ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 41–54

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. Д. К. Дурдиев

Изучены прямая и обратная задачи для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. В прямой задаче рассмотрена задача типа Трикоми для этого уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. Неизвестными обратной задачи являются переменные коэффициенты при младших членах уравнения. Для их определения относительно решения, определяемого в параболической части области, задано интегральное условие переопределения, а в гиперболической части заданы условия на характеристиках: на одной — значение нормальной производной, а на другой — значение самой функции. Доказаны теоремы однозначной разрешимости поставленных задач в смысле классического решения.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения смешанного типа, характеристика, функция Грина, принцип сжатых отображений.

DOI: 10.31857/S0374064124010047, EDN: RQIAJP

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega_T\subset\mathbb{R}^2$ — конечная открытая область, ограниченная при $y>0$ отрезками AB, BC, CD, где $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(T,1)$, $D(T,0)$, T — фиксированное положительное число, а при $y<0$ — характеристиками $AE: x+y=0$ и $DE: x-y=T$ уравнения

$$Lu\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}u_x-u_{yy}-q(x)u=0, & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}-p(x)u=0, & y<0.\end{cases}\tag{1}$$

Для параболо-гиперболического уравнения (1) линия изменения типа $y=0$ не является характеристикой (параболическое вырождение первого рода [1, с. 258]).

Прямая задача. Найти в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:

$$u|_{AB}=\varphi(y),\quad y\in[0,1],\quad u|_{BC}=0,\tag{2}$$

$$u|_{AE}=\psi(x),\quad x\in[0,T/2].\tag{3}$$

Здесь функции $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ считаются заданными.

Введём обозначения $\Omega_{1T}:=\Omega_T\cap\{0<y\leqslant 1\}$, $\Omega_{2T}:=\Omega_T\cap\{-T/2\leqslant y<0\}$.

Определение. *Решением задачи* (1)–(3) назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C^1(\overline{\Omega_T})\cap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T})\cap C^2(\Omega_{2T})$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество.

В *обратной задаче* предполагаются неизвестными коэффициенты $q(x)$ и $p(x)$ уравнения (1). В данной работе изучим обратную задачу определения этих коэффициентов по следующим условиям переопределения, заданным относительно решения прямой задачи (1)–(3):

$$\int\limits_0^1 h(y)u(x,y)dy=f(x),\quad x\in[0,T],\tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AE}=\psi_1(x),\quad x\in[0,T/2],\quad u\big|_{DE}=\psi_2(x),\quad x\in[T/2,T],\tag{5}$$

где $n = (1, 1)$ — вектор в направлении нормали к характеристике AE, внутренней по отношению к области Ω_{2T}, а $h(y)$, $f(x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1, 2$, — заданные достаточно гладкие функции.

Относительно заданных функций будем предполагать выполненными следующие условия:

(B1) $\varphi(y) \in C^3[0, 1]$, $\psi(x) \in C^2[0, T/2]$;

(B2) $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, $\varphi(1) = \varphi'(1) = \varphi''(1) = 0$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$;

(B3) $h(y) \in C^2[0, 1]$, $h(0) = h'(0) = 0$, $h(1) = h'(1) = 0$; $f(x) \in C^1[0, T]$, $\int_0^1 h(y)\varphi(y)dy = f(0)$, $|f(x)| \geqslant f_0 > 0$, $f_0 = \mathrm{const}$, $x \in [0, T]$;

(B4) $\psi_1(x) \in C^1[0, T/2]$, $\psi_2(x) \in C^2[T/2, T]$, $\psi(T/2) = \psi_2(T/2)$, $\psi_1(T/2) = \psi_2'(T/2)$, $|\psi_2(x)| \geqslant \psi_{00} > 0$, $\psi_{00} = \mathrm{const}$, $x \in [T/2, T]$.

Важность изучения задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений была впервые отмечана И.М. Гельфандом [2]. Такого рода задачи встречаются при изучении электрических колебаний в проводах [3, с. 443–447], при исследовании движения жидкости в канале, окружённом пористой средой [4], и в других областях прикладной науки. В уравнении (1) функция $q(x)$ представляет собой коэффициент теплоёмкости, а переменный коэффициент $p(x)$ в случае, когда второе уравнение (1) моделирует электрические колебания в проводах, выражается через коэффициенты электропроводности и электрической проницаемости среды.

Начально-краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались в работах многих авторов [5–12] (см. также библиографию в [8, 9]). В этих работах гиперболическую часть области представлял треугольник, ограниченный характеристиками волнового уравнения и характеристической линией изменения типа $y = 0$, и в основном изучались различные прямые начально-краевые задачи. Методы решения прямых и обратных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области были предложены в монографии [13] (см. также библиографию в ней). Среди работ по исследованию начально-краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа отметим [14–18], в которых исследовались задачи с локальными и нелокальными краевыми условиями и различными условиями сопряжения на границе раздела областей.

