ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 4, с. 500–507

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.7

О РЕАЛИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ СУЩЕСТВЕННЫХ СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. Х. Сташ[1], Н. А. Лобода[2]

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

e-mail: [1] aidamir.stash@gmail.com, [2] n-loboda@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.11.2023 г., после доработки 21.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, построена двумерная линейная однородная дифференциальная система (периодическая, если все элементы заданного множества попарно соизмеримы), у которой спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с этим множеством, причём все значения указанных показателей существенны.

Ключевые слова: линейная система дифференциальных уравнений, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, частота Сергеева.

DOI: 10.31857/S0374064124040053, EDN: PCGUSW

ВВЕДЕНИЕ

Для заданного числа $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x}=A(t)x, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0, +\infty),$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями $A\colon\ \mathbb{R}_+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с задаваемой ею системой). Множество всех ненулевых решений системы $A\in\mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ и положим

$$\mathcal{S}^n=\bigcup_{A\in\mathcal{M}^n}\mathcal{S}_*(A).$$

Все асимптотические характеристики колеблемости, введённые И.Н. Сергеевым в работах [1–4], для решений линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка равны нулю, а на множестве решений двумерных систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка, все верхние (как и все нижние) характеристики колеблемости равны между собой и их спектры (т.е. множества значений на ненулевых решениях) состоят из одного числа (см. [2]).

В статьях [2, 5, 6] полностью описаны спектры всех показателей колеблемости автономных систем; в [7, 8] было установлено, что спектры показателей колеблемости нулей любой автономной системы содержат одно типичное значение.

В работе [9] доказано существование двумерной линейной системы с периодическими коэффициентами, спектры всех показателей колеблемости которой содержат любое наперёд заданное конечное число существенных значений. Кроме того, доказано существование линейной двумерной дифференциальной системы со счётным множеством существенных значений всех показателей колеблемости.

Е.М. Шишлянниковым установлено [10], что для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой спектры показателей блуждаемости являются существенными и совпадают с этим множеством. Если все эти числа попарно соизмеримы, то систему можно выбрать периодической. В настоящей работе эти свойства перенесены и на все показатели колеблемости.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Сначала дадим основные определения.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t>0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1–4]. Для вектора $m\in\mathbb{R}^n_*\equiv\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ и вектор-функции $x\in\mathcal{S}^n$ обозначим:

$\nu^-(x,m,t)$ — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(x,m,t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(x,m,t)$ — число *нулей* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(x,m,t)$ — число *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(x,m,t)$ — число *гиперкорней* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$, где в процессе подсчёта этого количества каждый некратный корень считается ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз, независимо от его фактической кратности.

Определение 3 [2–4]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x\in\mathcal{S}^n$, при $\alpha=-,\sim,0,+,*$ соответственно, зададим формулами

$$\hat\nu^\alpha_\bullet(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\quad\left(\check\nu^\alpha_\bullet(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right),$$

$$\hat\nu^\alpha_\circ(x)\equiv\varlimsup_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\quad\left(\check\nu^\alpha_\circ(x)\equiv\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right).$$

К определению 3 при любом $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ добавим ещё обозначения

$$\nu^\alpha(x,m,s,t)\equiv\nu^\alpha(x,m,t)-\nu^\alpha(x,m,s),\quad x\in\mathcal{S}^n,\quad m\in\mathbb{R}^n_*,\quad 0\leqslant s<t.$$

Определение 4 [4]. Для функции $x\in\mathcal{S}^n$ условимся о следующем:

1) если значение некоторого верхнего (с обозначением $\hat{}$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого нижнего (с обозначением $\check{}$) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без знаков $\hat{}$ и $\check{}$;

2) если значение некоторого слабого (с обозначением $\circ$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого сильного (с обозначением $\bullet$) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без знаков $\circ$ и $\bullet$.

