

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925+517.968

ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2024 г. В. С. Бесов, В. И. Качалов

Для решения весьма важных с точки зрения приложений интегро-дифференциальных сингулярно возмущённых уравнений давно применяется метод регуляризации С.А. Ломова. При этом представляющие решения этих уравнений ряды по степеням малого параметра сходились асимптотически. Однако, в соответствии с основной концепцией метода, для построения общей теории сингулярных возмущений требуется указать условия обычной сходимости таких рядов, что и рассматривается в данной статье.

Ключевые слова: метод регуляризации С.А. Ломова, интегро-дифференциальное уравнение, псевдоголоморфное решение, существенно особое многообразие.

DOI: 10.31857/S0374064124010014, EDN: RPVANH

1. Введение. Постановка задачи. Для изучения сингулярно возмущённых задач, многие из которых являются дифференциальными, разработаны различные асимптотические методы, с помощью которых строятся решения этих задач в виде рядов по степеням малого параметра [1–3]. При этом каждый метод по своему описывает сингулярную зависимость решений от малого параметра, что позволяет судить о пограничном слое, присутствующем в каждом таком решении. В настоящее время одним из наиболее используемых методов решения сингулярно возмущённых задач является «метод погранфункций» Васильевой–Бутузова–Нефёдова, с помощью которого решаются многие типы как обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, так и уравнений в частных производных [4, 5].

Метод регуляризации С.А. Ломова описывает пограничный слой с помощью спектра предельного оператора и сводит исходную сингулярно возмущённую задачу к регулярно возмущённой, а теория таких задач разработана достаточно хорошо [6, гл. VII, § 1]. Более того, появилась возможность построения так называемых псевдоаналитических (псевдоголоморфных) решений, т.е. решений, представимых в виде рядов по степеням малого параметра, сходящихся в обычном смысле [7, гл. I, § 4, 5], что дополняет аналитическую теорию Пуанкаре [8, гл. III, §§ 2; 9].

Понятие псевдоголоморфного решения поясним в самом общем случае. Пусть в банаховом пространстве E задана эволюционная задача

$$\begin{aligned}\varepsilon \partial_t u &= F(t, u), \quad t \in (0, T], \\ u|_{t=0} &= u^0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $F(t, u)$ — нелинейный оператор, действующий в E при каждом $t \in [0, T]$. Обозначим через ω_0 множество на комплексной плоскости переменной ε , у которого точка $\varepsilon = 0$ является предельной.

Определение 1. Решение $u(t, \varepsilon)$ задачи Коши (1) называется *псевдоголоморфным* на множестве ω_0 , если для него имеет место представление в виде ряда

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon u_1(t, \varepsilon^{-1}) + \dots + \varepsilon^n u_n(t, \varepsilon^{-1}) + \dots,$$

который сходится при каждом фиксированном $\varepsilon \in \omega_0$ равномерно на некотором отрезке $[0, T_\varepsilon] \subset [0, T]$.

В линейном случае для построения псевдоголоморфных решений использовались пространства векторов экспоненциального типа [10], в нелинейном — метод голоморфной регуляризации [11]. Тем самым появилась возможность построения точных решений сингулярно возмущённых задач [12].

Рассмотрим при малых положительных значениях параметра ε следующую сингулярно возмущённую задачу:

$$\varepsilon \dot{u} = A(t)u + \varepsilon^2 \int_0^t K(t, \tau)u(\tau, \varepsilon)d\tau, \quad u(0, \varepsilon) = u^0, \quad (2)$$

где $u = (u_1 \dots u_m)^T$, $u^0 = (u_1^0 \dots u_m^0)^T$ — вектор-столбцы из комплексного пространства $\mathbb{C}^m$; $A(t)$ — матрица размера $m \times m$ с элементами $a_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq m$, определёнными на отрезке $[0, T]$; $K(t, \tau)$ — ядро интегрального оператора Вольтерры, представляющее собой матрицу размера $m \times m$ также с комплекснозначными элементами $k_{ij}(t, \tau)$ ($1 \leq i, j \leq m$), определёнными в квадрате $\chi = [0, T] \times [0, T]$.