Вообще говоря, прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа не так хорошо изучены, как аналогичные задачи для классических уравнений. Отметим, что обратные задачи определения переменных коэффициентов и правых частей отдельных параболических уравнений второго порядка исследовались в работах [19–21] (см. также монографии [22, 23]). В [24–26] рассматривались задачи восстановления свёрточного ядра в параболических уравнениях, опысывающих процессы с памятью. Различным обратным задачам для уравнений гиперболического типа второго порядка посвящены монографии [27–30] (см. также обширную библиографию в них).

Настоящая статья продолжает исследования, начатые автором в работе [31], в которой изучена однозначная разрешимость обратной задачи (1)–(3), (5) определения переменного коэффициента $p(x)$ при младшем члене гиперболического уравнения в (1), когда $q(x) = 0$ и условие (4) отсутствует.

2. Исследование прямой задачи. Изучим прямую задачу (1)–(3). Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (B1), (B2) и функции $q(x), p(x) \in C[0, T]$. Тогда в области Ω_T существует единственное решение прямой задачи (1)–(3).*

Предположим, что функции $q(x)$ и $p(x)$ известны и непрерывны на отрезке $[0, T]$. Следуя традиции, установившейся в теории уравнений смешанного типа, обозначим $\tau(x) := u(x, 0)$, $\nu(x) = \partial u(x, 0)/\partial y$. Тогда решение уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = F(x, y)$$

в области Ω_{2T}, согласно формуле Даламбера, записывается в виде

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(s)ds - \frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla(x,y)} F(\xi,\eta)d\eta d\xi, \tag{6}$$

где $\nabla(x,y) = \{(\xi,\eta) : x+y \leqslant \xi \leqslant x-y,\ y + |\xi - x| \leqslant \eta \leqslant 0\}$.

Рассмотрим уравнение (1) в области Ω_{2T}. Перенося член, содержащий произведение $p(x)u$, в правую часть равенства и используя формулу (6), представим $u(x,y)$ в виде интегрального уравнения

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(s)ds - \frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla(x,y)} p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi. \tag{7}$$

Учитывая (3) и $\tau(0) = \psi(0)$, из (7) получаем равенство

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left[\psi(0) + \tau(2x)\right] - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2x} \nu(s)ds - \frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla(x,-x)} p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi, \quad x \in [0, T/2].$$

Отсюда нетрудно найти

$$\tau(x) = 2\psi(x/2) - \psi(0) + \int\limits_{0}^{x} \nu(s)ds + \iint\limits_{\nabla(x/2,-x/2)} p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi, \quad x \in [0,T]. \tag{8}$$

Продифференцировав это соотношение, будем иметь

$$\tau'(x) = \psi'(x/2) + \nu(x) + \int\limits_{x/2}^{x} p(\xi)u(\xi, -x+\xi)d\xi, \quad x \in [0,T]. \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) обычно называют основными соотношениями для функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученными из гиперболической части области.

Введём при $k = 1, 2$ обозначения

$$G_k(x-\xi, y, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(x-\xi)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left\{-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right\} + (-1)^k \exp\left\{-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right\}\right].$$

Используя функцию Грина $G_1(x-\xi, y, \eta)$ первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в области Ω_{1T}, решение уравнения (1) с условиями (2) и $u|_{AD} = \tau(x)$ представим в виде интегрального уравнения

$$u(x,y) = \int\limits_0^1 G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi + \int\limits_0^x q(\xi)\int\limits_0^1 G_1(x-\xi,y,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi. \tag{10}$$

Отметим, что функции $G_k(x-\xi,y,\eta)$, $k = 1,2$, имеют эквивалентные представления

$$G_1(x-\xi,y,\eta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-(n\pi)^2(x-\xi)\right\} \sin(n\pi y)\sin(n\pi\eta),$$

$$G_2(x-\xi,y,\eta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-(n\pi)^2(x-\xi)\right\} \cos(n\pi y)\cos(n\pi\eta)$$

и являются бесконечно дифференцируемыми в области Ω_{1T} [3, с. 200–204].

Найдем производные первых двух слагаемых в правой части (10), используя очевидные соотношения

$$G_{1y}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2\eta}(x-\xi,y,\eta),$$
$$G_{1\eta}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2y}(x-\xi,y,\eta),\quad G_{2\xi}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2yy}(x-\xi,y,\eta). \tag{11}$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\int\limits_0^1 G_{1y}(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=-\int\limits_0^1 G_{2\eta}(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=$$
$$=G_2(x,y,0)\varphi(0)-G_2(x,y,1)\varphi(1)+\int\limits_0^1 G_2(x,y,\eta)\varphi'(\eta)d\eta.$$

Учитывая (11) и интегрируя по частям, вычислим производную по y следующего слагаемого в правой части (10):

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi=-\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{2y}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi=$$
$$=\int\limits_0^x G_{2\xi}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi=-G_2(x,y,0)\tau(0)-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,y,0)\tau'(\xi)d\xi.$$

