ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 312–321

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Э. Мухамадиев[1], А. Н. Наимов[2]

Вологодский государственный университет

e-mail: [1]emuhamadiev@rambler.ru, [2]naimovan@vogu35.ru

Поступила в редакцию 15.10.2023 г., после доработки 15.10.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Исследована разрешимость периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с выделенной главной положительно однородной частью. Найдены новые условия, обеспечивающие априорную оценку решений рассматриваемой периодической задачи. Они сформулированы в терминах свойств главной положительно однородной части системы уравнений. В условиях априорной оценки, применяя и развивая методы вычисления вращения векторных полей, доказана теорема о разрешимости периодической задачи, в которой обобщены полученные ранее результаты авторов по исследованию периодической задачи для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: периодическая задача, главная положительно однородная часть, возмущение, априорная оценка, вращение векторного поля, гомотопия.

DOI: 10.31857/S0374064124030037, EDN: PNQUAC

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим периодическую задачу

$$x''(t) = P(t, x(t), x'(t)) + f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$x(0) = x(1), \qquad x'(0) = x'(1). \tag{2}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство n-мерных векторов ($n \geqslant 2$) с вещественными координатами, отображения $P, f\colon \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ заданы, непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

1) отображение $P(t, y_1, y_2)$ по y_1, y_2 положительно однородно порядка $m > 1$:

$$P(t, \lambda y_1, \lambda y_2) \equiv \lambda^m P(t, y_1, y_2), \quad \lambda > 0;$$

2) порядок роста $|f(t, y_1, y_2)|$ при бóльших значениях $|y_1| + |y_2|$ ограничен условием

$$\lim_{|y_1|+|y_2|\to\infty} (|y_1| + |y_2|)^{-m} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t, y_1, y_2)| = 0;$$

3) отображения $P(t, y_1, y_2)$, $f(t, y_1, y_2)$ периодичны по t с периодом, равным единице, т.е.

$$P(t+1, y_1, y_2) \equiv P(t, y_1, y_2), \quad f(t+1, y_1, y_2) \equiv f(t, y_1, y_2).$$

Учитывая условия 1) и 2), отображение P называем *главной положительно однородной частью*, а отображение f — *возмущением*.

Решением задачи (1), (2) называем вектор-функцию $x \in C^2([0,1]; \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнениям системы (1) и условиям (2). Такое решение можно периодически продолжить на $\mathbb{R}$, тогда $x \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ и при всех $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнениям системы (1) и условию периодичности $x(t+1) \equiv x(t)$.

Если $x(t)$ является решением задачи (1), (2), то пара функций $(x(t), x'(t))$ будет нулём вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(x,y) := \left(x(t) - x(1) - \int\limits_0^t y(s)\,ds,\, y(t) - y(1) - \int\limits_0^t \big(P(s,x(s),y(s)) + f(s,x(s),y(s))\big)\,ds \right), \tag{3}$$

определённого в банаховом пространстве $E := C([0,1];\mathbb{R}^n) \times C([0,1];\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|(x,y)\|_E :=$ $:= \|x\|_C + \|y\|_C$, где $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$. И обратно, если пара $(x,y) \in E$ является нулём векторного поля Φ, то $x' = y$ и x будет решением задачи (1), (2). Таким образом, разрешимость задачи (1), (2) сводится к нахождению нулей векторного поля Φ.

В настоящей работе задача (1), (2) исследуется в два этапа. На первом этапе выясняется, при каких условиях на отображение P для решений задачи (1), (2) имеет место так называемая априорная оценка

$$\|x\|_C + \|x'\|_C < M, \tag{4}$$

где положительное число M не зависит от $x(t)$. Если имеет место априорная оценка (4), то вполне непрерывное векторное поле Φ не обращается в нуль на сфере $\|(x,y)\|_E = r$ при $r \geqslant M$. Поэтому, согласно теории вполне непрерывных векторных полей [1, с. 135], определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ векторного поля Φ на бесконечности, равное вращению (степени отображения) Φ на сфере $\|(x,y)\|_E = r$ при $r \geqslant M$. На втором этапе, применяя и развивая методы вычисления вращения векторных полей, вычисляется $\gamma_\infty(\Phi)$ через числовую характеристику отображения P. Если $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения [1, с. 138] существует нуль векторного поля Φ, этим самым доказывается разрешимость задачи (1), (2). Эта задача по изложенной выше схеме исследована в статьях [2–4]: в [2] при $n=1$; в [3] при $n \geqslant 2$, когда множество нулей отображения P состоит из одной поверхности; в [4] при $n=2$ в одном частном примере, когда множество нулей отображения P состоит из двух поверхностей. Ниже обобщены результаты перечисленных работ в предположении, что $n \geqslant 2$ и множество нулей отображения P состоит из конечного числа поверхностей. При этом использована оценка вида

