

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.54+517.913

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ
И ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА

© 2024 г. В. И. Мироненко, В. В. Мироненко

Прослеживаются связи понятия обобщённого интеграла с понятиями отражающей функции и отображения Пуанкаре (отображения за период) для периодических дифференциальных систем. Понятие обобщённого первого интеграла применяется при изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений периодических дифференциальных систем и исследовании проблемы центра-фокуса.

Ключевые слова: периодическая дифференциальная система, обобщённый первый интеграл, отражающая функция, отображение Пуанкаре, периодическое решение.

DOI: 10.31857/S0374064124010025, EDN: RPYEFD

1. Введение. Вспомогательные сведения. Пусть некоторый детерминированный процесс моделируется дифференциальной системой

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

правая часть которой непрерывно дифференцируема.

Отражающей функцией рассматриваемого процесса (или дифференциальной системы (1)) называется [1] функция $F(t, x)$, которая для каждого решения $x(t)$ этой системы, определённого на симметричном относительно нуля интервале $(-\alpha, \alpha)$, обладает следующими свойствами: $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$ для всех $t \in (-\alpha, \alpha)$ и $F(0, x) \equiv x$.

Отражающая функция дифференциальной системы позволяет по её прошлому состоянию $x(-t)$ в момент времени $-t$ найти будущее состояние $x(t) = F(-t, x(-t))$ в симметричный относительно нуля момент времени t и обладает своеобразным инволюционным свойством $F(-t, F(t, x)) \equiv x$.

Для каждой системы (1) с общим решением в форме Коши $\varphi(t; t_0, x_0)$ имеет место тождество $F(t, x) \equiv \varphi(-t; t, x)$, которое можно принять и за определение отражающей функции дифференциальной системы (1).

Впервые понятие отражающей функции появилось в статье [1]. Последующим исследованиям по теории отражающей функции посвящены монография [2] и брошюра [3], в которой приведено большое количество примеров и упражнений. Значительный вклад в теорию отражающей функции внесла Чжоу Чжиньсинь [4].

Приведём некоторые свойства дифференциальных систем, необходимые для понимания данной статьи, доказательство которых можно найти в работах [2, 3, 5].

1. Дифференцируемая функция $F = F(t, x)$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши [2, с. 11]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + X(t, x) \frac{\partial F}{\partial x} + X(-t, F) = 0, \quad F(0, x) \equiv x.$$

2. Пусть правая часть $X(t, x)$ системы (1) не только дифференцируема, но и 2ω -периодична по переменной t . Тогда функция $F(-\omega, x) \equiv \varphi(\omega; -\omega, x)$ представляет собой отображение Пуанкаре на отрезке $[-\omega, \omega]$ (отображение за период 2ω). При этом решение $\varphi(t; -\omega, x_0)$ системы (1) будет 2ω -периодичным тогда и только тогда, когда оно продолжимо на отрезок $[-\omega, \omega]$ и верно равенство $F(-\omega, x_0) = x_0$ [2, с. 12].

3. Функция $F(t, x) \equiv x$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда правая часть $X(t, x)$ этой системы нечётна по t . При этом все решения системы (1), продолжимые на отрезок $[-\omega, \omega]$, являются чётными. Они будут 2ω -периодичными, если $X(t, x)$ 2ω -периодична по t [2, с. 13; 3, с. 63].

4. Разные системы вида (1) одной и той же размерности n могут иметь одну и ту же отражающую функцию. Две системы вида (1) с отражающими функциями $F(t, x)$ и $\Phi(t, x)$ названы *эквивалентными*, если $F(t, x) \equiv \Phi(t, x)$ для $x \in D$ и $t \in [-\alpha, \alpha]$ при некотором $\alpha > 0$ [2, с. 21–26].

Множество систем (и только таких систем) вида

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1} R(t, x) - R(-t, F),$$

где $R(t, x)$ — любая дифференцируемая вектор-функция, образует класс эквивалентности, характеризующий отражающей функцией $F(t, x)$ при условии, что эта функция обладает свойством [5, с. 83]

$$F(-t, F(t, x)) \equiv F(0, x) \equiv x.$$

5. Дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial F(-t, F)}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t}$$

названа *простой* [6] (см. также [5, с. 81–86]).

