

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ
ПОСРЕДСТВОМ ДИСКРЕТНОГО УПРАВЛЕНИЯ
В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОМЕХИ

© 2024 г. К. А. Щелчков

Рассматривается задача стабилизации в нуль в условиях воздействия помехи в терминах дифференциальной игры преследования. Динамика описывается нелинейной автономной системой дифференциальных уравнений. Множество значений управлений преследователя является конечным, убегающего (помехи) — компактом. Целью управления, т.е. целью преследователя, является приведение, в рамках конечного времени, траектории в любую наперёд заданную окрестность нуля вне зависимости от действий помехи. Для построения управления преследователю известны только фазовые координаты в некоторые дискретные моменты времени и неизвестен выбор управления помехи. В работе получены условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит поимка в указанном смысле. Выигрышное управление строится конструктивно и имеет дополнительное свойство, указанное в теореме. Кроме того, получена оценка времени поимки, которая является неуменшаемой в некотором смысле.

Ключевые слова: дифференциальная игра, нелинейные динамические системы, управление, помеха.

DOI: 10.31857/S0374064124010106, EDN: RRAGXQ

Введение. В трудах Р. Айзекса [1] первоначально рассматривались дифференциальные игры преследования–уклонения и были заложены основы теории. В настоящее время дифференциальные игры представляют собой содержательную теорию и имеют широкое поле для исследований [2–7]. Были разработаны методы решения различных классов игровых задач: метод Айзекса, основанный на анализе определённого уравнения в частных производных и его характеристик; метод экстремального прицеливания Красовского; метод Понтрягина и другие. Н.Н. Красовским и представителями его научной школы создана теория позиционных игр, в основе которой лежит понятие максимального стабильного моста и правило экстремального прицеливания. Однако эффективное построение таких мостов для исследования реальных конфликтно-управляемых процессов, в первую очередь нелинейных дифференциальных игр, весьма затруднительно или даже невозможно. Удобнее строить мосты, которые не являются максимальными, но обладают свойством стабильности и дают эффективно реализуемые процедуры управления для отдельных классов игр, обладающих дополнительными свойствами. Построение приближений стабильных мостов в нелинейных дифференциальных играх, в том числе численно, рассматривается, в частности, в статьях [8, 9].

Достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейном примере Л.С. Понтрягина получены в [10]. В работе [11] представлены достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейной дифференциальной игре при некоторых дополнительных условиях на множество значений правой части системы дифференциальных уравнений. В статье [12] получены достаточные условия поимки в нелинейной игре, описываемой стационарной нелинейной системой, исследована оптимальность времени поимки для некоторого случая на плоскости. Результаты в ней сравнимы с представленными в настоящей работе. Условия поимки в [12] оказываются значительно сильнее условий, полученных нами, и при этом в [12] преследователь использует контрстратегию. В работе [13] рассматривается нелинейная задача управления с помехой с использованием формализации дифференциальной игры. Получены достаточные условия существования выигрышной стратегии. Статья [14] посвящена нелинейной дифференциальной игре двух лиц с интегральным критерием качества. Игроки используют кусочно-программные управления специального вида, причём временной

интервал делится на две части. Получены необходимые и достаточные условия существования седловой точки для рассматриваемой игры. В работе [15] исследуется дифференциальная игра преследования на плоскости, динамика которой описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений определённого вида. Целевым множеством является начало координат. Получены условия осуществления поимки посредством позиционной контрстратегии и характеристики игры в явном виде, приведены примеры.

В [16] было введено понятие положительного базиса, которое в работах [16–18] эффективно использовалось для исследования свойства управляемости нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями в конечномерном евклидовом пространстве. Получены условия управляемости в нуль нелинейной автономной системы посредством дискретного управления с конечным множеством значений управлений.

В работах [19] и [20] рассматривалась задача поимки в нелинейной дифференциальной игре, аналогичной дифференциальной игре представленной статьи. Там были получены достаточные условия на параметры игры для существования окрестности нуля, из которой происходит поимка. Ключевым среди этих условий было то, что некоторый набор векторов образует положительный базис. В [21] получены дополнительные свойства выигрышной стратегии для задачи из этой работы.