Используя эти соотношения, продифференцируем теперь (10) по y и положим $y=0.$ Так как $\partial u(x,0)/\partial y=\nu(x),$ то ввиду условий согласования (B2) и равенства (9) находим

$$\nu(x)=\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi'(\xi/2)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu(\xi)d\xi+\int\limits_0^x q(\xi)\int\limits_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi-$$
$$-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\int\limits_{\xi/2}^{\xi} p\,(s)\,u\,(s,-x+s)\,dsd\xi,\quad x\in[0,T]. \tag{12}$$

Исключив функцию $\tau(x)$ в (10) с помощью равенства (8), получим интегральное уравнение для функции $u(x,y)$ в области Ω_{1T}:

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)[2\psi(\xi/2)-\psi(0)]d\xi+$$
$$+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)dsd\xi+\int\limits_0^x q(\xi)\int\limits_0^1 G_1(x-\xi,y,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi+$$
$$+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\iint\limits_{\nabla(\xi/2,-\xi/2)} p(s)u(s,\eta)d\eta dsd\xi. \tag{13}$$

В уравнения (12) и (13) входит функция $u(x,y)$ для $(x,y)\in\Omega_{2T}$ (интегралы в последних слагаемых). Поэтому, учитывая формулу (8) для $\tau(x)$, перепишем (7) в виде

$$u(x,y)=\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi(0)+\int\limits_0^{x+y}\nu(s)ds+$$
$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla\left(\frac{x+y}{2},-\frac{x+y}{2}\right)}p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi+\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla\left(\frac{x-y}{2},-\frac{x-y}{2}\right)}p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi-\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla(x,y)}p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi. \quad (14)$$

Заметим, что для функции $G_2(x-\xi,0,0)$ в интегралах (12) имеет место следующее равенство:

$$G_2(x-\xi,0,0)=\frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}+\frac{2}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}. \quad (15)$$

Уравнения (12)–(14) представляют в области Ω_T систему линейных интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода для определения неизвестных функций $u(x,y)$ и $\nu(x)$. В силу формулы (15) интегральное уравнение (12) имеет слабую полярную особенность. Известно, что система уравнений (12)–(14) разрешима в классе непрерывных в $\overline{\Omega}_T$ функций. Это решение может быть найдено, например, методом последовательных приближений и $\nu(0)=0$ в силу $\lim\limits_{x\to 0}G_2(x,0,\eta)=0$ для $\eta\in(0,1)$.

Покажем теперь, что найденная функция $u(x,y)$ является классическим решением прямой задачи (1)–(3).

По известным u и ν функция τ вычисляется по формуле (8). Таким образом, $\tau(x)\in\in C^1[0,T]$, $\nu(x)\in C[0,T]$. Так как эти функции известны, то в дальнейшем мы используем уравнения (7) для u в области Ω_{2T}. При выполнении условий (B1) выражение, стоящее в формуле (7) справа, имеет по x, y частные производные первого порядка, поэтому и левая часть этого равенства, т.е. функция $u(x,y)$, также имеет производные первого порядка в области Ω_{2T}:

$$u_x(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau'(x+y)+\tau'(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[\nu(x+y)-\nu(x-y)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}p(\xi)u(\xi,y+|\xi-x|)\operatorname{sign}(\xi-x)d\xi, \quad (16)$$
$$u_y(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau'(x+y)-\tau'(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[\nu(x+y)+\nu(x-y)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}p(\xi)u(\xi,y+|\xi-x|)d\xi, \quad (17)$$

где $\tau'(x)$ определяется по формуле (9).

Для дальнейших рассуждений нам необходим тот факт, что в условиях (B1) и (B2) верны включения $\tau(x)\in C^2[0,T]$, $\nu(x)\in C^1[0,T]$. Тогда, учитывая эти условия и равенство

$$\int\limits_0^1 G_{2x}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta=\int\limits_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta,$$

с помощью интегрирования по частям находим

$$\int_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta = \int_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)d\eta.$$

Предположив теперь существование производной функции $\nu(x)$, с учётом условий (B1), (B2) и предыдущих соотношений получим для $\nu'(x)$ уравнение

$$\nu'(x) = \int_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)d\eta - \frac{1}{2}\int_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2)d\xi -$$

$$-\int_0^x G_2(x-\xi,0,0)\left[p(\xi)u(\xi,0) - \frac{1}{2}p(\xi/2)\psi(\xi/2) + \int_{\xi/2}^{\xi} p\,(\eta)\,u_y\,(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\right]d\xi +$$

$$+\int_0^x q(\xi)\int_0^1 G_{1yx}(x-\xi,0,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi - \int_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu'(\xi)d\xi, \quad x\in[0,T], \tag{18}$$

с непрерывным свободным членом (свободным членом является всё выражение в правой части, кроме последнего слагаемого) и слабо полярным ядром. Это уравнение разрешимо в классе непрерывных функций. Таким образом, $\nu(x)\in C^1[0,T]$. Тогда, в силу формулы (9) и условий (B1), имеем $\tau(x)\in C^2[0,T]$. Функция $u(x,y)$, построенная как решение уравнения (1) с условиями (2) $u|_{AD}=\tau(x)$, удовлетворяет уравнению (10), и при выполнении условий (B1), (B2), $q(x)\in C\,[0,T]$ принадлежит классу $C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T})$.