6. Система $dx/dt = S(t, x)$ с непрерывно дифференцируемой правой частью является простой тогда и только тогда, когда для её отражающей функции $F(t, x)$ выполнено тождество [5, с. 82]

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) S(t, x) \equiv S(-t, F(t, x)).$$

Исследованиями простых систем, их применением и другими вопросами теории отражающей функции, начиная с работы [7], активно занимается Э. В. Мусафиров.

7. Если система $dx/dt = X(t, x)$ имеет отражающую функцию $F(t, x)$, то все эквивалентные ей системы (и только они) образуют множество систем вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + F_x^{-1} R(t, x) - R(-t, F),$$

где $R(t, x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая вектор-функция (см. лемму в [2, с. 24] или теорему 2.10 в [5, с. 78]).

2. Основные результаты. Будем традиционно определять первый интеграл дифференциальной системы (1) как дифференцируемую функцию $U(t, x)$, которая на каждом решении $x(t)$ этой системы обращается в постоянную [8, с. 308].

В работах [9–11] указаны условия существования стационарных первых интегралов у нестационарных дифференциальных систем и рассмотрены некоторые случаи их использования.

Если $F(t, x)$ — отражающая функция системы (1), а $U(t, x)$ — её первый интеграл, то $U(-t, F(t, x(t))) \equiv U(-t, x(-t)) \equiv c \equiv U(t, x(t))$.

Таким образом, в силу произвольности решения $x(t)$ системы (1) верно тождество

$$U(-t, F(t, x)) \stackrel{t, x}{=} U(t, x).$$

Так будет и всякий раз, когда $U(t, x(t))$ будет чётной функцией времени t на каждом решении $x(t)$, $t \in (-\alpha, \alpha)$, системы (1). В связи с этим дадим здесь

Определение. Всякую дифференцируемую функцию $U(t, x)$, отличную от тождественной постоянной, назовём *обобщённым первым интегралом* дифференциальной системы (1),

если для любого решения $x(t)$ этой системы, определённого на симметричном относительно нуля интервале $(-\alpha, \alpha)$, функция $U(t, x(t))$ является чётной.

Множество обобщённых первых интегралов системы (1) гораздо шире множества обычных первых интегралов. Для понимания этого факта достаточно заметить, что любая дифференцируемая функция $V(t, U_1(t, x), \dots, U_r(t, x))$ от обобщённых первых интегралов $U_1(t, x), \dots, U_r(t, x)$, чётная по первому аргументу, также представляет собой обобщённый первый интеграл.

Так как для отражающей функции $F(t, x)$ системы (1) и любого решения $x(t)$, $t \in (-\alpha, \alpha)$, этой системы верно тождество $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$, то вектор-функция $x(t) + \overline{F(t, x(t))} \equiv x(t) + x(-t)$ является чётной. Поэтому функции $U_i(t, x) := x_i + F_i(t, x)$, $i = \overline{1, n}$, где $F_i(t, x)$ — i -я компонента отражающей функции $F(t, x)$ системы (1), представляют собой обобщённые первые интегралы системы (1). Они образуют базис во множестве обобщённых первых интегралов этой системы в том смысле, что любой обобщённый первый интеграл $U(t, x)$ системы (1) может быть получен по формуле

$$U(t, x) = \Phi(t, x_1(t) + F_1(t, x(t)), x_2(t) + F_2(t, x(t)), \dots, x_n(t) + F_n(t, x(t))),$$

где функция Φ чётная по первому аргументу t .

Теорема 1. Пусть для дифференцируемых, отличных от тождественных постоянных, функций $U(t, x) = (U_1(t, x) \dots U_r(t, x))^T$ (знак “T” обозначает операцию транспонирования) выполнены тождества

$$\frac{\partial U}{\partial t} + X(t, x) \frac{\partial U}{\partial x} \stackrel{t, x}{=} f_{\text{од}}(t, U(t, x)),$$

где $f_{\text{од}}(t, U)$ — нечётная по первому аргументу дифференцируемая вектор-функция.

Тогда для отражающей функции $F(t, x)$ дифференциальной системы (1) выполнены тождества $U(-t, F(t, x)) \equiv U(t, x)$, а для каждого решения $x(t)$, $t \in (-\alpha, \alpha)$, системы (1) — тождества $U(-t, x(-t)) \equiv U(t, x(t))$, т.е. все функции $U_i(t, x)$, $i = \overline{1, r}$, являются обобщёнными первыми интегралами системы (1).