Определение 5 [7, 8]. Множество всех значений показателя $\varkappa\colon\mathcal{S}_*(A)\to\mathbb{R}_+$ назовём *спектром* этого показателя системы $A\in\mathcal{M}^n$, причём значение $a\in\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ назовём *существенным*, если подмножество

$$\{x(0)\colon\ x\in\mathcal{S}_*(A),\ \ \varkappa(x)=a\}\subset\mathbb{R}^2$$

имеет положительную меру и заполняет некоторое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра*, т.е. счётного объединения нигде не плотных подмножеств. Через $\operatorname{ess}\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ обозначим множество всех *существенных значений* показателя $\varkappa$ для системы A и назовём его *существенным спектром* системы A.

Возможность реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерной дифференциальной системы гарантирует следующая

Теорема. *Для любого конечного множества S неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует такая система $A\in\mathcal{M}^2$ (периодическая, если элементы множества S попарно соизмеримы), что справедливы равенства*

$$\nu^-(x)=\nu^\sim(x)=\nu^0(x)=\nu^+(x)=\nu^*(x),\quad x\in\mathcal{S}_*(A),$$
$$\varkappa(\mathcal{S}_*(A))=\operatorname{ess}\varkappa(\mathcal{S}_*(A))=S,\quad \varkappa=\nu^-,\nu^\sim,\nu^0,\nu^+,\nu^*. \tag{1}$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТЫ

Приведём свойства специальных вектор-функций, необходимые для доказательства основного результата.

Для произвольной вектор-функции $z\in C^1(E,\mathbb{R}^2_*)$ (E — либо отрезок $[0,T]$, либо полуось $\mathbb{R}_+$) однозначно определим функцию ϕ_z: $E\to\mathbb{R}$ соотношениями

$$\phi_z(0)\in[0,2\pi),\quad |z(t)|(\cos\phi_z(t)\ \ \sin\phi_z(t))^{\mathrm{T}}=z(t),\quad t\in E,\quad \phi_z\in C^1(E).$$

Для любых $T>0$, $\varphi_0\in[0,2\pi)$, $\delta\in(0,\pi/2]$ обозначим через $\mathcal{A}_0(T,\varphi_0,\delta)$ и $\mathcal{A}_1(T,\varphi_0,\delta)$ множества, состоящие из вектор-функций $u\in C^1([0,T],\mathbb{R}^2_*)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\phi(0)=\varphi_0$, где $\phi=\phi_u$;

2) функция ϕ нестрого монотонна на отрезках $[0,T/4]$ и $[T/4,T/2]$;

3) при каждом $t\in(0,T/2]$ верно равенство $\phi(T/2+t)=\phi(T/2-t)$;

4) для $u\in\mathcal{A}_0(T,\varphi_0,\delta)$ при каждом $t\in(0,T/2]$ выполнено включение $\phi(t)-\varphi_0\in[0,\pi-\delta]$;

5) для $u\in\mathcal{A}_1(T,\varphi_0,\delta)$ функция ϕ *нестрого возрастает* на отрезке $[0,T/2]$ и $\pi\leqslant\phi(T/2)-\varphi_0\leqslant 3\pi/2$.

Для любой функции $z\in\mathcal{S}^2$ и для любых чисел $i\in\mathbb{N}$ и $T>0$ определим функцию $u^i\equiv u_z^{T,i}\in C^1([0,T],\mathbb{R}^2_*)$ с помощью равенства

$$u_z^{T,i}(t)\equiv z((i-1)T+t),\quad t\in[0,T].$$

Вычисление значений показателей колеблемости для некоторых функций из множества $\mathcal{S}^2$ упрощает следующая

Лемма 1. *Если для чисел $a\in[0,1]$, $T>0$, $\varphi_0\in[0,2\pi)$, $\delta\in(0,\pi/2]$, последовательности $l_i\in\{0,1\}$, $i\in\mathbb{N}$, и решения $z\in\mathcal{S}^2$ имеют место соотношения*

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}l_i=a,$$
$$u^i\in\mathcal{A}_{l_i}(T,\varphi_0,\delta),\quad i\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

то справедливы равенства

$$\check\nu_\bullet^\alpha(z)=\hat\nu_\bullet^\alpha(z)=\check\nu_\circ^\alpha(z)=\hat\nu_\circ^\alpha(z)=2a\pi/T,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}. \tag{3}$$

