ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 76–89

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

РЕШЕНИЯ АНАЛОГОВ ВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПАРЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ H^{2+2+1} ИЕРАРХИИ ВЫРОЖДЕНИЙ ИЗОМОНОДРОМНОЙ СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ

© 2024 г. В. А. Павленко

Настоящая статья продолжает серию работ, в которых построены 2×2-матричные совместные решения двух скалярных эволюционных уравнений, являющиеся аналогами временны́х уравнений Шрёдингера. В построениях данной статьи эти уравнения соответствуют гамильтоновой системе H^{2+2+1} — одной из представительниц иерархии вырождений изомонодромной системы Гарнье. Упомянутую иерархию описал Х. Кимура в 1986 году. В терминах решений линейных систем дифференциальных уравнений метода изомонодромных деформаций, условием совместности которых являются гамильтоновы уравнения системы H^{2+2+1}, конструируемые совместные матричные решения аналогов временны́х уравнений Шрёдингера в настоящей работе выписаны явно.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, уравнение Шрёдингера, уравнение Пенлеве, гамильтонова система, матричное решение.

DOI: 10.31857/S0374064124010078, EDN: RQWAAP

Введение. В работах [1, 2] Б.И. Сулейманов построил решения линейных эволюционных уравнений вида
$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\left(t,x,-\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi, \tag{1}$$
линейные дифференциальные операторы $H(t,x,-\partial/\partial x)$ в которых соответствуют квадратичным по импульсам p гамильтонианам $H=H(t,q,p)$ гамильтоновых систем
$$q'_t=H'_p(t,q,p),\qquad p'_t=-H'_q(t,q,p). \tag{2}$$

Замечание 1. Системы (2) таковы, что если в них исключить p, то получится одно из шести обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Пенлеве. Классическим гамильтоновым системам ОДУ с n степенями свободы
$$(\lambda_i)'_\tau=H'_{\mu_i},\quad (\mu_i)'_\tau=-H'_{\lambda_i},\quad i=\overline{1,n},$$
определяемых гамильтонианами $H(\tau,\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\ldots,\mu_n)$, в волновой квантовой механике (см. [3, гл. 2, § 15, формула (29)]) сопоставляется временно́е уравнение Шрёдингера
$$\varepsilon\Psi_\tau=H\left(\tau,\zeta_1,\ldots,\zeta_n,-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\zeta_1},\ldots,-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\zeta_n}\right)\Psi,$$
где посредством параметра $\varepsilon=i\hbar$ учитывается его зависимость от постоянной Планка $h=2\pi\hbar$. Уравнения (1) получаются из соответствующих временны́х уравнений Шрёдингера в результате формальной подстановки $\hbar=-i$.

В терминах решений линейных систем методы изомонодромных деформаций (ИДМ), которые выписаны в статье [4], решения уравнений (1) в работах [1, 2] представлены явно. При этом условием совместности упомянутых линейных систем являются шесть соответствующих классических ОДУ Пенлеве.

Известно, что все эти ОДУ могут быть получены из шестого уравнения при помощи процедур последовательного вырождения. Другими словами, уравнения Пенлеве представляют собой иерархию, которую можно изобразить в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & & H^4 \arrow[dr] & & \\ H^6 \arrow[r] & H^5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & H^2 \arrow[r] & H^1. \\ & & H^3 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Здесь имеются в виду упомянутые выше гамильтоновы системы H_j $(j=\overline{1,6})$ вида (2) для соответствующих уравнений Пенлеве. Каждая стрелка соответствует процедуре вырождения одной из этих «вышестоящих» гамильтоновых систем к «нижестоящей».

Позже специфика связи решений уравнений ИДМ для уравнений Пенлеве с эволюционными уравнениями отмечалась и использовалась, в частности, в работах [5–15].

Помимо шести классических ОДУ Пенлеве в настоящий момент многие исследователи интересуются и другими нелинейными дифференциальными уравнениями более высокого порядка, которые также интегрируются ИДМ. На сегодня, в частности, известен (см. [16–20]) конечный список совместных пар гамильтоновых систем

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{q_j}, \quad k, j = 1, 2, \tag{3}$$

с гамильтонианами $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, каждая из которых является условием совместности трёх линейных систем дифференциальных уравнений вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k} V, \tag{4}$$

$$V'_{\eta} = AV, \tag{5}$$

где квадратные матрицы L_{s_k} и A (матрица A одна и та же для обеих гамильтоновых систем (3)) одинаковой размерности рациональны по переменной η. Соответствующие решения дифференциальных уравнений, являющихся условием совместности таких пар, называются *изомонодромными.* К их числу относятся решения иерархии гамильтоновых вырождений системы Гарнье, выписанной в известной статье Х. Кимуры [16] (позднее Х. Кавамуко (см. [20]) дополнил этот список).

В работах [16, 17] гамильтоновы системы иерархии Кимуры представлены в виде следующей диаграммы вырождений:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & H^{2+2+1} \arrow[r] \arrow[drr] & H^{3+2} \arrow[dr] & & \\ H^{1+1+1+1+1} \arrow[r] & H^{2+1+1+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & H^5 \arrow[r] & H^{9/2}\,. \\ & & H^{3+1+1} \arrow[r] \arrow[ur] & H^{4+1} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Замечание 2. Поясним верхний индекс гамильтоновых систем иерархии Кимуры. Обозначение $H^{r_1+r_2+\ldots+r_m}$ показывает, что в соответствующем линейном уравнении (5) имеется m особых точек с рангами Пуанкаре r_1-1, r_2-1, $\ldots$, r_m-1 соответственно.

Замечание 3. Как сами уравнения Пенлеве, так и их высшие аналоги могут быть представлены через гамильтоновы системы с разными гамильтонианами (см. монографию [21, гл. 2, раздел 2.8], а также работу [22]).

Известно, что для всех представителей иерархии Кимуры справедливы две эквивалентные формы: форма совместных пар гамильтоновых систем (3), определяемых квадратичными по импульсам p_1, p_2 и рациональными по координатам q_1, q_2 различными парами гамильтонианов $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, а также форма совместных пар гамильтоновых систем (3), определяемых квадратичными по импульсам p_1, p_2 и полиномиальными по координатам q_1, q_2 различными парами гамильтонианов $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$. Для почти всех из этих гамильтоновых систем с двумя степенями свободы уже построены 2×2-матричные совместные решения пар аналогов уравнений Шрёдингера

$$\varepsilon \Psi_{s_k} = H_{s_k}\left(s_1, s_2, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}, x, y\right)\Psi, \quad k = 1, 2, \tag{6}$$

с $\varepsilon = 1$, соответствующие парам гамильтонианов $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ $(k = 1, 2)$ этих изомонодромных систем. (При этом их построение осуществляется совершенно явно в терминах решений соответствующих изомонодромных систем.) Для эволюционных уравнений (6), определяемых низшими представителями $H^{9/2}$ и H^5 вырождений системы Гарнье, это сделано в статье [23]. Для самой системы Гарнье — первого представителя $H^{1+1+1+1+1}$ данной иерархии — соответствующие решения представлены в работе [24]. Для вырождений $H^{2+1+1+1}$ и H^{4+1} подобного рода решения выписаны в работах [25, 26]. Для ещё одного вырождения, а именно для H^{3+2}, соответствующие решения эволюционных уравнений представлены в [27].