$$|x'(t)| \leqslant M_0(1 + |x(t)|), \quad t \in [0,1], \tag{5}$$

которая доказана в [5] для решений задачи (1), (2), здесь $M_0 > 0$ и не зависит от $x(t)$. Данная оценка также представляет интерес с точки зрения априорной оценки решений обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотренной в работе [6].

Вопрос существования периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследован в многочисленных работах других авторов. Отметим статьи [7, 8], где применяются идеи и методы, близкие к настоящей работе. Например, в работе [8] получены достаточные условия, которым должна удовлетворять асимптотически устойчивая в целом автономная система дифференциальных уравнений, заданная в $\mathbb{R}^n$, чтобы при любом ω-периодическом её возмущении она имела ω-периодическое решение.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предположим, что наряду с условиями 1)–3) выполнены также следующие условия:

4) при любых фиксированных $t_0 \in [0,\ 1]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ автономная система

$$y'(t) = P(t_0, x_0, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

не имеет нестационарных ограниченных траекторий;

5) множество нулей $\{(t,y_1,y_2)\colon\ P(t,y_1,y_2)=0\}$ отображения P состоит из q поверхностей вида $\{(t,y_1,y_2)\colon\ y_2=B_j(t,y_1)\}$, $j=\overline{1,q}$, где отображения $B_j(t,x)\colon\mathbb{R}^{1+n}\mapsto\mathbb{R}^n$, $j=\overline{1,q}$, непрерывны, периодичны по t с периодом, равным единице, и удовлетворяют условиям:

а) $B_j(t,\lambda y_1)\equiv\lambda B_j(t,y_1)$ при любых $\lambda>0$, $j=\overline{1,q}$;

б) $B_j(t,y_1)\neq B_k(t,y_1)$ при любых $t\in\mathbb{R}$, $y_1\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $j\neq k$;

в) каждая из систем уравнений $x'(t)=B_j(t,x(t))$, $j=\overline{1,q}$, не имеет ненулевых периодических решений с единичным периодом.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)–5). Тогда для решений задачи (1), (2) имеет место априорная оценка (4).*

Теорема 1 доказана в работе [2] при $n=1$, в работе [3] при $n\geqslant 2$, $q=1$, а в работе [4] при $n=2$, $q=2$ в одном частном примере.

Из теоремы 1 следует, что при выполнении условий 1)–5) для вполне непрерывного векторного поля Φ, заданного формулой (3), определено его вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ на бесконечности. Если $\gamma_\infty(\Phi)\neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения [1, с. 138] существует нуль векторного поля Φ, этим самым доказывается разрешимость задачи (1), (2). Вычислим $\gamma_\infty(\Phi)$ через числовую характеристику отображения P. Основная идея вычисления состоит в том, что на сфере $\|(x,y)\|_E=r$ большого радиуса r векторное поле Φ гомотопируется к конечномерному векторному полю, определяемому отображением P. Для построения такой гомотопии требуется, кроме условий 1)–5), выполнение следующих условий:

6) отображение P не зависит от t, т.е. $P(t,y_1,y_2)\equiv Q(y_1,y_2)$, в этом случае отображения B_j, $j=\overline{1,q}$, также не зависят от t;

7) при любом $y_1\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ имеет место неравенство $Q(y_1,0)\neq 0$, что следует из условий 5);

8) при любом $\mu\in(0,1]$ каждая из систем уравнений $x'(t)=\mu B_j(x(t))$, $j=\overline{1,q}$, не имеет ненулевых периодических решений с единичным периодом;

9) отлично от нуля вращение $\gamma(Q(\cdot,0))$ конечномерного векторного поля $Q(y_1,0)$ на сфере $|y_1|=1$ пространства $\mathbb{R}^n$.