Условие (α). Матрицы $A(t)$ и $K(t, \tau)$ непрерывны по своим переменным на множестве $[0, T]$ соответственно.

Условие (β). Оператор $A(t)$ имеет простую структуру, т.е. его собственные векторы $B = \{b_1(t), \dots, b_m(t)\}$, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\}$, при каждом $t \in [0, T]$ образуют базис в пространстве $\mathbb{C}^m$. Обозначим через $B^* = \{b_1^*(t), \dots, b_m^*(t)\}$ биортогонально сопряжённый базис.

Интегро-дифференциальные уравнения изучались в работах [1, гл. 4; 13; 14] в предположении стабильности спектра оператора $A(t)$. При этом были построены регуляризованные ряды, сходящиеся асимптотически к точному решению $u(t, \varepsilon)$.

2. Голоморфная регуляризация линейной однородной системы. Сначала рассмотрим систему с положительным малым параметром

$$\varepsilon \dot{y} = A(t)y, \quad y = (y_1 \dots y_m)^T, \quad (3)$$

и построим для неё псевдоголоморфную фундаментальную матрицу $Z(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$.

В соответствии с алгоритмом метода голоморфной регуляризации запишем уравнение первых интегралов этой системы

$$\varepsilon \partial_t U + LU = 0, \quad (4)$$

где

$$L = \sum_{i=1}^m (Ay, e_i) \partial_{y_i}$$

— линейный дифференциальный оператор первого порядка в частных производных; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^m$, $e_i = (0 \dots 1 \dots 0)^T$ — i -й орт в $\mathbb{C}^m$. Будем искать его решение в виде ряда по степеням ε :

$$U(t, y, \varepsilon) = U_0(t, y) + \varepsilon U_1(t, y) + \dots + \varepsilon^n U_n(t, y) + \dots \quad (5)$$

Подставив ряд (5) в уравнение (4), получим, в соответствии с методом неопределённых коэффициентов, серию задач для определения коэффициентов этого ряда:

$$LU_0 = 0, \quad LU_1 = -\partial_t U_0, \quad \dots, \quad LU_n = -\partial_t U_{n-1}, \quad \dots \quad (6)$$

Для построения m независимых интегралов системы (3) будем последовательно полагать, что функция U_0 равна

$$\varphi_p(t) = \int_0^t \lambda_p(\tau) d\tau, \quad p = \overline{1, m},$$

с учетом кратности корней характеристического уравнения.

Лемма 1. Если $\lambda_p(t)$ — собственное значение оператора $A(t)$ и $\{b_{p_1}(t), \dots, b_{p_r}(t)\}$ — соответствующие ему собственные векторы, то каждая функция $U_s^{[p]}(t, y) = \ln(y, b_{p_s}^*(t))$, $s = \overline{1, r}$, является решением уравнения

$$LU_s^{[p]} = \lambda_p(t).$$

Доказательство. Действительно, при фиксированном s имеем

$$\begin{aligned} LU_s^{[p]} &= \frac{1}{(y, b_{p_s}^*(t))} \sum_{i=1}^m (A(t)y, e_i)(e_i, b_{p_s}^*(t)) = \frac{1}{(y, b_{p_s}^*(t))} \sum_{i=1}^m (y, e_i)(e_i, A^*(t)b_{p_s}^*(t)) = \\ &= \frac{1}{(y, b_{p_s}^*(t))} \sum_{i=1}^m \lambda_p(t)(y, e_i)(e_i, b_{p_s}^*(t)) = \lambda_p(t) \frac{(y, b_{p_s}^*(t))}{(y, b_{p_s}^*(t))} = \lambda_p(t). \end{aligned}$$

Лемма 2. Система функций $\{U^{[p]}(t, y)\}$, $p = \overline{1, m}$, является независимой.

Доказательство. Запишем якобиан данной системы функций

$$\frac{\partial(U^{[1]}, \dots, U^{[m]})}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{(e_1, b_1^*)}{(y, b_1^*)} & \dots & \frac{(e_1, b_1^*)}{(y, b_1^*)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(e_m, b_m^*)}{(y, b_m^*)} & \dots & \frac{(e_m, b_m^*)}{(y, b_m^*)} \end{vmatrix} = \frac{\det(B^*(t))}{\prod_{i=1}^m (y, b_i^*(t))} \neq 0,$$

где $B^*(t) = \|(b_1^*(t), \dots, b_m^*(t))\|$ — матрица, столбцами которой служат столбцы сопряжённого базиса. А это и означает независимость системы функций $\{U^{[p]}(t, y)\}$, $p = \overline{1, m}$. Лемма доказана.