Представленная статья является продолжением исследований [19–21] с существенно более общей динамикой. Рассматривается задача стабилизации в нуль в условиях воздействия помехи в терминах дифференциальной игры преследования. Целью управления является приведение в рамках конечного времени траектории в любую наперёд заданную окрестность нуля вне зависимости от действий помехи. Получены условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит поимка. Кроме того, получена оценка времени поимки, которая является неуменьшаемой.

1. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц: преследователя P и убегающего E . Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия; $U = \{u_1, \dots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^i$, $i = \overline{1, m}$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f: \mathbb{R}^k \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$ для каждого $u \in U$ непрерывна по совокупности переменных x , v и удовлетворяет по x условию Липшица с постоянной, не зависящей от v , т.е. существует положительное число L такое, что выполняется неравенство

$$\|f(x_1, u_i, v) - f(x_2, u_i, v)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad v \in V, \quad i = \overline{1, m}.$$

Здесь и всюду далее норма считается евклидовой.

Под разбиением σ промежутка $[0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^\eta$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_\eta = T$.

Определение 1. *Кусочно-постоянной стратегией W преследователя P на промежутке $[0, T]$ называется пара (σ, W_σ) , где σ — разбиение промежутка $[0, T]$, а W_σ — семейство отображений d_r , $r = 0, 1, \dots, \eta - 1$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $\bar{u}_r(t) \equiv \bar{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.*

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию $v: [0, \infty) \rightarrow V$. Для построения управления убегающему E в начальный момент времени известно начальное положение x_0 и выбранная стратегия W преследователя P . Кроме того, игрокам известна динамика системы, т.е. функция f и множества U , V .

Определение 2. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит ε -поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P на промежутке $[0, T]$ такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| < \hat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0, T]$.

Целью преследователя является осуществление ε -поимки, цель убегающего — воспрепятствовать этому.

Отметим, что для любых $u \in U$, измеримой функции $v : [0, \infty) \rightarrow V$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^k$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|f(x, u, v(t))\| &= \|f(x, u, v(t)) - f(0, u, v(t)) + f(0, u, v(t))\| \leq \\ &\leq L\|x\| + \|f(0, u, v(t))\| \leq L\|x\| + B \end{aligned}$$

для некоторого положительного B . Такое B существует в силу непрерывности функции f по v , компактности V и конечности U .

Следовательно, для любого $T > 0$ и любого разбиения σ промежутка $[0, T]$ на каждом интервале разбиения выполняются условия Каратеодори существования, единственности и продолжимости вправо решения задачи Коши. Таким образом, постановка задачи корректна.

Введём следующие обозначения: $\text{Int } A$ — внутренность множества A ; $\text{co } A$ — выпуклая оболочка множества A ; $D_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x ; $O_\varepsilon(x)$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x ; $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение векторов a, b ; I — единичная матрица.

2. Теорема об ε -поймке.

Теорема 1. Пусть

$$\min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(0, u, v), p \rangle > 0.$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε -поймка. Кроме того, преследователю для построения стратегии достаточно использовать разбиение временного интервала с фиксированным шагом.

Доказательство. 1^0 . Ниже будут получены величина ε_0 из условия теоремы, ряд параметров, которые будут применяться для построения стратегии преследователя, и величина шага разбиения временного интервала.

В силу непрерывности функции f в указанном смысле существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $x \in D_{\varepsilon_0}(0)$ справедливо неравенство

$$\min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(x, u, v), p \rangle > 0.$$

Следовательно,

$$\bar{\alpha} = \min_{x \in D_{\varepsilon_0}(0)} \min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(x, u, v), p \rangle > 0. \quad (1)$$

Далее считаем, что $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $x_0 \neq 0$.