Полученные равенства (16), (17) показывают, что функции $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ являются непрерывными в области Ω_{2T}. Тогда, ввиду только что доказанной гладкости функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$, заключаем, что правые части равенств (17), (18) также имеют по x, y частные производные первого порядка и, следовательно, функция $u(x,y)$ имеет непрерывные в Ω_{2T} производные второго порядка. Для исследования обратной задачи нам понадобятся выражения для этих производных:

$$u_{xx}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau''(x+y)+\tau''(x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[\nu'(x+y)-\nu'(x-y)\right] + p(x)u(x,y) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[p\,(x+y)\,u\,(x+y,0)+p\,(x-y)\,u\,(x-y,0)\right] + \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} p(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)d\xi, \tag{19}$$

$$u_{xy}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau''(x+y)-\tau''(x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[\nu'(x+y)+\nu'(x-y)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[p\,(x+y)\,u\,(x+y,0)-p\,(x-y)\,u\,(x-y,0)\right] - \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} p(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)\operatorname{sign}(\xi-x)d\xi, \tag{20}$$

$$u_{yy}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau''(x+y)+\tau''(x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[\nu'(x+y)-\nu'(x-y)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[p\,(x+y)\,u\,(x+y,0)+p\,(x-y)\,u\,(x-y,0)\right] + \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} p(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)d\xi. \tag{21}$$

Формулы (19)–(21) показывают, что $u_{xx},u_{yx},u_{yy}\in C\left(\Omega_{2T}\right)$.

Таким образом, построенные в областях Ω_{1T} и Ω_{2T} функции в совокупности определяют классическое решение прямой задачи (1)–(3) в области Ω_T. Теорема доказана.

3. Исследование обратной задачи. Построение интегральных уравнений. Переходим к исследованию обратной задачи. Пусть выполнены условия (B2). Умножив уравнение (1) в области Ω_{1T} на функцию $h(y)$ и проинтегрировав его по отрезку $[0,1]$, с учётом (4) найдём

$$q(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{f(x)}\int_0^1 h''(y)u(\xi,y)dy, \quad x \in [0,T]. \tag{22}$$

С целью получения интегрального уравнения для неизвестной функции $p(x)$, $x \in [0,T]$, предположим, что выполнены условия (B2), и представим $p(x)$ в виде $p(x) = p_1(x)$, $x \in [0,T/2]$, $p(x) = p_2(x)$, $x \in [T/2,T]$, причём $p_1(T/2) = p_2(T/2)$. Здесь и далее значение функции на концах отрезка понимается как предел в точке с той стороны, где она определена.

В работе [31] выведено интегральное уравнение для $p(x)$ на основе условий (5) в обратной задаче, когда $q(x) = 0$. При этом были использованы уравненения (18)–(21) и условия (5). В данной статье только уравнение (18) для функции ν' отличается от соответствующего уравнения в [31] наличием последнего интеграла в правой части, а остальные уравнения одинаковы. Приведём окончательное уравнение (см. [31]) для $p(x)$:

$$\begin{gathered}
p(x) = p_0(x) - \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)\nu'(\xi)d\xi + \\
+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)\left[p(\xi)\varphi(\xi) + \int_{\xi/2}^{\xi} p(\eta)u_y(\eta,-\xi+\eta)d\eta\right]d\xi + \\
+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\left[\int_{x-T/2}^{2x-T} p(\xi)u_y(\xi,-2x+T+\xi)d\xi + \int_{2x-T}^{x} p(\xi)u_y(\xi,2x-T-\xi)d\xi\right] - \\
-\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int_0^{2x-T} q(\xi)\int_0^1 G_{1yx}(2x-T-\xi,0,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi,
\end{gathered} \tag{23}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда $(\theta(t)=1,\ t\geqslant 0,\ \theta(t)=0,\ t<0)$;

$$\begin{gathered}
p_0(x) = \theta(T/2-x)\frac{\psi_1'(x)}{\psi(x)} + \frac{\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}[\psi_2''(x) - \psi''(x-T/2) + \psi_1'(x-T/2)] - \\
-\frac{2}{\psi_2(x)}\int_0^1 G_2(2x-T,0,\eta)\varphi'''(\eta)d\eta + \frac{2}{\psi_2(x)}\int_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)[\psi''(\xi/2) - \psi_1'(\xi/2)]d\xi.
\end{gathered}$$

Также в работе [31] получены достаточные условия на данные:

$$\psi_1'(T/2) = \psi_2''(T/2) - \psi''(0) + \psi_1'(0), \tag{24}$$

$$\int_0^{T/2} \frac{\psi_1'(\xi)}{\psi(\xi)}\left[\psi_1(\xi) - \psi_1'(\xi)\right]d\xi = 0, \tag{25}$$

при выполнении которых $p(x) \in C[0,T]$.