Верна следующая

Теорема 2. *Если выполнены условия 1)–9), то существует хотя бы одно решение задачи (1), (2).*

В утверждении теоремы 2 фактически доказано равенство $\gamma_\infty(\Phi)=\gamma(Q(\cdot,0))$. Отсюда, в силу условия 9) и принципа ненулевого вращения [1, с. 138], вытекает разрешимость задачи (1), (2). Теорема 2 в частных случаях доказана в работах [2–4].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Предположим, что оценка (4) не верна. Тогда существует последовательность решений $x_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, задачи (1), (2) такая, что

$$r_k:=\|x_k\|_C+\|x_k'\|_C\to\infty,\quad k\to\infty.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t)=r_k^{-1}x_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$. Для них имеем

$$r_k^{1-m}y_k''(t)=P(t,y_k(t),y_k'(t))+r_k^{-m}f(t,r_ky_k(t),r_ky_k'(t)),\quad t\in(0,1),$$

$$y_k(0)=y_k(1),\quad y_k'(0)=y_k'(1),\quad \|y_k\|_C+\|y_k'\|_C=1.$$

В силу условия 2) имеет место предел

$$r_k^{-m}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t,r_ky_k(t),r_ky_k'(t))|\to 0,\quad k\to\infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|y_k - y_0\|_C \to 0$, $k \to \infty$. Вектор-функции $y_0(t)$, $y_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, можно считать периодически продолженными на всю числовую ось $\mathbb{R}$. Отсюда заключаем, что

$$r_k^{1-m} y_k''(t) = P(t, y_0(t), y_k'(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\|y_0\|_C + \|y_k'\|_C \to 1, \quad k \to \infty.$$

Покажем, что

$$y_0(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Прежде всего проверим, что $y_0(t) \not\equiv 0$. Действительно, если $y_0(t) \equiv 0$, то $\|y_k'\|_C = |y_k'(\tau_k)| \to 1$ при $k \to \infty$ и для вектор-функций $z_k(t) = y_k'(\tau_k + r_k^{1-m} t)$, $k \in \mathbb{N}$, имеем $|z_k(t)| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$, $|z_k(0)| \to 1$ при $k \to \infty$,

$$z_k'(t) = P(\tau_k + r_k^{1-m} t, 0, z_k(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений $z'(t) = P(\tau_0, 0, z(t))$, что противоречит условию 4). Следовательно, $y_0(t) \not\equiv 0$.

Пусть (α, β) — наибольший интервал, где $y_0(t)$ не обращается в нуль. Из оценки (5) следует, что на произвольном отрезке $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ имеет место неравенство

$$\limsup_{k \to \infty} \max_{a \leqslant t \leqslant b} \frac{|y_k'(t)|}{|y_k(t)|} \leqslant M_0.$$

Учитывая его и равенства

$$\ln \frac{|y_k(b)|}{|y_k(a)|} = \int_a^b (\ln |y_k(t)|)' dt = \int_a^b \left\langle \frac{y_k'(t)}{|y_k(t)|}, \frac{y_k(t)}{|y_k(t)|} \right\rangle dt,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидовое скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, оценим при больших k выражение

$$\left| \ln \frac{|y_k(b)|}{|y_k(a)|} \right| < (M_0 + 1)(b - a).$$

Переходя здесь к пределу, получаем соотношения

$$-(M_0 + 1)(b - a) \leqslant \ln \frac{|y_0(b)|}{|y_0(a)|} \leqslant (M_0 + 1)(b - a).$$

Если α конечно, то в неравенстве справа, устремляя a к α, будем иметь $y_0(\alpha) \neq 0$, что противоречит выбору α. Значит, $\alpha = -\infty$. Аналогичным образом из неравенства слева следует, что $\beta = +\infty$. Таким образом, свойство (7) верно.

Проверим, что

$$\lim_{k \to \infty} P(t, y_0(t), y_k'(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Если это не так, то можно считать, что при некотором $t_0 \in \mathbb{R}$ существует ненулевой предел

$$\lim_{k \to \infty} P(t_0, y_0(t_0), y_k'(t_0)) = v_0, \quad v_0 \neq 0.$$

Для вектор-функций $\tilde{y}_k(t) = y_k'(t_0 + r_k^{1-m} t)$, $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$|\tilde{y}_k(t)| \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{y}_k'(t) = P(t_0 + r_k^{1-m} t, y_0(t_0 + r_k^{1-m} t), \tilde{y}_k(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{k \to \infty} P(t_0, y_0(t_0), \tilde{y}_k(0)) = v_0, \quad v_0 \neq 0.$$

Переходя к пределу, получаем нестационарное ограниченное решение автономной системы (6) при фиксированных t_0, $x_0 = y_0(t_0)$, что противоречит условию 4).