В настоящей статье будут сконструированы $2{\times}2$-матричные решения аналогов временны́х уравнений Шрёдингера с $\varepsilon = 1$, которые соответствуют гамильтоновой системе H^{2+2+1}. Эти решения будут представлены в двух формах: в рациональной и в полиномиальной. Другими словами, мы построим решения уравнений вида

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau_j} = H^{2+2+1}_{\tau_j}\left(\tau_1, \tau_2, x, y, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

В (7) дифференциальные операторы $H^{2+2+1}_{\tau_j}(\tau_1, \tau_2, x, y, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y)$ соответствуют гамильтонианам с рациональными координатами. Затем будут выписаны решения уравнений вида

$$\Psi_{s_k} = H^{2+2+1}_{s_k}\left(s_1, s_2, -\frac{\partial}{\partial r}, -\frac{\partial}{\partial\rho}, r, \rho\right)\Phi, \quad k = 1, 2, \tag{8}$$

где дифференциальные операторы $H^{2+2+1}_{s_k}(s_1, s_2, -\partial/\partial r, -\partial/\partial\rho, r, \rho)$ соответствуют гамильтонианам с полиномиальными координатами. Соответствующие решения (7), (8) явным образом будут выражены через совместные решения матричных линейных пар ИДМ (4), (5) из статьи [17], условием совместности которых являются гамильтоновы дифференциальные уравнения (3), соответствующие гамильтонианам системы H^{2+2+1}.

Отметим, что решения уравнений типа временны́х уравнений Шрёдингера, которые конструируются в данной статье, и те, которые были построены в ряде из упомянутых выше работ, представляют собой своеобразные специальные функции нового типа: несмотря на то, что они не могут быть выписаны в терминах интегралов типа Фурье–Лапласа, задача описания связи их поведения при

$$|s_1| + |s_2| + |x| + |y| \to \infty$$

в различных направлениях решается вполне эффективно даже для комплексных s_1, s_2, x, y. Более подробное описание этого можно найти в [28, разд. 2.3].

1. Различные формы системы H^{2+2+1} и уравнения ИДМ для этой системы. В статье [16] гамильтонова система H^{2+2+1} выписана в двух формах. В первой форме соответствующие гамильтонианы рациональны по координатам. Упомянутая система в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial\lambda_k}{\partial\tau_j} = \frac{\partial H_j}{\partial\mu_k}, \quad \frac{\partial\mu_k}{\partial\tau_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial\lambda_k}, \quad j, k = 1, 2, \tag{9}$$

где гамильтонианы $H_i(\tau_1, \tau_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ задаются формулами

$$\begin{gathered}\tau_1 H_1 = -\frac{\lambda_1^2(\lambda_1-1)^2(\lambda_2-1)}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_1^2 + \frac{\lambda_2^2(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_2^2 + \\ + \frac{\lambda_1^2(\lambda_1-1)^2(\lambda_2-1)}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\kappa_0}{\lambda_1} - \frac{\gamma_1\tau_2}{\lambda_1^2} + \frac{\kappa_1-1}{\lambda_1-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(\lambda_1-1)^2}\right)\mu_1 - \\ - \frac{\lambda_2^2(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\kappa_0}{\lambda_2} - \frac{\gamma_1\tau_2}{\lambda_2^2} + \frac{\kappa_1-1}{\lambda_2-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(\lambda_2-1)^2}\right)\mu_2 - \kappa(\lambda_1-1)(\lambda_2-1),\end{gathered} \tag{10}$$

$$H_2 = -\frac{\lambda_1^2\lambda_2(\lambda_1-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_1^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2^2(\lambda_2-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_2^2 +$$
$$+ \frac{\lambda_1^2\lambda_2(\lambda_1-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\kappa_0-1}{\lambda_1} - \frac{\gamma_1\tau_2}{\lambda_1^2} + \frac{\kappa_1}{\lambda_1-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(\lambda_1-1)^2}\right)\mu_1 -$$
$$- \frac{\lambda_1\lambda_2^2(\lambda_2-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\kappa_0-1}{\lambda_2} - \frac{\gamma_1\tau_2}{\lambda_2^2} + \frac{\kappa_1}{\lambda_2-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(\lambda_2-1)^2}\right)\mu_2 - \kappa\lambda_1\lambda_2. \tag{11}$$

Во второй форме соответствующие гамильтонианы полиномиальны по координатам. Система H^{2+2+1} в этой форме имеет вид

$$\frac{\partial q_k}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_k}, \quad j,k = 1,2,$$

соответствующие гамильтонианы $H_i(s_1,s_2,q_1,q_2,p_1,p_2)$ в этом случае задаются формулами

$$s_1^2 H_1 = q_1^2(q_1-s_1)p_1^2 + 2q_1^2 q_2 p_1 p_2 + q_1 q_2^2 p_2^2 -$$
$$- ((\kappa_0-1)q_1^2 + \kappa_1 q_1(q_1-s_1) + \gamma_2(q_1-s_1) + \gamma_2 s_1 q_2)p_1 -$$
$$- ((\kappa_0+\kappa_1-1)q_1q_2 + \gamma_1 s_2 q_1 + \gamma_2 q_2)p_2 + \kappa q_1, \tag{12}$$

$$-s_2H_2 = q_1^2q_2p_1^2 + 2q_1q_2^2p_1p_2 + q_2^2(q_2-1)p_2^2 - ((\kappa_0+\kappa_1-1)q_1q_2 + \gamma_1s_2q_1 + \gamma_2q_2)p_1 -$$
$$- \left((\kappa_0-1)q_2(q_2-1) + \kappa_1q_2^2 + \frac{\gamma_1 s_2}{s_1}q_1 + \gamma_1 s_2(q_2-1)\right)p_2 + \kappa q_2. \tag{13}$$

Известно [16] следующее симплектическое преобразование, связывающее упомянутые выше две формы:

$$q_1 = \frac{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)}{\tau_1}, \quad q_2 = \lambda_1\lambda_2, \quad s_1 = \frac{1}{\tau_1}, \quad s_2 = -\tau_2. \tag{14}$$

Ещё одна форма гамильтоновой системы H^{2+2+1}

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t_j} = \frac{\partial K_j}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial t_j} = -\frac{\partial K_j}{\partial Q_k}, \quad j,k = 1,2, \tag{15}$$

приведена в статье [17]. Её гамильтонианы также полиномиальны по координатам Q_1, Q_2 и имеют вид

$$t_1K_1 = P_1^2Q_1(Q_1-1)^2 + [(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1) + (\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1) + t_1Q_1]P_1 - \theta^1\theta_2^\infty(Q_1-1) +$$
$$+ (P_1Q_1^2 - \theta^1Q_1 - P_1)P_2Q_2 + P_1Q_2 - \frac{t_2}{t_1}(P_1Q_1 - P_1 - \theta^1)(P_2Q_1 - P_2 + 1), \tag{16}$$

$$t_2K_2 = P_2^2Q_2^2 - P_2Q_2^2 - \theta^0P_2Q_2 + t_2P_2 - \theta_2^\infty Q_2 - P_1Q_1Q_2 +$$
$$+ \frac{t_2}{t_1}(P_1Q_1 - P_1 - \theta^1)(P_2Q_1 - P_2 + 1), \tag{17}$$