Доказательство. Из определений множеств $\mathcal{A}_0(T,\varphi_0,\delta)$, $\mathcal{A}_1(T,\varphi_0,\delta)$ и условия (2) следует существование для наперёд выбранного решения $z\in\mathcal{S}^2$ вектора $m_z\in\mathbb{R}^2_*$ такого, что при любых $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$, $i\in\mathbb{N}$ выполняется

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\nu^\alpha(z,m,(i-1)T,iT)=\nu^\alpha(z,m_z,(i-1)T,iT)=\begin{cases}2, & l_i=1,\\ 0, & l_i=0,\end{cases}$$

откуда для нижних слабых показателей колеблемости будем иметь

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(z)=\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z,m,t)=\varliminf_{p\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\frac{\pi}{pT}\nu^\alpha(z,m,pT)=$$

$$=\varliminf_{p\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}\nu^\alpha(z,m,(i-1)T,iT)=\varliminf_{p\to+\infty}\frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}\nu^\alpha(z,m_z,(i-1)T,iT)=$$

$$=\varliminf_{p\to+\infty}\frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}2l_i=\frac{2\pi}{T}\varliminf_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}l_i=\frac{2\pi}{T}a.$$

С учётом установленных равенств и определений показателей колеблемости получим соотношения

$$\frac{2\pi}{T}a=\check{\nu}^\alpha_\circ(z)\leqslant\check{\nu}^\alpha_\bullet(z)\leqslant\hat{\nu}^\alpha_\bullet(z)=\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z,m,t)\leqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z,m_z,t)=$$

$$=\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{\pi}{pT}\nu^\alpha(z,m_z,pT)=\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}\nu^\alpha(z,m_z,(i-1)T,iT)=\frac{2\pi}{T}a,$$

все нестрогие неравенства в них превращаются в равенства, а значит, справедливость равенств (3) установлена. Лемма доказана.

Для вектор-функций из определённых выше классов справедлива

Лемма 2 [10]. *Для любых чисел $T>0$ и $1<c^-<c^+$ существуют вектор-функции $u,v\in\in C^1([0,T],\mathbb{R}^2_*)$, число $\epsilon>0$ и функция $d\colon\mathbb{R}\setminus[c^-,c^+]\to(0,\pi/2]$, для которых верны следующие утверждения:*

(i) выполняются равенства

$$u(0)=u(T)=(1\ \ 0)^{\mathrm{т}},\quad v(0)=v(T)=(0\ \ 1)^{\mathrm{т}},\quad \dot u(0)=\dot u(T)=\dot v(0)=\dot v(T)=(0\ \ 0)^{\mathrm{т}};$$

(ii) при всех $t\in[0,T]$ справедлива оценка $\det(u(t),v(t))\geqslant\epsilon$;

(iii) имеет место включение $u\in\mathcal{A}_0(T,0,\pi/2)$ и для любого $c\in\mathbb{R}$ верно одно из включений

$$cu+v\in\begin{cases}\mathcal{A}_0(T,\varphi_c,d(c)), & c\in\mathbb{R}\setminus[c^-,c^+],\\ \mathcal{A}_1(T,\varphi_c,d(c)), & c\in[c^-,c^+],\end{cases}\qquad \varphi_c\equiv\pi/2-\operatorname{arctg}c.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

1. Пусть при некотором $l\in\mathbb{N}$ задано множество $S=\{0,a_1,\ldots,a_l\}$ и $a_l=\max S$. Для каждого $k\in\{1,\ldots,l\}$ определим последовательность из целых чисел $(\lambda_k(j))_{j=1}^{+\infty}$ с помощью равенств

$$a'_k\equiv\frac{a_k}{a_l},\qquad \lambda_k(j)\equiv[ja'_k]-[(j-1)a'_k],$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Из представления $\lambda_k(j)=a'_k-\{ja'_k\}+\{(j-1)a'_k\}$ (здесь $\{\cdot\}$ – дробная часть числа) и неравенства $a'_k\leqslant 1$ следует, что $\lambda_k(j)<2$, поэтому верны включения

$$\lambda_k(j)\in\{0,1\},\quad k\in\{1,\ldots,l\},\quad j\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

2. Разобьём множество натуральных чисел на блоки: числа k-го блока — числа $(k-1)l+1,\ \ldots,\ kl$; считаем, что число $(k-1)l+i$, $1\leqslant i\leqslant l$, k-го блока имеет в нём номер i. Другими словами, если $r\in\mathbb{N}$, то $j_r=[r/l]+1$ — номер блока, которому принадлежит r, а $r-(j_r-1)l$ — номер числа r в этом блоке.

