировать выводы о тенденциях изменения динамики при увеличении запаздывания, а с другой, как оказалось, — удаётся в явном виде получить значения параметров, определяющих динамические свойства исходного уравнения и сформулировать аналитические результаты.

Удобно в уравнении (3) провести нормировку времени $t \to Tt$. В результате получим сингулярно возмущённое уравнение с малым параметром при производной

$$\varepsilon\dot{u}(t)+ru(t-\varepsilon)[1+u(t)]=au(t-1). \tag{5}$$

Отметим, что вырожденное при $\varepsilon=0$ уравнение не даёт информации о поведении решений. Тем не менее идеи и методы теории сингулярных возмущений [6–8] будут существенно применяться.

При выполнении условия (4) исследуем поведение всех решений уравнения (5) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности в пространстве $C([-1,0])$ нулевого состояния равновесия.

При изучении решений из окрестности нулевого состояния равновесия важное значение имеют линеаризованное уравнение

$$\varepsilon\dot{u}(t)+ru(t-\varepsilon)=au(t-1)$$

и расположение корней характеристического квазиполинома этого уравнения:

$$\varepsilon\lambda+re^{-\varepsilon}=ae^{-\lambda}. \tag{6}$$

В силу неравенств (2) при $a=0$ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части. Покажем, что найдётся такое значение $a=a_0>0$, что при малых ε и $|a|<a_0$ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части, а при условиях (4) и $|a|>a_0$ есть корень уравнения (6) с положительной вещественной частью. При $a=a_0$ будет реализован критический случай в задаче об устойчивости, когда нет корней с положительной и отделённой от нуля вещественной частью, но есть корень, вещественная часть которого стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$.

В п. 2 будет найдено значение a_0 и показано, что в критическом случае бесконечно много корней уравнения (6) стремятся к мнимой оси при $\varepsilon\to 0$. Это означает, что критический случай имеет бесконечную размерность. Известные методы локального анализа, основанные на применении теории инвариантных интегральных многообразий [9, 10] и нормальных форм [11], здесь оказываются не применимы. Исследования будут опираться на методы бесконечной нормализации, развитые в работах [12–14]. Отметим, что после публикации статей [15–18] уравнения с большим запаздыванием изучались с теоретической и прикладной точек зрения во многих работах (см., например, [19–24]).

2. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

Положив в (6) $\lambda=i\varepsilon^{-1}\omega$, получим равенство

$$P(i\omega)=a\exp\{-i\varepsilon^{-1}\omega\},$$

где $P(i\omega)=i\omega+r\exp\{-i\omega\}$. Пусть $P(i\omega)=\rho(\omega)\exp\{i\Omega(\omega)\}$, $|P(i\omega)|=\rho(\omega)$. Обозначим через ρ_0 наименьшее значение $\rho(\omega)$, т. е.

$$\rho_0=\min_{\omega}\rho(\omega)=\rho(\omega_0).$$

Отметим, что $\omega_0=0$ при $0<r\leqslant 1/2$ и $\omega_0>0$ при $1/2<r<\pi/2$. Кроме того, имеем $\rho_0=0$ при $r=0$ и $r=\pi/2$. Сформулируем одно простое утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие (2) и для некоторого фиксированного параметра a имеет место неравенство* $|a| < \rho_0$. *Тогда при достаточно малых* ε *вещественные части всех корней уравнения (6) отрицательны и отделены от нуля при* $\varepsilon \to 0$.

Если же $|a| > \rho_0$, *то при достаточно малых* ε *найдётся корень (6), вещественная часть которого положительна и отделена от нуля при* $\varepsilon \to 0$.