Определим теперь основные интегральные уравнения, которые составляют замкнутую систему для нахождения решения обратной задачи. Для этого исключим сначала функцию $\tau'(x)$

в (17) с помощью (9), а затем $\nu(x)$ в получившемся уравнении с помощью очевидного равенства $\nu(x)=\int_0^x \nu'(\xi)d\xi$. Введём для сокращения записей интегральный оператор вольтерровского типа по формуле

$$P[u,\nu',p](x,y)=\int\limits_0^{x+y}\nu'(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{(x+y)/2}^{x+y}p(\xi)u(\xi,-x-y+\xi)d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(x-y)/2}^{x-y}p(\xi)u(\xi,-x+y+\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}p(\xi)u(\xi,y+|\xi-x|)d\xi$$

и перепишем уравнение (17) в виде

$$u_y(x,y)=\frac{1}{2}\left[\psi'\left(\frac{x+y}{2}\right)-\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]+P[u,\nu',p](x,y). \tag{26}$$

Если теперь исключим $u_y(x,y)$ в уравнениях (18), (22) с помощью (26) и подставим вместо $q(x)$ в (13), (18), (23) правую часть (22), то получим замкнутую систему интегральных уравнений (13), (14), (18), (23) относительно неизвестных функций $u(x,y)$, $\nu'(x)$, $p(x)$ в области $\overline{\Omega}_T$ $\big($при этом также будем считать, что $\nu(x)$ в уравнениях (13), (14) заменена на $\int_0^x \nu'(\xi)d\xi\big)$. После решения этой системы $q(x)$ находится по формуле (22).

Для удобства введём обозначения для неизвестных функций:

$$w_1(x,y):=\theta(y)w_1^1(x,y)+\theta(-y)w_1^2(x,y),$$

где $w_1^1(x,y):=u(x,y)$, $(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}$; $w_1^2(x,y):=u(x,y)$, $(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}$; а $\theta(\cdot)$, как и выше, — функция Хевисайда;

$$w_2(x):=\nu'(x),\quad w_3(x):=p(x),\quad x\in[0,T].$$

Тогда уравнения (13), (14), (18), (23) с учётом описанных выше постановок и введённых обозначений могут быть записаны в области $\overline{\Omega}_T$ в векторно-операторном виде

$$w(x,y)=Aw(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\Omega}_T, \tag{27}$$

где $w(x,y)=\begin{bmatrix}w_1(x,y) & w_2(x) & w_3(x)\end{bmatrix}^*$, $*$ — знак транспонирования, $A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & A_3\end{bmatrix}^*$ и A_i, $i=1,2,3$, в соответствии с правыми частями (13), (14), (18), (23) определяются равенствами

$$A_1w(x,y)=\theta(y)w_{01}^1(x,y)+\theta(-y)w_{01}^2(x,y)+\theta(y)A_1^1w(x,y)+\theta(-y)A_1^2w(x,y), \tag{28}$$

где

$$A_1^1w(x,y)=w_{01}^1(x,y)+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^\xi(\xi-s)w_2(s)dsd\xi+$$
$$+\int\limits_0^x\left[-\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\xi)}\int\limits_0^1 h''(\theta)w_1(\xi,\theta)d\theta\right]\int\limits_0^1 G_1(x-\xi,y,\eta)w_1(\xi,\eta)d\eta d\xi+$$
$$+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\iint\limits_{\nabla(\xi/2,-\xi/2)}w_3(s)w_1(s,-\xi+s)dsd\xi, \tag{29}$$

$$A_1^2 w(x,y) = w_{01}^2(x,y) + \int\limits_0^{x+y} (x+y-s) w_2(s)ds + \frac{1}{2} \iint\limits_{\nabla\left(\frac{x+y}{2}, -\frac{x+y}{2}\right)} w_3(\xi) w_1(\xi,\eta) d\eta d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint\limits_{\nabla\left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right)} w_3(\xi) w_1(\xi,\eta) d\eta d\xi - \frac{1}{2} \iint\limits_{\nabla(x,y)} w_3(\xi) w_1(\xi,\eta) d\eta d\xi, \tag{30}$$

$$A_2 w(x) = w_{02}(x) - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0) w_2(\xi) d\xi - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0) \Big\{ w_3(\xi) w_1(\xi,0) -$$