Возьмём произвольную точку $\tau \in \mathbb{R}$. Учитывая (8) и условие 5), без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(\tau) = B_1(\tau, y_0(\tau)).$$

Покажем, что существует такое число $\delta > 0$, что для любых $t \in (\tau-\delta, \tau+\delta)$

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(t) = B_1(t, y_0(t)). \tag{9}$$

Тогда в силу произвольности $\tau \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(t) = B_1(t, y_0(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, переходя к пределу в равенстве

$$y_k(t) = y_k(0) + \int_0^t y_k'(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

получаем, что $y_0(t)$ является ненулевым периодическим решением системы уравнений $x'(t) = B_1(t, x(t))$ с периодом, равным единице. А это противоречит условию 5в).

Для доказательства (9) заметим, что из $y_0(\tau) \neq 0$ и условия 5б) вытекает, что

$$d := \min_{j_1 \neq j_2} \bigl|B_{j_1}(\tau, y_0(\tau)) - B_{j_2}(\tau, y_0(\tau))\bigr| > 0.$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы из условий

$$s_1, s_2 \in (\tau-\delta, \tau+\delta), \quad |u_1 - y_0(\tau)| < \delta, \quad |u_2 - y_0(\tau)| < \delta$$

следовало неравенство

$$\min_{j_1 \neq j_2} \bigl|B_{j_1}(s_1, u_1) - B_{j_2}(s_2, u_2)\bigr| > \frac{d}{2}.$$

Предположим, что при некоторых $t_0 \in (\tau-\delta, \tau+\delta)$ и $j_0 \neq 1$ имеет место предел

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(t_0) = B_{j_0}(t_0, y_0(t_0)).$$

Тогда при больши́х k существует t_k между τ и t_0 такое, что

$$\bigl|y_k'(t_k) - B_{j_0}(t_k, y_k(t_k))\bigr| = \frac{d}{4}.$$

Отсюда, в силу выбора δ, вытекает неравенство

$$\min_j \bigl|y_k'(t_k) - B_j(t_k, y_k(t_k))\bigr| \geqslant \frac{d}{4}.$$

Теперь, рассматривая вектор-функции $z_k(t) = y_k'(t_k + r_k^{1-m} t)$, $k \in \mathbb{N}$, и переходя к пределу, получаем ограниченную вектор-функцию $z_0(t)$ такую, что

$$z_0'(t) = P(s_0, y_0(s_0), z_0(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \min_j \bigl|z_0(0) - B_j(s_0, y_0(s_0))\bigr| \geqslant \frac{d}{4},$$

следовательно, $P(s_0, y_0(s_0), z_0(0)) \neq 0$, что противоречит условию 4). Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

В банаховом пространстве $E := C([0,1];\mathbb{R}^n)\times C([0,1];\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|(x,y)\|_E := \|x\|_C + \|y\|_C$ рассмотрим вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi(x,y) := \biggl(x(t)-x(1)-\int\limits_0^t y(s)ds,\, y(t)-y(1)-\int\limits_0^t \bigl(Q(x(s),y(s))+f(s,x(s),y(s))\bigr)\,ds\biggr).$$

Разрешимость задачи (1), (2) равносильна существованию нуля векторного поля Φ.

Из теоремы 1 следует, что определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ вполне непрерывного векторного поля Φ на бесконечности. Докажем равенство

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma(Q(\cdot,0)), \tag{10}$$

тогда в силу условия 9) и принципа ненулевого вращения [1, с. 138] будет существовать хотя бы один нуль векторного поля Φ. Этим самым будет доказана разрешимость задачи (1), (2).