Обоснование первого утверждения леммы 1 сразу следует из определения величины ρ_0. Для обоснования второго утверждения сначала введём обозначение: через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ будем обозначать такое значение, которое дополняет до целого кратного 2π выражение $\omega_0\varepsilon^{-1}$. Отметим, что при $\omega_0 = 0$ значение $\theta = 0$. Тогда просто показать, используя теорию возмущений, что уравнение (6) имеет корень $\lambda(\varepsilon)$, для которого верна асимптотика

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + i(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta - \Omega(\omega)) + O(\varepsilon),$$

где $\lambda_0 = \ln(a\rho_0^{-1}) > 0$.

Исследования в случаях $a > 0$ и $a < 0$ не различаются, поэтому достаточно ограничиться изучением случая $a > 0$.

Из леммы 1 вытекает, что при $0 \leqslant a < \rho_0$ локальная динамика решений (3) тривиальна: все решения из некоторой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \to \infty$, а в случае $a > \rho_0$ задача о динамике перестаёт быть локальной.

Рассмотрим критический случай, когда для произвольного фиксированного значения ρ_1 выполняется равенство

$$a = \rho_0 + \varepsilon^2\rho_1. \tag{7}$$

В этом случае нет корня уравнения (6), вещественная часть которого положительна и отделена от нуля при $\varepsilon \to 0$, но есть корни, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Найдём асимптотику всех тех корней (6), которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2), (4) и (7). Тогда уравнение (6) имеет бесконечно много корней* $\lambda_n(\varepsilon)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *вещественные части которых стремятся к нулю при* $\varepsilon \to 0$, *и справедливы асимптотические равенства*

$$\lambda_n(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon i\big(\theta - \Omega(\omega_0) + 2\pi n\big) + \varepsilon^2\lambda_{1n} + \varepsilon^3\lambda_{2n} + \ldots,$$

где

$$\lambda_{1n} = -i\Omega'(\omega_0)\big(\theta - \Omega(\omega_0) + 2\pi n\big),$$

$$\lambda_{2n} = -\frac{1}{2}\big(\rho''(\omega_0)\rho_0^{-1} + i\Omega''(\omega_0)\big)\big(\theta - \Omega(\omega_0) + 2\pi n\big)^2 + i\big(\Omega'(\omega_0)\big)^2\big(\theta - \Omega(\omega_0) + 2\pi n\big) + \rho_1\rho_0^{-1}.$$

Обоснование этой леммы основано на применении стандартных методов теории возмущений. Отметим, что $\rho(0) = r$, $\rho'(0) = 0$, $\rho''(0) = (1-2r)r^{-1}$, $\Omega'(0) = (1-r)r^{-1}$.

Каждому корню $\lambda_n(\varepsilon)$ уравнения (6) отвечает решение Эйлера линеаризованного уравнения

$$u_n(t, \varepsilon) = \exp\{\lambda_n(\varepsilon)t\},$$

а значит, решениями линеаризованного уравнения являются семейства функций

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n u_n(t, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp\{\lambda_n(\varepsilon)t\} \tag{8}$$

при произвольных значениях коэффициентов ξ_n. Преобразуем выражение (8):

$$u(t, \varepsilon) = E(t, \varepsilon)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau)\exp\{i2\pi nx\} = E(t, \varepsilon)\xi(\tau, x). \tag{9}$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, $x = (1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))t$, $\xi_n(\tau) = \xi_n \exp\{(\lambda_{2n} + O(\varepsilon))\tau\}$ — коэффициенты Фурье функции $\xi(\tau, x)$. Важно отметить, что функция $\xi(\tau, x)$ 1-периодична по x,

$$E(t,\varepsilon) = \exp\{i(\omega_0 + \varepsilon(\theta - \Omega(\omega_0)) - \varepsilon^2\Omega'(\omega_0)(\theta - \Omega(\omega_0)))t\}. \tag{10}$$

Представление (10) следует непосредственно из (8) и из приведённой в лемме 2 асимптотики корней $\lambda_n(\varepsilon)$.