Положим

$$D = \max_{x \in D_{\varepsilon_0}(0), u \in U, v \in V} \|f(x, u, v)\|.$$

Определим число h вида

$$h = \frac{\bar{\alpha}}{2L}.$$

Пусть $\bar{x} \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, $x \in D_h(\bar{x})$, $v \in V$ и

$$\max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(\bar{x}, u, v), p \rangle = \langle f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}), p \rangle.$$

Отметим, что в силу (1) для любого $v \in V$ имеет место условие

$$\langle f(\bar{x}, \bar{u}, v), p \rangle \geq \bar{\alpha}.$$

Получаем оценку

$$\langle f(x, \bar{u}, v), p \rangle = \langle f(\bar{x}, \bar{u}, v) - (f(\bar{x}, \bar{u}, v) - f(x, \bar{u}, v)), p \rangle \geq \bar{\alpha} - L\|x - \bar{x}\| \geq \bar{\alpha} - Lh.$$

Отсюда следует, что для любых $\bar{x} \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, $x \in D_h(\bar{x})$ и $v \in V$ справедливо неравенство

$$\langle f(x, \bar{u}, v), p \rangle \geq \frac{\bar{\alpha}}{2} = \alpha.$$

Зафиксируем $0 < \delta < \varepsilon_0$. Выберем шаг разбиения

$$\Delta = \min \left\{ \frac{\alpha \delta}{D^2 N}, \frac{h}{D} \right\},$$

где $N \geq 1$ — произвольное число. Отметим, что если $x(t) \in D_{\varepsilon_0}(0)$ для всех $t \in [0, \Delta]$, то $\|x(t) - x_0\| \leq h$, $t \in [0, \Delta]$.

2⁰. Проведём оценку приближения к нулю функции $x(\cdot)$ за один шаг разбиения.

Рассмотрим полуинтервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in \{0, \dots, \eta - 1\}$. Отметим, что $\tau_i = i\Delta$ для всех i . Также предполагаем, что $x(\tau_i) \in D_{\varepsilon_0}(0)$. Значение управления преследователя будем выбирать следующим образом. Если $x(\tau_i) = 0$, то $\bar{u}_0 \in U$ — произвольное. В таком случае справедливо неравенство $\|x(t)\| \leq (t - \tau_i)D \leq \Delta D \leq \alpha \delta / D < \delta$ для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Если $x(\tau_i) \neq 0$, то обозначим $p = -x(\tau_i)/\|x(\tau_i)\|$ и $\bar{u}_i \in U$ выбираем из следующего максимума:

$$\max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(x(\tau_i), u, v), p \rangle = \langle f(x(\tau_i), \bar{u}_i, \bar{v}), p \rangle.$$

Таким образом, в силу п. 1⁰ для любых $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ и $v \in V$ справедливо следующее неравенство:

$$\langle f(x(t), \bar{u}_i, v), p \rangle \geq \alpha.$$

Пусть $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Оценим квадрат нормы $x(t)$:

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &= \left\| x(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t f(x(s), \bar{u}_i, v(s)) ds \right\|^2 = \\ &= \|x(\tau_i)\|^2 + \left\| \int_{\tau_i}^t f(x(s), \bar{u}_i, v(s)) ds \right\|^2 + 2 \int_{\tau_i}^t \langle f(x(s), \bar{u}_i, v(s)), x(\tau_i) \rangle ds \leq \\ &\leq \|x(\tau_i)\|^2 + D^2(t - \tau_i)^2 - 2(t - \tau_i)\alpha\|x(\tau_i)\|. \end{aligned}$$

Оценим последний трёхчлен $A = \|x(\tau_i)\|^2 + D^2(t - \tau_i)^2 - 2(t - \tau_i)\alpha\|x(\tau_i)\|$.

Если $\|x(\tau_i)\| \leq \delta$, то трёхчлен A достигает своего максимума при $\|x(\tau_i)\| = 0$ или при $\|x(\tau_i)\| = \delta$. Отметим, что в силу п. 1⁰ $D > \alpha$. Тогда, если $\|x(\tau_i)\| = 0$, из условия $\Delta \leq \alpha \delta / D^2 N$ следует

$$A = D^2(t - \tau_i)^2 \leq D^2 \Delta^2 \leq \frac{\alpha^2 \delta^2}{D^2 N^2} < \delta^2.$$

Если $\|x(\tau_i)\| = \delta$, то

$$\begin{aligned} A &= \delta^2 + D^2(t - \tau_i)^2 - 2(t - \tau_i)\alpha\delta \leq \delta^2 + D^2(t - \tau_i)\Delta - 2(t - \tau_i)\alpha\delta \leq \\ &\leq \delta^2 + \frac{D^2(t - \tau_i)\alpha\delta}{D^2 N} - 2(t - \tau_i)\alpha\delta \leq \delta^2 - (t - \tau_i)\alpha\delta < \delta^2. \end{aligned}$$