По аналогии с теоремой 1 можно показать, что семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\biggl(x(t)-x(1)-\int\limits_0^t y(s)ds,\, y(t)-y(1)-\int\limits_0^t \bigl(Q(x(s),y(s))+\lambda f(s,x(s),y(s))\bigr)\,ds\biggr),\quad \lambda\in[0,1],$$

не обращается в нуль на сферах $\|(x,y)\|_E = r$ бо́льших радиусов r пространства E. Поэтому, согласно свойству вращения [1, с. 137], имеет место равенство

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_0), \tag{11}$$

где

$$\Phi_0(x,y) := \biggl(x(t)-x(1)-\int\limits_0^t y(s)\,ds,\, y(t)-y(1)-\int\limits_0^t Q(x(s),y(s))\,ds\biggr).$$

Вычислим $\gamma_\infty(\Phi_0)$, гомотопируя векторное поле Φ_0 к конечномерному векторному полю следующей формулой:

$$\Phi_\lambda(x,y) := \biggl(x(t)-x(1)-\int\limits_0^t y(s)\,ds-\lambda\int\limits_t^1 y(s)\,ds,\, y(t)-y(1)-\int\limits_0^t Q(x(s),y(s))\,ds-\lambda\int\limits_t^1 Q(x(s),y(s))\,ds\biggr),$$
$$\lambda\in[0,1].$$

Покажем, что семейство векторных полей Φ_λ не обращается в нуль вне некоторого шара радиуса r_0:

$$\Phi_\lambda(x,y)\neq 0,\quad \lambda\in[0,1],\quad (x,y)\in E,\quad \|(x,y)\|_E > r_0. \tag{12}$$

Тогда из (11) и (12) вытекает равенство

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_1). \tag{13}$$

Для векторного поля Φ_1 согласно определению вращения вполне непрерывного векторного поля имеем

$$\gamma_\infty(\Phi_1) = \gamma(F_1), \tag{14}$$

где $\gamma(F_1)$ — вращение конечномерного поля $F_1(\xi,\eta):=(-\eta,-Q(\xi,\eta))$, $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, на единичной сфере $|\xi|+|\eta|=1$ пространства $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. На сфере $|\xi|+|\eta|=1$ векторное поле $F_1(\xi,\eta)$ гомотопируется к векторному полю $F_0(\xi,\eta):=(-\eta,-Q(\xi,0))$ семейством векторных полей $(-\eta,-Q(\xi,\lambda\eta))$, $\lambda\in[0,1]$, а для векторного поля F_0 имеем $\gamma(F_0)=\gamma(Q(\cdot,0))$. Следовательно,

$$\gamma(F_1)=\gamma(Q(\cdot,0)). \tag{15}$$

Из равенств (13)–(15) вытекает (10). Таким образом, для завершения доказательства теоремы 2 остаётся проверить справедливость утверждения (12).

Предположим, что (12) не верно. Тогда существуют $\lambda_k\in[0,1]$, $(x_k,y_k)\in E$, $k\in\mathbb{N}$, такие, что

$$x_k'(t)=(1-\lambda_k)y_k(t),\quad y_k'(t)=(1-\lambda_k)Q(x_k(t),y_k(t)),\quad t\in(0,1),$$

$$x_k(0)=x_k(1),\quad y_k(0)=y_k(1),\quad \int\limits_0^1 y_k(s)\,ds=0,\quad \int\limits_0^1 Q(x_k(s),y_k(s))\,ds=0,$$

$$r_k:=\|x_k\|_C+\|y_k\|_C\to\infty,\quad k\to\infty.$$

Обозначив $\tilde{x}_k(t)=r_k^{-1}x_k(t)$, $\tilde{y}_k(t)=r_k^{-1}y_k(t)$, получим

$$\tilde{x}_k'(t)=(1-\lambda_k)\tilde{y}_k(t),\quad r_k^{1-m}\tilde{y}_k'(t)=(1-\lambda_k)Q(\tilde{x}_k(t),\tilde{y}_k(t)),\quad t\in(0,1),$$

$$\tilde{x}_k(0)=\tilde{x}_k(1),\quad \tilde{y}_k(0)=\tilde{y}_k(1),\quad \|\tilde{x}_k\|_C+\|\tilde{y}_k\|_C=1,$$

$$\int\limits_0^1 \tilde{y}_k(s)\,ds=0,\quad \int\limits_0^1 Q(\tilde{x}_k(s),\tilde{y}_k(s))\,ds=0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_k\to\lambda_0$, $\|\tilde{x}_k-\tilde{x}_0\|_C\to 0$ при $k\to\infty$.