Итак, в соответствии с леммой 1 в качестве решений второго уравнения серии (6) можно взять функции $U_1^{[p]}(t, y) = U^{[p]}(t, y) + \alpha_p(t)$, $p = \overline{1, m}$, где $\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)$ — произвольные дифференцируемые функции переменной t .

Для решения остальных уравнений этой серии воспользуемся интегральным представлением решений уравнений в частных производных первого порядка [15, с. 362].

Добавим для системы (3) начальное условие

$$y(0, \varepsilon) = y^0. \quad (7)$$

Проведём через точку $y^0 \in \mathbb{C}^m$ голоморфно-гладкую поверхность Λ с координатами $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{m-1})$ на ней и запишем систему уравнений характеристик

$$\frac{dy}{ds} = A(t)y, \quad (8)$$

соответствующую оператору L . Будем считать, что фазовые траектории этой системы трансверсальны (некасательны) к ней при каждом $t \in [0, T]$.

Система (8) является автономной: здесь t выступает в роли параметра, а $s \geq 0$ — в роли независимой переменной. Поскольку оператор $A(t)$ при каждом t имеет простую структуру, то общее решение системы (8) задается формулой

$$y = B(t)e^{sD(t)}C,$$

где $B(t)$ — матрица, столбцами которой служат собственные векторы оператора $A(t)$; матрица $D(t)$ диагональная и имеет следующий вид:

$$D(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m(t) \end{pmatrix},$$

C — столбец произвольных констант.

Добавим для системы (8) начальное условие

$$y|_{s=0} \in \Lambda. \quad (9)$$

Если $\Lambda = \{\Theta \in \mathbb{C}^m : \Theta = \Theta(\tilde{y}), \tilde{y} \in \tilde{\omega}\}$, где $\tilde{\omega}$ — некоторая область пространства $\mathbb{C}^{m-1}$, то условие (9) можно представить в виде

$$y|_{s=0} = \Theta(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \tilde{\omega}. \quad (10)$$

Для решения задачи Коши (8), (10) имеем представление

$$Y(s, \tilde{y}, t) = B(t)e^{sD(t)}B^{-1}(t)\Theta(\tilde{y}).$$

Составим алгебраическую систему

$$B(t)e^{sD(t)}B^{-1}(t)\Theta(\tilde{y}) = y,$$

и пусть

$$s = S(y, t), \quad \tilde{y} = \tilde{Y}(y, t)$$

— её решение относительно $(s, \tilde{y})$.

Обозначим при каждом $t \in [0, T]$ через Ω_t^Λ область в $\mathbb{C}^m$, которую заполняют фазовые траектории системы уравнений характеристик (8), проходящие через Λ , и пусть

$$\Omega^\Lambda = \bigcup_{t \in [0, T]} \Omega_t^\Lambda.$$

Далее введём операторы замены переменных с помощью указанных функций, обозначив через $R(t)$ оператор замены переменных $(s, \tilde{y})$ на переменную y , а оператор обратной замены — через $R^{-1}(t)$:

$$R[\Psi(s, \tilde{y}, t)] = \Psi(S(y, t), \tilde{Y}(y, t), t),$$

$$R^{-1}[\Psi(y, t)] = \Psi(Y(s, \tilde{y}, t), t).$$

Замечание 1. Если переменная s будет индексироваться, то и введённые операторы также будут индексироваться.

