ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 399–417

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1+517.988.8

О ТОЧНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Чернов

Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

e-mail: chavnn@mail.ru

Поступила в редакцию 26.10.2023 г., после доработки 18.12.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением с необязательно ограниченным оператором в гильбертовом пространстве, получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени. При этом использованы теорема Минти–Браудера и цепочечная технология последовательного продолжения решения управляемой системы до промежуточных состояний. В качестве примеров рассмотрены полулинейное псевдопараболическое уравнение и полулинейное волновое уравнение.

Ключевые слова: полулинейное эволюционное уравнение, гильбертово пространство, необязательно ограниченный оператор, точная глобальная управляемость.

DOI: 10.31857/S0374064124030093, EDN: PJHBRB

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управляемости распределённых систем является достаточно актуальной ввиду её практической значимости и потому активно изучается (см. обзоры в [1–3]). Исследуемые задачи управляемости в последнее время концентрировались, как правило, вокруг задач граничного управления или случая, когда распределённое управление сосредоточено на части области.

Нелокальные достаточные условия точной управляемости доказывались при тех или иных условиях на величину промежутка времени [3–5] и/или при специальных условиях на операторы правой части (равномерная ограниченность, дифференцируемость по Фреше и равномерная ограниченность производной, глобальная липшицевость и т.д.) и при условии точной управляемости (и иногда наблюдаемости) соответствующей линейной системы [1, § 3; 4–7].

В работе [3] для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением с неограниченным максимальным монотонным оператором в гильбертовом пространстве, были получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние. Точная управляемость устанавливалась при условии достаточной малости промежутка времени $[0,T]$ и (фактически) требовании о подлинейном росте нелинейной составляющей правой части по фазовой переменной в окрестности бесконечности. При этом использовались обобщение теоремы Минти–Браудера и результаты о тотально глобальной разрешимости упомянутого уравнения, полученные автором ранее. В качестве примера рассматривалось полулинейное волновое уравнение.

Данная статья явилась итогом существенного переосмысления работы [3] и соответственно обобщения и развития полученных в ней результатов. Подобно [3], рассматривается задача

Коши, связанная с управляемым полулинейным эволюционным уравнением (несколько более общего за счёт наличия $B(t)$) вида

$$y'(t)=Gy(t)+f(t,y(t))+B(t)u(t), \quad t\in[0,T]; \quad y(0)=y_0 \tag{1}$$

с необязательно ограниченным оператором G в гильбертовом пространстве X, семейством линейных ограниченных операторов $\{B(t)\colon X\to X,\ t\in[0,T]\}$, $B(\cdot)u(\cdot)\in L_2(0,T;X)$, управлением $u\in L_2(0,T;X)$. Для задачи (1) получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени. Как и в [3], результат удаётся доказать за счёт предположения об оценке снизу нормы $\|S(t)x\|$, $x\in X$, в окрестности T и заданных точек разбиения отрезка $[0,T]$, где X — фазовое пространство, $S(t)$ — полугруппа оператора G линейной неуправляемой части уравнения. Отдельно устанавливаются простые достаточные условия выполнения этого предположения.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Пусть X — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\,\cdot\,,\cdot\,]_X$, $G\colon X\to X$ — инфинитезимальный генератор (производящий оператор) сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t\in[0,T]$, с областью определения $D(G)\subset X$, $z\in Z=L_2(0,T;X)$, $x_0\in X$. Следуя [8, § 4.8], рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (абстрактного дифференциального уравнения в пространстве X)

$$x'(t)=Gx(t)+z(t), \quad t\in[0,T]; \quad x(0)=x_0. \tag{2}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 [8, теорема 4.8.3]. *Для любых $z\in Z$, $x_0\in X$ существует единственная функция $x\colon [0,T]\to X$ такая, что для всех $y\in D(G^*)$ функция $\big[x(t),y\big]_X$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$,*

$$\frac{d}{dt}[x(t),y]_X=[x(t),G^*y]_X+[z(t),y]_X \quad \text{п.в.} \quad t\in[0,T], \quad \lim_{t\to 0}[x(t),y]_X=[x_0,y], \quad y\in D(G^*).$$

Более того, справедлива формула

$$x(t)=S(t)x_0+\int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds, \quad t\in[0,T]. \tag{3}$$

Лемма 2 [8, следствие 4.8.1]. *Для любых $z\in Z$, $x_0\in X$ существует единственная слабо непрерывная функция $x\colon [0,T]\to X$ такая, что для всех $y\in D(G^*)$ имеем*

$$[x(t),y]_X=[x_0,y]_X+\int\limits_0^t[x(s),G^*y]_X\,ds+\int\limits_0^t[z(s),y]_X\,ds,$$

и, более того, эта функция представляется формулой (3).

Напомним (см., например, [9, с. 72; 10, с. 96], что функция $x\colon [0;T]\to X$ (для, вообще говоря, линейного нормированного пространства X) называется *слабо непрерывной* (иногда говорят *деминепрерывной*), если для любого $y\in X^*$ функция $y[x(t)]$ непрерывна на отрезке $[0,T]$. Множество всех слабо непрерывных функций $x\colon [0,T]\to X$ будем обозначать $\mathbb{C}_w(0,T;X)$. Для дальнейшего важно, что норма $\|x(t)\|_X$ всякой функции $x\in\mathbb{C}_w(0,T;X)$ ограничена на $[0,T]$. С другой стороны (см., например, [11, с. 154]), всякая функция $x\in\mathbb{C}_w(0,T;X)$ интегрируема по Бохнеру, следовательно, измерима по Бохнеру. Тогда $\mathbb{C}_w(0,T;X)\subset L_\infty(0,T;X)$.

Функцию $x(t)$, существование и единственность которой в множестве $\mathbb{C}_w(0,T;X)$ утверждается в леммах 1, 2, будем называть *слабым решением* задачи (2).

Далее будем предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию:

G_1) Полугруппа $S(\cdot)$ равномерно ограничена, т.е. $\|S(t)\|\leqslant M$ для всех $t\in[0;T]$.

Замечание 1. Для любой сильно непрерывной полугруппы $S(t)$ существуют константы $\omega\geqslant 0$, $R\geqslant 1$ такие, что выполняется условие на порядок роста: $\|S(t)\|\leqslant Re^{\omega t}$ для любого $t\geqslant 0$ (см. [12, § 1.2, теорема 2.2]). Поэтому условие G_1) заведомо выполнено на любом конечном промежутке $[0,T_0]$ с константой $M=M(T_0)=Re^{\omega T_0}$.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 3. *Пусть выполнено предположение* G_1*),*

$$A[z](t)=\int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds,\quad t\in[0,T],$$

— слабое решение задачи (2) при $x_0=0$, $z\in Z$*. Тогда для п.в.* $t\in[0,T]$ *справедлива оценка*

$$\|A[z](t)\|_X\leqslant M\int\limits_0^t\|z(s)\|_X\,ds. \tag{4}$$

Далее, в контексте исследования проблемы управляемости системы (1) (в том числе и в линейном случае $f\equiv 0$), везде будем предполагать, что семейство линейных ограниченных операторов $\{B(t)\colon X\to X,\ t\in[0,T]\}$ таково, что

$$B(\cdot)u(\cdot)\in L_2(0,T;X),\quad B^*(\cdot)u(\cdot)\in L_2(0,T;X),\quad u\in L_2(0,T;X),\quad \|B(\cdot)\|\in L_2[0,T],$$

где во избежание излишней громоздкости обозначение $B^*(t)$ понимается как $[B(t)]^*$. Здесь следует пояснить, что в соответствии с теоремой Рисса [11, с. 159, замечание 1.10] сопряжённое пространство отождествляется с лебеговым:

$$(L_2(0,T;X))^*=L_2(0,T;X^*=X).$$

При этом будем считать выполненным также следующее предположение.

G_2) Существуют $t_*=t^*(T)\in(0,T)$, $a\in L_2^+[t_*,T]$, $a\neq 0$, такие, что

$$\|B^*(t)S^*(T-t)x\|_X\geqslant a(t)\|x\|_X\quad \text{для п.в. } t\in(t_*,T] \text{ и для любых } x\in X.$$

В п. 2 представлены простые достаточные условия выполнения предположений G_1), G_2).

2. КОНКРЕТИЗАЦИЯ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ G_1), G_2)

Рассмотрим следующие два случая.

Случай I. Линейный оператор G ограничен. Тогда порождаемая оператором G полугруппа определяется однозначно и является равномерно непрерывной [12, § 1.1, теоремы 1.2, 1.3]. Последнее означает выполнение следующих трёх условий [12, определение 1.1]:

Ia) $S(0)=I$.