$$- \frac{1}{2} w_3\left(\frac{\xi}{2}\right) \psi\left(\frac{\xi}{2}\right) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} w_3(\eta) \left(\frac{1}{2} \left[\psi'\left(\frac{2\eta-\xi}{2}\right) - \psi'\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] + P[w_1,w_2,w_3](\eta,-\xi+\eta) \right) d\eta \Big\} d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^x \left[-\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\xi)} \int\limits_0^1 h''(s) w_1(\xi,s) ds \right] \int\limits_0^1 G_{1yx}(x-\xi,0,\eta) w_1(\xi,\eta) d\eta d\xi, \tag{31}$$

$$A_3 w(x) = w_{03}(x) - \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)} \int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0) w_2(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)} \int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0) \Big\{ w_3(\xi)\varphi(\xi) +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} w_3(\eta) \left(\left[\psi'\left(\frac{2\eta-\xi}{2}\right) - \psi'\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] + P[w_1,w_2,w_3](\eta,-\xi+\eta) \right) d\eta \Big\} d\xi +$$

$$+ \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)} \Big\{ \int\limits_{x-T/2}^{2x-T} w_3(\xi) \left(\left[\psi'\left(\frac{2(\xi-x)+T}{2}\right) - \psi'\left(\frac{2x-T}{2}\right) \right] + P[w_1,w_2,w_3](\xi,-2x+T+\xi) \right) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{2x-T}^{x} w_3(\xi) \left(\left[\psi'\left(\frac{2x-T}{2}\right) - \psi'\left(\frac{2(\xi-x)+T}{2}\right) \right] + P[w_1,w_2,w_1](\xi,2x-T-\xi) \right) d\xi \Big\} -$$

$$- \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)} \int\limits_0^x \left[-\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\xi)} \int\limits_0^1 h''(\theta) w_1(\xi,\theta) d\theta \right] \int\limits_0^1 G_{1yx}(x-\xi,0,\eta) w_1(\xi,\eta) d\eta d\xi. \tag{32}$$

В формулах (28)–(32) через w_{01}^1, w_{01}^2, w_{02}, w_{03} обозначены свободные члены интегральных уравнений

$$w_{01}^1(x,y) := \int\limits_0^1 G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta) d\eta + 2\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\psi(\xi/2) d\xi,$$

$$w_{01}^2(x,y) := \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi(0), \tag{33}$$

$$w_{02}(x) := \int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta) d\eta - \frac{1}{2}\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2) d\xi, \quad w_{03}(x) := p_0(x).$$

4. Исследование обратной задачи. Доказательство основного результата. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (B1)–(B4), (24), (25). Тогда для достаточно малых* T *существует единственное решение* $(q(x),\, p(x)) \in C\,[0,T]$ *обратной задачи (1)–(5).*

Доказательство. Применим принцип сжимающих отображений (теорема Банаха) к уравнению (27). Нам необходимы оценки интегралов, содержащих функции G_k, $k=1,2$, и их некоторые прозводные в определениях компонент оператора A в формулах (28)–(32) и их свободных членах (33). Ниже оценим один из интегралов (второй оценивается аналогично). При этом будем использовать легко проверяемые соотношения

$$\int\limits_0^1 G_k(x,y,\eta)d\eta \leqslant 1, \quad k=1,2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2z^2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2z}, \quad z>0.$$

Справедливы следующие неравенства (см. [20, 31]):

$$\left|\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta\right| \leqslant \max_{y\in[0,1]} |\varphi'(y)|,$$

$$\left|\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi'(\xi/2)d\xi\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \frac{\psi'(\xi/2)}{\sqrt{x-\xi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}\right)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}+x\right| \leqslant \sqrt{T}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\right)\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|. \tag{34}$$

Оценим теперь интеграл с некоторой непрерывной функцией $g(x,y)$:

$$\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta)g(\xi,\eta)d\eta d\xi\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|g(x,y)|\times$$

$$\times\int\limits_0^x\frac{d\xi}{(x-\xi)^{3/2}}\int\limits_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\eta+2\pi)\exp\left\{-\frac{(\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n-\eta)\exp\left\{-\frac{(2n-\eta)^2}{4(x-\xi)}\right\}\right)d\eta.$$

Вычислив здесь интегралы, продолжим

$$\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta)g(\xi,\eta)d\eta d\xi\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|g(x,y)|\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}\times$$

$$\times\left|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\exp\left\{-\frac{-n^2}{x-\xi}\right\}-\exp\left\{-\frac{(2n+1)^2}{4(x-\xi)}\right\}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(2n-1)^2}{4(x-\xi)}\right\}-\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}\right)\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|g(x,y)|\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \leqslant \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|g(x,y)|. \tag{35}$$

Далее, использовав эквивалентное выражение для $G_1(x,y,\eta)$ в виде (10), будем иметь равенство

$$G_{1\eta}(x-\xi,y,0)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\{-(n\pi)^2(x-\xi)\}n\pi\sin(n\pi)=\int\limits_0^1 G_{1\xi}(x-\xi,y,\eta)\,(1-\eta)\,d\eta,$$

которое проверяется непосредственно.