Доказательство. Пусть $x(t)$, $t \in (-\alpha, \alpha)$, — решение системы (1). Построим функции $V_i(t) := U_i(t, x(t))$, $i = \overline{1, r}$, которые, согласно условию теоремы 1, образуют решение $V(t) = (V_1(t) \dots V_r(t))^T$ системы $dV(t)/dt = f_{\text{од}}(t, V)$ с нечётной по переменной t правой частью. Тогда, согласно сформулированному выше свойству 3 отражающей функции, функции $V_i(t) = U_i(t, x(t))$, $i = \overline{1, r}$, являются чётными, что и доказывает теорему.

Следствие 1. Если выполнены все условия теоремы 1 и вектор-функция $f_{\text{од}}(t, U)$ является 2ω -периодической по t , то для любого продолжимого на отрезок $[-\omega, \omega]$ решения $x(t)$ системы (1) функции $U_i(t, x(t))$, $i = \overline{1, r}$, являются не только чётными, но и 2ω -периодическими по t .

Для доказательства достаточно снова использовать свойство 3 отражающей функции из п. 1.

В качестве примера использования теоремы 1 рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(t)x + m(t)y + (\beta(t)x - n(t)y)z, \\ \frac{dy}{dt} &= -m(t)x + \alpha(t)y + (n(t)x + \beta(t)y)z, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma(t)(x^2 + y^2) + \delta(t)z. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 2. Пусть в системе (2) все коэффициенты представляют собой непрерывные 2ω -периодические функции, из которых $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ и $\delta(t)$ к тому же нечётные. Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$ этой системы устойчиво неасимптотически, а для всякого продолжимого на отрезок $[-\omega, \omega]$ решения $(x(t), y(t), z(t))$ функции $x^2(t) + y^2(t)$ и $z(t)$ чётны и 2ω -периодичны.

Доказательство. Легко проверить выполнение соотношений

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2\alpha(t)(x^2 + y^2) + 2\beta(t)z(x^2 + y^2) \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt} = \gamma(t)(x^2 + y^2) + \delta(t)z.$$

Тогда, согласно теореме 1, функции $x^2 + y^2$ и z являются обобщёнными первыми интегралами системы (2) и выполняются равенства $x^2(-\omega) + y^2(-\omega) = x^2(\omega) + y^2(\omega)$, $z(-\omega) = z(\omega)$. Продолжимость решений системы (2), начинающихся при $t = 0$ вблизи точки $t = 0$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, гарантируется теоремой об интегральной непрерывности (теоремой о непрерывной зависимости от начальных данных) [12, с. 22]. Отсюда следует 2ω -периодичность функций $x^2(t) + y^2(t)$ и $z(t)$, а значит, и неасимптотическая устойчивость нулевого решения дифференциальной системы (2). Теорема доказана.

Используя теорему 1, легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть:

1) для дважды непрерывно дифференцируемых функций $U_1(t, x), \dots, U_r(t, x)$, где $x = (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n)^T$, определитель матрицы

$$\frac{\partial(U_1, \dots, U_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} := \begin{pmatrix} \partial U_1 / \partial x_1 & \dots & \partial U_1 / \partial x_r \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial U_r / \partial x_1 & \dots & \partial U_r / \partial x_r \end{pmatrix}$$

не обращается в нуль в области $D \subset \mathbb{R}^n$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

2) непрерывно дифференцируемые функции $S_i(t, U_1, \dots, U_r)$, $i = \overline{1, r}$, нечётны по первому аргументу;

3) произвольные функции $f_{r+1}(t, x), \dots, f_n(t, x)$ непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R} \times D$.

Тогда функции $U_1(t, x), \dots, U_r(t, x)$ являются обобщёнными первыми интегралами системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix} &= \left(\frac{\partial(U_1, \dots, U_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} \right)^{-1} \left[\begin{pmatrix} S_1(t, U_1, \dots, U_r) \\ \dots \\ S_r(t, U_1, \dots, U_r) \end{pmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_r \end{pmatrix} - \frac{\partial(U_1, \dots, U_r)}{\partial(x_{r+1}, \dots, x_n)} \begin{pmatrix} f_{r+1}(t, x) \\ \dots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{r+1}(t, x) \\ \dots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

При этом для отражающей функции $F(t, x)$ системы (3), (4) выполнены тождества

$$U_i(-t, F_1(t, x), \dots, F_n(t, x)) = U_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, r}.$$

Доказательство теоремы становится очевидным, если соотношения (3), (4) записать в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_1(t, x) \\ \dots \\ U_r(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(t, U_1(t, x), \dots, U_r(t, x)) \\ \dots \\ S_r(t, U_1(t, x), \dots, U_r(t, x)) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что для любого решения $x(t)$ системы (3), (4) вектор-функция $U_i(t, x(t)) = (U_1(t, x(t)), \dots, U_r(t, x(t)))^T$ является решением системы (5) с нечётной по t правой частью. Поэтому, согласно свойству 3 отражающей функции, функции $U_1(t, x(t)), \dots, U_r(t, x(t))$ чётны, откуда и следует утверждение теоремы.