Основываясь на (9), решения нелинейного уравнения (3) тоже будем искать в виде

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon\big(E(t,\varepsilon)\xi(\tau,x) + \overline{cc}\big) + \varepsilon^2\big(u_{20}(\tau,x) + u_{21}(\tau,x)E^2(t,\varepsilon) + \overline{cc}\big) +$$
$$+ \varepsilon^3\big(u_{31}(\tau,x)E(t,\varepsilon) + \overline{cc} + u_{32}(\tau,x)E^3(t,\varepsilon) + \overline{cc}\big) + \ldots \tag{11}$$

В (11) и ниже через $\overline{cc}$ обозначаем выражение, комплексно-сопряжённое к предыдущему слагаемому.

3. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Для построения асимптотики решений нелинейного уравнения (3) будем опираться на представление (11) "критических" решений линеаризованного уравнения. Рассмотрим отдельно случаи $0 < r < 1/2$ и $1/2 < r < \pi/2$. Эти два случая принципиально отличаются друг от друга.

3.1. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ $0 < r < 1/2$

При условии $0 < r < 1/2$ выполнены равенства $\omega_0 = 0$, $\Omega(\omega_0) = 0$, $\rho_0 = 1$. Тогда из (10) следует, что $E(t,\varepsilon) \equiv 1$, поэтому решения нелинейного уравнения (3) будем искать в виде

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon^2\xi(\tau,x) + \varepsilon^4 u_2(\tau,x) + \ldots \tag{12}$$

Здесь учитываем, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon^2\frac{\partial\xi}{\partial\tau} + (1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))\frac{\partial\xi}{\partial x},$$

$$\xi|_{t-\varepsilon} = \xi\big(\tau - \varepsilon^3, x - \varepsilon(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))\big) = -\varepsilon^3\xi'_\tau - \varepsilon(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))\xi'_x + \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))\xi''_{xx} + O(\varepsilon^3),$$

$$\xi|_{t-1} = \xi(\tau-\varepsilon^2, x-(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))) = \xi(\tau-\varepsilon^2, x+\varepsilon\Omega'(\omega_0)).$$

Подставим формальное выражение (12) в (3) и соберём коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге, собирая коэффициенты при ε^2, получаем верное равенство. На следующем шаге, собирая коэффициенты при ε^4, приходим к соотношению

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\frac{1-2r^2}{r^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{1-r^2}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\rho_1}{r}\xi - \xi^2. \tag{13}$$

Для неизвестной функции $\xi(\tau,x)$ выполнены краевые условия

$$\xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x). \tag{14}$$

Отсюда вытекает следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4),* $0 < r < 1/2$, $a = r + \varepsilon^2\rho_1$. *Пусть* $\xi(\tau,x)$ — *ограниченное при* $\tau\to\infty$, $x\in[0,1]$, *решение краевой задачи (13), (14). Тогда функция*

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon^2\xi(\tau,x)$$

удовлетворяет уравнению (3) с точностью до $O(\varepsilon^4)$.

Это утверждение означает, что краевая задача (13), (14) является квазинормальной формой в рассматриваемом случае.

3.2. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ $1/2<r<\pi/2$

Подставим в уравнение (3) вместо $u(t,\varepsilon)$ функцию (11) и будем последовательно приравнивать в получившемся формальном тождестве коэффициенты при одинаковых степенях ε. При первой степени ε получаем верное равенство, а собирая коэффициенты при ε^2, приходим к уравнениям для определения $u_{20}(\tau,x)$ и $u_{21}(\tau,x)$:

$$(\rho_0(\omega)-r)u_{20}=2r\cos\Omega(\omega_0)|\xi|^2,$$
$$(2i\omega_0+r\exp\{-2i\omega_0\})u_{21}=\xi^2E^2(t,\varepsilon)\exp\{i\Omega(\omega_0)\}.$$

Отсюда получаем, что

$$u_{20}(\tau,x)=U_{20}|\xi(\tau,x)|^2,\quad U_{20}=2r\cos\Omega(\omega_0),$$
$$u_{21}(\tau,x)=U_{21}\xi^2(\tau,x)E^2(t,\varepsilon),\quad U_{21}=(2i\omega_0+r\exp\{-2i\omega_0\})^{-1}\exp\{i\Omega(\omega_0)\}.$$