Ib) $S(t+s)=S(t)S(s)$ для всех $t,s\geqslant 0$ (*полугрупповое свойство*).

Ic) $\lim_{t\to+0}\|S(t)-I\|=0$.

Отсюда вытекает [12, формула (1.4)], что

$$\lim_{s\to t}\|S(s)-S(t)\|=0.$$

В частности, также следует, что функция $\|S(t)\|$ непрерывна на $[0,T]$, а значит, по теореме Вейерштрасса равномерно ограничена, т.е. выполнено условие G$_1$). Кроме того, можно оценить

$$\|S^*(T-t)x\|_X = \|(S(T-t)-I)^*x+x\| \geqslant \|x\|_X - \|(S(T-t)-I)^*\|\,\|x\|_X \geqslant \frac{1}{2}\|x\|_X$$

для п.в. $t\in[t_*,T]$ и для любых $x\in X$, где [13, с. 231]

$$\|(S(T-t)-I)^*\| = \|S(T-t)-I\| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{для п.в. } t\in[t_*,T],$$

при некотором $t_*\in(0,T)$ в силу Ic).

Таким образом, для выполнения условия G$_2$) достаточно, чтобы при некотором $a\in \in L_2^+[t_*;T]$, $a\neq 0$, и, соответственно, $a_1=2a$, было выполнено условие

B$_1$) $\|B^*(t)x\|_X \geqslant a_1(t)\|x\|_X$ для п.в. $t\in[t_*,T]$ и для любых $x\in X$.

Пример. Пусть $X=\mathbb{R}^n$, A — матрица размера $n\times n$, $B(t)$ — непрерывная $n\times r$-матрица (матричная функция), $u\in L_2^r[0,T]$ — управление. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot y = Ay + B(t)u, \quad t\in[0,T]; \quad y(0)=y_0.$$

Решение этой системы даётся формулой Коши

$$y(t) = W(t,0)y_0 + \int\limits_0^t W(t,s)B(s)u(s)\,ds,$$

где $W(t,s)=e^{(t-s)A}=S(t-s)$ — матрица Коши, $S(t)=e^{tA}$ — экспоненциал матрицы A, а фактически равномерно непрерывная полугруппа, порождаемая оператором A. Обозначим через $h_i(t)$ i-й столбец матрицы $B^*(t)W^*(T,t)$, $i=\overline{1,n}$. Согласно [14, с. 189] данная система является (точно) вполне управляемой на отрезке $[0,T]$ тогда и только тогда, когда столбцы $h_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, линейно независимы на $[0,T]$ как функции из пространства $L_2^r[0;T]$. Иначе говоря, линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^n x_i h_i(t) = B^*(t)S^*(T-t)x = 0_r \quad \text{для п.в. } t\in[0,T]$$

тогда и только тогда, когда столбец $x=0_n$. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы при каждом t из некоторого промежутка $[t_1,t_2]\subset[0,T]$ система

$$B^*(t)S^*(T-t)x = 0_r, \quad x\in X,$$

имела лишь тривиальное решение. Последнее, с учётом непрерывности матрицы и теоремы Вейерштрасса, означает, что

$$a(t) = \min_{x\in S_1(0_n)} \|B^*(t)S^*(T-t)x\| = \min_{\substack{x\in X,\\ x\neq 0_n}} \frac{\|B^*(t)S^*(T-t)x\|}{\|x\|} > 0, \quad t\in[t_1,t_2].$$

Таким образом, достаточное условие (точной) полной управляемости можно переписать в виде

$$\|B^*(t)S^*(T-t)x\| \geqslant a(t)\|x\| \quad \text{для любых } t\in[t_1;t_2] \text{ и } x\in X.$$

Но это и есть условие G$_2$). Отсюда видно, что условие G$_2$) отнюдь не является надуманным при исследовании проблем управляемости, поскольку по крайней мере в случае конечномерного пространства X оно в указанном смысле близко к необходимому условию вполне управляемости. Более того, как видно из доказательства [14, теорема 1.1, с. 189], решение задачи управления можно искать в виде линейной комбинации столбцов $h_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, т.е. в виде $u(t)=B^*(t)S^*(T-t)x$, $x\in X$.

Случай II. Оператор $-G$ является максимальным монотонным, т.е. $[-Gx,x]_X\geqslant 0$ для всех $x\in D(G)$ (монотонность) и множество значений $\{(I-G)[x]\colon x\in D(G)\}=X$ (максимальность). Этот случай уже подробно анализировался в статье [3]. В частности, пояснялось [3, замечание 1.1], что при данном условии $S(\cdot)$ будет полугруппой сжатий: $\|S(t)\|\leqslant 1$ для всех $t\in[0,T]$. Это означает, что при $M=1$ выполнено предположение G_1). Для выполнения предположения G_2) достаточно, очевидно, выполнения при некоторых $t_*=t^*(T)\in(0,T)$, $a_1\in L_2^+[t_*,T]$, $a_1\neq 0$, условия B_1) в совокупности со следующим условием:

G') Существует функция $a_2\in L_2^+[t_*,T]$, $a_1a_2\neq 0$, такая, что $\|S(T-t)^*x\|_X\geqslant a_2(t)\|x\|_X$ для любых $x\in X$ и п.в. $t\in[t_*,T]$.

Как показано в [3], для выполнения условия G') достаточно следующего:

G^*) $[Gx,x]=0$ для всех $x\in D(G)$; $[G^*x,x]=0$ для всех $x\in D(G^*)$.

3. ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

Предполагая, что выполнены условия G_1), G_2), $y_0\in X$, рассмотрим задачу Коши для управляемого линейного эволюционного уравнения

$$y'(t)=Gy(t)+B(t)u(t),\quad t\in[0;T];\quad y(0)=y_0, \tag{5}$$

где $u(t)$ — управляющая функция из класса $L_2(0,T;X)$. Обозначим через $y(t;u)$ слабое решение задачи (5), отвечающее управлению u. Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $y_1\in X$ найти управление $u\in L_2(0,T;X)$ такое, что

$$\lim_{t\to T-0}[y(t;u),z]_X=[y_1,z],\quad z\in D(G^*).$$

Поскольку функция $[y(t;u),z]_X$ абсолютно непрерывна, данное условие равносильно следующему:

$$[y(T;u),z]_X=[y_1,z],\quad z\in D(G^*),$$

и будет заведомо выполнено, если $y(T;u)=y_1$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4 [8, § 4.3]. *Пусть G — инфинитезимальный производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t\geqslant 0$. Тогда $S(t)^*$ — тоже сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальным производящим оператором G^*.*

Отметим, что уже из того факта, что линейный оператор является инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы, следует его замкнутость и плотность вложения его области определения в X (см. [8, с. 210, 213]).

Напомним следующие известные определения.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобка двойственности между пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ (действие функционала из $\mathcal{X}^*$ на элемент из $\mathcal{X}$), $\Omega\subset\mathcal{X}$ — заданное множество. Оператор $F\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$ называется *хеминепрерывным* на Ω, если для всех $x,y\in\mathcal{X}$, $z\in\Omega$ и $t\in\mathbb{R}$ таких, что $z+t\,y\in\Omega$, имеет место равенство $\lim_{t\to 0}\langle F[z+t\,y]-F[z],x\rangle=0$. Ясно, что из непрерывности оператора F следует его хеминепрерывность.

Оператор $F\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$ называется *монотонным*, если $\langle F[y]-F[z],y-z\rangle\geqslant 0$ для любых $y,z\in\mathcal{X}$.

Оператор $F:\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$ называется *строго монотонным*, если $\langle F[y]-F[z],y-z\rangle>0$ для любых $y,z\in\mathcal{X}$, $y\neq z$.

Наконец, если существует константа $\beta>0$ такая, что $\langle F[y]-F[z],y-z\rangle\geqslant\beta\|y-z\|^2_{\mathcal{X}}$ для любых $y,z\in\mathcal{X}$, то говорят, что оператор F *сильно монотонный*.

Следующее утверждение известно как теорема Минти–Браудера [15, теорема 2.1].

Лемма 5. *Пусть во всём рефлексивном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ задан хеминепрерывный монотонный оператор $F\colon \mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$, удовлетворяющий условию коэрцитивности:*

$$\langle F(x),x\rangle \geqslant \gamma(\|x\|_{\mathcal{X}})\|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(t)$ — вещественная функция при $t\geqslant 0$, $\lim_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$. Тогда оператор F осуществляет сюръективное отображение пространства $\mathcal{X}$ на (всё) пространство $\mathcal{X}^*$. Иными словами, для каждого $y\in\mathcal{X}^*$ уравнение $F[x]=y$ имеет решение $x\in\mathcal{X}$.