Если $\|x(\tau_i)\| > \delta$ и $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, то

$$A \leq \|x(\tau_i)\|^2 + \frac{D^2(t - \tau_i)\alpha\delta}{D^2 N} - 2(t - \tau_i)\alpha\|x(\tau_i)\| \leq \|x(\tau_i)\|^2 - (t - \tau_i)\alpha\|x(\tau_i)\| < \|x(\tau_i)\|^2.$$

Если $\|x(\tau_i)\| > \delta$ и $t = \tau_{i+1}$, то

$$\begin{aligned} A &\leq \|x(\tau_i)\|^2 + \frac{D^2 \Delta \alpha \delta}{D^2 N} - 2\Delta \alpha \|x(\tau_i)\| = \|x(\tau_i)\|^2 - \|x(\tau_i)\| \left(2\Delta \alpha - \frac{\Delta \alpha}{N} \right) - \frac{\Delta \alpha \|x(\tau_i)\|}{N} + \frac{\Delta \alpha \delta}{N} < \\ &< \|x(\tau_i)\|^2 - \left(2\Delta \alpha - \frac{\Delta \alpha}{N} \right) \|x(\tau_i)\| < \left(\|x(\tau_i)\| - \Delta \alpha \left(1 - \frac{1}{2N} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\|x(\tau_i)\| > \delta$, то $\|x(t)\| < \|x(\tau_i)\|$ для всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ и

$$\|x(\tau_{i+1})\| < \|x(\tau_i)\| - \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right).$$

Если $\|x(\tau_i)\| \leq \delta$, то $\|x(t)\| < \delta$ для всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Так как $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$, то в силу полученных в данном пункте оценок предполагаемое включение $x(\tau_i) \in D_{\varepsilon_0}(0)$ выполняется для всех $i = 0, \dots, \eta$.

3⁰. Далее построим стратегию для приведения фазовой траектории в $D_\delta(0)$ и оценим время.

На каждом интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, \eta-1}$, будем выбирать управление преследователя в соответствии с п. 2⁰. Выберем такое натуральное η , что имеют место соотношения

$$\Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \eta < \|x_0\| \leq \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) (\eta + 1),$$

т.е.

$$\eta = \left\lfloor \frac{\|x_0\|}{\Delta\alpha(1 - 1/(2N))} \right\rfloor.$$

В силу оценок п. 2⁰ если $\|x(\tau_i)\| \leq \delta$ для некоторого i , то $\|x(\tau_j)\| < \delta$ для всех $j = \overline{i+1, \eta}$. Предположим, что $\|x(\tau_\eta)\| \geq \delta$. Тогда $\|x(\tau_i)\| > \delta$ для всех $i = \overline{0, \eta-1}$. Следовательно, в силу оценок п. 2⁰ и определения η справедливы неравенства

$$\|x(\tau_\eta)\| \leq \|x(\tau_{\eta-1})\| - \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \leq \dots \leq \|x_0\| - \eta\Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \leq \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) < \delta,$$

т.е. получаем противоречие. Таким образом, справедливо неравенство $\|x(\tau_\eta)\| < \delta$.

Оценим τ_η :

$$\tau_\eta = \eta\Delta \leq \frac{\|x_0\|\Delta}{\Delta\alpha(1 - 1/(2N))} = \frac{\|x_0\|}{\alpha(1 - 1/(2N))} = \hat{T}.$$

Полученное $\hat{T}$ не зависит от δ , следовательно для любого $N \geq 1$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε -поимка за время $\hat{T}$.

Покажем, что в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε -поимка за время

$$T = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{T} = \frac{\|x_0\|}{\alpha}.$$

Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем такое N , что $\hat{T} \leq \|x_0\|/\alpha + \delta/(2D)$. За время $\hat{T}$ происходит ε -поимка, т.е. существует кусочно-постоянная стратегия преследователя, для которой $\|x(\hat{T})\| < \delta/2$. Следовательно, так как скорость ограничена величиной D , $\|x(\hat{T} - \delta/(2D))\| < \delta$. Таким образом, по определению ε -поимка происходит за время T . Теорема доказана.