Отражающая функция системы (5) имеет вид $F(t, U_1, \dots, U_r) = (U_1 \dots U_r)^T$, т.е. $F(t, U) = U$. Если потребовать, чтобы она задавалась формулой вида $F(t, U) = \Phi(t, U)$, то придём к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть:

1) для дважды непрерывно дифференцируемых функций $U_1(t, x), \dots, U_r(t, x)$, где $x = (x_1 \dots x_r \ x_{r+1} \dots x_n)^T$, определитель матрицы

$$\frac{\partial(U_1, \dots, U_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} := \begin{pmatrix} \partial U_1 / \partial x_1 & \dots & \partial U_1 / \partial x_r \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial U_r / \partial x_1 & \dots & \partial U_r / \partial x_r \end{pmatrix}$$

не обращается в нуль в области $D \subset \mathbb{R}^n$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

2) непрерывно дифференцируемые функции $S_i(t, U_1, \dots, U_r)$, $i = \overline{1, r}$, таковы, что отражающая функция $\Phi(t, U)$ системы (5) имеет вид $\Phi(t, U) = \Phi(t, U_1, \dots, U_r)$;

3) произвольные функции $f_{r+1}(t, x), \dots, f_n(t, x)$ непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R} \times D$. Тогда для отражающей функции $F(t, x)$ системы (3), (4) выполнены соотношения

$$U_i(-t, F_1(t, x), \dots, F_n(t, x)) = \Phi(t, U_1(t, x), \dots, U_r(t, x)).$$

В качестве примера приведём случай, когда в системе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{10}(t)x + a_{01}(t)y + a_{20}(t)x^2 + 2a_{11}(t)xy + a_{02}(t)y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{10}(t)x + b_{01}(t)y + b_{20}(t)x^2 + 2b_{11}(t)xy + b_{02}(t)y^2 \end{aligned} \quad (6)$$

с непрерывными на $\mathbb{R}$ коэффициентами обобщённый первый интеграл является линейной функцией $U = m(t)x + n(t)y$ с дифференцируемыми коэффициентами $m(t)$ и $n(t)$.

Для этого предположим, что в соответствии с теоремой 1 производная функции U вдоль решений системы (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= x \frac{dm}{dt} + y \frac{dn}{dt} + m \frac{dx}{dt} + n \frac{dy}{dt} = x \left(\frac{dm}{dt} + ma_{10} + nb_{10} \right) + \\ &+ y \left(\frac{dn}{dt} + ma_{01} + nb_{01} \right) + x^2 (ma_{20} + nb_{20}) + 2xy (ma_{11} + nb_{11}) + \\ &+ y^2 (ma_{02} + nb_{02}) \equiv S_1(t)(mx + ny) + S_2(t)(m^2x^2 + 2mnxy + n^2y^2), \end{aligned}$$

где $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — нечётные и непрерывные на $\mathbb{R}$ функции.

Из записанного выше тождества вытекают следующие соотношения:

$$\frac{dm}{dt} + ma_{10} + nb_{10} = S_1m, \quad \frac{dn}{dt} + ma_{01} + nb_{01} = S_1n, \quad (7)$$

$$ma_{20} + nb_{20} = S_2m^2, \quad ma_{11} + nb_{11} = S_2mn, \quad ma_{02} + nb_{02} = S_2n^2. \quad (8)$$

Пусть $m = k(t)n$, где $k(t)$ — дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Тогда, предполагая, что $n \neq 0$, равенства (8) несложно свести к соотношениям

$$ka_{20} + b_{20} = S_2k^2n, \quad ka_{11} + b_{11} = S_2kn, \quad ka_{02} + b_{02} = S_2n,$$

из которых получаем

$$S_2n = ka_{02} + b_{02}, \quad ka_{11} + b_{11} = k(ka_{02} + b_{02}), \quad ka_{20} + b_{20} = k(ka_{11} + b_{11}). \quad (9)$$