Если $\lambda_0<1$, то для $\tilde{x}_k(t)$ имеем

$$r_k^{1-m}\tilde{x}_k''(t)=(1-\lambda_0)^2Q(\tilde{x}_0(t),(1-\lambda_0)^{-1}\tilde{x}_k'(t))+o(1),\quad t\in(0,1),$$

$$\tilde{x}_k(0)=\tilde{x}_k(1),\quad \tilde{x}_k'(0)=\tilde{x}_k'(1),\quad \|\tilde{x}_k\|_C+(1-\lambda_k)^{-1}\|\tilde{x}_k'\|_C=1,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 1, приходим к противоречию с условием 8).

Если $\lambda_k=1$, то $\tilde{y}_k(t)\equiv 0$, $\tilde{x}_k(t)\equiv\tilde{x}_k(0)$, $|\tilde{x}_k(0)|=1$, $Q(\tilde{x}_k(0),0)=0$. Полученное противоречит условию 7).

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda_k<1$ при всех k и $\lambda_k\to 1$ при $k\to\infty$. Тогда $\tilde{x}_0(t)\equiv\tilde{x}_0(0)$. Если $||\tilde{y}_k||_C\to 0$ при $k\to\infty$, то $|\tilde{x}_0(0)|=1$ и $Q(\tilde{x}_0(0),0)=0$, что противоречит условию 7). Следовательно,

$$\liminf_{k\to\infty}\|\tilde{y}_k\|_C>0.$$

Можно считать, что $(1-\lambda_k)r_k^{m-1}\to\mu_0$ при $k\to\infty$, где $\mu_0\leqslant+\infty$. Если $\mu_0<+\infty$, то, переходя к пределу, получаем

$$\tilde{y}_0'(t)=\mu_0Q(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0(t)),\quad t\in(0,1),$$

$$\tilde{y}_0(0)=\tilde{y}_0(1),\quad |\tilde{x}_0|+\|\tilde{y}_0\|_C=1,\quad \int\limits_0^1 \tilde{y}_0(s)\,ds=0,\quad \|\tilde{y}_0\|_C>0.$$

Отсюда следует, с одной стороны, что вектор-функция $\tilde{y}_0(t)$ не может быть постоянной и $\mu_0>0$, а с другой — если $\mu_0>0$, то в силу условия 4) вектор-функция $\tilde{y}_0(t)$ должна быть постоянной. Значит, случай $\mu_0<+\infty$ невозможен.

Таким образом, $(1-\lambda_k)r_k^{m-1}\to+\infty$ и $\|\tilde{x}_k-\tilde{x}_0\|_C\to 0$ при $k\to\infty$, где $\tilde{x}_0\in\mathbb{R}^n$,

$$((1-\lambda_k)r_k^{m-1})^{-1}\tilde{y}_k'(t)=Q(\tilde{x}_k(t),\tilde{y}_k(t)),\quad t\in(0,1),$$

$$\tilde{y}_k(0)=\tilde{y}_k(1),\quad \|\tilde{x}_k\|_C+\|\tilde{y}_k\|_C=1,\quad \int\limits_0^1\tilde{y}_k(s)\,ds=0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Если $\tilde{x}_0=0$, то, рассматривая вектор-функции $z_k(t)=\tilde{y}_k(t_k+((1-\lambda_k)r_k^{m-1})^{-1}t)$, $k\in\mathbb{N}$, где $\|\tilde{y}_k\|_C=|\tilde{y}_k(t_k)|$, и переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений $z'(t)=Q(0,z(t))$, что противоречит условию 4). А в случае $\tilde{x}_0\neq 0$, используя условия 4), 5) и рассуждая как при доказательстве теоремы 1, выводим, что при некотором номере j_0 имеет место предел $\tilde{y}_k(t)\to B_{j_0}(\tilde{x}_0)$ при $k\to\infty$.

Переходя к пределу в равенстве $\int_0^1\tilde{y}_k(s)\,ds=0$, получаем $B_{j_0}(\tilde{x}_0)=0$. Отсюда, в силу условия 5в), следует, что $\tilde{x}_0=0$, тем самым пришли к противоречию. Теорема доказана.

5. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим следующую систему уравнений на комплексной плоскости:

$$z''(t)=\overline{(z'(t)-B_1(z(t)))^{m_1}\ldots(z'(t)-B_q(z(t)))^{m_q}}+f(t,z(t),z'(t)),\quad z(t)\in\mathbb{C}. \tag{16}$$

Здесь $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость; черта сверху означает операцию комплексного сопряжения; $q>1$, m_1, …, m_q — натуральные числа; отображения $B_j:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$, $j=\overline{1,q}$, непрерывны, положительно однородны первого порядка. Предполагаем также, что $B_{j_1}(z)\neq B_{j_2}(z)$ при любых $z\neq 0$, $j_1\neq j_2$, и что при каждом $j=\overline{1,q}$ автономная система $z'(t)=B_j(z(t))$ не имеет ненулевых ограниченных траекторий. При таких предположениях выполнены условия 1)–8) теоремы 2, кроме условия 4). Главная нелинейная часть системы уравнений (16) определена отображением

$$Q(z_1,z_2)=\overline{(z_2-B_1(z_1))^{m_1}\ldots(z_2-B_q(z_1))^{m_q}},\quad z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

Для векторного поля $Q(\cdot,0)$: $\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ его вращение $\gamma(Q(\cdot,0))$ на единичной окружности $|z|=1$ вычисляется как

$$\gamma(Q(\cdot,0))=-\left(m_1\gamma(B_1)+\ldots+m_q\gamma(B_q)\right).$$

Выясним, при каких условиях автономная система

$$w'(t)=\overline{(w(t)-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(w(t)-B_q(z_0))^{m_q}},\quad w(t)\in\mathbb{C}, \tag{17}$$

при любом фиксированном $z_0\in\mathbb{C}$ не имеет нестационарных ограниченных траекторий. Для произвольного нестационарного решения $w(t)$ автономной системы (17) имеем

$$\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_0^{w(t)}(s-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(s-B_q(z_0))^{m_q}\,ds\biggr)=\bigl|(w(t)-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(w(t)-B_q(z_0))^{m_q}\bigr|^2>0.$$

Отсюда следует, что траектория нестационарного решения $w(t)$ незамкнута и вдоль неё постоянна функция

$$V_{m_1,\ldots,m_q}(z;B_1(z_0),\ldots,B_q(z_0)):=\operatorname{Im}\biggl(\int\limits_0^z(s-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(s-B_q(z_0))^{m_q}\,ds\biggr).$$

Если траектория нестационарного решения ограничена, то она при возрастании и убывании t приближается к двум разным стационарным точкам $B_{j_1}(z_0)$, $B_{j_2}(z_0)$, и в этих точках функция $V_{m_1,\ldots,m_q}$ принимает одинаковые значения. Следовательно, автономная система (17) при любом фиксированном $z_0\in\mathbb{C}$ не имеет нестационарных ограниченных траекторий, если выполнено условие

$$\operatorname{Im}\Bigg(\int\limits_{B_{j_1}(z_0)}^{B_{j_2}(z_0)}(s-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(s-B_q(z_0))^{m_q}\,ds\Bigg)\neq 0,\quad z_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad j_1\neq j_2.$$

Данное условие запишем в следующей форме:

$$\operatorname{Im}\Bigg(\big(B_{j_2}(z_0)-B_{j_1}(z_0)\big)^{m+1}\int\limits_0^1\prod_{j=1}^q\bigg(s-\frac{B_j(z_0)-B_{j_1}(z_0)}{B_{j_2}(z_0)-B_{j_1}(z_0)}\bigg)^{m_j}ds\Bigg)\neq 0,\quad z_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad j_1\neq j_2,\quad (18)$$

где $m=m_1+\ldots+m_q$.

Таким образом, если выполнено условие (18) и отлично от нуля число $m_1\gamma(B_1)+\ldots$ $\ldots+m_q\gamma(B_q)$, то согласно теореме 2 система уравнений (16) имеет хотя бы одно периодическое решение с периодом, равным единице.