Для каждого $k\in\{1,\ldots,l\}$ по последовательности $(\lambda_k(j))_{j=1}^{+\infty}$ построим подмножество $\Lambda_k\subset\mathbb{N}$, определив его характеристическую функцию как

$$\chi_{\Lambda_k}(i)=\begin{cases}\lambda_k(j_i), & k_i=k,\\ 0, & k_i\neq k.\end{cases} \tag{5}$$

Из соотношений (4) следует, что формула (5) корректно задаёт подмножество Λ_k. Заметим, что элементы Λ_k встречаются только на местах, имеющих номер k внутри блоков, поэтому верны соотношения

$$\Lambda_k\cap\Lambda_h=\varnothing,\quad k,h\in\{1,\ldots,l\},\quad k\neq h.$$

Определим подмножество $\Lambda_0\subset\mathbb{N}$ как $\Lambda_0\equiv\mathbb{N}\setminus\bigcup_{k=1}^{l}\Lambda_k$, тогда имеет место разложение

$$\mathbb{N}=\bigsqcup_{h=0}^{l}\Lambda_h. \tag{6}$$

3. Зафиксируем значения $1<c_1^-<c_1^+<\cdots<c_l^-<c_l^+$ и для каждого $k\in\{1,\ldots,l\}$ по набору из чисел $T\equiv 2\pi/(la_l)$, c_k^- и c_k^+ построим функции u_k, v_k, d_k и значение ϵ_k в соответствии с леммой 2.

Для любого $i\in\mathbb{N}$ выберем число $h\in\{0,\ldots,l\}$ такое, что $i\in\Lambda_h$, и положим $\kappa(i)\equiv h$, определив тем самым функцию $\kappa:\mathbb{N}\to\{0,\ldots,l\}$. Из соотношения (6) вытекает, что функция κ корректно определена.

Теперь построим решения z_1 и z_2, положив для каждого i

$$u_{z_1}^{T,i}\equiv u_{\kappa(i)},\quad u_{z_2}^{T,i}\equiv v_{\kappa(i)}, \tag{7}$$

где $u_0(t)\equiv(1\ \ 0)^{\mathrm{т}}$, $v_0(t)\equiv(0\ \ 1)^{\mathrm{т}}$ при $t\in[0,T]$.

Из утверждения (i) леммы 2 следует, что функции z_1 и z_2 непрерывно дифференцируемы, а поскольку они построены из конечного числа непрерывных элементов, то при некотором $b>0$ и для всех $t\in\mathbb{R}_+$ выполнено условие $|z_1(t)|,|z_2(t)|,|\dot z_1(t)|,|\dot z_2(t)|\leqslant b$. Из утверждения (ii) леммы 2 и равенства $\det(u_0,v_0)=1$ следует при всех $t\in\mathbb{R}_+$ оценка снизу $\det(z_1(t),z_2(t))\geqslant\epsilon$, где $\epsilon\equiv\min\{1,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_l\}$. Следовательно, матрица $Z=(z_1(t),z_2(t))=(z_{ij})$ является фундаментальной для ограниченной системы $A=\dot ZZ^{-1}=(\dot z_{ij})(Z_{jk})/\det Z\in\mathcal{M}^2$, где Z_{jk} — алгебраическое дополнение элемента z_{jk}.