Сделаем ещё один шаг. Соберём коэффициенты при ε^3. В итоге получим уравнения относительно $u_{31}(\tau,x)$ и $u_{32}(\tau,x)$. Функция $u_{32}(\tau,x)$ определяется просто, явное выражение для неё опустим. Для разрешимости уравнения относительно $u_{31}(\tau,x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=B_1\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+B_2\frac{\partial\xi}{\partial x}+B_3\xi+\sigma\xi|\xi|^2, \tag{15}$$

где

$$B_1=\frac{1}{2}\big(\rho''(\omega_0)\rho_0^{-1}+i\Omega''(\omega_0)\big),$$
$$B_2=(\Omega'(\omega_0))^2+2iB_1(\theta-\Omega(\omega_0)),$$
$$B_3=\rho_1\rho_0^{-1}-B_1(\theta-\Omega(\omega_0))^2+i(\Omega'(\omega_0))^2(\theta-\Omega(\omega_0)),$$
$$\sigma=\big(1+\exp\{-i\Omega(\omega_0)\}\big)U_{20}+\big(\exp\{-2i\Omega(\omega_0)\}+\exp\{i\Omega(\omega_0)\}\big)U_{21}.$$

Функция $\xi(\tau,x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям

$$\xi(\tau,x+1)\equiv\xi(\tau,x). \tag{16}$$

Через $\varepsilon_n(\theta_0)$ обозначим такую последовательность $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\theta_0)\to 0$, что $\theta(\varepsilon_n)=\theta_0$. Напомним, что $\tau=\varepsilon^2t,\ x=(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))t$.

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены неравенства $1/2<r<\pi/2$ и условия (4) и (7). Фиксируем произвольно $\theta=\theta_0\in[0,2\pi]$. Пусть $\xi(\tau,x)$ — ограниченное при $\tau\to\infty$, $x\in[0,1]$, решение краевой задачи (15), (16) при $\theta=\theta_0$. Тогда функция*

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon\big(\xi(\tau,x)E(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)+\varepsilon^2\big(u_{20}(\tau,x)+u_{21}(\tau,x)E^2(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)+$$
$$+\varepsilon^3\big(u_{31}(\tau,x)E(t,\varepsilon)+\overline{cc}+u_{32}(\tau,x)E^3(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)$$

удовлетворяет на последовательности $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\theta_0)$ уравнению (3) с точностью до $O(\varepsilon_n^4)$.

Теорема 2 утверждает, что краевая задача (15), (16) в рассматриваемом случае является квазинормальной формой для уравнения (3).

3.3. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ $r=\pi/2$

Коротко изучим решение уравнения (3) при условии $r=\pi/2$. Имеем равенство $\rho_0=0$. Пусть $a=\varepsilon\rho_1$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\dot{u}(t)+\frac{\pi}{2}u(t-1)+\frac{\pi}{2}u(t)u(t-1)=\varepsilon\rho_1 u(t-\varepsilon^{-1}).$$

Линеаризованное в нуле уравнение имеет характеристический квазиполином

$$\lambda+\frac{\pi}{2}e^{-\lambda}=\varepsilon\rho_1 e^{-\varepsilon^{-1}\lambda},$$

у которого бесконечно много корней $\lambda_n(\varepsilon)$ и $\bar{\lambda}_n(\varepsilon)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ стремятся к мнимой оси при $\varepsilon\to 0$. Легко проверяется, что

$$\lambda_n(\varepsilon)=i\frac{\pi}{2}+\varepsilon(\theta+\lambda_{1n})+\ldots,$$

а значения λ_{1n} находятся из уравнения

$$\Big(1-i\frac{\pi}{2}\Big)(\lambda_1+\theta)=\rho_1 e^{-\lambda}.$$

Здесь величина $\theta=\theta(\varepsilon)\in[0,2\pi)$ дополняет до целого кратного 2π значение $\pi(2\varepsilon)^{-1}$.