Обозначим через I_n^s оператор интегрирования по переменной s_n , когда нижний предел равен нулю, а верхний — s_{n-1} , $n = 2, 3, \dots$. В итоге для решений уравнений серии (6), начиная со второго, имеем

$$U_2(t, y) = -R(t)I_1^s R_1^{-1}(t)\partial_t U_1, \quad U_3(t, y) = R(t)I_1^s R_1^{-1}(t)\partial_t R_1(t)I_2^s R_2^{-1}(t)\partial_t U_1, \quad \dots,$$

$$U_n(t, y) = (-1)^{n-1} R(t)I_1^s R_1^{-1}(t)\partial_t R_1(t)I_2^s R_2^{-1}(t)\partial_t \dots R_{n-2}(t)I_{n-1}^s R_{n-1}^{-1}(t)\partial_t U_1, \quad \dots$$

При этом $U_n(t, y) = 0$ на поверхности Λ при всех $n = 2, 3, \dots$. Выберем $U_1(t, y)$ обращающимся в нуль в начальной точке $(0, y^0)$:

$$U_1^{[p]}(t, y) = -\ln \frac{(y, b_p^*(t))}{(y_0, b_p^*(0))}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Условие (γ) . Предположим, что все введённые функции, зависящие от переменной t , допускают голоморфное продолжение с отрезка $[0, T]$ на круг $P = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq 2T\}$. Фиксируем n и строим на комплексной плоскости переменной t $(n-1)$ окружность

$$\gamma_k = \{t \in \mathbb{C} : |t| = r_k\},$$

где

$$r_k = T + \frac{Tk}{n-1}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Соседние окружности находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, равном $T/(n-1)$. Обозначим через J_k^t следующий интегральный оператор:

$$(J_k^t g)(t_{k-1}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_k} \frac{g(t_k)}{(t_k - t_{k-1})^2} dt_k, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad t_0 = t \in [0, T].$$

Тогда, в соответствии с интегральной формулой Коши, имеем

$$U_n(t, y) = (-1)^n R(t) I_1^s R_1^{-1}(t) J_1^t R_1(t_1) I_2^s R_2^{-1}(t_1) J_2^t \dots R_{n-2}(t_{n-2}) I_{n-1}^s R_{n-1}^{-1}(t_{n-2}) J_{n-1}^t U_1.$$

Оценим $U_n(t, y)$:

$$|U_n(t, y)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} |I_1^s I_2^s \dots I_{n-1}^s| H_{n-1} \max_{|t| \leq 2T} |U_1(t, y)|,$$

где

$$\begin{aligned} H_{n-1} &= \oint_{\gamma_1} \frac{|dt_1|}{|t_1 - t|^2} \dots \frac{|dt_{n-1}|}{|t_{n-1} - t_{n-2}|^2} = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r_1 d\alpha}{r_1^2 + t^2 - 2r_1 t \cos \alpha} \dots \int_0^{2\pi} \frac{r_{n-1} d\alpha}{r_{n-1}^2 + r_{n-2}^2 - 2r_{n-2} r_{n-1} \cos \alpha} = \\ &= \frac{(2\pi)^{n-1} r_1 r_2 \dots r_{n-1}}{(r_1^2 - t^2)(r_2^2 - r_1^2) \dots (r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2)} \leq \frac{(2\pi)^{n-1} (2T)^{n-1} (n-1)^{n-1}}{T(2T)^{n-2} T^{n-1}}. \end{aligned}$$

Поскольку при $s \geq 0$

$$\left| \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} \right| = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!},$$

то

$$|U_n(t, y)| \leq \frac{(n-1)^{n-1} s^{n-1}}{2T^{n-1} (n-1)!}.$$

Из этой оценки как раз и следует, что ряд (5) сходится в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Таким образом, имеет место утверждение о существовании аналитических по ε первых интегралов у сингулярно возмущённой системы (3).

Теорема 1. Если выполнены условия (α) , (β) и (γ) , то система (3) имеет в области Ω^Λ m независимых интегралов $\{U^{[i]}(t, y, \varepsilon)\}_{i=1}^m$, аналитических в точке $\varepsilon = 0$.

Для дальнейшего нам понадобится следующее

Условие (δ) . $\operatorname{Re} \lambda_p(t) \leq 0$, $p = \overline{1, m}$.

Очевидно, что при выполнении условия (δ) область Ω^Λ является ограниченной при любом $s \geq 0$, если ограничена поверхность Λ . Это следует из устойчивости системы уравнений характеристик.

3. Псевдоголоморфные решения линейных систем.