Как известно [16, с. 236], гильбертово пространство X является рефлексивным, причём в качестве скобки двойственности можно взять скалярное произведение $[\cdot,\cdot]_X$, если (в соответствии с теоремой Рисса) отождествить X и X^*. Очевидно, что для выполнения условия коэрцитивности оператора $F\colon X\to X$ достаточно его сильной монотонности:

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X\geqslant\alpha\|\xi_1-\xi_2\|_X^2 \quad \text{для любых } \xi_1,\xi_2\in X; \quad \alpha>0.$$

Для произвольного $x\in X$ положим

$$u(t)=B^*(t)S(T-t)^*x. \tag{6}$$

Фактически, $S(T-t)^*x=z(T-t)$, где $z(t)$ — слабое решение задачи

$$z'(t)=G^*z(t),\quad t\in[0,T];\quad z(0)=x.$$

Поэтому $S(T-t)^*x$ есть элемент пространства $\mathbb{C}_w(0,T;X)\subset L_\infty(0,T;X)$. И соответственно, $u\in L_2(0,T;X)$. Определим оператор $F=F_T:X\to X$ формулой

$$F[x]=\int\limits_0^T S(T-t)B(t)B^*(t)S^*(T-t)x\,dt,\quad x\in X.$$

В силу условия G_1) F — линейный ограниченный оператор, причём

$$\|F\|\leqslant M^2\int\limits_0^T\|B(t)\|^2\,dt.$$

Отсюда следует, что оператор F непрерывен, а стало быть, и хеминепрерывен.

Лемма 6. *Оператор F сильно монотонный.*

Доказательство. Для всех $\xi_1,\xi_2\in X$ и, соответственно, $\xi=\xi_1-\xi_2$ получаем

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X=[F(\xi),\xi]_X=\int\limits_0^T[S(T-s)B(s)B^*(s)S(T-s)^*\xi,\xi]_X\,ds=$$

$$=\int\limits_0^T[B^*(s)S(T-s)^*\xi,B^*(s)S(T-s)^*\xi]_X\,ds=\int\limits_0^T\|B^*(s)S(T-s)^*\xi\|_X^2\,ds,$$

и в силу условия G_2)

$$[F(\xi),\xi]_X\geqslant\int\limits_{t_*(T)}^T\|B^*(s)S(T-s)^*\xi\|_X^2\,ds\geqslant\alpha\|\xi\|_X^2,\quad \alpha=\alpha(T)=\int\limits_{t_*(T)}^T a^2(t)\,dt>0.$$

Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 5, 6 вытекает, что уравнение $F[x]=y$ имеет решение $x\in X$ для любого $y\in X$. А за счёт сильной монотонности (для этого достаточно было бы строгой) решение определяется однозначно, т.е. определён обратный линейный оператор $F^{-1}\colon X\to X$. Более того, пользуясь оценкой из доказательства леммы 6, можем оценить норму решения:

$$[y=F(x),x]_X\geqslant\alpha(T)\|x\|_X^2,$$

откуда с учётом неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\|x\|_X\leqslant\frac{1}{\alpha(T)}\|y\|_X.$$

Таким образом, F^{-1} — линейный ограниченный оператор (ЛОО), причём

$$\|F^{-1}\|=\|F_T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\alpha(T)}.$$

Решение поставленной задачи управления определяется как $u(t)=B^*(t)S(T-t)^*x$, где $x\in X$ — решение уравнения

$$y_1=y(T;u)=S(T)y_0+F[x],$$

т.е. $x=F^{-1}[y_1-S(T)y_0]$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения G_1), G_2). Тогда для любого $y_1\in X$ поставленная задача управления имеет решение вида (6), где $x\in X$, $x=F^{-1}[y_1-S(T)y_0]$, $F^{-1}\colon X\to X$ — линейный ограниченный оператор.*

4. ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ НА МАЛОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Прежде всего рассмотрим в качестве вспомогательной задачу (2). Как уже пояснялось выше, для любых $x_0\in X$, $z\in Z$ в множестве $\mathbb{C}_w(0,T;X)$ существует единственное слабое решение задачи (2) и это решение даётся формулой (3). Решение, отвечающее $x_0\in X$ при $z=0$, будем обозначать $x=\Theta[x_0](t)=S(t)x_0$. Решение, отвечающее $z\in Z$ при $x_0=0$, будем обозначать $x=A[z](t)$. Далее, считая элемент $x_0\in X$ фиксированным, положим $\theta(t)=\Theta[x_0](t)$. Как видно из представления (3), слабое решение задачи (2) можно записать в виде

$$x(t)=\theta(t)+A[z](t),\quad t\in[0,T].$$

Пусть $E=E(T)=L_\infty(0,T;X)$, $u\in L_2(0,T;X)$ — управляющая функция. Предположим, кроме того, что задана функция (оператор) $f\colon[0,T]\times X\to X$, удовлетворяющая условиям.

F_1) Для всех $x\in E$ отображение $[0,T]\ni t\to f(t,x(t))$ принадлежит классу $Z=L_2(0,T;X)$.

F_2) Существует функция $\mathcal{N}=\mathcal{N}(t,M)\colon[0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0,T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$, такая, что для всех $x,y\in X$, $\|x\|_X,\|y\|_X\leqslant M$, п.в. $t\in[0,T]$ имеем

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|_X\leqslant\mathcal{N}(t,M)\|x-y\|_X.$$

F_3) Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r)\colon[0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая, что $\|f(t,\xi)\|_X\leqslant\mathcal{N}_1(t,M)$ для всех $M>0$, $\xi\in X$, $\|\xi\|_X\leqslant M$, п.в. $t\in[0,T]$.

Замечание 2. Условие F_3) можно заменить следующим условием.

F_3') Существует функция $\mathcal{N}_2=\mathcal{N}_2(t)\colon[0,T]\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0,T]$ и такая, что для п.в. $t\in[0,T]$ имеем $\|f(t,0)\|_X\leqslant\mathcal{N}_2(t)$.

Действительно, предположим, что выполнены условия F_2), F_3'). Оценим

$$\|f(t,\xi)\|_X\leqslant\|f(t,\xi)-f(t,0)\|_X+\|f(t,0)\|_X\leqslant\mathcal{N}(t,M)\|\xi\|_X+\mathcal{N}_2(t)\leqslant\mathcal{N}_1(t,M),$$

где $\mathcal{N}_1(t,M)\equiv\mathcal{N}(t,M)M+\mathcal{N}_2(t)$.

Будем рассматривать управляемое полулинейное эволюционное уравнение вида (1), понимая его (слабое) решение как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна:

$$y(t)=\theta(t)+A[f(\cdot,y(\cdot))+B(\cdot)u(\cdot)](t), \quad t\in[0,T]; \quad y\in E, \tag{7}$$

при $\theta(t)=S(t)y_0$, $\theta\in\mathbb{C}_w(0,T;X)\subset E$. Понятно, что всякое решение $y\in E$ в соответствии со свойствами оператора правой части принадлежит также и пространству $\mathbb{C}_w(0,T;X)$.

Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $y_1\in X$ найти управление $u\in L_2(0,T;X)$, которому отвечает хотя бы одно*) решение $y=y(t;u)$ уравнения (1) (или, что то же самое, уравнения (7)) такое, что

$$\lim_{t\to T-0}[y(t;u),z]_X=[y_1,z] \quad \text{для любых } z\in D(G^*).$$

Предполагая, что управление u имеет вид (6), будем использовать ЛОО F и F^{-1}, определённые в п. 3. Соответственно определим оператор $\mathcal{F}=\mathcal{F}_T$: $E\to E$ формулой

$$\mathcal{F}[y](t)=S(t)y_0+\int\limits_0^t S(t-s)f(s,y(s))\,ds+\int\limits_0^t S(t-s)B(s)B^*(s)S(T-s)^*F^{-1}[\omega(y)]\,ds,$$

где

$$\omega(y)=\omega_T(y)\equiv y_1-S(T)y_0-\int\limits_0^T S(T-\xi)f(\xi,y(\xi))\,d\xi.$$

Прежде всего исследуем разрешимость уравнения

$$y=\mathcal{F}_T[y], \quad y\in E=E(T). \tag{8}$$

Рассмотрим случай, когда произвольно фиксировано некоторое число $T_0>0$, а число $T\in(0,T_0]$ подбирается достаточно малым. Кроме того, будем предполагать выполненными следующие условия.