Решение нелинейного уравнения (3) ищем в виде

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}\big(\xi(\tau)e^{it}+\overline{cc}\big)+\varepsilon u_2(t,\tau)+\varepsilon^{3/2}u_3(t,\tau)+\ldots, \tag{17}$$

где $\tau=\varepsilon t$, а функции $u_{2,3}(t,\tau)$ 4-периодичны по первому аргументу. Подставляя (17) в (3) и совершая стандартные действия, на третьем шаге получаем уравнение для определения неизвестной амплитуды $\xi(\tau)$:

$$\Big(1-i\frac{\pi}{2}\Big)\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=-\theta\xi+\rho_1 e^{-i\varepsilon^{-1}}\xi(\tau-1)+\sigma\xi|\xi|^2, \tag{18}$$

в котором

$$\sigma=-\frac{\pi}{2}\big(3\pi-2+i(\pi+6)\big)\Big(10\Big(1+\frac{4}{\pi^2}\Big)\Big)^{-1}.$$

Это уравнение с запаздыванием, равным единице, является квазинормальной формой в рассматриваемом случае. Его решение определяет главные члены асимптотического разложения решений нелинейного уравнения (3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что бесконечно много корней характеристического квазиполинома линеаризованного уравнения стремятся к мнимой оси при $\varepsilon\to 0$. Реализуются бесконечномерные резонансные соотношения $1:1:1:\ldots$, поскольку главные члены асимптотики корней $\lambda_n(\varepsilon)$ одни и те же:

$$\lambda_n(\varepsilon)=i(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta)(1+O(\varepsilon)).$$

Отсюда следует, что критические случаи имеют бесконечномерную размерность.

С применением методов бесконечномерной нормализации построены квазинормальные формы — специальные нелинейные краевые задачи, которые определяют главные члены асимптотических разложений решений исходного логистического уравнения. Этими квазинормальными формами являются нелинейные задачи параболического типа (13), (14) и (15),

(16) и уравнение с запаздыванием (18). При условии $0<r<1/2$ динамика квазинормальной формы тривиальна: все решения стремятся к состоянию равновесия при $t\to\infty$. При $1/2<r<\pi/2$ ситуация иная. Структура решений соответствующей квазинормальной формы может быть сложной, поскольку эта форма представляет собой комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с периодическими граничными условиями. Известно, что уравнения типа Гинзбурга–Ландау могут иметь и нерегулярную динамику, и много различных аттракторов, и т. д.

Рассмотрены динамические свойства решений при значениях параметра r, близкого к $\pi/2$. Для этого случая показано, что квазинормальной формой является нелинейное уравнение с (конечным) запаздыванием. Динамика таких уравнений тоже может отличаться сложностью, например, может существовать бесконечное число различных циклов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wright, E.M. A non-linear difference-differential equation / E.M. Wright // J. fur die reine und angewandte Mathematik. — 1955. — Bd. 194. — S. 66–87.
2. Kuang, Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics / Y. Kuang. — Boston : Academic Press, 1993.
3. Wu, J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / J. Wu. — New York : Springer-Verlag, 1996.
4. Кащенко, С.А. Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием / С.А. Кащенко. — М. : КРАСАНД, 2020. — 576 с.
5. Kashchenko, S.A. Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation / S.A. Kashchenko // Automatic Control and Comput. Sciences. — 2013. — V. 47, № 7. — P. 470–494.
6. Васильева, А.Б. Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.
7. Boundary layer solutions to singularly perturbed quasilinear systems / V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, O. Omel'chenko, L. Recke // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B. — 2022. — V. 27, № 8. — P. 4255–4283.
8. Nefedov, N.N. Development of methods of asymptotic analysis of transitionlayers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications / N.N. Nefedov // Comput. Mathematics and Math. Physics. — 2021. — V. 61, № 12. — P. 2068–2087.
9. Hale, J.K. Theory of Functional Differential Equations / J.K. Hale. — New York : Springer-Verlag, 1977. — 366 p.
10. Hartman, P. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. — Philadelphia : SIAM, 2002. — 612 p.
11. Брюно, А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А.Д. Брюно. — М. : Наука, 1979. — 255 с.
12. Кащенко, С.А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / С.А. Кащенко // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 8. — С. 1448–1451.
13. Kashchenko, S.A. Normalization in the systems with small diffusion / S.A. Kashchenko // Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. — 1996. — V. 6. — P. 1093–1109.
14. Kashchenko, S.A. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay / S.A. Kashchenko // Comput. Mathematics and Math. Physics. — 1998. — V. 38, № 3. — P. 443–451.