Определение 2. Решение $y(t, \varepsilon)$ системы (3) называется псевдоголоморфным (псевдоаналитическим) в точке $\varepsilon = 0$, если существует функция $\tilde{Y}(t, \eta, \varepsilon)$, голоморфная в точке $\varepsilon = 0$ при каждом $t \in [0, T]$ и любом $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ из некоторого неограниченного множества $G \subset \mathbb{C}^m$ такая, что существуют $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ и $T_\varepsilon > 0$, что для любых $\varepsilon > 0$ и $t \in [0, T_\varepsilon]$ выполняется равенство $y(t, \varepsilon) = \tilde{Y}(t, \varphi(t)/\varepsilon, \varepsilon)$.

Для доказательства следующей теоремы дадим определение введённому С.А. Ломовым понятию существенно особого многообразия.

Определение 3. Пусть $\psi(t)$ — комплекснозначная функция вещественной переменной $t \in [0, T]$ такая, что $\psi(0) = 0$. Существенно особым многообразием, порождаемым точкой $\varepsilon = 0$, называется множество

$$Q^+(\psi, T, \varepsilon) = \{q \in \mathbb{C} : q = e^{\psi(t)/\varepsilon}, \quad t \in [0, T], \quad \varepsilon > 0\}$$

(знак “+” означает, что значение ε положительно).

Ясно, что если $\operatorname{Re} \psi(t) \leq 0$ для любого $t \in [0, T]$, то $Q^+(\psi, T, \varepsilon) \subset \dot{S}$ — замкнутому единичному кругу с выколотым центром.

Теорема 2. Если выполнены условия (α) , (β) , (γ) и (δ) , то решение $y(t, \varepsilon)$ задачи Коши (β) , (γ) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Запишем систему m независимых интегралов системы (3):

$$\begin{aligned} \ln \frac{(y, b_1^*(t))}{(y^0, b_1^*(0))} - \varepsilon U_2^{[1]}(t, y) + \dots &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau, \quad \dots, \\ \ln \frac{(y, b_m^*(t))}{(y^0, b_m^*(0))} - \varepsilon U_2^{[m]}(t, y) + \dots &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_m(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Пропотенцируем эти уравнения по основанию e :

$$\begin{aligned} \frac{(y, b_1^*(t))}{(y^0, b_1^*(0))} + \varepsilon \Phi^{[1]}(t, y, \varepsilon) &= \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau \right\}, \quad \dots, \\ \frac{(y, b_m^*(t))}{(y^0, b_m^*(0))} + \varepsilon \Phi^{[m]}(t, y, \varepsilon) &= \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_m(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Phi^{[k]}(t, y, \varepsilon)$ ($k = \overline{1, m}$) — голоморфные в точке $\varepsilon = 0$ функции, причём равномерно голоморфные по переменным t и y на множествах вида $[0, T] \times R$, R — компакт области Ω .

Введём новые переменные

$$q_k = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_k(\tau) d\tau \right\}, \quad k = \overline{1, m},$$

перепишем систему (11) в виде

$$\frac{(y, b_1^*(t))}{(y^0, b_1^*(0))} + \varepsilon \Phi^{[1]}(t, y, \varepsilon) = q_1, \quad \dots, \quad \frac{(y, b_m^*(t))}{(y^0, b_m^*(0))} + \varepsilon \Phi^{[m]}(t, y, \varepsilon) = q_m \quad (12)$$

и применим к ней теорему о неявной функции. Положим в этой системе $\varepsilon = 0$:

$$\frac{(y, b_1^*(t))}{(y^0, b_1^*(0))} = q_1, \quad \dots, \quad \frac{(y, b_m^*(t))}{(y^0, b_m^*(0))} = q_m.$$

Её решение $Y_0(t, q) = \{Y_{0,1}(t, q), \dots, Y_{0,m}(t, q)\}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} Y_{0,1}(t, q) \\ \vdots \\ Y_{0,m}(t, q) \end{pmatrix} = [B^*(t)]^{-1} \begin{pmatrix} (y^0, b_1^*(0))q_1 \\ \vdots \\ (y^0, b_m^*(0))q_m \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi_p(t) = \int_0^t \lambda_p(\tau) d\tau$, $p = \overline{1, m}$. Обозначим через $Q_p^+(\varphi_p(t), T, \varepsilon) = \{q_p \in \mathbb{C} : q_p = e^{\varphi_p(t)/\varepsilon}, t \in [0, T], \varepsilon > 0\}$ p -е существенно особое многообразие, порожаемое точкой $\varepsilon = 0$. И пусть $Q^+ = Q_1^+ \times \dots \times Q_m^+ \subset \mathbb{C}^m$ — декартово произведение этих многообразий.