4. Если элементы множества S попарно соизмеримы, то для каждого $k\in\{1,\ldots,l\}$ число a'_k рационально, а значит, при некоторых $p_k,q_k\in\mathbb{N}$ верно равенство $a'_k=p_k/q_k$. Поэтому для любого $j\in\mathbb{N}$ соотношения

$$\lambda_k(j+q_k)\equiv[(j+q_k)a'_k]-[(j+q_k-1)a'_k]=[p_k+ja'_k]-[p_k+(j-1)a'_k]=\lambda_k(j)$$

начинают выполняться только с $j=q_k$, до этого значения j имеем $\lambda_k(j)=0$. Такое свойство функции будем называть *периодичностью в положительном направлении*, начиная с некоторого числа, т.е. последовательность $(\lambda_k(j))_{j=1}^{+\infty}$ имеет период q_k в положительном направлении, начиная с $j=q_k$.

Из определения (5) получаем, что функция κ имеет период $Q\equiv l\prod_{k=1}^{l}q_k$ в положительном направлении, а значит, в силу определения (7) функции z_1 и z_2 имеют период QT в положительном направлении.

5. Для любой функции $z\in\mathcal{Z}\equiv\{cz_1+z_2\colon\ c\in\mathbb{R}\}\cup\{z_1\}$, опираясь на формулы (7) и утверждение (iii) леммы 2, для любого $i\in\mathbb{N}$ определим тип функции $u^i\equiv u_z^{T,i}$ в каждом из следующих трех случаев.

I. Пусть $c\in C_k\equiv[c_k^-,\,c_k^+]$ при некотором $k\in\{1,\ldots,l\}$. Если $z=cz_1+z_2$, то при $\varphi_0=\varphi_c$ и $\delta=\min_{j\in\{1,\ldots,l\}\setminus\{k\}}d_j(c)$ получим $u^i\in\mathcal{A}_{l_i}(T,\varphi_c,\delta)$, $l_i\equiv\chi_{\Lambda_k}(i)$. Обозначив для любого $p\geqslant nl+1$

$$n_p\equiv j_p-1,\quad \Delta_p\equiv\sum_{i=nl+1}^{p}l_i\leqslant 1,$$

будем иметь равенства

$$\sum_{i=1}^{p}l_i=\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{i=(j-1)l+1}^{jl}l_i+\Delta_p=\sum_{j=1}^{n_p}\lambda_k(j)+\Delta_p=\sum_{j=1}^{n_p}([ja_k']-[(j-1)a_k'])+\Delta_p=[n_pa_k']+\Delta_p,$$

с учётом которых найдём значение

$$a=\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}l_i=\frac{1}{l}\lim_{p\to+\infty}\frac{n_pl}{p}\lim_{p\to+\infty}\frac{[n_pa_k']}{n_p}=\frac{a_k'}{l}.$$

Отсюда на основании леммы 1 получим

$$\check{\nu}_\bullet^\alpha(z)=\hat{\nu}_\bullet^\alpha(z)=\check{\nu}_\circ^\alpha(z)=\hat{\nu}_\circ^\alpha(z)=\frac{2\pi}{lTa_l}a_k=a_k,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}.$$

II. Пусть теперь $c\in C_0\equiv\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k=1}^{l}C_k$. Тогда если $z=cz_1+z_2$, то имеет место равенство $u^i=cu_{\kappa(i)}+v_{\kappa(i)}$ и определены значения $d_1(c),\,\ldots,\,d_l(c)$, поэтому при $\delta=\min\{d_1(c),\ldots,d_l(c)\}$ верны соотношения

$$u^i\in\mathcal{A}_0(T,\varphi_c,d_{\kappa(i)}(c))\subset\mathcal{A}_0(T,\varphi_c,\delta),\quad i\in\mathbb{N}.$$

III. Если $z=z_1$, то из равенства $u^i=u_{\kappa(i)}$ получим включение $u^i\in\mathcal{A}_0(T,0,\pi/2)$.

В случаях II и III функция z удовлетворяет условиям леммы 1 при $l_i=0$, $i\in\mathbb{N}$, и $a=0$, поэтому

$$\check{\nu}_\bullet^\alpha(z)=\hat{\nu}_\bullet^\alpha(z)=\check{\nu}_\circ^\alpha(z)=\hat{\nu}_\circ^\alpha(z)=0,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}.$$

Для остальных решений построенной системы $A\in\mathcal{M}^2$ полученные выше значения показателей колеблемости из множества S повторяются, поскольку для любого решения $\overline{z}\in\mathcal{S}_*(A)\setminus\mathcal{Z}$ существует такая функция $z\in\mathcal{Z}$, что при некотором $r\neq 0$ выполнено равенство $\overline{z}=rz$.