G_3) Для всех достаточно малых $T>0$ выполнено условие G_2) с одной и той же функцией $a(t)$, в котором $a(T)\geqslant\kappa T$, $\kappa>0$.

G_4) Существует всюду плотное подмножество $X'\subset X$ такое, что для каждого $x_0\in X'$ найдётся константа $K(x_0)$, обеспечивающая оценку

$$\varlimsup_{t\to+0}\left\|\frac{S(t)x_0-x_0}{t}\right\|_X\leqslant K(x_0).$$

F_4) Существуют неубывающие функции K_i: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $i=1,2$, такие, что для любого $\sigma>0$ справедливы оценки

$$\int\limits_h \mathcal{N}(s,\sigma)\,ds\leqslant K_1(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h, \quad \int\limits_h \mathcal{N}_1(s,\sigma)\,ds\leqslant K_2(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h.$$

B_2) Существует число $\beta>0$ такое, что $\|B(t)\|\leqslant\beta$ для всех $t\in[0,T_0]$.

Отметим, что данные условия являются достаточно естественными. Поясним этот факт подробнее. Для случаев I, II, рассмотренных в п. 2, считаем, что $t_*(T)=T-\kappa_0T$, $\kappa_0\in\in(0,1)$, поскольку при $T\to+0$ точка $t_*(T)$ оказывается всё в более малой окрестности T. После этого для выполнения условия G_3) достаточно непрерывности функции $a(t)>0$ или

*) Относительно теоремы единственности для уравнения (1) см. работу [3].

хотя бы возможности ограничить её снизу положительной константой. Для выполнения условия F_4) достаточно существенной ограниченности функций $\mathcal{N}(\cdot,\sigma)$, $\mathcal{N}_1(\cdot,\sigma)$ на некотором фиксированном объемлющем промежутке, например, $[0,1]$. По поводу условия G_4) заметим, что согласно [12, теорема 2.4] для всех $x\in D(G)$: $S(t)x\in D(G)$ и при этом существует

$$\frac{d}{dt}\,S(t)x=GS(t)x=S(t)Gx,$$

т.е.

$$\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{S(t+\tau)x-S(t)x}{\tau}-S(t)G(x)\right\|_X=0.$$

В частности, отсюда вытекает, что существует

$$\lim_{t\to+0}\left\|\frac{S(t)x-x}{t}\right\|_X=\|Gx\|_X.$$

Более того, согласно [12, следствие 2.5] область определения $D(G)$ всюду плотна в X (а оператор G является замкнутым линейным оператором). Таким образом, условие G_4) заведомо выполнено при $X'=D(G)$, $K(x_0)=\|Gx_0\|_X$. В случае ограниченности оператора G, как видно из доказательства теоремы 1.2 в [12], имеет место оценка

$$\left\|\frac{S(t)-I}{t}-G\right\|\leqslant\|G\|\max_{0\leqslant s\leqslant t}\|S(s)-I\|\to 0$$

при $t\to+0$, откуда следует, что

$$\lim_{t\to+0}\left\|\frac{S(t)-I}{t}\right\|=\|G\|.$$

Значит, в случае ограниченного оператора G условие G_4) выполняется при $X'=X$, $K(x_0)=$ $=\|G\|\,\|x_0\|_X$.

При заданных $y_0,y_1\in X$ положим

$$\sigma=\sigma(y_0,y_1)=M\|y_0\|_X+\kappa^{-1}M^2\beta^2\|y_1-y_0\|_X+1,\quad \Omega(T)=\{y\in E(T)\colon\ \|y\|_{E(T)}\leqslant\sigma\}.$$

Лемма 7. *Пусть выполнены предположения* G_1), G_3), G_4), F_1)–F_4). *Тогда для любых* $y_0\in X'$, $y_1\in X$ *найдётся число* $\delta_1=\delta_1(y_0)>0$ *такое, что для всех* $T\in(0,\delta_1)$ *и* $y\in\Omega(T)$ *справедливы оценки*

$$\kappa\|F_T^{-1}[\omega_T(y)]\|_X\leqslant\frac{\|y_1-y_0\|_X}{T}+K(y_0)+1+MK_2(\sigma),$$

$$\kappa\|F_T^{-1}\|\int\limits_0^T\mathcal{N}(t,\sigma)\,dt\leqslant K_1(\sigma).$$

Доказательство. Вторая оценка следует непосредственно из оценки нормы $\|F_T^{-1}\|\leqslant$ $\leqslant 1/\alpha(T)$ и условий G_3), F_4). В силу предположения G_4) найдётся $\delta_1(y_0)>0$ такое, что

$$\left\|\frac{S(T)y_0-y_0}{T}\right\|_X\leqslant K(y_0)+1\quad\text{для любого } T\in(0,\delta_1).$$

Отсюда, а также из представления $y_1-S(T)y_0=(y_1-y_0)-(S(T)y_0-y_0)$ и предположений G_1), G_3), F_4) сразу же получаем первую оценку. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения G_1), G_3), G_4), F_1)–F_4), B_2). Тогда для любых $y_0 \in X'$, $y_1 \in X$ существует число $\delta = \delta(y_0, y_1) > 0$ такое, что для произвольно фиксированного $T \in (0, \delta)$ уравнение (8) однозначно разрешимо на множестве $\Omega(T)$.*

Доказательство. Определим число $\delta = \delta(y_0, y_1) > 0$, исходя из условий

$$\gamma_1(y_0, y_1)\delta < 1, \quad \gamma_1(y_0, y_1) \equiv \{MK_2(\sigma) + M^2\beta^2\kappa^{-1}(K(y_0) + 1 + MK_2(\sigma))\},$$
$$\gamma_2(y_0, y_1)\delta < 1/2, \quad \gamma_2(y_0, y_1) \equiv MK_1(\sigma)(1 + M^2\beta^2\kappa^{-1}), \quad \delta \leqslant \delta_1(y_0),$$

где $\sigma = \sigma(y_0, y_1)$. Зафиксируем произвольно $T \in (0, \delta)$. Воспользуемся принципом сжимающих отображений. Прежде всего докажем, что $\mathcal{F}_T$ не выводит из области $\Omega(T)$. Выберем произвольно $y \in \Omega(T)$ и, пользуясь сделанными предположениями и леммой 7, при $t \in [0, T]$ оценим

$$\|\mathcal{F}_T[y](t)\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \|S(t)y_0\|_X + \int_0^t \|S(t-s)B(s)B^*(s)S(T-s)^*\|\, \|F_T^{-1}[\omega_T(y)]\|_X\, ds + \int_0^t \|S(t-s)\|\, \|f(s, y(s))\|_X\, ds \leqslant$$
$$\leqslant M\|y_0\|_X + T\kappa^{-1}M^2\beta^2\bigg(\frac{\|y_1 - y_0\|_X}{T} + K(y_0) + 1 + MK_2(\sigma)\bigg) + M\int_0^T \mathcal{N}_1(s, \sigma)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant M\|y_0\|_X + \kappa^{-1}M^2\beta^2\|y_1 - y_0\|_X + \delta\gamma_1(y_0, y_1) \leqslant \sigma.$$

Таким образом, $\mathcal{F}_T[y] \in \Omega(T)$.

Установим сжимаемость оператора $\mathcal{F}_T$ на $\Omega(T)$. Выберем произвольно $z_1, z_2 \in \Omega(T)$ и, пользуясь сделанными предположениями и леммой 7, при $t \in [0, T]$ оценим

$$\|\mathcal{F}_T[z_1](t) - \mathcal{F}_T[z_2](t)\|_X \leqslant$$
$$\leqslant tM^3\beta^2\|F_T^{-1}\| \int_0^T \|f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s))\|_X\, ds + M\int_0^t \|f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s))\|_X\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \bigg(M\int_0^t \mathcal{N}(s, \sigma)\, ds + tM^3\beta^2\|F_T^{-1}\| \int_0^T \mathcal{N}(s, \sigma)\, ds\bigg)\|z_1 - z_2\| \leqslant$$
$$\leqslant (MK_1(\sigma) + M^3\beta^2\kappa^{-1}K_1(\sigma))\delta\, \|z_1 - z_2\|_{E(T)} = \gamma_2(y_0, y_1)\delta\, \|z_1 - z_2\|_{E(T)} \leqslant \|z_1 - z_2\|_{E(T)}/2.$$

Таким образом, $\|\mathcal{F}_T[z_1] - \mathcal{F}_T[z_2]\|_{E(T)} \leqslant \|z_1 - z_2\|_{E(T)}/2$, т.е. оператор F_T является сжимающим на $\Omega(T)$. Очевидно, что множество $\Omega(T)$ замкнуто в $E(T)$. Согласно принципу сжимающих отображений Каччопполи–Банаха [16, гл. XVI, § 1, теорема 1], уравнение (8) имеет единственное решение на $\Omega(T)$. Теорема доказана.