Замечание 2. При фиксированных $\varepsilon > 0$ многообразия Q_p^+ представляют собой кривые, принадлежащие замкнутым единичным кругам $\dot{S}_p = \{q_p \in \mathbb{C} : 0 < |q_p| \leq 1\}$ с выколотыми центрами.

Обозначим

$$\dot{S} = \dot{S}_1 \times \dots \times \dot{S}_m \subset \mathbb{C}^m.$$

Выберем a — достаточно малое положительное число и построим кольца

$$S_p^a = \{q_p \in \mathbb{C} : a \leq |q_p| \leq 1\}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Пусть $S^a = S_1^a \times \dots \times S_m^a$ — компактное множество из $\dot{S}$.

В соответствии с теоремой о неявной функции у каждой точки (t, q) множества $P_a^T = [0, T] \times S^a$ существует окрестность σ_{tq} , в которой система (12) имеет голоморфное по ε решение $Y(t, q, \varepsilon) = \{Y_1(t, q, \varepsilon), \dots, Y_m(t, q, \varepsilon)\}$. Из открытого покрытия $\{\sigma_{tq}\}$ компакта P_a^T выберем конечное подпокрытие $\{\sigma_{tq}\}_1^N$. Тогда функция $Y(t, q, \varepsilon)$ будет голоморфной по ε в окрестности $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ равномерно на множестве P_a^T , где ε_0 — наименьший радиус голоморфности в конечном подпокрытии.

Пусть в системе (3) ε фиксировано и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда, как следует из предыдущего, для её решения $y(t, \varepsilon)$ будет иметь место следующее представление:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(t, q) \Big|_{q=\{q_1, \dots, q_m\}, q_p = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_m(\tau) d\tau\right\}, p=\overline{1, m}}, \quad (13)$$

причём этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0, T_\varepsilon] \subset [0, T]$, где T_ε — такое значение независимой переменной t , что при каждом $p = \overline{1, m}$ кривая

$$\Gamma_p^\varepsilon = \left\{ q_p \in \mathbb{C} : q_p = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_m(\tau) d\tau\right\}, t \in [0, T_\varepsilon] \right\}$$

принадлежит кольцу S_p^a . Теорема доказана.

Замечание 3. Если $T_\varepsilon < T$, то для построения решения системы (3) на всём промежутке $[0, T]$ требуется применить алгоритм псевдоголоморфного продолжения [16, 17].

Последовательно полагая в (7), что y^0 равно векторам $e_1, \dots, e_m$, построим фундаментальную матрицу $W(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ системы (3). Очевидно, что матрицант этой системы $Z(t, \tau, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = W(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)W^{-1}(\tau, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ также будет псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$. При этом имеют место следующие разложения по степеням ε :

$$W(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = W_0(t, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon W_1(t, \varepsilon^{-1}) + \dots, \quad (14)$$

$$Z(t, \tau, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = Z_0(t, \tau, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon Z_1(t, \tau, \varepsilon^{-1}) + \dots \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что

$$Z_0(t, \tau, \varepsilon^{-1}) = W_0(t, \varepsilon^{-1})W_0^{-1}(\tau, \varepsilon^{-1}). \quad (16)$$

4. Псевдоголоморфное решение сингулярно возмущённого интегро-дифференциального уравнения. Перейдём к изложению основного результата работы. Будем искать решение задачи Коши (2) в виде ряда по степеням ε :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^n u_n + \dots \quad (17)$$

