ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 3, с. 409–421

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ

© 2023 г. Р. В. Бризицкий, П. А. Максимов

Исследованы задачи мультипликативного управления для модели реакции–диффузии–конвекции с нелинейно зависящими от решения, а также зависящими от пространственных переменных коэффициентами. В случае степенной зависимости коэффициентов модели от решения для экстремальных задач выведены системы оптимальности. С их помощью получены оценки локальной устойчивости решений конкретных задач управления относительно малых возмущений как функционалов качества, так и одной из заданных функций краевой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123030123, EDN: QVRFAN

1. Введение. Постановка и разрешимость краевой задачи. В последние годы возрастает интерес к исследованию краевых задач и задач управления для моделей тепломассопереноса (см. [1–15]). При этом приложения экстремальных задач не ограничиваются поиском эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах. В рамках оптимизационного подхода к задачам управления сводятся задачи восстановления неизвестных функций в уравнениях и граничных условиях рассматриваемых моделей по дополнительной информации о решении краевой задачи. В свою очередь, задачи восстановления неизвестных коэффициентов модели сводятся к задачам мультипликативного управления (см. [10, 11, 16–18]).

В данной статье исследуется двухпараметрическая задача мультипликативного управления для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции, рассматриваемого в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi,\mathbf{x})\varphi = f. \tag{1}$$

Предполагается, что граница Γ области Ω состоит из двух частей – Γ_D и Γ_N, и уравнение (1) рассматривается при смешанных краевых условиях

$$\varphi = \psi \ \text{ на } \ \Gamma_D, \quad \lambda(\mathbf{x})(\partial\varphi/\partial n + \alpha(\varphi,\mathbf{x})\varphi) = \chi \ \text{ на } \ \Gamma_N. \tag{2}$$

Здесь функция φ имеет смысл концентрации загрязняющего вещества, $\mathbf{u}$ – заданный вектор скорости, f – объёмная плотность внешних источников вещества, $\lambda(\mathbf{x})$ – коэффициент диффузии, $k(\varphi,\mathbf{x})$ – коэффициент реакции, $\alpha(\varphi,\mathbf{x})$ – коэффициент массообмена, функция χ имеет смысл плотности граничных источников. Ниже на задачу (1), (2) при заданных функциях λ, k, f, α, χ и ψ будем ссылаться как на задачу 1.

В работе [15] доказана глобальная разрешимость задачи 1 и нелокальная единственность её решения в случае, когда нелинейности $k(\varphi,\cdot)\varphi$ и $\alpha(\varphi,\cdot)\varphi$ являются монотонными, а также установлен принцип максимума и минимума для концентрации φ.

Для задачи 1 исследованы задачи мультипликативного управления. В частности, установлено свойство релейности (или справедливость принципа минимакса) для решения одной из рассматриваемых задач управления. Данное свойство означает, что оптимальное управление в зависимости от $\mathbf{x}\in\Omega$ может принимать только два значения, как правило, это верхняя и нижняя границы множества управлений. Тем самым в зависимости от $\mathbf{x}\in\Omega$ происходит скачок управления из одного состояния в другое (принцип минимакса) или его переключение между двумя состояниями (релейность) (см. [6–8] и [15]).

В настоящей работе для двухпараметрической задачи мультипликативного управления, в случае когда коэффициенты $k(\varphi,\cdot)$ и $\alpha(\varphi,\cdot)$ имеют определённый вид, выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем получены оценки локальной устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функции f.

При анализе рассматриваемых задач будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо часть Γ_D границы Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot\,,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ или в $L^2(\Gamma_N)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot\,,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot\,,\cdot)_\Omega$ или $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$ и $(\cdot\,,\cdot)_{\Gamma_N}$. Пусть $L^p_+(D) = \{k \in L^p(D) : k \geqslant 0 \text{ в } D\}$, $p \geqslant 3/2$, $H^s_+(D) = \{h \in H^s(D) : h \geqslant 0 \text{ в } D\}$, $s \geqslant 0$, $Z = \{\mathbf{v} \in L^4(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}$, $H^s_{\lambda_0}(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega) : h \geqslant \lambda_0 > 0 \text{ в } \Omega\}$, $s > 3/2$, $\mathcal{T} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из замыканий двух непересекающихся открытых участков Γ_D и Γ_N $(\Gamma = \overline{\Gamma}_D \bigcup \overline{\Gamma}_N,\ \Gamma_D \bigcap \Gamma_N = \varnothing)$, при этом поверхностная мера $\operatorname{meas}\Gamma_D > 0$ и граница $\partial\Gamma_D$ участка Γ_D состоит из конечного числа липшицевых кривых или является n-угольником;

(ii) $\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s > 3/2$, $\mathbf{u} \in Z$, $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$;

(iii) для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $k(v,\cdot) \in L^p_+(\Omega)$ для некоторого $p \geqslant 3/2$, не зависящего от v, и на любом шаре $B_r = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega} \leqslant r\}$ радиуса r выполняется неравенство

$$\|k(v_1,\cdot) - k(v_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant L_1\|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для любых } v_1, v_2 \in B_r,$$

здесь константа L_1 зависит от r, но не зависит от $v_1, v_2 \in B_r$;

(iv) для любой функции $w \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $\alpha(w,\cdot) \in L^q_+(\Gamma_N)$ для некоторого $q \geqslant 2$, не зависящего от w, и на любом шаре $S_a = \{w \in H^1(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leqslant a\}$ радиуса a справедливо неравенство

$$\|\alpha(w_1,\cdot) - \alpha(w_2,\cdot)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leqslant L_2\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_N)} \quad \text{для любых } w_1, w_2 \in S_a,$$

здесь константа L_2 зависит от a, но не зависит от $w_1, w_2 \in S_a$.

Будем предполагать, что нелинейности $k(\varphi,\cdot)\varphi$ и $\alpha(\varphi,\cdot)\varphi$ являются монотонными в следующем смысле:

(v) $(k(\varphi_1,\cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2,\cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$;

(vi) $(\alpha(\varphi_1,\cdot)\varphi_1 - \alpha(\varphi_2,\cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_{\Gamma_N} \geqslant 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$.

Пусть также функции $k(\varphi,\cdot)$ и $\alpha(\varphi,\cdot)$ ограничены в том смысле, что существуют положительные константы A_1, B_1, зависящие от k, и A_2, B_2, зависящие от α, такие, что

(vii) $\|k(\varphi,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant A_1\|\varphi\|^r_{1,\Omega} + B_1$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $p \geqslant 3/2$, $r \geqslant 0$;

(viii) $\|\alpha(\varphi,\cdot)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leqslant A_2\|\varphi\|^l_{1,\Omega} + B_2$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $q \geqslant 2$, $l \geqslant 0$.