Воспользовавшись этими соотношениями, преобразуем следующий интеграл:

$$\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)dsd\xi=\int\limits_0^1(1-\eta)\int\limits_0^x G_{1\xi}(x-\xi,y,\eta)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)dsd\xi=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\eta)\biggl\{\biggl[G_1(x-\xi,y,\eta)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)ds\biggr]_0^x-\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi\biggr\}=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\eta)\delta(y-\eta)d\eta\int\limits_0^{\xi}\nu(s)ds-\int\limits_0^1(1-\eta)\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi d\eta=$$

$$=(1-y)\int\limits_0^x\nu(\xi)d\xi-\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi d\eta. \tag{36}$$

Здесь использовано соотношение $\lim\limits_{\xi\to x}G_1(x-\xi,y,\eta)=\delta(y-\eta)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, для которой имеет место равенство $\int_0^1 a(\eta)\delta(y-\eta)d\eta=a(y)$, $a(y)$ — любая непрерывная функция на отрезке $[0,1]$.

Таким образом, мы получили равенство

$$\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)dsd\xi=(1-y)\int\limits_0^x\nu(\xi)d\xi-\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi d\eta,$$

из которого следует оценка

$$\biggl|\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)dsd\xi\biggr|\leqslant 2T\max_{x\in[0,T]}|\nu(x)|. \tag{37}$$

Вернёмся к уравнению (27). Очевидно, что оператор A переводит функции $w(x,y)\in\in C\left(\overline{\Omega}_T\right)$ в функции, также принадлежащие пространству $C\left(\overline{\Omega}_T\right)$. Покажем теперь, что при достаточно малом T оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S\left(w_0,r\right)\subset C\left(\overline{\Omega}_T\right)$ радиуса r с центром в точке $w_0(x,y)=(w_{01}(x,y),\ w_{02}(x),\ w_{03}(x))$ в себя. Тем самым мы покажем, что уравнение (27) имеет в области $\overline{\Omega}_T$ при достаточно малом T единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|w-w_0\|_T\leqslant r$. Норму вектор-функции w определим равенством

$$\|w\|_T=\max\Bigl\{\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_T}|w_1(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]}|w_2(x)|,\ \max_{x\in[0,T]}|w_3(x)|\Bigr\},$$

при этом для $\|w_1\|_T$ используем $\|w_1\|_T=\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}\left|w_1^1(x,y)\right|+\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}}\left|w_1^2(x,y)\right|$. Очевидно, что для элементов $w\in S\left(w_0,r\right)$ имеет место оценка

$$\|w\|_T\leqslant\|w_0\|_T+r=:R,$$

где

$$\|w_0\|_T = \max\Big\{\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_T}|w_{01}(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]}|w_{02}(x)|,\ \max_{x\in[0,T]}|w_{03}(x)|\Big\},$$

$$\|w_{01}\|_T = \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|w_{01}^1(x,y)| + \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}}|w_{01}^2(x,y)|.$$

Из соотношений (33), с учётом (34)–(37), для нормы $\|w_0\|_T$ следует оценка

$$\|w_0\|_T \leqslant \max\Big\{\max_{y\in[0,1]}|\varphi(y)| + (4T+3)\max_{x\in[0,T/2]}|\psi(x)|,$$

$$\max_{y\in[0,1]}|\varphi'''(y)| + \sqrt{T}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{T}}{2}\bigg)\max_{x\in[0,T/2]}|\psi''(x)|,$$

$$\frac{1}{\psi_0}\max_{x\in[0,T/2]}|\psi_1'(x)| + \frac{1}{\psi_{00}}\bigg[\max_{x\in[T/2,T]}|\psi_2''(x)| + 2\max_{y\in[0,1]}|\varphi'''(y)| +$$

$$+\bigg(1+2\sqrt{T}\bigg(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\bigg)\bigg)\max_{x\in[0,T/2]}(|\psi''(x)|+|\psi_1'(x)|)\bigg]\bigg\}.$$

Теперь покажем, что для некоторых малых T оператор A является на шаре $S\,(w_0,r)$ оператором сжатия. Действительно, пусть $w\in S\,(w_0,r)$. Тогда для всех $(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}$, учитывая соотношения (28)–(32), получаем неравенства

$$|A_1w-w_{01}| \leqslant \bigg[3+\frac{1}{f_0}\Big(\max_{x\in[0,T]}|f'(x)| + R\max_{x\in[0,1]}|h''(y)|\Big) + 3\Big(\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|+RT\Big)\bigg]RT,$$

$$|A_2w-w_{02}| \leqslant \bigg(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\bigg)\bigg(1+3\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|+\frac{3RT}{4}\bigg)R\sqrt{T},$$

$$|A_3w-w_{03}| \leqslant \frac{4}{\psi_{00}}\bigg(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\bigg)\bigg(1+\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|+\frac{TR}{2}+\frac{3R\sqrt{T}}{2}\bigg)R\sqrt{T}.$$