15. Mensour, B. Power spectra and dynamical invariants for delay-differential and difference equations / B. Mensour, A. Longtin // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — V. 113, № 1. — P. 1–25.
16. Wolfrum, M. Eckhaus instability in systems with large delay / M. Wolfrum, S. Yanchuk // Phys. Rev. Lett. — 2006. — V. 96, № 22. — Art. 220201.
17. Bestehorn, M. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback / M. Bestehorn, E.V. Grigorieva, H. Haken, S.A. Kashchenko // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2000. — V. 145, № 1–2. — P. 110–129.
18. Giacomelli, G. Multiple scale analysis of delayed dynamical systems / G. Giacomelli, A. Politi // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — V. 117, № 1–4. — P. 26–42.
19. Synchronization properties of network motifs: influence of coupling delay and symmetry / O. D'Huys, R. Vicente, T. Erneux, J. Danckaert, I. Fischer // Chaos: An Interdisciplinary J. of Nonlinear Science. — 2008. — V. 18, № 3. — Art. 37116.
20. Yanchuk, S. Delay and periodicity / S. Yanchuk, P. Perlikowski // Phys. Rev. E. — 2009. — V. 79, № 4. — P. 1–9.
21. Klinshov, V.V. Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators / V.V. Klinshov, V.I. Nekorkin // Chaos, Solitons and Fractals. — 2011. — V. 44, № 1–3. — P. 98–107.
22. Клиньшов, В.В. Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями / В.В. Клиньшов, В.И. Некоркин // Успехи физ. наук. — 2013. — Т. 183, № 12. — С. 1323–1336.
23. Klinshov, V. Jittering waves in rings of pulse oscillators / V. Klinshov, D. Shchapin, S. Yanchuk, V. Nekorkin // Phys. Rev. E. — 2016. — V. 94, № 1. — Art. 012206.
24. Kashchenko, S.A. Van der Pol equation with a large feedback delay / S.A. Kashchenko // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 6. — Art. 1301.

LOGISTIC EQUATION WITH LONG DELAY FEEDBACK

S. A. Kashchenko

Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

We study the local dynamics of a logistic equation with delay and with additional feedback containing a large delay. Critical cases in the problem of stability of the zero equilibrium state are identified and it is shown that they have infinite dimension. Well-known methods for studying local dynamics, based on the application of the theory of invariant integral manifolds and normal forms, are not applicable here. Methods of infinite-dimensional normalization proposed by the author are used and developed. As the main results, special nonlinear boundary value problems of parabolic type are constructed, which play the role of normal forms. They determine the main terms of the asymptotic expansions of solutions to the original equation. They are called quasinormal forms.

Keywords: dynamics, stability, delay, quasi-normal forms, logistic equation.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project 21-71-30011).