Отметим, что условия (iii), (v) и (vii) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, $p \geqslant 3/2$, позволяющий учитывать достаточно произвольную зависимость коэффициента реакции как от концентрации φ, так и от пространственной переменной $\mathbf{x}$. Например, $k = \varphi^2$ (или $k = \varphi^2|\varphi|$) в подобласти $Q \subset \Omega$ и $k = k_0(\mathbf{x}) \in L^{3/2}_+(\Omega \setminus \overline{Q})$ в $\Omega \setminus \overline{Q}$.

В свою очередь, условия (iv), (vi) и (viii) задают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^q(\Gamma_N)$, $q \geqslant 2$, который позволяет учитывать зависимость коэффициента α от φ и $\mathbf{x}$. Например, $\alpha = |\varphi|$ на $\Gamma_0 \subset \Gamma_N$ и $\alpha = \alpha_0(\mathbf{x}) \in L^2_+(\Gamma_N \setminus \overline{\Gamma}_0)$ в $\Gamma_N \setminus \overline{\Gamma}_0$.

Напомним также, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leqslant 6$ и компактно при $s < 6$, и при некоторой константе C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leqslant C_s\|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \varphi \in H^1(\Omega). \tag{3}$$

Пространство $H^{1/2}(\Gamma_N)$ вкладывается в пространство $L^q(\Gamma_N)$ непрерывно при $q \leqslant 4$ и компактно при $q < 4$. В силу непрерывности оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_N)$ (и его сужения $\gamma|_{\Gamma_N}$ на $\Gamma_N \subset \Gamma$) с константой $\tilde{C}_q$, зависящей от q и Γ_N, справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^q(\Gamma_N)} \leqslant \tilde{C}_q \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех} \ \ \varphi \in H^1(\Omega).$$

Наконец, поскольку при $r > 1$ пространство $H^r(\Gamma_N)$ непрерывно и компактно вкладывается в $L^p(\Gamma_N)$, где $p \leqslant \infty$, из непрерывности оператора частичного следа $\gamma|_{\Gamma_N} : H^{r+1/2}(\Omega) \to \to H^r(\Gamma_N)$ вытекает оценка

$$\|\lambda\|_{L^p(\Gamma_N)} \leqslant \hat{C}\|\lambda\|_{s,\Omega} \quad \text{при любой} \ \ \lambda \in H^s(\Omega), \quad s = r + 1/2 > 3/2.$$

Справедлива следующая техническая лемма (см. [14]).

Лемма 1.1. *При выполнении условий (i), (ii),* $\mathbf{u} \in Z$, $\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s > 3/2$, $k_1 \in L^p_+(\Omega)$, $p \geqslant 3/2$, $\alpha_1 \in L^q_+(\Gamma_N)$, $q \geqslant 2$, *существуют положительные константы* C_0, δ_0, γ_1, γ_p, *зависящие или от* Ω, *или от* Ω *и* p, *или от* Ω, Γ_N *и* q, *при которых справедливы соотношения*

$$|(\lambda\nabla\varphi, \nabla\eta)| \leqslant C_0\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega}, \quad |(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \eta)| \leqslant \gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega}, \tag{4}$$

$$|(k_1\varphi, \eta)| \leqslant \gamma_p\|k_1\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$

$$|(\lambda\alpha_1\varphi, \eta)| \leqslant \gamma_q\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\alpha_1\|_{L^q(\Gamma_N)}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех} \ \ \varphi, \quad \eta \in H^1(\Omega), \tag{5}$$

$$|(\chi, h)| \leqslant \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}\|h\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех} \ \ \chi \in L^2(\Gamma_N), \quad h \in H^1(\Omega), \tag{6}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \varphi) = 0, \quad (\lambda\nabla\varphi, \nabla\varphi) \geqslant \lambda_*\|\varphi\|^2_{1,\Omega} \quad \text{для любой} \ \ \varphi \in \mathcal{T}, \quad \lambda_* \equiv \delta\lambda_0. \tag{7}$$

Умножим уравнение (1) на $h \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по области Ω, применяя формулу Грина. Учитывая (2), получаем

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\lambda\alpha(\varphi, \cdot)\varphi, h)_{\Gamma_N} =$$

$$= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для любой} \ \ h \in \mathcal{T}, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = \psi. \tag{8}$$

Определение. Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству (8), назовём *слабым решением* задачи 1.

Для доказательства разрешимости задачи 1 в [15] использовалась следующая

Лемма 1.2. *Пусть выполняются условия (i). Тогда для любой функции* $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ *существует функция* $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ *такая, что* $\varphi_0 = \psi$ *на* Γ_D *и при некоторой константе* C_Γ, *зависящей от* Ω *и* Γ_D, *справедлива оценка*

$$\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \leqslant C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1 [15]. *При выполнении условий (i)–(viii) существует единственное слабое решение* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *задачи 1, для которого справедлива оценка*

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant M_\varphi \equiv C_* M_l + C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}, \tag{9}$$

где C_Γ *– константа из леммы 1.2 и*

$$M_l \equiv \|f\|_\Omega + \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N} + (C_0 C_\Gamma\|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_1 C_\Gamma\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3})\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} +$$

$$+ C_\Gamma(\gamma_p(A_1 C^r_\Gamma\|\psi\|^r_{1/2,\Gamma_D} + B_1) + \gamma_q\|\lambda\|_{s,\Omega}(A_2 C^l_\Gamma\|\psi\|^l_{1/2,\Gamma_D} + B_2))\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}.$$

2. Мультипликативная задача управления. Пусть функция $k(\varphi, \mathbf{x})$ удовлетворяет следующему условию:

(ix) $k(\varphi, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$, где $\beta(\mathbf{x}) \in H^1_+(\Omega)$, $k_0(\varphi) \in L^2_+(\Omega)$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет свойству (vii) при $p > 2$, и в любом шаре $B_r = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant r\}$ радиуса r справедливо неравенство

$$\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_\Omega \leqslant L_3\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для всех } \varphi_1, \varphi_2 \in B_r. \tag{10}$$

Здесь константа L_3 зависит от радиуса r и не зависит от конкретных $\varphi_1, \varphi_2 \in B_r$.