Допустим, что $y \in \Omega(T)$ — решение уравнения (8). Положим

$$x = F_T^{-1}\bigg[y_1 - S(T)y_0 - \int_0^T S(T-s)f(s, y(s))\, ds\bigg] = F_T^{-1}[\omega_T(y)], \tag{9}$$

$u(t) = B^*(t)S^*(T-t)x$. Учитывая, что y — решение (8), имеем

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, y(s))\, ds + \int_0^t S(t-s)B(s)u(s)\, ds, \quad t \in [0, T].$$

Тогда y — решение уравнения (7). Иначе говоря, $y \in \mathbf{C}_w(0,T;X)$ и является решением задачи Коши (1), отвечающим управлению u, т.е. $y = y(t;u)$. При этом согласно определению элемента x

$$y_1 = S(T)y_0 + \int\limits_0^T S(T-s)f(s,y(s))\,ds + F_T[x] =$$

$$= S(T)y_0 + \int\limits_0^T S(T-s)f(s,y(s))\,ds + \int\limits_0^T S(T-s)B(s)u(s)\,ds = y(T;u).$$

Таким образом, u является решением исследуемой задачи управления. Из проведённых рассуждений и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* G_1), G_3), G_4), F_1)–F_4), B_2). *Тогда для любых* $y_0 \in X'$, $y_1 \in X$ *существует число* $\delta = \delta(y_0,y_1) > 0$ *такое, что для произвольно фиксированного* $T \in (0,\delta)$ *задача управления имеет решение вида (6) при некотором* $x \in X$ *вида (9),* $y = y(t;u) \in \Omega(T)$.

Замечание 3. Теорема 3 позволяет получить оценку нормы для u и $y(t;u)$ в зависимости от y_0, y_1. Для практических приложений это имеет важное значение.

5. ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ НА ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Получим теперь достаточные условия глобальной по времени управляемости, т.е. на отрезке $[0,T]$ при произвольно фиксированном $T > 0$. Будем предполагать выполненными условия G$_1$), G$_4$), F$_1$)–F$_4$), а также B$_2$), при $T_0 = T$. Условие G$_3$) заменим следующим.

G$'_3$) Существуют функция $a(\cdot) \in L_2^+[0,T]$ и числа $\kappa_0, \kappa \in (0,1)$ такие, что для любого конечного разбиения $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$ выполняются оценки

$$\|B^*(t)S^*(t_i - t)x\|_X \geqslant a(t)\|x\|_X \quad \text{для п.в. } t \in (t_i^*; t_i] \text{ и для любых } x \in X,$$

$$\alpha_i = \int\limits_{t_i^*}^{t_i} a^2(t)\,dt \geqslant \kappa(t_i - t_{i-1}), \quad t_i^* = t_{i-1} + \kappa_0(t_i - t_{i-1}), \quad i = \overline{1,k}.$$

Отметим, что если функция $a(t)$ равномерно ограничена снизу (допустим $a(t) \geqslant 1$), то

$$\alpha_i \geqslant t_i - t_i^* = (1-\kappa_0)(t_i - t_{i-1}), \quad i = \overline{1,k}, \quad \text{т.е.} \quad \kappa = 1 - \kappa_0.$$

При заданных $y_0, y_1 \in X'$ и $\lambda \in [0,1]$ определим элементы

$$y_\lambda = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_0.$$

Заметим, что

$$\|y_\lambda\|_X \leqslant \lambda\|y_1\|_X + (1-\lambda)\|y_0\|_X \leqslant \gamma(y_0,y_1) = \max\{\|y_0\|_X, \|y_1\|_X\},$$

$$\|y_\lambda - y_\mu\|_X = |\lambda - \mu|\,\|y_1 - y_0\|_X \leqslant \|y_1 - y_0\|_X.$$

Соответственно константу $\sigma(y_0,y_1)$, в отличие от п. 4, определим как

$$\sigma(y_0,y_1) = M\gamma(y_0,y_1) + \kappa^{-1}M^2\beta^2\|y_1 - y_0\|_X + 1.$$

Рассмотрим
$$\frac{S(t)y_\lambda-y_\lambda}{t}=\lambda\frac{S(t)y_1-y_1}{t}+(1-\lambda)\frac{S(t)y_0-y_0}{t}. \tag{10}$$
Хотя y_λ могут и не принадлежать X', тем не менее из условия G$_4$) получаем, что его аналог выполнен и для y_λ при $K(y_\lambda)=K(y_0,y_1)=\max\{K(y_0),K(y_1)\}$. С учётом представления (10) совершенно аналогично доказательству леммы 7 устанавливается существование числа $\delta_1(y_0,y_1)>0$ такого, что
$$\left\|\frac{S(t)y_\lambda-y_\lambda}{t}\right\|_X\leqslant K(y_0,y_1)+1,\quad t\in(0,\delta_1),\quad \lambda\in[0,1].$$
Аналогично тому как это было сделано при доказательстве теоремы 2, определим число $\delta=\delta(y_0,y_1)>0$, исходя из условий
$$\gamma_1(y_0,y_1)\delta<1,\quad \gamma_1(y_0,y_1)\equiv\{MK_2(\sigma)+M^2\beta^2\kappa^{-1}(K(y_0,y_1)+1+MK_2(\sigma))\},$$
$$\gamma_2(y_0,y_1)\delta<1/2,\quad \gamma_2(y_0,y_1)\equiv MK_1(\sigma)(1+M^2\beta^2\kappa^{-1}),\quad \delta\leqslant\delta_1(y_0,y_1),$$
где $\sigma=\sigma(y_0,y_1)$.

Теперь зафиксируем произвольное разбиение $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T$ с $\max_{i=\overline{1,k}}(t_i-t_{i-1})<\delta$. Будем рассматривать локальные аналоги уравнения (7):
$$y(t)=S(t)y_0+\int\limits_0^t S(t-s)f(s,y(s))\,ds+\int\limits_0^t S(t-s)B(s)u(s)\,ds,\quad t\in[0,t_i],\quad y\in E_i, \tag{$\mathcal{E}_i$}$$
$E_i=L_\infty(0,t_i;X)$, $i=\overline{1,k}$. Выберем числа $\lambda_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,k-1}$, $\lambda_k=1$.

Рассмотрим локальную по времени задачу управления при $i=1$: найти управление $u_1\in L_2(0,t_1;X)$ такое, что существует соответствующее решение уравнения ($\mathcal{E}_1$), удовлетворяющее условию $y(t_1;u_1)=y_{\lambda_1}$. Согласно теореме 3 эта задача управления имеет решение вида
$$u_1(t)=B^*(t)S(t_1-t)^*x_1,\quad x_1\in X.$$
Считая, что управление $u(t)$ на $[0,t_1]$ уже определено как $u_1(t)$, уравнение ($\mathcal{E}_2$) достаточно рассмотреть лишь на $[t_1,t_2]$. На этом промежутке оно может быть переписано в виде
$$y(t)=S(t-t_1)y_{\lambda_1}+\int\limits_{t_1}^t S(t-s)[f(s,y(s))+B(s)u(s)]\,ds,\quad t\in[t_1,t_2],\quad y\in E_2', \tag{$\mathcal{E}_2'$}$$
$E_{i=2}'=L_\infty(t_1,t_2;X)$. Действительно, это следует из соотношений
$$S(t-t_1)S(t_1)=S(t),\quad S(t-t_1)S(t_1-s)=S(t-s),$$
которые вытекают непосредственно из полугруппового свойства.