Замечание 1. Так как полученная в доказательстве теоремы 1 выигрышная стратегия преследователя гарантирует движение внутри $D_{\|x_0\|}(0)$, т.е. $x(t) \in D_{\|x_0\|}(0)$, $t \in [0, T]$, то достаточно, чтобы функция f была локально липшицевой.

Замечание 2. В силу п. 2⁰ доказательства теоремы 1 при достижении целевой окрестности нуля радиуса δ преследователь может обеспечить сколь угодно долгое дальнейшее нахождение траектории системы внутри этой окрестности вне зависимости от действий помехи.

Пример 1. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$. Пусть

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + C(x)v,$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \end{pmatrix} \right\}, \quad V = D_r(0),$$

где $\beta, r > 0$, $B(0) = C(0) = I$. Здесь $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые по x квадратные матрицы, определённые на всём пространстве $\mathbb{R}^2$. Таким образом, правая часть дифференциального уравнения для каждого фиксированного u является локально липшицевой по совокупности переменных x , v .

Найдём минимум из условия теоремы 1. Он имеет следующий вид:

$$\min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle u + v, p \rangle = \gamma.$$

Нетрудно проверить из геометрических соображений, что $\gamma = \beta/\sqrt{2} - r$. Следовательно, условие теоремы выполнено при $\beta > r\sqrt{2}$.

Пример 2. Рассмотрим динамику в $\mathbb{R}^2$ следующего вида:

$$\dot{x} = A(x, v)u, \\ U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = [-\beta, \beta],$$

где $0 < \beta < \pi/4$. Здесь $A(\cdot, \cdot)$ — квадратная матрица, определённая на всём пространстве $\mathbb{R}^2 \times V$, элементы которой являются липшицевыми функциями по совокупности аргументов x , v . Кроме того, $A(0, v)$ является матрицей поворота на угол v .

Найдём минимум из условия теоремы 1:

$$\min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle A(0, v)u, p \rangle = \gamma.$$

Из геометрических соображений нетрудно проверить, что $\gamma = \cos(\pi/4 + \beta)$.

Отметим, что в примере 1 для каждого $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, справедливо равенство

$$\max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(0, u, v), p \rangle = \min_{v \in V} \max_{u \in U} \langle f(0, u, v), p \rangle.$$

Однако в данном примере это свойство не выполнено, т.е.

$$\min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \min_{v \in V} \max_{u \in U} \langle A(0, v)u, p \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \gamma.$$

3. Оценка времени ε -поимки. Справедливо

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$. Тогда ε -поимка происходит за время $T(x_0) = \|x_0\|/\alpha(\|x_0\|)$, где

$$\alpha(r) = \min_{x \in D_r(0)} \min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(x, u, v), p \rangle.$$

Доказательство. Так как полученная в доказательстве теоремы 1 выигрышная стратегия преследователя гарантирует движение внутри $D_{\|x_0\|}(0)$, то достаточно использовать

$$\bar{\alpha} = \min_{x \in D_{\|x_0\|}(0)} \min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(x, u, v), p \rangle.$$

Пусть $\mu \in (0, 1)$. Положим

$$h(\mu) = \frac{\mu \bar{\alpha}}{L}.$$

Далее, как в п. 1⁰ доказательства теоремы 1, будем использовать $h(\mu)$ вместо h . Отсюда получаем, что

$$\alpha = \bar{\alpha}(1 - \mu),$$

$$\Delta = \Delta(\mu) = \min \left\{ \frac{\alpha \delta}{D^2 N}, \frac{h(\mu)}{D} \right\} = \min \left\{ \frac{\bar{\alpha}(1 - \mu) \delta}{D^2 N}, \frac{h(\mu)}{D} \right\},$$

где $N \geq 1$ — произвольное число. Аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что ε -поимка происходит за время

$$T = T(\mu) = \frac{\|x_0\|}{\alpha} = \frac{\|x_0\|}{\bar{\alpha}(1-\mu)}.$$

Так как ε -поимка происходит для любого $\mu \in (0, 1)$, то ε -поимка происходит за любое время $\hat{T} > \|x_0\|/\bar{\alpha}$. Покажем, что ε -поимка происходит за время $\|x_0\|/\bar{\alpha}$. Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем $\hat{T} = \|x_0\|/\bar{\alpha} + \delta/(2D)$. За время $\hat{T}$ происходит ε -поимка, т.е. существует кусочно-постоянная стратегия преследователя, для которой $\|x(\hat{T})\| < \delta/2$. Следовательно, так как скорость ограничена величиной D , $\|x(\hat{T} - \delta/(2D))\| < \delta$. Таким образом, по определению ε -поимка происходит за время $\|x_0\|/\bar{\alpha}$. При этом по определению $\bar{\alpha} = \alpha(r)$.