где постоянные θ^0, θ^1, θ_1^∞, θ_2^∞ удовлетворяют условию Фукса–Хукухары

$$\theta^0 + \theta^1 + \theta_1^\infty + \theta_2^\infty = 0.$$

В статье [17] также отмечено, что на решениях уравнений (15) с гамильтонианами (16), (17) совместна следующая система линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} = \left(\frac{A_0^{(-1)}}{\eta^2} + \frac{A_0^{(0)}}{\eta} + \frac{A_1^{(0)}}{\eta-1} + A_\infty\right)Y,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial t_1} = \left(E_2\eta + B_1 + \frac{A_0^{(-1)}}{t_1\eta}\right)Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial t_2} = -\frac{A_0^{(-1)}}{t_2\eta}Y \tag{18}$$

с матричными коэффициентами

$$A_0^{(-1)} = \frac{t_2}{t_1}\begin{pmatrix} 1-P_2 & uP_2 \\ (1-P_2)/u & P_2 \end{pmatrix},$$

$$A_0^{(0)} = \begin{pmatrix} P_1Q_1 - \theta^1 - \theta_1^\infty & -u(P_1Q_1 + P_2Q_2 + \theta_2^\infty) \\ (P_1Q_1 + (1-P_2)Q_2 - \theta^1 - \theta_1^\infty)/u & -P_1Q_1 - \theta_2^\infty \end{pmatrix},$$

$$A_1^{(0)} = \begin{pmatrix} -P_1Q_1 + \theta^1 & uP_1 \\ (\theta^1 Q_1 - P_1Q_1^2)/u & P_1Q_1 \end{pmatrix},$$

$$A_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \frac{1}{t_1}\begin{pmatrix} 0 & (A_0^{(0)})_{12} + (A_1^{(0)})_{12} \\ (A_0^{(0)})_{21} + (A_1^{(0)})_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

зависящими также от совместного решения следующих линейных дифференциальных уравнений:

$$t_1 u_{t_1} = u(\theta^1(1-Q_1) + P_1(1-Q_1)^2 + \theta_1^\infty - \theta_2^\infty), \quad t_2 u_{t_2} = -uQ_2.$$

Замечание 4. В первом уравнении системы (18) три особые точки: $\eta = 0$, $\eta = \infty$ с рангами Пуанкаре, равными единице, и $\eta = 1$ с рангом Пуанкаре, равным нулю. Поэтому, согласно замечанию 2, данная гамильтонова система обозначается H^{2+2+1}.

Легко видеть, что замена

$$Y = \exp\left\{\frac{\eta t_1}{2} - \frac{t_2}{2\eta t_1} + \frac{\theta^0}{2}\ln|\eta| + \frac{\theta^1}{2}\ln|\eta - 1|\right\}Z$$

совместные системы ИДМ (18) переводит в эквивалентные им совместные системы

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} = \left(\frac{B_0^{(-1)}}{\eta^2} + \frac{B_0^{(0)}}{\eta} + \frac{B_1^{(0)}}{\eta - 1} + B_\infty\right)Z,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t_1} = \left(F_2\eta + B_1 + \frac{B_0^{(-1)}}{t_1\eta}\right)Z, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_2} = -\frac{B_0^{(-1)}}{t_2\eta}Z \tag{19}$$

с матричными коэффициентами

$$B_0^{(-1)} = \frac{t_2}{t_1}\begin{pmatrix} 0.5 - P_2 & uP_2 \\ (1-P_2)/u & P_2 - 0.5 \end{pmatrix},$$

$$B_0^{(0)} = \begin{pmatrix} P_1Q_1 + 0.5\theta^0 + \theta_2^\infty & -u(P_1Q_1 + P_2Q_2 + \theta_2^\infty) \\ (P_1Q_1 + (1-P_2)Q_2 - \theta^1 - \theta_1^\infty)/u & -P_1Q_1 - 0.5\theta^0 - \theta_2^\infty \end{pmatrix},$$

$$B_1^{(0)} = \begin{pmatrix} -P_1Q_1 + 0.5\theta^1 & uP_1 \\ (\theta^1 Q_1 - P_1Q_1^2)/u & P_1Q_1 - 0.5\theta^1 \end{pmatrix},$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} -t_1/2 & 0 \\ 0 & t_1/2 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

которые имеют нулевой след. После замен в (19) по формулам $\tau_1 = t_1$, $\tau_2 = t_2/t_1$ получим совместную систему

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} = \left(\frac{B_0^{(-1)}}{\eta^2} + \frac{B_0^{(0)}}{\eta} + \frac{B_1^{(0)}}{\eta - 1} + B_\infty\right) Z,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \tau_1} = (F_2\eta + B_1)Z, \quad \tau_2 \frac{\partial Z}{\partial \tau_2} = -\frac{B_0^{(-1)}}{\eta} Z \tag{20}$$

с матричными коэффициентами

$$B_0^{(-1)} = \tau_2 \begin{pmatrix} 0.5 - P_2 & uP_2 \\ (1-P_2)/u & P_2 - 0.5 \end{pmatrix}, \quad B_\infty = \begin{pmatrix} -\tau_1/2 & 0 \\ 0 & \tau_1/2 \end{pmatrix},$$
$$B_1 = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} 0 & (A_0^{(0)})_{12} + (A_1^{(0)})_{12} \\ (A_0^{(0)})_{21} + (A_1^{(0)})_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие гамильтонианы перепишутся следующим образом:

$$\tau_1 K_1 = P_1^2 Q_1 (Q_1-1)^2 + [(\theta^1 + \theta_1^\infty)(Q_1 - 1) +$$
$$+ (\theta_2^\infty - \theta^1) Q_1 (Q_1 - 1) + \tau_1 Q_1] P_1 - \theta^1 \theta_2^\infty (Q_1 - 1) +$$
$$+ (P_1 Q_1^2 - \theta^1 Q_1 - P_1) P_2 Q_2 + P_1 Q_2 + P_2^2 Q_2^2 - P_2 Q_2^2 - \theta^0 P_2 Q_2 +$$
$$+ \tau_1 \tau_2 P_2 - \theta_2^\infty Q_2 - P_1 Q_1 Q_2 = \tau_1 H_V(\theta^0 + \theta_2^\infty, \theta^0 + \theta_1^\infty, \theta^1, \tau_1, P_1, Q_1) +$$
$$+ (P_1 Q_1^2 - \theta^1 Q_1 - P_1) P_2 Q_2 + P_1 Q_2 + P_2^2 Q_2^2 - P_2 Q_2^2 - \theta^0 P_2 Q_2 +$$
$$+ \tau_1 \tau_2 P_2 - \theta_2^\infty Q_2 - P_1 Q_1 Q_2,$$
$$\tau_2 K_2 = P_2^2 Q_2^2 - P_2 Q_2^2 - \theta^0 P_2 Q_2 + \tau_1 \tau_2 P_2 - \theta_2^\infty Q_2 - P_1 Q_1 Q_2,$$