Из последних двух соотношений (при $a_{11} \neq 0$ или $a_{02} \neq 0$) имеем

$$ka_{11}^2 + a_{11}b_{11} - ka_{20}a_{02} - b_{20}a_{02} = (b_{02}a_{11} - b_{11}a_{02})k$$

и, значит, при $a_{11}^2 + b_{11}a_{02} - b_{02}a_{11} - a_{20}a_{02} \neq 0$ однозначно определим коэффициент

$$k = \frac{b_{20}a_{02} - a_{11}b_{11}}{a_{11}^2 + b_{11}a_{02} - b_{02}a_{11} - a_{20}a_{02}}. \quad (10)$$

Исключив S_1 из равенств (7), получим

$$n \frac{dm}{dt} - m \frac{dn}{dt} + mn(a_{10} - b_{01}) + n^2b_{10} - m^2a_{01} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $m = kn$, приходим к условию

$$\frac{dk}{dt} = a_{01}k^2 + (b_{01} - a_{10})k - b_{10}. \quad (11)$$

Второе соотношение в (7) запишем в виде

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = S_1 - ka_{01} - b_{01},$$

откуда находим, что

$$n(t) = N(t) \exp \left\{ - \int_0^t (k(\tau)a_{01}(\tau) + b_{01}(\tau)) d\tau \right\}, \quad (12)$$

где $N(t)$ — произвольная чётная и не обращающаяся в нуль функция (в частности, можно принять $N(t) \equiv 1$). Её чётность следует из того, что интеграл нечётной функции $S_1(t)$ представляет собой чётную функцию.

Условия (11), (12) обеспечивают выполнение соотношений (7). Для выполнения равенств (8) необходимо и достаточно выполнения условий (9), и значит, необходимо, чтобы функция

$$S_2(t) = \frac{ka_{02} + b_{02}}{n} = (ka_{02} + b_{02}) \exp \left\{ \int_0^t (k(\tau)a_{01}(\tau) + b_{01}(\tau)) d\tau \right\}$$

была нечётной.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. Пусть для системы (6) с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами выполнены условия:

1) функция k , задаваемая равенством (10), определена при всех t из некоторого симметричного интервала $(-\alpha, \alpha)$ и удовлетворяет соотношению (11);

2) функция $S_2(t) = (ka_{02} + b_{02})/n = (ka_{02} + b_{02}) \exp \left\{ \int_0^t (k(\tau)a_{01}(\tau) + b_{01}(\tau)) d\tau \right\}$ нечётная;

3) выполнены тождества

$$ka_{11} + b_{11} = k(ka_{02} + b_{02}) \quad \text{и} \quad ka_{20} + b_{20} = k(ka_{11} + b_{11}).$$

Тогда функция

$$U(t, x, y) = (k(t)x + y)n(t) = (k(t)x + y) \exp \left\{ - \int_0^t (k(\tau)a_{01}(\tau) + b_{01}(\tau)) d\tau \right\}$$

представляет собой обобщённый первый интеграл системы (6), т.е. для каждого продолжимого на $(-\alpha, \alpha)$ решения $(x(t), y(t))$ системы (6) верно соотношение $U(-t, x(-t), y(-t)) \equiv U(t, x(t), y(t))$.

Пример. Функция $U = a(t, x) + x'$ является обобщённым первым интегралом уравнения

$$x'' + a'_t(t, x) + a'_x(t, x)x' + \Phi(t, a(t, x) + x') = 0,$$

где $x' = dx/dt$, $a'_t = \partial a/\partial t$, $a'_x = \partial a/\partial x$ и $\Phi(t, U)$ — нечётная по t дифференцируемая функция.

Это утверждение следует из соотношения

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}x' + x'' = -\Phi(t, U).$$

В теореме 5 рассматривалась дифференциальная система вида

$$\frac{dx}{dt} = M(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = N(t, x, y), \quad (13)$$

а в качестве её обобщённого первого интеграла выбиралась функция $U(t, x, y) := m(t)x + n(t)y$, линейная по фазовым переменным x и y . Это обеспечивает справедливость того факта, что оператор сдвига

$$A: \begin{pmatrix} x(-t) \\ y(-t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

отображает прямую $m(-t)x + n(-t)y = 0$ в прямую $m(t)x + n(t)y = 0$, и, в частности, отображение Пуанкаре

$$B: \begin{pmatrix} x(-\omega) \\ y(-\omega) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix},$$

если система (6) 2ω -периодична по t , переводит прямую $m(-\omega)x + n(-\omega)y = 0$ в прямую $m(\omega)x + n(\omega)y = 0$.