Обозначим через T^* наибольшее значение T, для которого правые части этих неравенств будут меньше, чем R. Тогда для $T\leqslant T^*$ имеет место включение $Aw\in S(w_0,r)$. Нам остаётся показать, что оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(w_0,r)$. Для этого возьмём любые два элемента $w^1,w^2\in S(w_0,r)$ и оценим норму разности между их образами Aw^1, Aw^2. Обозначим компоненты элементов $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ через $w_i^{(1)}$, $w_i^{(2)}$, $i=1,2,3$. При оценке $\|Aw^{(1)}-Aw^{(2)}\|_T$ воспользуемся неравенствами

$$\big|w_k^{(1)}w_s^{(1)}-w_k^{(2)}w_s^{(2)}\big| \leqslant \big|w_k^{(1)}-w_k^{(2)}\big|\,\big|w_s^{(1)}\big| + \big|w_k^{(2)}\big|\,\big|w_s^{(1)}-w_s^{(2)}\big| \leqslant 2R\big\|w^{(1)}-w^{(2)}\big\|_T,\quad k,s=1,2,3,$$

которые справедливы для произвольных $w^1,w^2\in S\,(w_0,r)$. Проведя очевидные оценки, находим

$$\big|A_1w^{(1)}-A_1w^{(2)}\big| \leqslant$$

$$\leqslant \bigg[3+\frac{1}{f_0}\Big(\max_{x\in[0,T]}|f'(x)|+R\max_{x\in[0,1]}|h''(y)|\Big)+3\Big(\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|+2RT\Big)\bigg]T\big\|w^{(1)}-w^{(2)}\big\|_T,$$

$$\big|A_2w^{(1)}-A_2w^{(2)}\big| \leqslant \bigg(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\bigg)\Big(1+3\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|+3RT\Big)\sqrt{T}\big\|w^{(1)}-w^{(2)}\big\|_T,$$

$$\big|A_3w^{(1)}-A_3w^{(2)}\big| \leqslant \frac{4}{\psi_{00}}\bigg(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\bigg)\Big(1+\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|+TR+3R\sqrt{T}\Big)\sqrt{T}\big\|w^{(1)}-w^{(2)}\big\|_T.$$

Отсюда следует, что

$$\|Aw^{(1)} - Aw^{(2)}\| \leqslant \frac{T}{T^*}\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_T$$

и оператор A при $T \in (0, T^*)$ осуществляет сжатое отображение шара $S(w_0, r)$ на себя. Тогда, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (27) определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. Теорема доказана.

Замечание. По найденной функции $w_1(x, y)$ для $y \in [0, 1]$ коэффициент $q(x)$ параболического уравнения в (1) находится по формуле (22).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджета Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г.* Линейные уравнения математической физики. М., 1964.
2. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 3. С. 3–19.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1953.
4. *Лейбензон Л.Л.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л., 1947.
5. *Золина Л.А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 991–1001.
6. *Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 261–264.
7. *Елеев В.А.* О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 22–29.
8. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент, 1979.
9. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, 1986.
10. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 72–78.
11. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 117–126.
12. *Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором Бесселя // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25. № 3. С. 14–24.
13. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Уфа, 2015.
14. *Капустин Н.Ю.* Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 6. С. 1294–1298.
15. *Елеев В.А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 56–63.
16. *Елеев В.А.* Обобщенная задача Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 41–53.
17. *Елеев В.А., Балкизова А.Х.* О некоторых задачах сопряжения уравнений параболо-гиперболического типов с интегро-дифференциальными условиями на границе раздела областей // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. Т. 3. № 24. С. 8–25.
18. *Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А.* О задаче типа Франкеля для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 298–304.

19. *Прилепко А.И., Костин А.В., Соловьёв В.В.* Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гельдера и Соболева // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2017. Т. 17. № 3. С. 67–85.
20. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 3. С. 612–621.
21. *Durdiev D.K., Durdiev D.D.* The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation // Turkish J. of Mathematics. 2022. V. 46. № 8. P. 3223–3233.
22. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
23. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, 1999.
24. *Durdiev D.K., Zhumaev Z.Z.* Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor // Math. Methods in the Applied Sci. 2022. V. 45. № 14. P. 8374–8388.
25. *Durdiev D.K., Zhumaev Z.Z.* One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain // Ukrainian Math. J. 2022. V. 73. № 11. P. 1723–1740.
26. *Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж.* Задача определения тепловой памяти проводящей среды // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 796–807.
27. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
28. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009.
29. *Hasanov A., Romanov V.G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Springer, 2017.
30. *Durdiev D.K., Totieva Z.D.* Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations. Singapore, 2023.
31. *Дурдиев Д.К.* Об определении коэффициента уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1633–1644.

Институт математики
имени В.И. Романовского АН РУз,
г. Ташкент

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.
После доработки 01.08.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.