с коэффициентами, подчинёнными следующей серии задач:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}_0 &= A(t)u_0, \quad u_0|_{t=0} = u^0, \\ \varepsilon \dot{u}_1 &= A(t)u_1 + \varepsilon \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau)u_0(\tau, \varepsilon^{-1})d\tau, \quad u_1|_{t=0} = 0, \quad \dots, \\ \varepsilon \dot{u}_n &= A(t)u_n + \varepsilon \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau)u_{n-1}(\tau, \varepsilon^{-1})d\tau, \quad u_n|_{t=0} = 0, \quad \dots\end{aligned}\quad (18)$$

Последовательно решив задачи (18), найдём коэффициенты ряда (17):

$$\begin{aligned}u_0(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) &= W(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)u^0, \\ u_1(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) &= \int_0^t Z(t, t_1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) \left(\int_0^{t_1} \mathcal{K}(t_1, t_2)u_0(t_2, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)dt_2 \right) dt_1, \quad \dots, \\ u_n(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) &= \int_0^t Z(t, t_1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) \left(\int_0^{t_1} \mathcal{K}(t_1, t_2)u_{n-1}(t_2, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)dt_2 \right) dt_1, \quad \dots\end{aligned}\quad (19)$$

Из этих формул видно, что коэффициенты ряда зависят также и от ε , причем голоморфным образом. Докажем методом математической индукции, что для любого $t \in [0, T]$

$$\|u_n(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \leq \frac{t^{2n}}{(2n)!} \left(\max_{(t, \tau) \in \chi} \|Z(t, \tau, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \right)^n \left(\max_{(t, \tau) \in \chi} \|\mathcal{K}(t, \tau)\| \right)^n \max_{t \in [0, T]} \|u_0(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\|. \quad (20)$$

При $n = 1$ оценка (20), очевидно, верна. Докажем, что из предположения справедливости неравенства (20) при $n = m$ вытекает его справедливость при $n = m + 1$. В самом деле, если

$$\begin{aligned}\|u_{m-1}(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| &\leq \\ &\leq \frac{t^{2m-2}}{(2m-2)!} \left(\max_{(t, \tau) \in \chi} \|Z(t, \tau, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \right)^{m-1} \left(\max_{(t, \tau) \in \chi} \|\mathcal{K}(t, \tau)\| \right)^{m-1} \max_{t \in [0, T]} \|u_0(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\|,\end{aligned}$$

то будет выполняться следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\|u_m(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| &\leq \int_0^t \|Z(t, \tau, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \left(\int_0^\tau \|\mathcal{K}(\tau, \xi)\| \|u_{m-1}(\xi, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| d\xi \right) d\tau \leq \\ &\leq \left(\max_{(t, \tau) \in \chi} \|Z(t, \tau, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \right)^m \left(\max_{(t, \tau) \in \chi} \|\mathcal{K}(t, \tau)\| \right)^m \max_{t \in [0, T]} \|u_0(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\xi^{2m-2}}{(2m-2)!} d\xi \leq \\ &\leq \frac{t^{2m}}{(2m)!} \left(\max_{(t, \tau) \in \chi} \|Z(t, \tau, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \right)^m \left(\max_{(t, \tau) \in \chi} \|\mathcal{K}(t, \tau)\| \right)^m \max_{t \in [0, T]} \|u_0(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\|.\end{aligned}$$

Отсюда и следует оценка (20).

Сформулируем соответствующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (α) , (β) , (γ) и (δ) . Тогда задача Коши для интегро-дифференциального уравнения (2) имеет единственное псевдоголоморфное решение.

Доказательство. В соответствии с оценкой (20) ряд (17) сходится при $t \in [0, T]$ (и даже при всех вещественных t) и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ — интервала псевдоголоморфности эволюционного

оператора $Z(t, \tau, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$. Далее, поскольку матрица $Z(t, \tau, \varepsilon_*^{-1}, \varepsilon)$ при каждом $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0)$ голоморфна при $\varepsilon : |\varepsilon| < \varepsilon_0$, сумма $u(t, \varepsilon, \varepsilon_*^{-1})$ голоморфна в этой же окрестности точки $\varepsilon = 0$, что и означает псевдоголоморфность $u(t, \varepsilon, \varepsilon^{-1})$. Теорема доказана.