Если в качестве функции U для системы (13) взять многочлен второго порядка по x и y с 2ω -периодическими коэффициентами, то операторы A и B будут отображать кривую второго порядка в кривую второго порядка. Если обе эти кривые окажутся замкнутыми, а система (13) будет 2ω -периодической по t и не имеющей особых точек на этих кривых, то решения системы (13), начинающиеся на них, будут 2ω -периодическими.

Следует иметь в виду, что первый интеграл, как правило, может трактоваться как некоторый закон сохранения (энергии, количества движения и т.п.). То же верно и для обобщённого первого интеграла, только в его случае соответствующая величина сохраняется при переходе от $-t$ к t . Это замечание указывает, интегралы какого вида следует искать, если известно, какую реальную (физическую, химическую и т.д.) систему описывает исследуемая дифференциальная система.

Теорема 6. Пусть 2ω -периодичная по t дифференциальная система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t)x + b(t)y + \frac{M(t, x, y)}{q_0(t) + q_1(t)H + q_2(t)H^2} =: Q, \\ \frac{dy}{dt} &= c(t)x + d(t)y + \frac{N(t, x, y)}{q_0(t) + q_1(t)H + q_2(t)H^2} =: R, \end{aligned}$$

где функция $H = h_{10}(t)x + h_{01}(t)y + h_{20}(t)x^2 + 2h_{11}(t)xy + h_{02}(t)y^2$ положительно определена, удовлетворяет условиям:

- 1) функция $H(t, x, y)$ имеет непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ и 2ω -периодические коэффициенты;
- 2) функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и 2ω -периодичны;
- 3) функции $q_0(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ непрерывны, чётны, 2ω -периодичны и принимают только положительные значения на $\mathbb{R}$;

4) имеют место соотношения

$$\frac{\partial H}{\partial t} + (ax + by)\frac{\partial H}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial H}{\partial y} = s(t)H, \quad M\frac{\partial H}{\partial x} + N\frac{\partial H}{\partial y} = s_1(t)H + s_2(t)H^2;$$

5) $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — многочлены по x и по y не выше пятой степени, а $s(t)$, $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — непрерывные на $\mathbb{R}$, нечётные, 2ω -периодические функции.

Тогда все решения рассматриваемой системы существуют на всём пространстве $\mathbb{R}$, функция $H(t, x, y)$ представляет собой её обобщённый первый интеграл, а отражающая функция системы $(F_1(t, x, y) \ F_2(t, x, y))^T$ удовлетворяет соотношению

$$H(-t, F_1(t, x, y), F_2(t, x, y)) \equiv H(t, x, y).$$

Доказательство. Из вида правых частей Q и R системы следует, что существуют постоянные c_1 и c_2 , при которых выполняется неравенство $|dx/dt| + |dy/dt| = |Q| + |R| \leq c_1|x| + c_2|y|$. Отсюда вытекает продолжимость решений рассматриваемой системы на всё пространство $\mathbb{R}$.

Из условий 4) и 5) теоремы заключаем, что правая часть соотношения

$$\frac{dH}{dt} = s(t)H + \frac{s_1(t)H + s_2(t)H^2}{q_0(t) + q_1(t)H + q_2(t)H^2}$$

нечётна по t как функция двух аргументов t и H . Тогда ссылка на теорему 1 завершает доказательство.

При доказательстве теоремы 6 мы воспользовались периодичностью коэффициентов только для того, чтобы доказать ограниченность правой части системы функцией $c_1|x| + c_2|y|$. Используя эту периодичность и теорему 1, получаем

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда отображение Пуанкаре

$$B: \begin{pmatrix} x(-\omega) \\ y(-\omega) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix}$$

преобразует каждую кривую $H(-\omega, x(-\omega), y(-\omega)) = f_{ev}(\omega)$ в кривую $H(\omega, x(\omega), y(\omega)) = f_{ev}(\omega)$.