Несложно показать, что условия (ix) описывают частный случай функции $k(\varphi, \mathbf{x})$, удовлетворяющей (iv). Действительно (см. также [12]),

$$\|\beta(k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2))\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leqslant \|\beta\|_{L^6(\Omega)}\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_\Omega \leqslant C_6\|\beta\|_{1,\Omega}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)}.$$

Для постановки задачи управления разобьем множество исходных данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда отнесём функции $\mathbf{u}$, $k_0(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$, f, χ и ψ, и группу управлений, куда отнесём функции λ и β, предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах K_1 и K_2, удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H^s_{\lambda_0}(\Omega)$ и $K_2 \subset H^1_+(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые множества.

Положим $u = (\lambda, \beta)$, $K = K_1 \times K_2$. Введём пространство $Y = \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$ и оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ по формулам

$$\langle F_1(\varphi, u), h\rangle = (\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (\beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\lambda\alpha(\varphi, \mathbf{x})\varphi, h)_{\Gamma_N} - (f, h) - (\chi, h)_{\Gamma_N},$$

$$F_2(\varphi) = \varphi|_{\Gamma_D} - \psi$$

и запишем (8) в виде $F(\varphi, u) = 0$. Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние $\varphi \in H^1(\Omega)$ и управление $u \in K$, сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2}I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + \frac{\mu_2}{2}\|\beta\|^2_{1,\Omega} \to \inf, \quad F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K. \tag{11}$$

Здесь $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ – функционал, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости.

Обозначим через $Z_{ad} = \{(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K : F(\varphi, u) = 0, J(\varphi, u) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (11) и предположим, что выполняется условие

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ (либо $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2$), K – ограниченное множество и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|^2_Q = \int\limits_Q |\varphi - \varphi^d|^2 d\mathbf{x}, \quad I_2(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|^2_{1,Q}. \tag{12}$$

Здесь $\varphi^d \in L^2(Q)$ (либо $\varphi^d \in H^1(Q)$) – заданная в подобласти $Q \subset \Omega$ функция.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (i)–(viii), (xi) и (j), (jj), функционал $I : H^1(\Omega) \to \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и множество Z_{ad} не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$ задачи (11).*

Замечание. Функционалы в (12) удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Также в дальнейшем будем использовать оценки, вытекающие из её условий:

$$\|\lambda\|_{s,\Omega} \leqslant C_\lambda, \quad \|\beta\|_{1,\Omega} \leqslant C_\beta \quad \text{для любых } \lambda \in K_1 \text{ и } \beta \in K_2,$$

где C_λ и C_β – положительные константы.

Будем считать далее, что $k(\varphi, \cdot) = \beta(\cdot)k_0(\varphi) \equiv \beta(\cdot)\varphi^2$ и $\alpha(\alpha) = |\alpha|$. При таких коэффициентах реакции и массообмена для экстремальной задачи (11) ниже будет выведена система оптимальности и на основе её анализа будут получены оценки локальной устойчивости оптимальных решений задачи (11) относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функции f.

Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to \to Y$ по φ в каждой точке $(\hat\varphi, \hat u) = (\hat\varphi, \hat\lambda, \hat\beta)$ есть линейный оператор $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) : H^1(\Omega) \to Y$, ставящий в соответствие каждому элементу $h \in H^1(\Omega)$ элемент $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)(h) = (\hat y_1, \hat y_2) \in Y$. Здесь элементы $\hat y_1 \in \mathcal{T}^*$ и $\hat y_2 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ определяются по $\hat\varphi$ и τ соотношениями

$$\langle \hat y_1, \tau\rangle = (\hat\lambda\nabla\tau, \nabla h) + 3(\hat\beta\hat\varphi^2\tau, h) + 2(\hat\lambda|\hat\varphi|\tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) \quad \text{для любого } \tau \in H^1(\Omega), \quad y_2 = h|_{\Gamma_D}.$$

Введём сопряжённое к Y пространство $Y^* = \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$. Через $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^* : Y^* \to H^1(\Omega)^*$ обозначим сопряжённый к $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)$ оператор. Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач [19], введём элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, на который будем ссылаться как на сопряжённое состояние, и лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, u, \mathbf{y}^*) = J(\varphi, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\varphi, u)\rangle_{Y^*\times Y} \equiv J(\varphi, u) + \langle F_1(\varphi, u), \theta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(\varphi, u)\rangle_{\Gamma_D},$$

где $\langle\zeta, \cdot\,\rangle_{\Gamma_D} = \langle\zeta, \cdot\,\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_D)^*\times H^{1/2}(\Gamma_D)}$.

Из теоремы Лакса–Мильграма вытекает, что что для любых $f \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует единственное решение $\tau \in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\hat\lambda\nabla\tau, \nabla h) + 3(\hat\beta\hat\varphi^2\tau, h) + 2(\hat\lambda|\hat\varphi|\tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) = (f, h) \quad \text{для всех } h \in \mathcal{T}, \quad \tau|_{\Gamma_D} = \psi.$$

Тогда оператор $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ – изоморфизм, а из [19] вытекает

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия (i), (ii), (j), (jj), $k(\varphi, \cdot\,) = \beta(\cdot)\varphi^2$, где $\beta(\cdot) \in \in H^1_+(\Omega)$, и $\alpha(\varphi) = |\varphi|$, функционал $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по φ в точке $\hat\varphi$ и локальный минимум в задаче (11) достигается в точке $(\hat\varphi, \hat u) \in H^1(\Omega) \times K$. Тогда существует единственный множитель Лагранжа $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$ такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^*\mathbf{y}^* = -J'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)$ в $H^1(\Omega)^*$, эквивалентное тождеству*

$$(\hat\lambda\nabla\tau, \nabla\theta) + 3(\hat\beta\hat\varphi^2\tau, \theta) + 2(\hat\lambda|\hat\varphi|\tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta) + \langle\zeta, \tau\rangle_{\Gamma_D} =$$
$$= -(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\hat\varphi), \tau\rangle \quad \textit{для всех } \tau \in H^1(\Omega),$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat\varphi, \hat u, \mathbf{y}^*) \leqslant \mathcal{L}(\hat\varphi, u, \mathbf{y}^*)$ для любой $u \in K$, эквивалентный неравенствам

$$\mu_1(\hat\lambda, \lambda - \hat\lambda)_{s,\Omega} + ((\lambda - \hat\lambda)\nabla\hat\varphi, \nabla\theta) + ((\lambda - \hat\lambda)|\hat\varphi|\hat\varphi, \theta)_{\Gamma_N} \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\mu_2(\hat\beta, \beta - \hat\beta)_{1,\Omega} + ((\beta - \hat\beta)\hat\varphi^3, \theta) \geqslant 0 \tag{14}$$

при любых $\lambda \in K_1$ и $\beta \in K_2$.