Если сделать замену $\tau=t-t_1\in[0,t_2-t_1]$, то уравнение ($\mathcal{E}_2'$) преобразуется к виду
$$y(t_1+\tau)=S(\tau)y_{\lambda_1}+\int\limits_{t_1}^{\tau+t_1} S(\tau+t_1-s)[f(s,y(s))+B(s)u(s)]\,ds$$
или, после замены $s-t_1=\xi$,
$$y(t_1+\tau)=S(\tau)y_{\lambda_1}+\int\limits_0^\tau S(\tau-\xi)[f(\cdot,y(\cdot))+B(\cdot)u(\cdot)](\xi+t_1)\,d\xi,\quad \tau\in[0,t_2-t_1], \tag{$\mathcal{E}_2''$}$$

$\overline{y}(\tau) = y(t_1+\tau)$, $\overline{y} \in E_2''$, $E_{i=2}'' = L_\infty(0, t_2-t_1; X)$. Уравнение $(\mathcal{E}_2'')$ имеет вид уравнения (7) при $T = t_2 - t_1$ (или уравнения $(\mathcal{E}_1)$ при замене t_1 на $t_2 - t_1$). Поэтому к нему опять применимо утверждение теоремы 3. Таким образом, на $[t_1, t_2]$ существует управление вида $u_2(t) = B^*(t)S(t_2-t)x_2$, $x_2 \in X$, для которого уравнение $(\mathcal{E}_2')$ имеет решение $y(t;u_2)$, удовлетворяющее условиям $y(t_2;u_2) = y_{\lambda_2}$, $\|y(t;u_2)\|_X \leqslant \sigma(y_0,y_1)$. Тогда на отрезке $[0,t_2]$ существует управление вида

$$u(t) = \begin{cases} B^*(t)S(t_1-t)x_1, & t \in [0,t_1],\ x_1 \in X, \\ B^*(t)S(t_2-t)x_2, & t \in [t_1,t_2],\ x_2 \in X, \end{cases}$$

для которого уравнение $(\mathcal{E}_2)$ имеет решение $y(t;u)$, удовлетворяющее условиям

$$y(t_1;u) = y_{\lambda_1}, \quad y(t_2;u) = y_{\lambda_2}, \quad \|y(t;u)\|_X \leqslant \sigma(y_0,y_1), \quad t \in [0,t_2].$$

Продолжив эти рассуждения по индукции, получим, что справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения G_1), G_3'), G_4), F_1)–F_4), B_2) (при $T_0 = T$). Тогда для любых $y_0, y_1 \in X'$ существует число $\delta = \delta(y_0,y_1) > 0$ такое, что для всякого разбиения $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$ мелкости, меньшей δ, и любого набора чисел $\lambda_i \in [0,1]$, $i = \overline{1,k-1}$, существует управление $u \in L_2(0,T;X)$ вида*

$$u(t) = B^*(t)S(t_i - t)^* x_i, \quad t \in (t_{i-1}, t_i], \quad x_i \in X, \quad i = \overline{1,k},$$

для которого уравнение (7) (или, равносильно, задача (1)) имеет решение $y(t;u)$, удовлетворяющее условиям

$$y(t_i;u) = y_{\lambda_i}, \quad i = \overline{1,k-1}, \quad y(T;u) = y_1, \quad \|y(t;u)\|_X \leqslant \sigma(y_0,y_1), \quad t \in [0,T].$$

Замечание 4. Утверждения теорем 2–4 останутся справедливыми и без предположения G_4) при замене X' на X, если соответствующие константы определить следующим образом:

$$\sigma(y_0,y_1) = M\gamma(y_0,y_1) + \kappa^{-1}M^2\beta^2(1+M)\gamma(y_0,y_1) + 1,$$
$$\gamma_1(y_0,y_1) \equiv \{MK_2(\sigma) + M^3\beta^2\kappa^{-1}K_2(\sigma)\}.$$

Изменение в доказательствах весьма незначительно: вместо первой оценки из леммы 7 будет использоваться очевидная оценка

$$\kappa\,\|F_T^{-1}[\omega_T(y)]\|_X \leqslant \frac{\|y_1\|_X + M\|y_0\|_X}{T} + MK_2(\sigma),$$

справедливая вне зависимости от величины $T > 0$ (т.е. определение δ_1 на этот раз не требуется). Однако соответствующие оценки норм $y(t;u)$ и $u(t)$ оказываются более грубыми.

6. ПРИМЕРЫ

Прежде всего необходимо сделать замечание относительно случая ЛОО $G\colon X \to X$ для задачи (2).

Замечание 5. Как уже пояснялось в п. 2, уже из того факта, что $G\colon X \to X$ — ЛОО, следует, что он является инфинитезимальным генератором равномерно непрерывной (а следовательно, сильно непрерывной) полугруппы (которая определяется однозначно). При этом G может рассматриваться и как ЛОО $L_2(0,T;X) \to L_2(0,T;X)$. Как показано в [11, гл. V, § 1.3, теорема 1.3], при сделанных предположениях для любых $x_0 \in X$, $z \in L_2(0,T;X)$ задача вида (2) с производной, понимаемой в смысле распределений, имеет единственное решение

$x \in \mathbb{C}(0,T;X)$ с производной $x' \in L_2(0,T;X)$. Более того, определённое тем самым соответствие $\{x_0;z\} \to \{x;x'\}$ непрерывно как отображение

$$X \times L_2(0,T;X) \to \mathbb{C}(0,T;X) \times L_2(0,T;X).$$

При этом, как указано в [11, гл. V, § 1.3, замеч. 1.4], если $x \in L_2(0,T;X)$ является решением, то отсюда в силу [11, гл. IV, теоремы 1.6, 1.7] вытекают следующие факты:

1) функция x: $[0,T] \to X$ непрерывна и п.в. на $[0,T]$ (сильно) дифференцируема;

2) имеет место тождество $x(t) = x_0 + \int_0^t \{Gx(s) + z(s)\}\,ds$ для любого $t \in [0,T]$;

3) для п.в. $t \in [0,T]$ производная в смысле распределений (по этому поводу см. также [11, с. 169]) $x'(t) = Gx(t) + z(t)$.

Для сильной производной (см. 1)) справедливо тождество [17, доказательство леммы 2.2]

$$\frac{d}{dt}\,[x(t),\omega] = [x'(t),\omega], \quad \omega \in X.$$

Таким образом, в силу 3) получаем

$$\frac{d}{dt}[x(t),\omega] = [Gx(t) + z(t),\omega] = [x(t), G^*\omega] + [z(t),\omega], \quad \omega \in X.$$

Это означает, что x есть решение задачи (2) также и в слабом смысле.

6.1. ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть $n \geqslant 2$ — заданное натуральное число, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и строго липшицева (для этого достаточно выпуклости). Для числа $\gamma > 0$ обозначим через $\mathbb{A}(\gamma)$ класс всех матричных функций $A = A(\cdot) = \{a_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n \in L_\infty^{n\times n}(\Omega)$, удовлетворяющих условию $A(x)\xi\cdot\xi \geqslant \gamma\,|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, п.в. $x \in \Omega$ (здесь “ $\cdot$ ” означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$). Для $J,K \in \mathbb{A}(\gamma)$, $w \in H_0^1(\Omega)$, $a,b \in L_\infty^+(\Omega)$, $z \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$, $\overline{Q} \in L_2(0,T;L_2^n(\Omega))$ рассмотрим в цилиндре $\Pi_T = [0;T] \times \Omega$ задачу

$$-\operatorname{div}\left(J\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + a\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(K\nabla\varphi) + b\varphi = z - \operatorname{div}\overline{Q}, \quad (t,x) \in \Pi_T,$$
$$\varphi(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,T]; \quad \varphi(0,x) = w(x), \quad x \in \Omega. \tag{11}$$

Уравнения вида (11) возникают при моделировании процессов теплопереноса [18], фильтрации в пористых средах [19–21], волновых процессов [22], квазистационарных процессов в кристаллических полупроводниках [23] (см. также обзор литературы в [23]).