Следствие даёт нам возможность судить о существовании периодических решений изучаемой системы и устойчивости её нулевого решения. Конкретным примером такой дифференциальной системы является система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{dm(t)}{dt} \frac{x}{2m(t)} - b(t)n(t)y + \frac{s(t)x - n(t)c(t)y}{p(t) + q(t)(m(t)x^2 + n(t)y^2)}, \\ \frac{dy}{dt} &= b(t)m(t)x - \frac{dn(t)}{dt} \frac{y}{2n(t)} + \frac{m(t)c(t)x + s(t)y}{p(t) + q(t)(m(t)x^2 + n(t)y^2)}, \end{aligned}$$

все коэффициенты которой представляют собой дифференцируемые на $\mathbb{R}$ 2ω -периодические функции, причём $s(t)$ — нечётная, а $p(t)$ и $q(t)$ — чётные и не равные нулю, $m(t)$ и $n(t)$ — не обращающиеся в нуль функции.

Теорема 7. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{P(\varphi, \rho)}{S(\varphi, \rho)}, \quad (14)$$

где $P(\varphi, \rho)$ и $S(\varphi, \rho)$ — сходящиеся степенные по ρ ряды с непрерывными коэффициентами. Пусть также существуют дифференцируемые функции $U(\varphi, \rho)$, $g(\varphi, \rho)$ и $\Phi(\varphi, \rho)$,

где $g(\varphi, \rho)$ — чётная по первому аргументу и $\Phi(\varphi, \rho)$ — нечётная по первому аргументу функции такие, что имеют место тождества

$$S(\varphi, \rho) \equiv g(\varphi, U)U'_\rho(\varphi, \rho) \quad \text{и} \quad P(\varphi, \rho) \equiv \Phi(\varphi, U) - g(\varphi, U)U'_\varphi. \quad (15)$$

Тогда функция $U(\varphi, \rho)$ представляет собой обобщённый первый интеграл уравнения (14).

Доказательство. Найдём полную производную функции $U(\varphi, \rho)$ вдоль решений уравнения (14). Имеем

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\varphi} = U'_\varphi + U'_\rho \frac{P(\varphi, \rho)}{S(\varphi, \rho)} = U'_\varphi + \frac{P(\varphi, \rho)}{g(\varphi, U)} = U'_\varphi + \frac{\Phi(\varphi, U) - g(\varphi, U)U'_\varphi}{g(\varphi, U)} = \frac{\Phi(\varphi, U)}{g(\varphi, U)}.$$

Таким образом, верно соотношение $dU/d\varphi = \Phi(\varphi, U)/g(\varphi, U)$. Правая часть этого равенства представляет собой нечётную по первому аргументу функцию. Тогда ссылка на теорему 1 завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Чтобы обозначить возможности использования теоремы 7, полезно заметить, что при построении конкретных уравнений, удовлетворяющих условиям этой теоремы, функции $U(\varphi, \rho)$, $g(\varphi, \rho)$ и $\Phi(\varphi, \rho)$ можно выбирать произвольным образом.

Замечание 2. Если уравнение (14) удовлетворяет условиям теоремы 7, то первообразная

$$\int S(\varphi, \rho) d\rho = \int g(\varphi, U)U'_\rho d\rho =: G(\varphi, U)$$

(при некотором выборе постоянной по ρ , добавляемой при интегрировании) представляет собой функцию $G(\varphi, U)$, чётную по первому аргументу, если вторым аргументом считать U . Это замечание помогает найти функции $U(\varphi, \rho)$, $g(\varphi, \rho)$ и $\Phi(\varphi, \rho)$ из условий (15).

Теорема 8. Пусть для 2π -периодического по φ дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{P(\varphi, \rho)}{1 + 2m\rho + a \cos \rho + 2am(\sin \rho + \rho \cos \rho) + ma^2 \sin 2\rho} \quad (16)$$

выполнены условия:

- 1) функция $m = m(\varphi)$ непрерывная, чётная и 2π -периодическая, а функция $a = a(\varphi)$ имеет производную $a'(\varphi)$ и 2π -периодична;
- 2) для функций $P(\varphi, \rho)$ верно тождество $P(\varphi, 0) \equiv 0$ и справедливо соотношение

$$P(\varphi, \rho) + (1 + 2mU)a'(\varphi) \sin \rho =: \Phi(\varphi, U),$$

где $U = \rho + a(\varphi) \sin \rho$, а функция $\Phi(\varphi, U)$ нечётна по первому аргументу.

Тогда функция $U(\varphi, \rho) = \rho + a(\varphi) \sin \rho$ представляет собой обобщённый первый интеграл рассматриваемого уравнения, а особая точка $\rho = 0$ для этого уравнения является центром при условии, что $|a(\varphi)| < 1$ для всех φ .