где гамильтониан

$$H_V(\theta^0 + \theta_2^\infty, \theta^0 + \theta_1^\infty, \theta^1, \tau_1, P_1, Q_1) =$$
$$= \frac{1}{\tau_1}\big(P_1^2 Q_1 (Q_1 - 1)^2 + \big[(\theta^1 + \theta_1^\infty)(Q_1 - 1) + (\theta_2^\infty - \theta^1) Q_1 (Q_1 - 1) + \tau_1 Q_1\big] P_1 - \theta^1 \theta_2^\infty (Q_1 - 1)\big)$$

определяет гамильтонову систему с одной степенью свободы и независимой переменной τ_1, исключение из которой импульса P_1 даёт пятое уравнение Пенлеве на координату Q_1 (см. [17, с. 25, формула (3.16)]). Этот гамильтониан выписан в работе К. Окамото [29] в следующем виде:

$$H_V(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty, \eta_1, \tau_1, P_1, Q_1) =$$
$$= \frac{1}{\tau_1}\big(Q_1 (Q_1 - 1)^2 P_1^2 - \big[\kappa_0 (Q_1 - 1)^2 + \kappa_1 Q_1 (Q_1 - 1) - \eta_1 \tau_1 Q_1\big] P_1 + \frac{1}{4}\big[(\kappa_0 + \kappa_1)^2 - \kappa_\infty\big](Q_1 - 1)\big).$$

Очевидно, что

$$H_V(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty, \eta_1, \tau_1, P_1, Q_1) = \frac{1}{\tau_1}\bigg(Q_1 (Q_1 - 1)^2 P_1^2 -$$
$$- \big[(\kappa_0 + \kappa_1) Q_1 (Q_1 - 1) - \kappa_0 (Q_1 - 1) - \eta_1 \tau_1 Q_1\big] P_1 + \frac{1}{4}\big[(\kappa_0 + \kappa_1)^2 - \kappa_\infty\big](Q_1 - 1)\bigg).$$

Тогда связь констант гамильтонианов H_V из работы [17] и работы [29] следующая:

$$\kappa_0 + \kappa_1 = \theta^1 - \theta_2^\infty, \quad \kappa_1 = -\theta^1 - \theta_1^\infty, \quad \eta_1 = 1, \quad \frac{1}{4}[\kappa_\infty - (\kappa_0 + \kappa_1)^2] = \theta^1 \theta_2^\infty.$$

Сама пара соответствующих гамильтоновых систем при этом принимает вид

$$\begin{gathered}
\tau_1\frac{\partial Q_1}{\partial\tau_1}:=\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial P_1}=2P_1Q_1(Q_1-1)^2+(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1)+\\
+(\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1)+\tau_1Q_1+P_2Q_1^2Q_2-P_2Q_2+Q_2-Q_1Q_2,\\
\tau_1\frac{\partial Q_2}{\partial\tau_1}:=\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial P_2}=Q_2(P_1Q_1^2-\theta^1Q_1-P_1-\theta^0)+2P_2Q_2^2-Q_2^2+\tau_1\tau_2,\\
\tau_1\frac{\partial P_1}{\partial\tau_1}:=-\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial Q_1}=-P_1^2(Q_1-1)^2-2P_1^2Q_1(Q_1-1)-\tau_1P_1-(\theta^1+\theta_1^\infty)P_1+\\
+(\theta^1-\theta_2^\infty)P_1(2Q_1-1)+\theta^1\theta_2^\infty+P_2Q_2(\theta^1-2P_1Q_1)+P_1Q_2,\\
\tau_1\frac{\partial P_2}{\partial\tau_1}:=-\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial Q_2}=-P_1-P_2(P_1Q_1^2-\theta^1Q_1-P_1+2P_2Q_2-2Q_2-\theta^0)+P_1Q_1+\theta_2^\infty;
\end{gathered}\tag{21}$$

$$\begin{gathered}
\tau_2\frac{\partial Q_1}{\partial\tau_2}:=\tau_2\frac{\partial K_2}{\partial P_1}=-Q_1Q_2+\tau_2(Q_1-1)(P_2Q_1-P_2+1),\\
\tau_2\frac{\partial Q_2}{\partial\tau_2}:=\tau_2\frac{\partial K_2}{\partial P_2}=2P_2Q_2^2-Q_2^2-\theta^0Q_2+\tau_1\tau_2+\tau_2(Q_1-1)(P_1Q_1-P_1-\theta_1),\\
\tau_2\frac{\partial P_1}{\partial\tau_2}:=-\tau_2\frac{\partial K_2}{\partial Q_1}=P_1Q_2-\tau_2P_2(P_1Q_1-P_1-\theta^1)-\tau_2P_1(P_2Q_1-P_2+1),\\
\tau_2\frac{\partial P_2}{\partial\tau_2}:=-\tau_2\frac{\partial K_2}{\partial Q_2}=-2P_2^2Q_2+2P_2Q_2+\theta^0P_2+P_1Q_1+\theta_2^\infty.
\end{gathered}\tag{22}$$

Рассмотрим совместные решения пары гамильновых систем (21), (22), которые аналитичны на прямой $\tau_2=0$. На таких решениях при $\tau_2=0$ система (22) сводится к следующим равенствам:

$$\begin{gathered}
Q_1Q_2=0,\quad Q_2(2P_2Q_2-Q_2-\theta^0)=0,\\
P_1Q_2=0,\quad -2P_2^2Q_2+2P_2Q_2+\theta^0P_2+P_1Q_1+\theta_2^\infty=0.
\end{gathered}\tag{23}$$

Пусть $Q_2\neq0$. Тогда из (23) следует, что

$$Q_1=0,\quad 2P_2Q_2=Q_2+\theta^0,\quad P_1=0,\quad -2P_2^2Q_2+2P_2Q_2+\theta^0P_2+\theta_2^\infty=0.\tag{24}$$

Подстановка второго соотношения из (24) в четвёртое даёт

$$P_2Q_2=-\theta_2^\infty.\tag{25}$$

Подставим теперь равенства (24), (25) и $\tau_2=0$ в систему (21) и получим

$$Q_2=\theta^1+\theta_1^\infty-\theta_2^\infty,\quad \frac{\partial P_2}{\partial\tau_1}=0.$$

Таким образом, предположение о том, что первое из равенств (24) выполнено при $Q_2\neq0$ влечёт за собой вывод о том, что $P_1=Q_1=0$, а константы P_2 и Q_2 имеют вид

$$Q_2=\theta^1+\theta_1^\infty-\theta_2^\infty,\quad P_2=\frac{\theta_2^\infty}{\theta_2^\infty-\theta^1-\theta_1^\infty}.$$

Но если положить $Q_2=0$, то

$$\begin{gathered}
\tau_1K_1=\tau_1H_V(\theta^0+\theta_2^\infty,\theta^0+\theta_1^\infty,\theta^1,\tau_1,P_1,Q_1)=\\
=P_1^2Q_1(Q_1-1)^2+[(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1)+(\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1)+\tau_1Q_1]P_1-\theta^1\theta_2^\infty(Q_1-1),
\end{gathered}$$