6. При любом фиксированном $k\in\{0,1,\ldots,l\}$ для значения $a_k\in S$ $(a_0\equiv 0)$ и при всех $\varkappa=\hat{\nu}_\bullet^\alpha,\check{\nu}_\bullet^\alpha,\hat{\nu}_\circ^\alpha,\check{\nu}_\circ^\alpha$, $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ имеет место включение

$$\{z(0)\colon\ z\in\mathcal{S}_*(A),\ \ \varkappa(z)=a_k\}\supset\{q(cz_1(0)+z_2(0))\colon\ c\in C_k,\ \ q>0\}\equiv\Omega(a_k).$$

Векторы $z_1(0)$ и $z_2(0)$ линейно независимы, поэтому множество $\{cz_1(0)+z_2(0)\colon\ c\in C_k\}$ представляет собой отрезок, не проходящий через нуль, а значит, множество $\Omega(a_k)$ является внутренней областью некоторого ненулевого угла, следовательно, имеет положительную меру и содержит некоторое открытое подмножество. Таким образом, равенство (1) выполнено.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе продемонстрирована возможность реализации конечных существенных спектров всех показателей колеблемости двумерной линейной однородной ограниченной дифференциальной системы. Остаётся открытым вопрос о возможности реализации счётных существенных спектров какого-либо показателя колеблемости двумерной линейной однородной системы.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2006. — Вып. 25. — С. 249–294.
2. Сергеев, И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.
3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138.
4. Сергеев, И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. — 2015. — Вып. 2 (46). — С. 171–183.
5. Бурлаков, Д.С. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы / Д.С. Бурлаков, С.В. Цой // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 75–93.
6. Сташ, А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем / А.Х. Сташ // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2019. — Т. 29, вып. 4. — С. 558–568.
7. Сергеев, И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1661–1662.
8. Сергеев, И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 11. — С. 1567–1568.
9. Сташ, А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы / А.Х. Сташ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 2. — С. 157–171.
10. Шишлянников, Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости / Е.М. Шишлянников // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2017. — № 5. — С. 14–21.

ON THE REALIZATION OF FINITE ESSENTIAL SPECTRA OF OSCILLATION EXPONENTS OF TWO-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

A. Kh. Stash[1], N. A. Loboda[2]

Adyghe State University, Maykop, Russia
e-mail: [1]aidamir.stash@gmail.com, [2]n-loboda@yandex.ru

For any finite set of non-negative numbers containing zero, a two-dimensional linear homogeneous differential system is constructed (periodic if all elements of a given set are pairwise commensurate), in which the spectra of the oscillation exponents of signs, zeros, roots and hyper roots coincide with this set, and all the values of these indicators are essential.

Keywords: linear system of differential equation, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Sergeev's frequencie.

REFERENCES

1. Sergeev, I.N., Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793.
2. Sergeev, I.N., Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162.
3. Sergeev, I.N., The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132.
4. Sergeev, I.N., The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, iss. 2 (46), pp. 171–183.
5. Burlakov, D.S. and Tsoii, S.V., Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system, *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167.
6. Stash, A.Kh., Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, iss. 4, pp. 558–568.
7. Sergeev, I.N., Metrically typical and essential values of exponents of linear systems, *Differ. Uravn.*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1661–1662.
8. Sergeev, I.N., Topologically typical and essential values of exponents of linear systems, *Differ. Uravn.*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1567–1568.
9. Stash, A.Kh., On essential values of oscillation exponents for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system, *Proc. of the Steklov Institute of Math.*, 2023, vol. 321, no. 1, pp. 216–229.
10. Shishlyannikov, E.M., Two dimensional differential systems with arbitrary finite spectra of wandering exponent, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2017, vol. 72, no. 5, pp. 192–198.