3. Основное свойство системы оптимальности. Обозначим через $(\varphi_1, u_1) \in H^1(\Omega) \times \times K$ решение задачи (11), отвечающее заданной функции $f = f_1 \in L^2(\Omega)$, а через $(\varphi_2, u_2) \in \in H^1(\Omega) \times K$ – решение задачи

$$\tilde J(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2}\tilde I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + \frac{\mu_2}{2}\|\beta\|^2_{1,\Omega} \to \inf, \quad F(\varphi, u, \tilde f) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, \tag{15}$$

которая получается из (11) заменой функционала $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ другим функционалом $\tilde I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ и заменой функции f функцией $f_2 = \tilde f \in L^2(\Omega)$. Считая множество K ограниченным, а функционалы $I(\varphi)$ и $\tilde I(\varphi)$ непрерывно дифференцируемыми на $H^1(\Omega)$, выведем одно важное для дальнейшего анализа неравенство для разности решений задач (11) и (15). Напомним, что в силу теоремы 1.1 справедливы следующие оценки для φ_i:

$$\|\varphi_i\|_{1,\Omega} \leqslant M_\varphi = C_* \sup_{(\lambda,\beta)\in K} \tilde M_\varphi, \quad i = 1, 2, \quad C_* \equiv \lambda_*^{-1}, \tag{16}$$

где $\tilde M_\varphi$ определена в (9). Очевидно, что $M_\varphi < \infty$ в случае, когда множество K ограничено.

Обозначим через $(\theta_i, \zeta_i) \in \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ множители Лагранжа, отвечающие решениям (φ_i, u_i), $i = 1, 2$. В силу теоремы 2.2 они удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda_1 \nabla\tau, \nabla\theta_1) + 3(\beta_1\varphi_1^2\tau, \theta_1) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta_1) + 2(\lambda_1|\varphi_1|\tau, \theta_1)_{\Gamma_N} +$$

$$+ \langle\zeta_1, \tau\rangle_{\Gamma_D} = -\frac{\mu_0}{2}\langle I'_\varphi(\varphi_1), \tau\rangle \quad \text{для любых} \;\; \tau \in H^1(\Omega), \tag{17}$$

$$(\lambda_2 \nabla\tau, \nabla\theta_2) + 3(\beta_2\varphi_2^2\tau, \theta_2) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta_2) + 2(\lambda_2|\varphi_2|\tau, \theta_2)_{\Gamma_N} +$$

$$+ \langle\zeta_2, \tau\rangle_{\Gamma_D} = -\frac{\mu_0}{2}\langle \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \tau\rangle \quad \text{для любых} \;\; \tau \in H^1(\Omega). \tag{18}$$

Положим

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \beta = \beta_1 - \beta_2, \quad \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \zeta = \zeta_1 - \zeta_2, \quad f = f_1 - f_2. \tag{19}$$

При $k(\varphi, \cdot) = \beta(\cdot)\varphi^2$ и $\alpha(\varphi) = |\varphi|$ слабая формулировка (8) задачи 1 принимает вид

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (\beta\varphi^3, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\lambda|\varphi|\varphi, h)_{\Gamma_N} =$$

$$= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = \psi. \tag{20}$$

Вычтем тождество (20), записанное для (φ_2, u_2, f_2), из этого же тождества, записанного для (φ_1, u_1, f_1). Учитывая, что

$$\beta_1\varphi_1^3 - \beta_2\varphi_2^3 = \beta\varphi_1^3 + \beta_2(\varphi_1^3 - \varphi_2^3), \quad \lambda_1\nabla\varphi_1 - \lambda_2\nabla\varphi_2 = \lambda_1\nabla\varphi + \lambda\nabla\varphi_2,$$

$$\lambda_1|\varphi_1|\varphi_1 - \lambda_2|\varphi_2|\varphi_2 = \lambda|\varphi_1|\varphi_1 + \lambda_2(|\varphi_1|\varphi_1 - |\varphi_2|\varphi_2),$$

получаем равенство

$$(\lambda_1\nabla\varphi, \nabla h) + (\beta_2(\varphi_1^3 - \varphi_2^3), h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\lambda_2(|\varphi_1|\varphi_1 - |\varphi_2|\varphi_2), h)_{\Gamma_N} =$$

$$= (f, h) - (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla h) - (\beta\varphi_1^3, h) - (\lambda|\varphi_1|\varphi_1, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для любых} \;\; h \in \mathcal{T}. \tag{21}$$

Полагая $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ в (21), учитывая (7), (16) и монотонность функций $\lambda_2\varphi|\varphi|$ и $\beta_2\varphi^3$:

$$(\lambda_2(|\varphi_1|\varphi_1 - |\varphi_2|\varphi_2), \varphi_1 - \varphi_2)_{\Gamma_N} \geqslant 0, \quad (\beta_2(\varphi_1^3 - \varphi_2^3), \varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0,$$

выводим оценку

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant C_*(a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega), \tag{22}$$

где $a = C_0 M_\varphi + \gamma_q \tilde{C}_4 M_\varphi^2$, $b = C_6^5 M_\varphi^3$.

Положим $\lambda = \lambda_2$ в неравенстве (13), записанном при $\hat{\lambda} = \lambda_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$, $\theta = \theta_1$, и $\lambda = \lambda_1$ в неравенстве (13), записанном при $\hat{\lambda} = \lambda_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$, $\theta = \theta_2$. Имеем

$$\mu_1(\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1)_{s,\Omega} + ((\lambda_2 - \lambda_1)\nabla\varphi_1, \nabla\theta_1) + ((\lambda_2 - \lambda_1)|\varphi_1|\varphi_1, \theta_1)_{\Gamma_N} \geqslant 0,$$

$$\mu_1(\lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)_{s,\Omega} + ((\lambda_1 - \lambda_2)\nabla\varphi_2, \nabla\theta_2) + ((\lambda_1 - \lambda_2)|\varphi_2|\varphi_2, \theta_2)_{\Gamma_N} \geqslant 0.$$

Сложив последние неравенства, получим

$$\mu_1\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 \leqslant -(\lambda\nabla\varphi, \nabla\theta_2) - (\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\theta) - (\lambda(\varphi_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|) + |\varphi_1|\varphi), \theta_2)_{\Gamma_N} + (\lambda\varphi_1|\varphi_1|, \theta)_{\Gamma_N}. \tag{23}$$