Обозначим $H = H_0^1(\Omega)$. Решение начально-краевой задачи (11) будем понимать как функцию $\varphi(t,x) \in \mathbb{C}(0,T;H)$, обладающую производной в смысле распределений из класса $L_2(0,T;H)$ и удовлетворяющую начальному условию, а также тождеству

$$D[\partial\varphi/\partial t,\omega] + B[\varphi,\omega] = \psi(t)[\omega], \quad \omega \in H_0^1(\Omega), \quad t \in [0,T],$$

$$D[\chi,\omega] \equiv \int_\Omega [J\nabla\chi\cdot\nabla\omega + a\chi\omega]\,dx, \quad B[\chi,\omega] \equiv \int_\Omega [K\nabla\chi\cdot\nabla\omega + b\chi\omega]\,dx,$$

$$\psi(t)[\omega] \equiv \int_\Omega [z(t,x)\omega(x) + \vec{Q}(t,x)\cdot\nabla\omega(x)]\,dx, \quad \chi,\omega \in H_0^1(\Omega).$$

Поставленная задача уже подробно анализировалась в статье [24]. Там же было показано, что она может быть переписана в виде задачи Коши для операторного дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt}+R^{-1}S[\varphi(t)]=R^{-1}[Z(t)],\quad t\in[0,T];\quad \varphi(0)=w,\tag{12}$$

где для сопряжения с абстрактной теорией принято обозначение $\varphi(t)=\varphi(t,\cdot)$; $R,S\colon H\to H$ — ЛОО, обратимые на всем пространстве H; $Z\in L_2(0,T;H)$ однозначно определяется из условия $\psi(t)[\omega]=(Z(t),\omega)$ для всех $\omega\in H$; $\|Z(t)\|=\|\psi(t)\|$. Имеет место оценка

$$\|Z(t)\|_H\leqslant\|z(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)}+\|\overline{Q}(t,\cdot)\|_{L_2^n(\Omega)}.$$

Уравнение (12) имеет вид уравнения (2). За счёт ограниченности оператора $G=-R^{-1}S$ для любой правой части указанного вида существует на самом деле сильное решение $\varphi\in\mathbb{C}(0,T;H)$. Но очевидно, что оно совпадает со слабым. Поэтому применимы полученные нами выше результаты (в случае ограниченного оператора G) для соответствующего управляемого уравнения, в том числе полулинейного вида. При замене $z(t,x)$ на $g(t,x,\varphi(t,x))+u_1(t,x)$ и $\overline{Q}(t,x)$ на $\overline{Q}(t,x,\varphi(t,x))+\bar u_2(t,x)$ вместо $Z(t)$ получим сумму $h(t,\varphi(t))+U(t)$, где при соответствующих условиях относительно функций g, u_1, $\bar u_2$:

$$g(t,x,\varphi(t,x))\in L_2(0,T;L_2(\Omega)),\quad \overline{Q}(t,x,\varphi(t,x))\in L_2(0,T;L_2^n(\Omega)),\quad \varphi\in L_\infty(0,T;H);$$

$$u_1\in L_2(0,T;L_2(\Omega)),\quad \bar u_2\in L_2(0,T;L_2^n(\Omega)),$$

имеем $h(t,\varphi)\in H$ для п.в. $t\in[0,T]$, $\varphi\in H$,

$$h(\cdot,\varphi(\cdot))\colon L_\infty(0,T;H)\to L_2(0,T;H),\quad (h(t,\varphi(t)),\omega)=\int\limits_\Omega\{g(t,\cdot,\varphi(t))\omega+\overline{Q}(t,\cdot,\varphi(t))\cdot\nabla\omega\}\,dx,$$

$$U\in L_2(0,T;H),\quad (U(t),\omega)=\int\limits_\Omega\{u_1(t,\cdot)\omega+\bar u_2(t,\cdot)\cdot\nabla\omega\}\,dx,\quad \omega\in H.$$

Тем самым приходим к задаче вида (1) (при замене y на φ, X на H) с функциями $f(t,\varphi)=R^{-1}h(t,\varphi)$, $u(t)=R^{-1}U(t)$, $B(t)=I$. Условие F_1) будет, очевидно, выполнено. Покажем, во что трансформируются условия F_2), F_3). Для выполнения условия F_2) достаточно обеспечить неравенство

$$\|f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2)\|_H\leqslant\|R^{-1}\|\,\|h(t,\varphi_1)-h(t,\varphi_2)\|_H\leqslant$$
$$\leqslant\|R^{-1}\|\big(\|g(t,\cdot,\varphi_1)-g(t,\cdot,\varphi_2)\|_{L_2(\Omega)}+\|\overline{Q}(t,\cdot,\varphi_1)-\overline{Q}(t,\cdot,\varphi_2)\|_{L_2^n(\Omega)}\big)\leqslant\mathcal{N}(t,M)\,\|\varphi_1-\varphi_2\|_H$$

для п.в. $t\in[0,T]$, $\varphi_i\in H$, $\|\varphi_i\|_H\leqslant M$, $i=1,2$. И аналогично, для выполнения условия F_3) достаточно обеспечить выполнение неравенства

$$\|f(t,\varphi)\|_H\leqslant\|R^{-1}\|\,\|h(t,\varphi)\|_H\leqslant\|R^{-1}\|\,\{\|g(t,\cdot,\varphi)\|_{L_2(\Omega)}+\|\overline{Q}(t,\cdot,\varphi)\|_{L_2^n(\Omega)}\}\leqslant\mathcal{N}_1(t,M)$$

для п.в. $t\in[0,T]$, $\varphi\in H$, $\|\varphi\|_H\leqslant M$. Условие F_4) — это всего лишь условие на оценочные функции $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_1$.

Представление вида $u(t)=R^{-1}U(t)=B^*(t)S(T-t)^*\xi=S(T-t)^*\xi$, $\xi\in H$, трансформируется в $U(t)=RS(T-t)^*\xi$. Управления в исходной задаче определяются из тождества

$$(U(t),\omega)=(RS(T-t)^*\xi,\omega)=\int\limits_\Omega\big(u_1(t,x)\omega(x)+\bar u_2(t,x)\cdot\nabla\omega(x)\big)\,dx$$

для всех $\omega\in H$. Скалярное произведение на H можно понимать как

$$(U(t),\omega)=\int\limits_\Omega\big(U(t)(x)\omega(x)+\nabla U(t)(x)\cdot\nabla\omega(x)\big)\,dx.$$

Соответственно, управления $u_1(t,\cdot)=RS(T-t)^*\xi$, $\bar u_2(t,\cdot)=\nabla RS(T-t)^*\xi$.

Покажем, что условие G_3') выполняется естественным образом. Действительно, в силу ограниченности оператора G и в соответствии с рассуждениями из п. 2 (случай I) найдётся константа $\delta>0$ такая, что при выполнении условий $0<(t_i-t_i^*)<\delta$ имеет место оценка

$$\|S^*(t_i-t)x\|_X\geqslant\frac12\,\|x\|_X\quad\text{для п.в. } t\in(t_i^*,t_i] \text{ и любых } x\in X.$$

Соответственно, для $B(t)=I$ имеем

$$\|B^*(t)S^*(t_i-t)x\|_X=\|S^*(t_i-t)x\|_X\geqslant\frac12\|x\|_X$$

при п.в. $t\in(t_i^*,t_i]$ и любых $x\in X$. Тем самым условие G_3') выполняется при $a(t)\equiv 1/2$. Стало быть, теорема 4 применима.

6.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть $T>0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — открытое ограниченное множество с границей Γ. Положим $Q=\Omega\times(0,T]$, $\Sigma=\Gamma\times(0,T]$. В качестве управляемой начально-краевой задачи рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x,t):\overline{\Omega}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=g(x,t,\varphi)+U(x,t),\quad (x,t)\in Q; \tag{13}$$

$$\varphi\,\big|_\Sigma=0;\quad \varphi(x,0)=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)=\psi_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{14}$$

Задача (13), (14) уже подробно анализировалась в [3] (см. также [25, разд. 10.3]). Было показано, что она сводится к задаче (1), $B(t)\equiv I$, причём относительно оператора G имеет место ситуация, описанная в п. 2 (случай II), с выполнением условий G_1) ($M=1$), G^*); $X=\mathbb{H}_0^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$[\eta_1,\eta_2]_X=\int\limits_\Omega\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2\,dx+\int\limits_\Omega\psi_1\psi_2\,dx.$$

Примем $\varphi(t)=\varphi(\cdot,t)$, $g(t,\varphi)=g(\cdot,t,\varphi)$. Условия F_1), F_2), F_3) конкретизируются следующим образом.

F_1) Для всех $\varphi\in E=L_\infty(0,T;X)$ отображение $[0,T]\ni t\to g(t,\varphi(t))$ принадлежит классу $Z=L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

F_2) Существует функция $\mathcal{N}=\mathcal{N}(t,M)$: $[0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0,T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\varphi_i\in\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\varphi_i\|\leqslant M$, $i=1,2$, п.в. $t\in[0,T]$ имеем $\|g(t,\varphi_1)-g(t,\varphi_2)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{N}(t,M)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$.

F_3) Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r)$: $[0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая, что $\|g(t,\xi)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{N}_1(t,M)$ для всех $M>0$, $\xi\in\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\xi\|\leqslant M$, п.в. $t\in[0,T]$.

Как показано в [3, лемма 2.2], из выполнения условий G_1) ($M=1$), G^*) вытекают равенства

$$\|S(t)x\|_X=\|S(t)^*x\|_X=\|x\|_X,\quad x\in X,\quad t\geqslant 0.$$

Таким образом, для $B(t)=I$ имеем

$$\|B^*(t)S^*(t_i-t)x\|_X=\|S^*(t_i-t)x\|_X=\|x\|_X$$

для п.в. $t\in(t_{i-1},t_i]$ и любых $x\in X$. Тем самым условие $\mathrm{G}_3')$ выполняется при $a(t)\equiv 1$. Значит, теорема 4 применима.