где, как уже отмечалось выше, $H_V(\theta^0+\theta_2^\infty,\theta^0+\theta_1^\infty,\theta^1,\tau_1,P_1,Q_1)$ есть гамильтониан пятого уравнения Пенлеве: компоненты P_1, Q_1 удовлетворяют следующей гамильтоновой системе:

$$\begin{gathered}
\tau_1\frac{\partial Q_1}{\partial\tau_1}=\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial P_1}=\tau_1\frac{\partial H_V(\theta^0+\theta_2^\infty,\theta^0+\theta_1^\infty,\theta^1,\tau_1,P_1,Q_1)}{\partial P_1}=\\
=2P_1Q_1(Q_1-1)^2+(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1)+(\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1)+\tau_1Q_1,\\
\tau_1\frac{\partial P_1}{\partial\tau_1}=-\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial Q_1}=-\tau_1\frac{\partial H_V(\theta^0+\theta_2^\infty,\theta^0+\theta_1^\infty,\theta^1,\tau_1,P_1,Q_1)}{\partial Q_1}=\\
=-P_1^2(Q_1-1)^2-2P_1^2Q_1(Q_1-1)-\tau_1P_1-(\theta^1+\theta_1^\infty)P_1+(\theta^1-\theta_2^\infty)P_1(2Q_1-1)+\theta^1\theta_2^\infty, \quad (26)
\end{gathered}$$

в которой, если исключить импульс P_1, получим, что Q_1 удовлетворяет пятому уравнению Пенлеве. Действительно, из первого равенства системы (26) следует, что

$$P_1=\frac{\tau_1}{2Q_1(Q_1-1)^2}\frac{\partial Q_1}{\partial\tau_1}-\frac{\theta^1+\theta_1^\infty}{2Q_1(Q_1-1)}+\frac{\theta^1-\theta_2^\infty}{2(Q_1-1)}-\frac{\tau_1}{2(Q_1-1)^2}. \quad (27)$$

Подставив (27) во второе равенство системы (26), видим, что Q_1 есть решение пятого уравнения Пенлеве вида

$$\begin{gathered}
(Q_1)_{\tau_1\tau_1}=\left(\frac{1}{2Q_1}+\frac{1}{Q_1-1}\right)(Q_1)_{\tau_1}^2-\frac{(Q_1)_{\tau_1}}{\tau_1}+\\
+\frac{(Q_1-1)^2}{2\tau_1^2}\left((\theta^1+\theta_2^\infty)^2Q_1-\frac{(\theta^1+\theta_1^\infty)^2}{Q_1}\right)-\frac{(\theta_1^\infty+\theta_2^\infty+1)Q_1}{\tau_1}-\frac{Q_1(Q_1+1)}{2(Q_1-1)}.
\end{gathered}$$

При этом P_2 удовлетворяет двум непротиворечивым равенствам:

$$\theta^0P_2+\theta_2^\infty+P_1Q_1=0, \quad (28)$$

$$\tau_1\frac{\partial P_2}{\partial\tau_1}=-P_1-P_2(P_1Q_1^2-\theta^1Q_1-P_1). \quad (29)$$

Непротиворечивость здесь означает, что если выполнены (26) и (28), то выполнено и равенство (29). В самом деле, если из (28) выразить P_2 через P_1 и Q_1, то будем иметь

$$P_2=-\frac{\theta_2^\infty+P_1Q_1}{\theta^0}. \quad (30)$$

После подстановки (30) в (29) получим равенство

$$\begin{gathered}
\tau_1(P_1Q_1)_{\tau_1}=\theta^0P_1+(\theta_2^\infty+P_1Q_1)(\theta^1Q_1+P_1-P_1Q_1^2)=\\
=-P_1^2Q_1^3+P_1^2Q_1+(\theta^1-\theta_2^\infty)P_1Q_1^2-(\theta^1+\theta_1^\infty)P_1+\theta^1\theta_2^\infty Q_1. \quad (31)
\end{gathered}$$

Покажем, что равенство (31) справедливо тождественно. Действительно, левая часть (31) имеет вид

$$\tau_1(P_1Q_1)_{\tau_1}=P_1*\tau_1(Q_1)_{\tau_1}+Q_1*\tau_1(P_1)_{\tau_1}. \quad (32)$$

Далее, в силу (26) правая часть соотношения (32) равна

$$\begin{gathered}
P_1[2P_1Q_1(Q_1-1)^2+(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1)+(\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1)+\tau_1Q_1]+\\
+Q_1[-P_1^2(Q_1-1)^2-2P_1^2Q_1(Q_1-1)-\tau_1P_1-(\theta^1+\theta_1^\infty)P_1+(\theta^1-\theta_2^\infty)P_1(2Q_1-1)+\theta^1\theta_2^\infty]. \quad (33)
\end{gathered}$$

Наконец, раскрыв скобки в (33), получим правую часть равенства (31).

Таким образом, на прямой $\tau_2=0$ при редукции $Q_2=0$ аналитические на этой прямой совместные решения выражаются через решения $Q_1(\tau_1)$ данного пятого уравнения Пенлеве.

В п. 2 именно матричная форма (20) уравнений ИДМ гамильтоновой системы H^{2+2+1} будет использована при построении решений соответствующих эволюционных уравнений.

Рассмотрим далее матрицы

$$U = F_2\eta + \frac{1}{\tau_1}\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix}, \tag{34}$$

где

$$a = (A_0^{(0)})_{21} + (A_1^{(0)})_{21}, \quad b = (A_0^{(0)})_{12} + (A_1^{(0)})_{12}, \quad c = P_2 - 0.5, \quad d = -uP_2, \quad e = \frac{P_2 - 1}{u}. \tag{35}$$

Условием совместности последних двух уравнений системы (20) является тождество

$$U_{\tau_2} - V_{\tau_1} + [U, V] = 0. \tag{36}$$

Справедливость (36) с учётом (34), (35) означает, что имеет место замкнутая система дифференциальных уравнений

$$\tau_1 c_{\tau_1} = eb - ad, \quad \tau_1 d_{\tau_1} = -2bc, \quad \tau_1 e_{\tau_1} = 2ac, \quad b_{\tau_2} = \tau_1 d, \quad a_{\tau_2} = -e\tau_1. \tag{37}$$

Из (35) следует, что имеет место равенство

$$c^2 + de = \frac{1}{4}. \tag{38}$$

С учётом (38) из (37) вытекает справедливость формул

$$\tau_1 a_{\tau_1\tau_2} = a_{\tau_2} - a\sqrt{\tau_1^2 + 4a_{\tau_2}b_{\tau_2}}, \quad \tau_1 b_{\tau_1\tau_2} = b_{\tau_2} - b\sqrt{\tau_1^2 + 4a_{\tau_2}b_{\tau_2}}.$$

Выполнив замену по формулам

$$a = \frac{1}{4}\tau_1 A, \quad b = \tau_1 B, \quad \tau_1 = -4T_1, \quad \tau_2 = T_2,$$

получим систему уравнений

$$A_{T_1T_2} = 4A\sqrt{1 + A_{T_2}B_{T_2}}, \quad B_{T_1T_2} = 4B\sqrt{1 + A_{T_2}B_{T_2}}. \tag{39}$$

Таким образом, гамильтонова система H^{2+2+1} эквивалентна решению системы (39), являющемуся в терминах статьи [30] *изомонодромным.* Для вещественных A и B при редукции $A = -B$ система (39) после замены $\sin u = A_{T_2}$, $4T_1 = S_1$, $T_2 = S_2$ сводится (см. [27]) к уравнению синус-Гордона $u_{S_1S_2} = \sin u$.