Следствие доказано.

Пример 3. Покажем, что существуют системы и начальные положения, для которых ε -поимка не происходит за любое время $T < \|x_0\|/\alpha(\|x_0\|)$.

Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$. Пусть

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + v_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 + v_2, \end{cases} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = [-1, 1] \times [-1, 1], \quad v(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Отметим, что здесь, в силу доказательства теоремы 1, ε -поимка будет происходить из любого начального положения $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Для данного примера

$$\alpha(\|x_0\|) = 0.5, \quad T(x_0) = 2.$$

Оценим $x_2(t)$:

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (u_2(s) + 1) ds \geq 1 + \int_0^t (-1.5 + 1) ds = 1 - 0.5t.$$

Отсюда если $T \in [0, 2)$, то $x(T) \notin O_{1-0.5T}(0)$. Следовательно, ε -поимка не происходит за любое время $T < 2 = T(x_0)$.

4. Сравнение с предыдущими результатами. В работах [19] и [21] рассмотрена задача, аналогичная задаче настоящей статьи, с менее общей динамикой вида

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0.$$

Здесь множества U, V определяются аналогично множествам U, V из п. 1 с постановкой задачи. Функция $f: \mathbb{R}^k \times U \rightarrow \mathbb{R}^k$ для каждого $u \in U$ липшицева по x . Функция $g: \mathbb{R}^k \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$ липшицева по совокупности переменных, т.е. существуют положительные числа L_1, L_2 такие, что

$$\|f(x_1, u_i) - f(x_2, u_i)\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\|g(x_1, v_1) - g(x_2, v_2)\| \leq L_2 (\|x_1 - x_2\| + \|v_1 - v_2\|), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad v_1, v_2 \in V.$$

В работе [19] доказана теорема об ε -поимке, для формулировки которой необходимо ввести дополнительное определение.

Определение 3 [16]. Совокупность векторов $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом*, если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$.

Теорема 2 [19]. Пусть $f(0, u_1), \dots, f(0, u_m)$ образуют положительный базис и $-g(0, V) \subset \text{Int}(\text{co}\{f(0, u_1), \dots, f(0, u_m)\})$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε -поймка.

Отметим, что с учётом доказательства теоремы 2 в формулировке теоремы можно указывать $D_{\varepsilon_0}(0)$ вместо $O_{\varepsilon_0}(0)$.

Далее используем следующее свойство положительного базиса: векторы $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ образуют положительный базис тогда и только тогда, когда для любого вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, найдётся индекс $j \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $\langle a_j, p \rangle > 0$.

В силу условия теоремы 2 и свойств положительного базиса (см. [16]) для каждого $v \in V$ векторы $f(0, u_1) + g(0, v), \dots, f(0, u_m) + g(0, v)$ образуют положительный базис. Следовательно, для любых $v \in V$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, найдётся индекс $j \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $\langle f(0, u_j) + g(0, v), p \rangle > 0$. Таким образом, в силу липшицевости функций f и g справедливо следующее неравенство:

$$\min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(0, u) + g(0, v), p \rangle > 0,$$

т.е. выполняется условие теоремы 1.

С другой стороны, если справедливо последнее неравенство, т.е. выполняется условие теоремы 1, то для любых $v \in V$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, найдётся индекс $j \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $\langle f(0, u_j) + g(0, v), p \rangle > 0$. Отсюда, в силу свойств положительного базиса (см. [16]), найдётся такой вектор $\xi \in \mathbb{R}^k$, что функции $\hat{f}(x, u) = f(x, u) - \xi$ и $\hat{g}(x, v) = g(x, v) + \xi$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Таким образом, теоремы 1 и 2 являются эквивалентными для динамики, являющейся допустимой для обеих теорем.