Доказательство. В рассматриваемом случае получаем

$$\begin{aligned} \int S(\varphi, \rho) d\rho &= \rho + m\rho^2 + a \sin \rho + 2am\rho \sin \rho + ma^2 \sin^2 \rho = \\ &= \rho + a \sin \rho + m(\rho^2 + 2a\rho \sin \rho + a^2 \sin^2 \rho), \end{aligned}$$

поэтому

$$\int S(\varphi, \rho) d\rho = \rho + a \sin \rho + m(\rho + a \sin \rho)^2.$$

Естественно предположить, что $U(\varphi, \rho) = \rho + a \sin \rho$, $g(\varphi, U) = 1 + 2mU$.

Непосредственная проверка показывает, что с такими функциями $U(\varphi, \rho)$ и $g(\varphi, \rho)$ все условия теоремы 7 выполнены. Отсюда следует, что для каждого решения $\rho(\varphi)$ уравнения (16)

функция $U(\varphi) = \rho(\varphi) + a(\varphi) \sin \rho(\varphi)$ является чётной, поэтому $\rho(\pi) = \rho(-\pi)$, т.е. $\rho(\pi)$ является неподвижной точкой отображения Пуанкаре на отрезке $[-\pi, \pi]$. Следовательно, всякое решение $\rho(\varphi)$ уравнения (16), продолжимое на $[-\pi, \pi]$, будет 2π -периодическим.

Продолжимость решения $\rho(\varphi)$ при достаточно малых $\rho(-\pi)$ гарантируется теоремой об интегральной непрерывности [12, с. 22], поскольку уравнение (16) имеет решение $\rho(\varphi) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Замечание 3. Предположим, что мы ограничиваемся поиском только одного обобщённого первого интеграла $U(t, x)$, который является многочленом по $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда, дифференцируя тождество $U(-t, F(t, x)) \stackrel{t,x}{=} U(t, x)$ частным образом по t и каждому x_i , придём к соотношениям

$$-\frac{\partial U(-t, F)}{\partial t} + \frac{\partial U(-t, F)}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U(-t, F)}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial U(t, x)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Эта дополнительная информация облегчит поиск обобщённого первого интеграла в некоторых частных случаях. В других случаях она поможет отыскивать предельные циклы изучаемой дифференциальной системы.

Отметим, что если мы имеем однопараметрическое семейство (гладкое многообразие) гладких кривых $U(t, x, y) = 0$, где $t \in (-\alpha, \alpha)$, и дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = Z(t, z), \quad t, z \in \mathbb{R},$$

с отражающей функцией $F(t, z)$, то можно построить класс систем вида (13), для которых

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + M \frac{\partial U}{\partial x} + N \frac{\partial U}{\partial y} = Z(t, U) + F_z^{-1}(t, U) R(t, U) - R(-t, F(t, U)),$$

где R — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. С этой целью используем приведённое в п. 1 второе свойство отражающей функции. Тогда для решений $(x(t), y(t))$, $t \in (-\alpha, \alpha)$, построенных систем верно соотношение $U(-t, x(-t), y(-t)) = U(t, x(t), y(t))$.

Это замечание переносится и на многомерный случай, когда $U = U(t, x_1, \dots, x_n)$.

Заключение. Введено понятие обобщённого первого интеграла дифференциальной системы и установлена его связь с понятием отражающей функции. Доказаны теоремы, позволяющие находить обобщённые первые интегралы. Полученные результаты применены к изучению вопросов существования периодических решений дифференциальных систем, а также к исследованию проблемы центра-фокуса.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджета Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. МIRONENKO В.И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1635–1638.
2. МIRONENKO В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.

3. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных систем: учеб. пособие. Гомель, 1985.
4. *Zhou Z.* The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications. Beijing, 2014.
5. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.
6. *Мироненко В.И.* Простые системы и периодические решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2109–2114.
7. *Мусафиров Э.В.* О простоте линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 570–572.
8. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1958.
9. *Мироненко В.И.* Замечания о стационарных интегралах и стационарных преобразованиях неавтономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5. С. 864–868.
10. *Мироненко В.И.* Стационарные интегралы и инварианты оператора сдвига вдоль решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 12. С. 2170–2177.
11. *Мироненко В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Минск, 1981.
12. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.

Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.
После доработки 09.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.