2. Построение решений аналогов временны́х уравнения Шрёдингера. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Существуют решения уравнений (7) с рациональными коэффициентами, которые явным образом выражаются в терминах решений системы (20).*

Доказательство. Матрица размера 2×2

$$M = Z^{-1}(\tau_1, \tau_2, \eta)Z(\tau_1, \tau_2, \zeta),$$

образованная по совместному фундаментальному решению Z линейных систем (20), удовлетворяет двум следующим скалярным эволюционным уравнениям с временами τ_1 и τ_2:

$$\tau_1 M_{\tau_1} = \frac{\zeta^2(\zeta - 1)}{\zeta - \eta}M_{\zeta\zeta} - \frac{\eta^2(\eta - 1)}{\zeta - \eta}M_{\eta\eta} + \\ + \frac{\zeta(\zeta^2 - 3\zeta\eta + 2\eta)}{(\zeta - \eta)^2}M_\zeta + \frac{\eta(\eta^2 - 3\zeta\eta + 2\zeta)}{(\zeta - \eta)^2}M_\eta + g_1 M, \tag{40}$$

$$\tau_2 M_{\tau_2} = \frac{\zeta^2\eta(\zeta - 1)}{\zeta - \eta}M_{\zeta\zeta} - \frac{\zeta\eta^2(\eta - 1)}{\zeta - \eta}M_{\eta\eta} + \frac{\zeta\eta(\zeta + \eta - 2\zeta\eta)}{(\zeta - \eta)^2}(M_\zeta + M_\eta) + g_2 M. \tag{41}$$

Здесь функции $g_1(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta,P_1,P_2,Q_1,Q_2)$ и $g_2(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta,P_1,P_2,Q_1,Q_2)$ задаются формулами

$$g_1(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta,P_1,P_2,Q_1,Q_2)=\frac{\tau_2^2(\zeta\eta-\zeta-\eta)}{4\zeta^2\eta^2}-\frac{\theta^0\tau_2}{2\zeta\eta}+\tau_1\tau_2(0,5-P_2)+\det(B_0^{(0)})+$$

$$+\frac{(\theta^1)^2(\zeta+\eta-\zeta\eta)}{4(\zeta-1)(\eta-1)}-2(B_0^{(0)})_{11}(B_1^{(0)})_{11}-(B_0^{(0)})_{21}(B_1^{(0)})_{12}-(B_0^{(0)})_{12}(B_1^{(0)})_{21}-$$

$$-\tau_1(P_1Q_1+0.5\theta^0+\theta_2^\infty)+0.5\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)(\zeta+\eta)+0.25\tau_1^2(\zeta+\eta-\zeta^2-\eta^2-\zeta\eta),$$

$$g_2(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta,P_1,P_2,Q_1,Q_2)=\frac{\tau_2^2(\zeta\eta(\zeta+\eta)-\zeta^2-\eta^2-\zeta\eta)}{4\zeta^2\eta^2}+\frac{\theta^0\tau_2(\zeta\eta-\zeta-\eta)}{2\zeta\eta}+$$

$$+\tau_1\tau_2(0.5-P_2)+\det(B_0^{(0)})+\frac{(\theta^1)^2\zeta\eta}{4(\zeta-1)(\eta-1)}+2(B_0^{(-1)})_{11}(B_1^{(0)})_{11}+$$

$$+(B_0^{(-1)})_{21}(B_1^{(0)})_{12}+(B_0^{(-1)})_{12}(B_1^{(0)})_{21}+0.5\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)\zeta\eta+0.25\tau_1^2\zeta\eta(1-\zeta-\eta).$$

Осуществив замену

$$M=\exp\{S(\tau_1,\tau_2)\}W,$$

где функция S удовлетворяет непротиворечивым равенствам

$$\tau_1S_{\tau_1}=\tau_1\tau_2(0,5-P_2)+\det(B_0^{(0)})-$$

$$-2(B_0^{(0)})_{11}(B_1^{(0)})_{11}-(B_0^{(0)})_{21}(B_1^{(0)})_{12}-(B_0^{(0)})_{12}(B_1^{(0)})_{21}-\tau_1P_1Q_1,$$

$$\tau_2S_{\tau_2}=\tau_1\tau_2(0.5-P_2)+\det(B_0^{(0)})+$$

$$+2(B_0^{(-1)})_{11}(B_1^{(0)})_{11}+(B_0^{(-1)})_{21}(B_1^{(0)})_{12}+(B_0^{(-1)})_{12}(B_1^{(0)})_{21},$$

получим, что уравнения (40), (41) сводятся к следующим двум уравнениям:

$$\tau_1W_{\tau_1}=\frac{\zeta^2(\zeta-1)}{\zeta-\eta}W_{\zeta\zeta}-\frac{\eta^2(\eta-1)}{\zeta-\eta}W_{\eta\eta}+$$

$$+\frac{\zeta(\zeta^2-3\zeta\eta+2\eta)}{(\zeta-\eta)^2}W_\zeta+\frac{\eta(\eta^2-3\zeta\eta+2\zeta)}{(\zeta-\eta)^2}W_\eta+g_3W, \tag{42}$$

$$\tau_2W_{\tau_2}=\frac{\zeta^2\eta(\zeta-1)}{\zeta-\eta}W_{\zeta\zeta}-\frac{\zeta\eta^2(\eta-1)}{\zeta-\eta}W_{\eta\eta}+\frac{\zeta\eta(\zeta+\eta-2\zeta\eta)}{(\zeta-\eta)^2}(W_\zeta+W_\eta)+g_4W. \tag{43}$$

Здесь функции $g_3(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta)$ и $g_4(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta)$ уже не зависят от переменных P_i, Q_i $(i=1,2)$ и имеют вид

$$g_3(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta)=\frac{\tau_2^2(\zeta\eta-\zeta-\eta)}{4\zeta^2\eta^2}-\frac{\theta^0\tau_2}{2\zeta\eta}+\frac{(\theta^1)^2(\zeta+\eta-\zeta\eta)}{4(\zeta-1)(\eta-1)}-\tau_1(0.5\theta^0+\theta_2^\infty)+$$

$$+0.5\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)(\zeta+\eta)+0.25\tau_1^2(\zeta+\eta-\zeta^2-\eta^2-\zeta\eta),$$

$$g_4(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta)=\frac{\tau_2^2(\zeta\eta(\zeta+\eta)-\zeta^2-\eta^2-\zeta\eta)}{4\zeta^2\eta^2}+\frac{\theta^0\tau_2(\zeta\eta-\zeta-\eta)}{2\zeta\eta}+$$

$$+\frac{(\theta^1)^2\zeta\eta}{4(\zeta-1)(\eta-1)}+0.5\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)\zeta\eta+0.25\tau_1^2\zeta\eta(1-\zeta-\eta).$$