Положим

$$B_j(z)=z+b_j|z|e^{i\pi/(2(m+1))},\quad j=\overline{1,q},\quad b_1=0<b_2<\ldots<b_q<1.$$

В этом случае при каждом $j=\overline{1,q}$ имеет место равенство $\gamma(B_j)=1$, автономная система $z'(t)=$ $=B_j(z(t))$ не имеет ненулевых ограниченных траекторий, а условие (18) будет следующим:

$$\int\limits_0^1\prod_{j=1}^q\bigg(s-\frac{b_j-b_{j_1}}{b_{j_2}-b_{j_1}}\bigg)^{m_j}ds\neq 0,\quad j_1\neq j_2.$$

Условие (18) при $q=2$ принимает вид $\operatorname{Im}(B_1(z_0)-B_2(z_0))^{m_1+m_2+1}\neq 0$ для любого $z_0\in$ $\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Если положим $m_1=m_2=1$, $B_1(z)=z$, $B_2(z)=z+i2|z|$, то $\gamma(B_1)=1$, $\gamma(B_2)=0$ и все условия 1)–9) теоремы 2 выполнены.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00032).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 511 с.
2. Наимов, А.Н. О разрешимости периодической задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка / А.Н. Наимов, М.М. Кобилзода // Изв. вузов. Математика. — 2021. — № 8. — С. 56–65.
3. Наимов, А.Н. О разрешимости одной нелинейной периодической задачи / А.Н. Наимов, Р.И. Хакимов // Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2003. — Т. 46, № 3–4. — С. 22–27.

4. Наимов, А.Н. Априорная оценка и существование периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости / А.Н. Наимов // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 7. — С. 998–1001.
5. Наимов, А.Н. Оценка производных периодических решений одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / А.Н. Наимов, Р.И. Хакимов // Вестн. Таджикского нац. ун-та. Сер. естеств. наук. — 2017. — № 1/5. — С. 12–16.
6. Клоков, Ю.А. Априорные оценки решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.А. Клоков // Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15, № 10. — С. 1766–1773.
7. Звягин, В.Г. Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений / В.Г. Звягин, С.В. Корнев // Совр. математика. Фунд. направления. — 2015. — Т. 58. — С. 59–81.
8. Перов, А.И. Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова / А.И. Перов, В.К. Каверина // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 269–272.

ON THE SOLVABILITY OF A PERIODIC PROBLEM FOR A SYSTEM OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

E. Mukhamadiev[1], A. N. Naimov[2]

Vologda State University, Russia
e-mail: [1]emuhamadiev@rambler.ru, [2]naimovan@vogu35.ru

In this paper is investigated the solvability of a periodic problem for a system of nonlinear ordinary differential equations second order with the main positively homogeneous part. New conditions have been found that provide an a priori estimate solutions of the periodic problem under consideration. The conditions for the a priori estimate are formulated in terms of the properties of the main positively homogeneous part of the system of equations. Under the conditions of an a priori estimate, using and developing methods for calculating the mapping degree, a theorem on the solvability of the periodic problem is proven. The proven theorem generalizes previously obtained the authors' results on the study of a periodic problem for systems of nonlinear ordinary differential equations of the second order.

Keywords: periodic problem, main positively homogeneous part, perturbation, apriori estimate, mapping degree, homotopy.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00032).

REFERENCES

1. Krasnoselsky, M.A. and Zabreiko, P.P., *Geometric Methods of Non-Linear Analysis*, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
2. Naimov, A.N. and Kobilzoda, M.M., On the solvability of a periodic problem for nonlinear ordinary differential equation of the second order, *Russ. Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 8, pp. 49–57.
3. Naimov, A.N. and Khakimov, R.I., On the solvability of a nonlinear periodic problem, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan*, 2003, vol. 46, no. 3–4, pp. 22–27.
4. Naimov, A.N., A priori estimate and existence of periodic solutions for a certain class of systems of nonlinear second order ordinary differential equations on the plane, *Differ. Equat.*, 2007, vol. 43, no. 7, pp. 1025–1030.
5. Naimov, A.N. and Khakimov, R.I. Estimation of derivatives of periodic solutions of one class of systems of nonlinear ordinary differential equations of second order, *Vestnik Tadzhikskogo natsional'nogo universiteta. Seriya yestestvennykh nauk*, 2017, no. 1/5, pp. 12–16.
6. Klokov, Yu.A., A priori estimates for solutions of ordinary differential equations, *Differ. uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1766–1773.
7. Zvyagin, V.G. and Kornev, S.V., Method of guiding functions for existence problems for periodic solutions of differential equations, *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 233, no. 4, pp. 578–601.
8. Perov, A.I. and Kaverina, V.K., On a problem posed by Vladimir Ivanovich Zubov, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 274–278.