Положим $\beta = \beta_2$ в неравенстве (14), записанном при $\hat{\beta} = \beta_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$, $\theta = \theta_1$, и $\beta = \beta_1$ в неравенстве (14), записанном при $\hat{\beta} = \beta_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$, $\theta = \theta_2$:

$$\mu_2(\beta_1, \beta_2 - \beta_1)_{1,\Omega} - ((\beta_2 - \beta_1)\varphi_1^3, \theta_1) \geqslant 0, \quad \mu_2(\beta_2, \beta_1 - \beta_2)_{1,\Omega} - ((\beta_1 - \beta_2)\varphi_2^3, \theta_2) \geqslant 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к соотношению

$$\mu_1\|\beta\|^2_{1,\Omega} \leqslant (\beta\varphi(\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2),\theta_1)+(\beta\varphi_2^3,\theta). \tag{24}$$

Вычтем теперь тождество (18) из (17). Учитывая, что

$$(\lambda_1\nabla\tau,\nabla\theta_1)-(\lambda_2\nabla\tau,\nabla\theta_2)=(\lambda_1\nabla\tau,\nabla\theta)+(\lambda\nabla\tau,\nabla\theta_2),$$

$$(\lambda_1|\varphi_1|\tau,\theta_1)_{\Gamma_N}-(\lambda_2|\varphi_2|\tau,\theta_2)_{\Gamma_N}=(\lambda|\varphi_1|\tau,\theta_1)_{\Gamma_N}+(\lambda_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)\tau,\theta_1)_{\Gamma_N}+(\lambda_2|\varphi_2|\tau,\theta)_{\Gamma_N},$$

$$(\beta_1\varphi_1^2\tau,\theta_1)-(\beta_2\varphi_2^2\tau,\theta_2)=(\beta\varphi_1^2\tau,\theta_1)+(\beta_2\varphi(\varphi_1+\varphi_2)\tau,\theta_1)+(\beta_2\varphi_2^2\tau,\theta),$$

будем иметь

$$\begin{gathered}(\lambda_1\nabla\tau,\nabla\theta)+3(\beta_2\varphi(\varphi_1+\varphi_2)\tau,\theta_1)+3(\beta_2\varphi_2^2\tau,\theta)+\\ +2(\lambda_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)\tau,\theta_1)_{\Gamma_N}+2(\lambda_2|\varphi_2|\tau,\theta)_{\Gamma_N}+(\mathbf{u}\cdot\nabla\tau,\theta)+\langle\zeta,\tau\rangle_{\Gamma_D}=\\ =-(\lambda\nabla\tau,\nabla\theta_2)-2(\lambda|\varphi_1|\tau,\theta_1)_{\Gamma_N}-3(\beta\varphi_1^2\tau,\theta_1)-(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\varphi_1)-\tilde I'_\varphi(\varphi_2),\tau\rangle\end{gathered} \tag{25}$$

для всех $\tau\in H^1(\Omega)$.

Полагая в (25) $\tau=\varphi$, с учётом того, что $\varphi=\varphi_1-\varphi_2=0$ на Γ_D, получаем

$$\begin{gathered}(\lambda_1\nabla\varphi,\nabla\theta)+3(\beta_2(\varphi_1+\varphi_2)\varphi^2,\theta_1)+3(\beta_2\varphi_2^2\varphi,\theta)+\\ +2(\lambda_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}+2(\lambda_2|\varphi_2|\varphi,\theta)_{\Gamma_N}+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\theta)=\\ =-(\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_2)-2(\lambda|\varphi_1|\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}-3(\beta\varphi_1^2\varphi,\theta_1)-(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\varphi_1)-\tilde I'_\varphi(\varphi_2),\varphi\rangle.\end{gathered} \tag{26}$$

Положим далее $h=\theta$ в (21). Будем иметь

$$\begin{gathered}(\lambda_1\nabla\varphi,\nabla\theta)+(\beta_2(\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2)\varphi,\theta)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\theta)+(\lambda_2(|\varphi_1|\varphi_1-|\varphi_2|\varphi_2),\theta)_{\Gamma_N}=\\ =(f,\theta)-(\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta)-(\beta\varphi_1^3,\theta)-(\lambda|\varphi_1|\varphi_1,\theta)_{\Gamma_N}.\end{gathered}$$

Вычтем это равенство из (26). Учитывая, что

$$\begin{gathered}3(\beta_2(\varphi_1+\varphi_2)\varphi^2,\theta_1)+3(\beta_2\varphi_2^2\varphi,\theta)-(\beta_2(\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2)\varphi,\theta)=\\ =3(\beta_2(\varphi_1+\varphi_2)\varphi^2,\theta_1)-(\beta_2(\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2-2\varphi_2^2)\varphi,\theta),\\ 2(\lambda_2|\varphi_2|\varphi,\theta)_{\Gamma_N}-(\lambda_2(|\varphi_1|\varphi_1-|\varphi_2|\varphi_2),\theta)_{\Gamma_N}=\\ =(\lambda_2(2|\varphi_2|(\varphi_1-\varphi_2)-|\varphi_1|\varphi_1+|\varphi_2|\varphi_2),\theta)_{\Gamma_N}=(\lambda_2(\varphi_1(|\varphi_2|-|\varphi_1|)+|\varphi_2|\varphi),\theta)_{\Gamma_N},\end{gathered}$$

получим

$$\begin{gathered}3(\beta_2(\varphi_1+\varphi_2)\varphi^2,\theta_1)-(\beta_2(\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2-2\varphi_2^2)\varphi,\theta)+\\ +2(\lambda_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}+(\lambda_2(\varphi_1(|\varphi_2|-|\varphi_1|)\varphi_1+|\varphi_2|\varphi),\theta)_{\Gamma_N}=\\ =-(\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_2)-2(\lambda|\varphi_1|\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}-3(\beta\varphi_1^2\varphi,\theta_1)-(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\varphi_1)-\tilde I'_\varphi(\varphi_2),\varphi\rangle-\\ -(f,\theta)+(\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta)+(\beta\varphi_1^3,\theta)+2(\lambda|\varphi_1|\varphi_1,\theta)_{\Gamma_N}.\end{gathered} \tag{27}$$

Равенство (27) запишем в следующем виде:

$$\begin{gathered}(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\varphi_1)-\tilde I'_\varphi(\varphi_2),\varphi\rangle=-3(\beta_2(\varphi_1+\varphi_2)\varphi^2,\theta_1)+(\beta_2(\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2-2\varphi_2^2)\varphi,\theta)-\\ -2(\lambda_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}-(\lambda_2((|\varphi_2|-|\varphi_1|)\varphi_1+|\varphi_2|\varphi),\theta)_{\Gamma_N}-(\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_2)-\\ -2(\lambda|\varphi_1|\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}-3(\beta\varphi_1^2\varphi,\theta_1)-(f,\theta)+(\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta)+(\beta\varphi_1^3,\theta)+2(\lambda|\varphi_1|\varphi_1,\theta)_{\Gamma_N}.\end{gathered} \tag{28}$$