Далее замена переменных
$$x=\frac{\zeta}{\zeta-1},\quad y=\frac{\eta}{\eta-1}$$
сводит уравнения (42), (43) к уравнениям
$$\tau_1W_{\tau_1}=-\frac{x^2(x-1)^2(y-1)}{x-y}W_{xx}+\frac{y^2(y-1)^2(x-1)}{x-y}W_{yy}+$$
$$+\frac{x(x-1)(y-1)(x^2+xy-2y)}{(x-y)^2}W_x+\frac{y(y-1)(x-1)(y^2+xy-2x)}{(x-y)^2}W_y+g_5W, \tag{44}$$
$$\tau_2W_{\tau_2}=-\frac{x^2(x-1)^2y}{x-y}W_{xx}+\frac{y^2(y-1)^2x}{x-y}W_{yy}+$$
$$+\frac{xy(x+y)(x-1)^2}{(x-y)^2}W_x+\frac{xy(x+y)(y-1)^2}{(x-y)^2}W_y+g_6W, \tag{45}$$
где функции $g_5(\tau_1,\tau_2,x,y)$ и $g_6(\tau_1,\tau_2,x,y)$ принимают вид
$$g_5(\tau_1,\tau_2,x,y)=\frac{\tau_2^2(x+y-xy)(x-1)(y-1)}{4x^2y^2}-\frac{\theta^0\tau_2(x-1)(y-1)}{2xy}+$$
$$+0.25(\theta^1)^2(xy-x-y)-\tau_1(0.5\theta^0+\theta_2^\infty)+\frac{\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)(2xy-x-y)}{2(x-1)(y-1)}-\frac{\tau_1^2(x^2y^2-3xy+x+y)}{4(x-1)^2(y-1)^2},$$
$$g_6(\tau_1,\tau_2,x,y)=\frac{\tau_2^2(2x^2y+2xy^2-x^2y^2-xy-x^2-y^2)}{4x^2y^2}+\frac{\theta^0\tau_2(x+y-xy)}{2xy}+$$
$$+0.25(\theta^1)^2xy+\frac{\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)xy}{2(x-1)(y-1)}+\frac{\tau_1^2xy(1-xy)}{4(x-1)^2(y-1)^2}.$$
Наконец, в уравнениях (44), (45) сделаем замену
$$W=e^{f_1(x,y,\tau_1,\tau_2)+f_2(\tau_1,\tau_2)}\Psi,$$
где
$$f_1(x,y,\tau_1,\tau_2)=(0.5\kappa_0-1)\ln(|xy|)+0.5\kappa_1(\ln|(x-1)(y-1)|)+\ln|x-y|+$$
$$+\frac{\gamma_1\tau_2(x+y)}{2xy}+\frac{\gamma_2\tau_1(x+y-2)}{2(x-1)(y-1)},$$
$$f_2(\tau_1,\tau_2)=\frac{((\kappa_1-2)^2-(\theta^1)^2-4)\ln\tau_1}{4}+\frac{(\kappa_0-2)^2\ln\tau_2}{4}-$$
$$-\frac{((\kappa_0-2)\gamma_2+\theta^0+2\theta_2^\infty)\tau_1}{2}+\frac{((\kappa_1-2)\gamma_1+\theta^0)\tau_2}{2}+\frac{\gamma_1\gamma_2\tau_1\tau_2}{2}.$$
Положив при этом
$$\kappa=\frac{(\kappa_0-2)^2}{4}+\frac{(\kappa_1-2)^2}{4}+\frac{\kappa_0\kappa_1}{2}-\frac{(\theta^1)^2}{4}-2,\quad \theta^0=(\kappa_0-2)\gamma_1,\quad \theta_2^\infty-\theta_1^\infty=(\kappa_1-2)\gamma_2,$$

получим следующие уравнения:

$$
\begin{gathered}
\tau_1\Psi_{\tau_1} = -\frac{x^2(x-1)^2(y-1)}{x-y}\Psi_{xx} + \frac{y^2(y-1)^2(x-1)}{x-y}\Psi_{yy} - \\
- \frac{x^2(x-1)^2(y-1)}{(x-y)}\left(\frac{\kappa_0}{x} - \frac{\gamma_1\tau_2}{x^2} + \frac{\kappa_1-1}{x-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(x-1)^2}\right)\Psi_x + \\
+ \frac{(x-1)y^2(y-1)^2}{(x-y)}\left(\frac{\kappa_0}{y} - \frac{\gamma_1\tau_2}{y^2} + \frac{\kappa_1-1}{y-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(y-1)^2}\right)\Psi_y + g_7\Psi, \qquad (46) \\
\tau_2\Psi_{\tau_2} = -\frac{x^2(x-1)^2y}{x-y}\Psi_{xx} + \frac{y^2(y-1)^2x}{x-y}\Psi_{yy} - \\
- \frac{x^2(x-1)^2y}{(x-y)}\left(\frac{\kappa_0-1}{x} - \frac{\gamma_1\tau_2}{x^2} + \frac{\kappa_1}{x-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(x-1)^2}\right)\Psi_x + \\
+ \frac{xy^2(y-1)^2}{(x-y)}\left(\frac{\kappa_0-1}{y} - \frac{\gamma_1\tau_2}{y^2} + \frac{\kappa_1}{y-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(y-1)^2}\right)\Psi_y + g_8\Psi, \qquad (47)
\end{gathered}
$$

где функции $g_7(\tau_1, \tau_2, x, y)$ и $g_8(\tau_1, \tau_2, x, y)$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
g_7(\tau_1, \tau_2, x, y) = -\kappa(x-1)(y-1) + \frac{(\gamma_1^2-1)\tau_2^2(x-1)(y-1)(x+y-xy)}{4x^2y^2} + \\
+ \frac{(\gamma_2^2-1)\tau_1^2(x^2y^2-3xy+x+y)}{4(x-1)^2(y-1)^2} + \frac{4(x-1)(y-1)xy}{(x-y)^2}, \\
g_8(\tau_1, \tau_2, x, y) = -\kappa xy + \frac{(\gamma_1^2-1)\tau_2^2(x^2y^2+xy+x^2+y^2-2x^2y-2xy^2)}{4x^2y^2} + \\
+ \frac{(\gamma_2^2-1)\tau_1^2 xy(xy-1)}{4(x-1)^2(y-1)^2} + \frac{2xy(2xy-x-y)}{(x-y)^2}.
\end{gathered}
$$

Далее, ввиду справедливости коммутационных соотношений Гейзенберга

$$
\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y}y - y\frac{\partial}{\partial y} = 1,
$$

уравнения (46), (47) символически записываются в виде уравнений (7), определяемых гамильтонианами (10), (11) с рациональными коэффициентами гамильтоновой системы (9). Тем самым основная теорема о построении решений аналогов временны́х уравнений Шрёдингера доказана.