Пример. Найдём приближение первого порядка по ε к псевдоголоморфному решению задачи Коши

$$\varepsilon \dot{v} = A(t)v + \varepsilon^2 \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau)v(\tau)d\tau, \quad t \in (0, t], \quad u|_{t=0} = e_1, \quad (21)$$

где $v = (v_1, v_2)^T$, $A(t) = \begin{pmatrix} -(e^t + 1) & 2e^{-t} \\ e^{2t} & -3 \end{pmatrix}$; $\mathcal{K}(t, \tau)$ — произвольная матрица размера 2×2 с непрерывными по обоим переменным элементами; $e_1 = (1 \ 0)^T$ — начальный вектор.

Собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы $A(t)$ следующие:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, & b_1(t) &= (2e^{-t}, e^t)^T, \\ \lambda_2 &= -(3 + e^t), & b_2(t) &= (-1, e^t)^T. \end{aligned}$$

В соответствии с ранее описанным алгоритмом построения фундаментальной матрицы и формулами (14), (15) имеем

$$W_0(t, \varepsilon^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{2e^{-t/\varepsilon} - 2e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon}}{e^{2t} + 2e^t} & \frac{2e^{-t/\varepsilon} - 2e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon}}{e^{2t} + 2e^t} \\ \frac{e^{t-t/\varepsilon} - e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon}}{e^t + 2} & \frac{e^{t-t/\varepsilon} + 2e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon}}{e^t + 2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение начальной задачи (21) в первом приближении имеет вид

$$v(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} V_{0,1} \\ V_{0,2} \end{pmatrix} + \varepsilon \left[\begin{pmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \end{pmatrix} + \int_0^t Z_0(t, t_1, \varepsilon^{-1}) \left(\int_0^{t_1} \mathcal{K}(t_1, t_2) \begin{pmatrix} V_{0,1} \\ V_{0,2} \end{pmatrix} dt_2 \right) dt_1 \right] + \dots$$

Здесь $V_{0,1} = (2e^{-t/\varepsilon} + e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon})/(2e^t + e^{2t})$, $V_{0,2} = (e^{t-t/\varepsilon} - e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon})/(e^t + 2)$; $V_{1,1}$, $V_{1,2}$ определены в работе [18]; $Z_0(t, t_1, \varepsilon^{-1})$ вычисляется по формуле (16).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00496).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М., 1973.
3. Маслов В.П. Асимптотические методы в теории возмущений. М., 1988.
4. Волков В.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргера с модульной адвекцией и линейным усилением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 11. С. 1851–1860.

5. *Нефедов Н.Н.* Периодические контрастные структуры в задаче реакция–диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // *Мат. заметки.* 2022. Т. 112. № 4. С. 601–612.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
7. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
8. *Бибииков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., 1981.
9. *Качалов В.И.* Псевдоголоморфные и ε -псевдoreгулярные решения сингулярно возмущенных задач // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58. № 3. С. 361–370.
10. *Качалов В.И., Ломов С.А.* Гладкость решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 37. № 2. С. 465–467.
11. *Качалов В.И.* О методе голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных задач // *Изв. вузов. Математика.* 2017. № 6. С. 52–59.
12. *Ломов И.С.* Построение точных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений // *Дифференц. уравнения.* 1988. Т. 24. № 6. С. 1073–1075.
13. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Задача с обратным временем для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения с диагональным вырождением ядра высокого порядка // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2016. Т. 80. № 2. С. 3–15.
14. *Bobodzhonov A., Safonov V., Kachalov V.* Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // *Axioms.* 2019. V. 8. Art. 27.
15. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения. М., 1989.
16. *Besova M.I., Kachalov V.I.* Analytical aspects of the theory of Tikhonov systems // *Mathematics.* 2022. V. 10. № 1. Art. 72.
17. *Бесова М.И.* Голоморфная регуляризация в теории краевых задач // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. математика и её прил. Темат. обз.* 2021. № 193. С. 11–16.
18. *Качалов В.И., Фёдоров Ю.С.* Голоморфная регуляризация слабо нелинейных сингулярно возмущенных задач // *Дифференц. уравнения и процессы управления.* 2016. № 3. С. 17–30.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 13.07.2023 г.
После доработки 06.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.