Складывая (28) с (23) и (24), получаем соотношения

$$(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\varphi_1)-\tilde I'_\varphi(\varphi_2),\varphi\rangle+\mu_1\|\lambda\|^2_{s,\Omega}+\mu_2\|\beta\|^2_{1,\Omega}\leqslant A_1+A_2,$$

$$A_1=-3(\beta_2(\varphi_1+\varphi_2)\varphi^2,\theta_1)+(\beta_2(\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2-2\varphi_2^2)\varphi,\theta)-$$
$$-(\beta\varphi(-2\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2),\theta_1)+(\beta(\varphi_1^3+\varphi_2^3),\theta)-(f,\theta),$$
$$A_2=-2(\lambda_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}-(\lambda_2((|\varphi_2|-|\varphi_1|)\varphi_1+|\varphi_2|\varphi),\theta)_{\Gamma_N}-$$
$$-2(\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_2)-2(\lambda|\varphi_1|\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}+(\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta)+3(\lambda|\varphi_1|\varphi_1,\theta)_{\Gamma_N}-$$
$$-(\lambda\nabla\varphi_1,\nabla\theta)-(\lambda(\varphi_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)+|\varphi_1|\varphi),\theta_2)_{\Gamma_N}. \quad (29)$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия (i) и (j), $K\subset H^s_{\lambda_0}(\Omega)\times H^1(\Omega)$ – ограниченное множество, пары $(\varphi_1,u_1)\in H^1(\Omega)\times K$ и $(\varphi_2,u_2)\in H^1(\Omega)\times K$ являются решениями соответственно задач (11) при $f=f_1\in L^2(\Omega)$ и (15) при $f=f_2\in L^2(\Omega)$. Пусть далее $(\theta_i,\zeta_i)\in\mathcal T\times H^{1/2}(\Gamma_D)$ – множители Лагранжа, отвечающие решениям (φ_i,u_i), $i=1,2$, и функционалы I и $\tilde I$ непрерывно дифференцируемы относительно φ. Тогда для разностей φ, λ, β, θ и f, введённых в (19), справедлива оценка (22) и выполняется неравенство (29).*

4. Оценки локальной устойчивости оптимальных решений. Основываясь на теореме 3.1, установим достаточные условия единственности и устойчивости решений конкретных экстремальных задач. Начнём с анализа следующей экстремальной задачи, отвечающей функционалу качества $I_1(\varphi)=\|\varphi-\varphi^d\|^2_Q$:

$$J(\varphi,u)=\frac{\mu_0}{2}I_1(\varphi)+\frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Omega}+\frac{\mu_2}{2}\|\beta\|^2_{1,\Omega}\to\inf,\quad F(\varphi,u,f)=0,\quad (\varphi,u)\in H^1(\Omega)\times K. \quad (30)$$

Обозначим через (φ_1,u_1) решение задачи (30), отвечающее заданным функциям $\varphi^d=\varphi_1^d\in\in L^2(Q)$ и $f=f_1\in L^2(\Omega)$. Через (φ_2,u_2) обозначим решение задачи (30), отвечающее возмущённым функциям $\tilde\varphi^d=\varphi_2^d\in L^2(Q)$ и $\tilde f=f_2\in L^2(\Omega)$. Полагая $\varphi^d=\varphi_1^d-\varphi_2^d$, в дополнение к (19) имеем в силу (12) равенства

$$\langle I_1'(\varphi_i),\tau\rangle=2(\varphi_i-\varphi_i^d,\tau)_Q,\quad \langle I_1'(\varphi_1)-\tilde I_1'(\varphi_2),\tau\rangle=2((\varphi,\tau)_Q-(\varphi^d,\tau)_Q),\quad i=1,2. \quad (31)$$

С учётом (31) равенства (17), (18) для множителей Лагранжа $\theta_i\in\mathcal T$, отвечающие решениям (φ_i,u_i), принимают вид

$$(\lambda_i\nabla\tau,\nabla\theta_i)+3(\beta_i\varphi_i^2\tau,\theta_i)+2(\lambda_i|\varphi_i|\tau,\theta_i)+(\mathbf u\cdot\nabla\tau,\theta_i)+$$
$$+\langle\zeta_i,\tau\rangle_{\Gamma_D}=-\mu_0(\varphi_i-\varphi_i^d,\tau)_Q\quad\text{для любых}\ \tau\in H^1(\Omega),\quad i=1,2. \quad (32)$$

В (25) теперь подставим производную Фреше от конкретного функционала качества и запишем это соотношение в виде уравнения относительно разности $\theta=\theta_1-\theta_2$:

$$(\lambda_1\nabla\tau,\nabla\theta)+3(\beta_2\varphi_2^2\tau,\theta)+2(\lambda_2|\varphi_2|\tau,\theta)_{\Gamma_N}+(\mathbf u\cdot\nabla\tau,\theta)+\langle\zeta,\tau\rangle_{\Gamma_D}=$$
$$=-3(\beta_2\varphi(\varphi_1+\varphi_2)\tau,\theta_1)-3(\beta\varphi_1^2\tau,\theta_1)-2(\lambda_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)\tau,\theta_1)_{\Gamma_N}-$$
$$-(\lambda\nabla\tau,\nabla\theta_2)-2(\lambda|\varphi_1|\tau,\theta_1)_{\Gamma_N}-\mu_0(\varphi-\varphi^d,\tau)_Q\quad\text{для всех}\ \tau\in H^1(\Omega). \quad (33)$$

Наконец, (29) примет следующий вид:

$$\mu_0(\|\varphi\|^2_Q-(\varphi^d,\varphi)_Q)+\mu_1\|\lambda\|^2_{s,\Omega}+\mu_2\|\beta\|^2_{1,\Omega}\leqslant A_1+A_2-(f,\theta). \quad (34)$$

Используя (16) и (22), оценим множители θ_i, $i=1,2$, разность $\theta=\theta_1-\theta_2$, а также величины A_1 и A_2 в (34).