Справедливо также следующее

Следствие. *Существуют решения уравнений (8) с полиномиальными коэффициентами, которые явным образом выражаются в терминах решений системы (20).*

Доказательство. Легко проверить, что квантовый аналог замены (14)

$$
r = \frac{(x-1)(y-1)}{\tau_1}, \quad \rho = xy, \quad s_1 = \frac{1}{\tau_1}, \quad s_2 = -\tau_2
$$

сводит (46), (47) к эволюционным уравнениям

$$s_1^2\Psi_{s_1} = r^2(r-s_1)\Psi_{rr} + 2r^2\rho\Psi_{r\rho} + r\rho^2\Psi_{\rho\rho} + ((\kappa_0-1)r^2 + (\kappa_1 r+\gamma_2)(r-s_1) + \gamma_2 s_1\rho)\Psi_r + \\ + ((\kappa_0+\kappa_1-1)r\rho + \gamma_1 s_2 r + \gamma_2\rho)\Psi_\rho + \kappa r\Psi,$$

$$-s_2\Psi_{s_2} = r^2\rho\Psi_{rr} + 2r\rho^2\Psi_{r\rho} + \rho^2(\rho-1)\Psi_{\rho\rho} + ((\kappa_0+\kappa_1-1)r\rho + \gamma_1 s_2 r + \gamma_2\rho)\Psi_r + \\ + \left((\kappa_0-1)\rho(\rho-1) + \kappa_1\rho^2 + \frac{\gamma_1 s_2 r}{s_1} + \gamma_1 s_2(\rho-1)\right)\Psi_\rho + \kappa\rho\Psi,$$

которые, в силу справедливости соотношений Гейзенберга

$$\frac{\partial}{\partial r}r - r\frac{\partial}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \rho}\rho - \rho\frac{\partial}{\partial \rho} = 1,$$

символически могут быть записаны в виде уравнений (8), определяемых полиномиальными гамильтонианами (12), (13) с полиномиальными коэффициентами. Следствие доказано.

Заключение. Таким образом, к настоящему времени в иерархии вырождений Кимуры остался всего лишь один представитель H^{3+1+1}, для которого решения аналогов временны́х уравнений Шрёдингера в терминах решений соответствующих уравнений ИДМ ещё не построены.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа финансировалась за счёт средств бюджета Института математики с вычислительным центром. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сулейманов Б.И.* Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа, 1988. С. 93–102.
2. *Сулейманов Б.И.* Гамильтоновость уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 5. С. 791–796.
3. *Мессиа А.* Квантовая механика. Т. 1. М., 1978.
4. *Garnier R.* Sur des equations différentielles du troisieme ordre dont l'integrale generale est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes // Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 1912. V. 29. № 3. P. 1–126.
5. *Bloemendal A., Virag B.* Limits of spiked random matrices II // Ann. Probab. 2016. V. 44. № 4. P. 2726–2769.
6. *Conte R.* Generalized Bonnet surfaces and Lax pairs of PVI // J. Math. Phys. 2017. V. 58. № 10. P. 1–31.
7. *Grundland A.M., Riglioni D.* Classical-quantum correspondence for shape-invariant systems // J. Phys. A. 2015. V. 48. № 24. P. 245201–245215.
8. *Levin A.M., Olshanetsky M.A., Zotov A.V.* Planck constant as spectral parameter in integrable systems and KZB equations // J. of High Energy Physics. 2014. V. 10. P. 1–29.
9. *Nagoya H.* Hypergeometric solutions to Schrödinger equation for the quantum Painlevé equations // J. Math. Phys. 2011. V. 52. № 8. P. 1–16.
10. *Rosengren H.* Special polynomials related to the supersymmetric eight-vertex model: a summary // Commun. Math. Phys. 2015. V. 15. № 3. P. 1143–1170.
11. *Rumanov I.* Painlevé representation of Tracy-Widom $_\beta$ distribution for $\beta = 6$ // Comm. Math. Phys. 2016. V. 342. № 3. P. 843–868.

12. *Zabrodin A., Zotov A.* Quantum Painlevé-Calogero correspondence // J. Math. Phys. 2012. V. 53. № 7. P. 1–19.
13. *Grava T., Its A., Kapaev A., Mezzadri F.* On the Tracy-Widom $_\beta$ distribution for $\beta = 6$ // SIGMA. 2016. V. 12. № 105. P. 1–26.
14. *Новиков Д.П.* О системе Шлезингера с матрицами размера 2×2 и уравнении Белавина–Полякова–Замолодчикова // Теор. и мат. физика. 2009. Т. 161. № 2. С. 191–203.
15. *Сулейманов Б.И.* Квантовые аспекты интегрируемости третьего уравнения Пенлеве и решения временного уравнения Шрёдингера с потенциалом Морса // Уфимский мат. журн. 2016. Т. 8. № 3. С. 141–159.
16. *Kimura H.* The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure // Annali di Matematica pura et applicata IV. 1989. V. 155. № 1. P. 25–74.
17. *Kawakami H., Nakamura A., Sakai H.* Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations // arXiv:1209.3836. 2012.
18. *Sakai H.* Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé-type equations // Tech. Report. Tokyo, 2010.
19. *Kawakami H., Nakamura A., Sakai H.* Toward a classification of 4-dimensional Painlevé-type equations // Contemporary Mathematics, 593, eds. A. Dzhamay, K. Maruno, V. U. Pierce, AMS, Providence, RI. 2013. P. 143–161.
20. *Kawamuko H.* On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations // WSEAS Transact. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39–47.
21. *Цегельник В.В.* Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа. Минск, 2007.
22. *Цегельник В.В.* О свойствах решений двух дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве // Теор. и мат. физика. 2021. Т. 206. № 3. С. 361–367.
23. *Сулейманов Б.И.* «Квантования» высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы // Функц. анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 3. С. 52–62.
24. *Новиков Д.П., Сулейманов Б.И.* «Квантования» изомонодромной гамильтоновой системы Гарнье с двумя степенями свободы // Теор. и мат. физика. 2016. Т. 187. № 1. С. 39–57.
25. *Павленко В.А., Сулейманов Б.И.* Решения аналогов временных уравнений Шрёдингера, определяемых изомонодромной гамильтоновой системой $H^{2+1+1+1}$ // Уфимский мат. журн. 2018. Т. 10. № 4. С. 92–102.
26. *Павленко В.А., Сулейманов Б.И.* Решения аналогов временных уравнений Шрёдингера, определяемых изомонодромной гамильтоновой системой H^{4+1} // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 5. С. 695–698.
27. *Павленко В.А.* Решения аналогов временных уравнений Шрёдингера, соответствующих паре гамильтоновых систем H^{3+2} // Теор. и мат. физика. 2022. Т. 212. № 3. С. 340–353.
28. *Сулейманов Б.И.* Изомонодромное квантование второго уравнения Пенлеве посредством консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33. № 6. С. 141–161.
29. *Okamoto K.* Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations // Proceed. of the Japan Academy. 1980. Ser. A. № 6. P. 264–268.
30. *Итс А.Р.* Асимптотика решений нелинейного уравнения Шрёдингера и изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 1. С. 14–18.

Институт математики
с вычислительным центром,
г. Уфа

Поступила в редакцию 13.04.2023 г.
После доработки 10.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.