В работе [21] получена оценка времени ε -поймки, которая является неуменьшаемой в том же смысле, что и в примере 1. Оценка, полученная в работе [21], имеет вид $\|x_0\|/\alpha(\|x_0\|)$, где

$$\alpha(r) = \min_{x \in D_r(0)} \min_{\|p\|=1} \min_{v \in V} \max_{i=1, \dots, m} \langle f(x, u_i) + g(x, v), p \rangle.$$

Так как

$$\min_{v \in V} \max_{i=1, \dots, m} \langle f(x, u_i) + g(x, v), p \rangle = \max_{i=1, \dots, m} \min_{v \in V} \langle f(x, u_i) + g(x, v), p \rangle,$$

то получаем, что данное $\alpha(\cdot)$ эквивалентно $\alpha(\cdot)$ из следствия 1 для динамики $\dot{x} = f(x, u) + g(x, v)$.

Заключение. Рассмотрена задача приведения системы в любую наперёд заданную окрестность нуля в условиях воздействия помехи в терминах дифференциальной игры преследования, в которой динамика описывается нелинейной автономной системой дифференциальных уравнений. Управление происходит на конечном интервале, в рамках которого преследователю требуется обеспечить возможность приведения системы в любую наперёд заданную окрестность нуля вне зависимости от действий помехи. Для построения управления преследователю известны только фазовые координаты в некоторые дискретные моменты времени и неизвестен выбор управления помехи. Получены условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит поймка в указанном смысле. Выигрышное управление строится конструктивно и может быть построено с фиксированным шагом разбиения временного интервала. Кроме того, получена оценка времени поймки, которая является неуменьшаемой в следующем смысле: существуют системы, удовлетворяющие постановке задачи, и ненулевые начальные положения, для которых поймка в указанном смысле не происходит за любое время, меньшее оценки. Дополнительно проведено сравнение с предыдущими результатами с менее общей динамикой, которое показывает идентичность результатов при одинаковой динамике.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-01032).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isaacs R.* Differential Games. New York, 1965.
2. *Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G.* Quantitative and Qualitative Differential Games. New York, 1969.
3. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., 1970.
4. *Friedman A.* Differential Games. New York, 1971.
5. *Hajek O.* Pursuit Games. New York, 1975.
6. *Leitmann G.* Cooperative and Noncooperative Many-Player Differential Games. Vienna, 1974.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
8. *Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е.* Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 2. С. 224–255.
9. *Ушаков В.Н., Ершов А.А.* К решению задачи управления с фиксированным моментом окончания // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564.
10. *Никольский М.С.* Одна нелинейная задача преследования // Кибернетика. 1973. № 2. С. 92–94.
11. *Пшеничный Б.Н., Шишкина Н.Б.* Достаточные условия конечности времени преследования // Прикл. матем. и механика. 1985. Т. 49. № 4. С. 517–523.
12. *Сатимов Н.* К задаче преследования в нелинейных дифференциальных играх // Кибернетика. 1973. № 3. С. 88–93.
13. *Soravia Pierpaolo.* H_∞ control of nonlinear systems: differential games and viscosity solutions // SIAM J. Contr. and Optimiz. 1996. V. 34. № 3. P. 1071–1097.
14. *Natarajan T., Pierre D.A., Naadimuthu E.S., Lee E.S.* Piecewise suboptimal control laws for differential games // J. of Math. Analysis and Appl. 1984. V. 104. № 1. P. 189–211.
15. *Азамов А.А.* Об одном классе нелинейных дифференциальных игр // Мат. заметки. 1981. Т. 30. № 4. С. 619–625.
16. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
17. *Петров Н.Н.* Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.
18. *Петров Н.Н.* Плоские задачи теории управляемости // Вестн. ЛГУ. 1969. № 13. С. 69–78.
19. *Щелчков К.А.* Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 111–118.
20. *Shchelchikov K.* ε -capture in nonlinear differential games described by system of order two // Dyn. Games Appl. 2022. V. 12. № 2. P. 662–676.
21. *Щелчков К.А.* Оценка времени поимки и построение стратегии преследователя в нелинейной дифференциальной игре двух лиц // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. P. 260–269.

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию 18.08.2023 г.
После доработки 04.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.