Начнём с оценки множителя Лагранжа θ_i, являющегося решением задачи (32). В силу (16) и неравенств $\|\varphi_i\|_Q \leqslant \|\varphi_i\|_{1,\Omega}$, $\|\tau\|_Q \leqslant \|\tau\|_{1,\Omega}$ имеем

$$|(\varphi_i - \varphi_i^d, \tau)_Q| \leqslant M_\varphi^0 \|\tau\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех} \quad \tau \in H^1(\Omega), \quad M_\varphi^0 \equiv M_\varphi + \max(\|\varphi_1^d\|_Q, \|\varphi_2^d\|_Q). \tag{35}$$

Полагая $\tau = \theta_i \in \mathcal{T}$ в (32) и используя (35) и лемму 2.1, выводим оценку

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leqslant \mu_0 C_* M_\varphi^0, \quad i = 1, 2. \tag{36}$$

По аналогичной схеме выводится оценка для разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$, удовлетворяющей соотношению (33). При этом для её вывода достаточно оценить правую часть (33). Используя (3), (4), (16), (22), (36) и неравенство Гёльдера, имеем последовательно

$$|(\varphi, \tau)_Q| \leqslant \|\varphi\|_{1,\Omega}\|\tau\|_{1,\Omega} \leqslant C_*(a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega)\|\tau\|_{1,\Omega}, \quad |(\varphi^d, \tau)_Q| \leqslant \|\varphi^d\|_Q\|\tau\|_{1,\Omega},$$

$$3|(\beta_2\varphi(\varphi_1 + \varphi_2)\tau, \theta_1)| \leqslant 3\|\beta_2\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi_1 + \varphi_2\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi\|_{L^6(\Omega)}\|\theta_1\|_{L^6(\Omega)}\|\tau\|_{L^6(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant 6C_6^5\|\beta_2\|_{1,\Omega}\|\varphi_i\|_{1,\Omega}\|\theta_1\|_{1,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\tau\|_{1,\Omega} \leqslant 6\mu_0 C_\beta C_6^5 C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0(a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega)\|\tau\|_{1,\Omega},$$

$$3|(\beta\varphi_1^2\tau, \theta_1)| \leqslant 3\|\beta\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi_1\|^2_{L^6(\Omega)}\|\theta_1\|_{L^6(\Omega)}\|\tau\|_{L^6(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant 3C_6^5\|\beta\|_{1,\Omega}\|\varphi_1\|^2_{1,\Omega}\|\theta_1\|_{1,\Omega}\|\tau\|_{1,\Omega} \leqslant 3\mu_0 C_* C_6^5 M_\varphi^0 M_\varphi^2\|\beta\|_{1,\Omega}\|\tau\|_{1,\Omega},$$

$$2|(\lambda_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|)\tau, \theta_1)_{\Gamma_N}| \leqslant 2\gamma_q C_\lambda\|\varphi\|_{L^4(\Gamma_N)}\|\tau\|_{1,\Omega}\|\theta_1\|_{1,\Omega} \leqslant$$

$$\leqslant 2\mu_0\gamma_q C_*^2\tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0(a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega)\|\tau\|_{1,\Omega},$$

$$|(\lambda\nabla\tau, \nabla\theta_2)| \leqslant C_0\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\theta_2\|_{1,\Omega}\|\tau\|_{1,\Omega} \leqslant \mu_0 C_* C_0 M_\varphi^0\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\tau\|_{1,\Omega},$$

$$2|(\lambda|\varphi_1|\tau, \theta_1)_{\Gamma_N}| \leqslant 2\mu_0\gamma_q C_*\tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\tau\|_{1,\Omega}.$$

Рассуждая аналогично выводу оценки (36) для решения задачи (32), заключаем, что для (единственного) решения θ задачи (33) справедлива оценка

$$\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant \mu_0(\alpha_1\|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2\|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3\|f\|_\Omega + \|\varphi^d\|_Q). \tag{37}$$

Здесь константы α_1, α_2 и α_3 определяются формулами

$$\alpha_1 = C_*a + 6C_6^5 C_\beta C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0 a + 2\gamma_q C_*^2\tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0 a + C_0 C_* M_\varphi^0 + 2\gamma_q C_*\tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi,$$

$$\alpha_2 = C_*b + 6C_6^5 C_\beta C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0 b + 3C_6^5 C_* M_\varphi^0 M_\varphi^2 + 2\gamma_q C_*^2\tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0 b,$$

$$\alpha_3 = C_* + 6C_6^5 C_\beta C_*^2\mu_0 M_\varphi M_\varphi^0 + 2\gamma_q C_*^2\tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0.$$

Используя неравенства (16), (22), (36) и (37), оценим теперь слагаемые, входящие в выражение для величин A_1 и A_2 в (29). Учитывая (3)–(5) и неравенство Юнга $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + (1/\varepsilon)b^2$ для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, оценим каждое из пяти слагаемых, входящих в A_1:

$$|3(\beta_2(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi^2, \theta_1)| \leqslant 3\|\beta_2\|_{L^6(\Omega)}(\|\varphi_1\|_{L^6(\Omega)} + \|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)})\|\theta_1\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi\|^2_{L^6(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant 18\mu_0 C_6^5 C_*^3 C_\beta M_\varphi M_\varphi^0(a^2\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + b^2\|\beta\|^2_{1,\Omega} + \|f\|^2_\Omega), \tag{38}$$

$$|(\beta_2(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2)\varphi, \theta)| \leqslant 4\|\beta_2\|_{L^6(\Omega)}\max_{i=1,2}\|\varphi_i\|^2_{L^6(\Omega)}\|\varphi\|_{L^6(\Omega)}\|\theta\|_{L^6(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant 4\mu_0 C_6^5 C_\beta M_\varphi^2(a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega)(\alpha_1\|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2\|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3\|f\|_\Omega + \|\varphi^d\|_Q) \leqslant$$

$$\leqslant 4\mu_0 C_* C_6^5 C_\beta M_\varphi^2[(a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2)\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2)\|\beta\|^2_{1,\Omega} + (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5)\|f\|^2_\Omega + 1.5\|\varphi^d\|^2_Q],$$

$$|(\beta(\varphi_1^3 + \varphi_2^3), \theta)| \leqslant 2\mu_0 C_6^5 M_\varphi^3\|\beta\|_{1,\Omega}(\alpha_1\|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2\|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3\|f\|_\Omega + \|\varphi^d\|_Q) \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0 C_6^5 M_\varphi^3(\alpha_1^2\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + 2(\alpha_2 + 1.5)\|\beta\|^2_{1,\Omega} + \alpha_3^2\|f\|^2_\Omega + \|\varphi^d\|^2_Q), \tag{39}$$

$$|(\beta\varphi(\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1^2), \theta_1)| \leqslant \mu_0 C_*^2 C_6^5 M_\varphi^2 M_\varphi^0\|\beta\|_{1,\Omega}(a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0 C_*^2 C_6^5 M_\varphi^2 M_\varphi^0(0.5a^2\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + (b + 1)\|\beta\|^2_{1,\Omega} + 0.5\|f\|^2_\Omega),$$

$$|(f,\theta)| \leqslant \mu_0\|f\|_\Omega(\alpha_1\|\lambda\|_{s,\Omega}+\alpha_2\|\beta\|_{1,\Omega}+\alpha_3\|f\|_\Omega+\|\varphi^d\|_Q) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_0(0.5\alpha_1^2\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+0.5\alpha_2^2\|\beta\|_{1,\Omega}^2+(1.5+\alpha_3)\|f\|_\Omega^2+0.5\|\varphi^d\|_Q^2).$$