В [3] точная управляемость задачи (13), (14) устанавливалась при условии достаточной малости промежутка времени $[0,T]$ и (фактически) требовании о подлинейном росте функции $g(x,t,\varphi)$ по φ в окрестности бесконечности. На этот раз установлена точная управляемость в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени $[0,T]$ в предположении локальной липшицевости функции $g(x,t,\varphi)$ по φ.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balachandran, K. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey / K. Balachandran, J.P. Dauer // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — № 1. — P. 7–28.
2. Control Theory of Partial Differential Equations / O. Imanuvilov, G. Leugering, R. Triggiani, Bing-Yu. Zhang. — Boca Raton; London; New York; Singapore : Chapman & Hall/CRC, 2005. — 416 p.
3. Чернов, А.В. О точной управляемости полулинейного эволюционного уравнения с неограниченным оператором / А.В. Чернов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 2. — С. 257–269.
4. Zhang, X. Exact controllability of semilinear evolution systems and its application / X. Zhang // J. Optim. Theory Appl. — 2000. — V. 107, № 2. — P. 415–432.
5. Liu, W. Exact internal controllability for the semilinear heat equation / W. Liu, G.H. Williams // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — V. 211. — P. 258–272.
6. Balachandran, K. Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space / K. Balachandran, J.P. Dauer, P. Balasubramaniam // J. Optim. Theory Appl. — 1995. — V. 84. — P. 83–91.
7. Mahmudov, N.I. Exact null controllability of semilinear evolution systems / N.I. Mahmudov // J. Glob. Optim. — 2013. — V. 56, № 2. — P. 317–326.
8. Балакришнан, А.В. Прикладной функциональный анализ / А.В. Балакришнан ; пер. с англ. В.И. Благодатских. — М. : Наука, 1980. — 383 с.
9. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс ; пер. с англ. Д.А. Василькова ; под ред. В.М. Алексеева и С.В. Фомина. — М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1962. — 829 с.
10. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М. : Наука, 1972. — 544 с.
11. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас ; пер. с нем. В.Г. Задорожного, А.И. Перова ; под ред. В.И. Соболева. — М. : Мир, 1978. — 336 с.
12. Pazy, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York : Springer-Verlag, 1983. — 279 p.
13. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — 4-е изд., перераб. — М. : Наука, 1976. — 543 с.
14. Егоров, А.И. Основы теории управления / А.И. Егоров. — М. : Физматлит, 2004. — 504 с.
15. Качуровский, Р.И. Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах / Р.И. Качуровский // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, Вып. 2 (140). — С. 121–168.
16. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — 3-е изд., перераб. — М. : Наука, 1984. — 752 с.

17. Чернов, А.В. О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации коэффициента уравнения глобальной электрической цепи / А.В. Чернов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 9. — С. 1586–1601.
18. Chen, P.J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. — 1968. — V. 19. — P. 614–627.
19. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 852–864.
20. Mathematical model of the non-equilibrium water-oil displacement in porous strata / G.I. Barenblatt, J. Garcia-Azorero, A. De Pablo, J.L. Vazquez // Appl. Anal. — 1997. — V. 65, № 1–2. — P. 19–45.
21. Helmig, R. Dynamic capillary effects in heterogeneous porous media / R. Helmig, A. Weiss, B.I. Wohlmuth // Comput. Geosciences. — 2007. — V. 11, № 3. — P. 261–274.
22. Benjamin, T.B. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems / T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony // Philos. Tranc. Royal Soc. London. Ser. A. — 1972. — V. 272. — P. 47–78.
23. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М. : Физматлит, 2007. — 736 с.
24. Чернов, А.В. О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью / А.В. Чернов // Изв. вузов. Математика. — 2018. — № 11. — С. 60–74.
25. Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations / H. Brezis. — New York; Dordrecht; Heidelberg; London : Springer, 2011. — 599 p.

ON EXACT GLOBAL CONTROLLABILITY OF A SEMILINEAR EVOLUTIONARY EQUATION

A. V. Chernov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
e-mail: chavnn@mail.ru

For a Cauchy problem associated with a controlled semilinear evolutionary equation with optionally bounded operator in a Hilbert space we obtain sufficient conditions for exact controllability to a given final state (and also to given intermediate states at intermediate time moments) on a arbitrarily fixed (without additional conditions) time interval. Here we use the Minty–Browder's theorem and also a chain technology of successive continuation of the solution to a controlled system to intermediate states. As examples we consider a semilinear pseudoparabolic equation and a semilinear wave equation.

Keywords: semilinear evolutionary equation, Hilbert space, optionally bounded operator, exact global controllability.

REFERENCES

1. Balachandran, K. and Dauer, J.P., Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey, *J. Optim. Theory Appl.*, 2002, no. 1, pp. 7–28.
2. Imanuvilov, O., Leugering, G., Triggiani, R., and Zhang, Bing-Yu., *Control Theory of Partial Differential Equations*, Boca Raton; London; New York; Singapore: Chapman & Hall/CRC, 2005.
3. Chernov, A.V., On the exact controllability of a semilinear evolution equation with an unbounded operator, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 265–277.
4. Zhang, X., Exact controllability of semilinear evolution systems and its application, *J. Optim. Theory Appl.*, 2000, vol. 107, no. 2, pp. 415–432.
5. Liu, W. and Williams, G.H., Exact internal controllability for the semilinear heat equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, vol. 211, pp. 258–272.
6. Balachandran, K., Dauer, J.P., and Balasubramaniam, P., Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space, *J. Optim. Theory Appl.*, 1995, vol. 84, pp. 83–91.
7. Mahmudov, N.I., Exact null controllability of semilinear evolution systems, *J. Glob. Optim.*, 2013, vol. 56, no. 2, pp. 317–326.

8. Balakrishnan, A.V., *Applied Functional Analysis*, New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1976.
9. Hille, E. and Phillips, R.S., *Functional Analysis and Semi-Groups*, Providence: Amer. Math. Soc., 1957.
10. *Funktsional'nyi analiz* (Functional Analysis), Ed. Krein S.G., Moscow: Nauka, 1972.
11. Gaewski, H., Gröger, K., Zacharias, K., Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Berlin: Akademie-Verlag, 1974.
12. Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, New York: Springer, 1983.
13. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of Function Theory and Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1976.
14. Egorov, A.I., *Osnovy teorii upravleniya* (Fundamentals of Control Theory), Moscow: Fizmatlit, 2004.
15. Kachurovskii, R.I., Non-linear monotone operators in Banach spaces. *Russ. Math. Surv.*, 1968, vol. 23, no. 2, pp. 121–168.
16. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P., *Functional Analysis*, Oxford: Pergamon, 1982.
17. Chernov, A.V., Differentiation of a functional in the problem of parametric coefficient optimization in the global electric circuit equation, *Comp. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 9, pp. 1565–1579.
18. Chen, P.J. and Gurtin, M.E., On a theory of heat conduction involving two temperatures, *Z. Angew. Math. Phys.*, 1968, vol. 19, pp. 614–627.
19. Barenblatt, G.I., Zheltov, Yu.P., and Kochina, I.N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata), *J. Appl. Math. Mech.*, 1961, vol. 24, pp. 1286–1303.
20. Barenblatt, G.I., Garcia-Azorero, J., De Pablo, A., and Vazquez, J.L., Mathematical model of the non-equilibrium water-oil displacement in porous strata, *Appl. Anal.*, 1997, vol. 65, no. 1–2, pp. 19–45.
21. Helmig, R., Weiss, A., and Wohlmuth, B.I., Dynamic capillary effects in heterogeneous porous media, *Comput. Geosciences*, 2007, vol. 11, no. 3, pp. 261–274.
22. Benjamin, T.B., Bona, J.L., and Mahony, J.J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Tranc. Royal Soc. London. Ser. A*, 1972, vol. 272, pp. 47–78.
23. Sveshnikov, A.G., Al'shin, A.B., Korpusov, M.O., and Pletner, Yu.D., *Lineynyye i nelineynyye uravneniya sobolevskogo tipa* (Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type), Moscow: Fizmatlit, 2007.
24. Chernov, A.V., The total preservation of unique global solvability of the first kind operator equation with additional controlled nonlinearity, *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 11, pp. 53–66.
25. Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer, 2011.