REFERENCES

1. Wright, E.M. A non-linear difference-differential equation / E.M. Wright // J. fur die reine und angewandte Mathematik. — 1955. — Bd. 194. — S. 66–87.
2. Kuang, Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics / Y. Kuang. — Boston : Academic Press, 1993.
3. Wu, J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / J. Wu. — New York : Springer-Verlag, 1996.
4. Kashchenko S.A. Dinamika modeley na osnove logisticheskogo uravneniya s zapazdyvaniyem / S.A. Kashchenko. — Moscow : KRASAND, 2020. — 576 p. [in Russian]

5. Kashchenko, S.A. Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation / S.A. Kashchenko // Automatic Control and Comput. Sciences. — 2013. — V. 47, № 7. — P. 470–494.
6. Vasil'eva A.B. Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations / A.B. Vasil'eva, V.F. Butuzov. — Moscow : Nauka, 1973. [in Russian]
7. Boundary layer solutions to singularly perturbed quasilinear systems / V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, O. Omel'chenko, L. Recke // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B. — 2022. — V. 27, № 8. — P. 4255–4283.
8. Nefedov, N.N. Development of methods of asymptotic analysis of transitionlayers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications / N.N. Nefedov // Comput. Mathematics and Math. Physics. — 2021. — V. 61, № 12. — P. 2068–2087.
9. Hale, J.K. Theory of Functional Differential Equations / J.K. Hale. — New York : Springer-Verlag, 1977. — 366 p.
10. Hartman, P. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. — Philadelphia : SIAM, 2002. — 612 p.
11. Bruno, A.D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations / A.D. Bruno. — Berlin : Springer-Verlag, 1989. — 255 p.
12. Kashchenko, S.A. Application of the normalization method to the study of the dynamics of a differential-difference equation with a small factor multiplying the derivative / S.A. Kashchenko // Differents. Uravneniya. — 1989. — V. 25, № 8. — P. 1448–1451.
13. Kashchenko, S.A. Normalization in the systems with small diffusion / S.A. Kashchenko // Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. — 1996. — V. 6. — P. 1093–1109.
14. Kashchenko, S.A. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay / S.A. Kashchenko // Comput. Mathematics and Math. Physics. — 1998. — V. 38, № 3. — P. 443–451.
15. Mensour, B. Power spectra and dynamical invariants for delay-differential and difference equations / B. Mensour, A. Longtin // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — V. 113, № 1. — P. 1–25.
16. Wolfrum, M. Eckhaus instability in systems with large delay / M. Wolfrum, S. Yanchuk // Phys. Rev. Lett. — 2006. — V. 96, № 22. — Art. 220201.
17. Bestehorn, M. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback / M. Bestehorn, E.V. Grigorieva, H. Haken, S.A. Kashchenko // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2000. — V. 145, № 1–2. — P. 110–129.
18. Giacomelli, G. Multiple scale analysis of delayed dynamical systems / G. Giacomelli, A. Politi // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — V. 117, № 1–4. — P. 26–42.
19. Synchronization properties of network motifs: influence of coupling delay and symmetry / O. D'Huys, R. Vicente, T. Erneux, J. Danckaert, I. Fischer // Chaos: An Interdisciplinary J. of Nonlinear Science. — 2008. — V. 18, № 3. — Art. 37116.
20. Yanchuk, S. Delay and periodicity / S. Yanchuk, P. Perlikowski // Phys. Rev. E. — 2009. — V. 79, № 4. — P. 1–9.
21. Klinshov, V.V. Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators / V.V. Klinshov, V.I. Nekorkin // Chaos, Solitons and Fractals. — 2011. — V. 44, № 1–3. — P. 98–107.
22. Klinshov V.V. Synchronization of delay-coupled oscillator networks / V.V. Klinshov, V.I. Nekorkin // Phys. Usp. — 2013. — V. 56. — P. 1217–1229.
23. Klinshov, V. Jittering waves in rings of pulse oscillators / V. Klinshov, D. Shchapin, S. Yanchuk, V. Nekorkin // Phys. Rev. E. — 2016. — V. 94, № 1. — Art. 012206.
24. Kashchenko, S.A. Van der Pol equation with a large feedback delay / S.A. Kashchenko // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 6. — Art. 1301.