Выражение в A_2 содержит восемь слагаемых. Сначала детально оценим первые четыре:

$$2|(\lambda_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}| \leqslant 2\mu_0\gamma_q C_* C_\lambda \tilde{C}_4 M_\varphi^0\|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu_0\gamma_q C_* C_\lambda \tilde{C}_4 M_\varphi^0 C_*^2(3a^2\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+3b^2\|\beta\|_{1,\Omega}^2+3\|f\|_\Omega^2),$$
$$|(\lambda_2((|\varphi_2|-|\varphi_1|)\varphi_1+|\varphi_2|\varphi),\theta)_{\Gamma_N}| \leqslant 2\gamma_q C_\lambda M_\varphi \tilde{C}_4\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu_0\gamma_q C_\lambda M_\varphi \tilde{C}_4 C_*(a\|\lambda\|_{s,\Omega}+b\|\beta\|_{1,\Omega}+\|f\|_\Omega)(\alpha_1\|\lambda\|_{s,\Omega}+\alpha_2\|\beta\|_{1,\Omega}+\alpha_3\|f\|_\Omega+\|\varphi^d\|_Q) \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu_0\gamma_q C_\lambda M_\varphi \tilde{C}_4 C_*((a\alpha_1+\alpha_1^2+1.5a^2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+(b\alpha_2+\alpha_2^2+1.5b^2)\|\beta\|_{1,\Omega}^2+$$
$$+(\alpha_3+\alpha_3^2+1.5)\|f\|_\Omega^2+1.5\|\varphi^d\|_Q^2),$$
$$|2(\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_2)| \leqslant 2C_0\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\theta_2\|_{1,\Omega} \leqslant 2\mu_0 C_0 C_*^2 M_\varphi^0(a\|\lambda\|_{s,\Omega}+b\|\beta\|_{1,\Omega}+\|f\|_\Omega)\|\lambda\|_{s,\Omega} \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu_0 C_0 C_*^2 M_\varphi^0((a+1)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+0.5b^2\|\beta\|_{1,\Omega}^2+0.5\|f\|_\Omega^2),$$
$$2|(\lambda|\varphi_1|\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}| \leqslant 2\mu_0\gamma_q C_*^2\tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi((a+1)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+0.5b^2\|\beta\|_{1,\Omega}^2+0.5\|f\|_\Omega^2). \tag{40}$$

Рассуждая аналогично, оценим оставшиеся четыре слагаемых в A_2:

$$|(\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta)| \leqslant \mu_0 C_0 M_\varphi\|\lambda\|_{s,\Omega}(\alpha_1\|\lambda\|_{s,\Omega}+\alpha_2\|\beta\|_{1,\Omega}+\alpha_3\|f\|_\Omega+\|\varphi^d\|_Q) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_0 C_0 M_\varphi[(\alpha_1+1.5)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+0.5\alpha_2^2\|\beta\|_{1,\Omega}^2+0.5\alpha_3^2\|f\|_\Omega^2+0.5\|\varphi^d\|_Q^2],$$
$$3|(\lambda|\varphi_1|\varphi_1,\theta)_{\Gamma_N}| \leqslant 3\mu_0\gamma_q\tilde{C}_4 M_\varphi^2[(\alpha_1+1.5)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+0.5\alpha_2^2\|\beta\|_{1,\Omega}^2+0.5\alpha_3^2\|f\|_\Omega^2+0.5\|\varphi^d\|_Q^2],$$
$$|(\lambda\nabla\varphi_1,\nabla\theta)| \leqslant \mu_0 C_0 M_\varphi\|\lambda\|_{s,\Omega}(\alpha_1\|\lambda\|_{s,\Omega}+\alpha_2\|\beta\|_{1,\Omega}+\alpha_3\|f\|_\Omega+\|\varphi^d\|_Q) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_0 C_0 M_\varphi((\alpha_1+1.5)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+0.5\alpha_2^2\|\beta\|_{1,\Omega}+0.5\alpha_3^2\|f\|_\Omega+0.5\|\varphi^d\|_Q),$$
$$|(\lambda(\varphi_2(|\varphi_1|-|\varphi_2|)+|\varphi_1|\varphi),\theta_2)_{\Gamma_N}| \leqslant 2\mu_0\gamma_q\tilde{C}_4 C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0\|\lambda\|_{s,\Omega}(a\|\lambda\|_{s,\Omega}+b\|\beta\|_{1,\Omega}+\|f\|_\Omega) \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu_0\gamma_q\tilde{C}_4 C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0((a+1)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+0.5b^2\|\beta\|_{1,\Omega}^2+0.5\|f\|_\Omega^2). \tag{41}$$

Используя (38)–(41), выводим для величин A_1 и A_2, определённых в (29), неравенство

$$|A_1|+|A_2| \leqslant \mu_0(\omega_1^2\|\lambda\|_{s,\Omega}^2+\omega_2^2\|\beta\|_{1,\Omega}^2+\omega_3^2\|f\|_\Omega^2+\omega_4^2\|\varphi^d\|_Q^2). \tag{42}$$

Здесь положительные константы ω_i, $i=\overline{1,4}$, зависящие от величин M_φ и M_φ^0, определяются следующими формулами:

$$\omega_1^2 = 18C_6^5C_*^3C_\beta M_\varphi M_\varphi^0 a^2+4C_*C_6^5C_\beta M_\varphi^2(a\alpha_1+1.5a^2+\alpha_1^2)+C_6^5M_\varphi^3\alpha_1^2+0.5C_*^2C_6^5M_\varphi^2M_\varphi^0a^2+$$
$$+6\gamma_q C_* C_\lambda\tilde{C}_4 M_\varphi^0 C_*^2a^2+2\gamma_q C_\lambda M_\varphi\tilde{C}_4 C_*(a\alpha_1+\alpha_1^2+1.5a^2)+2C_0C_*^2M_\varphi^0(a+1)+$$
$$+4\gamma_q C_*^2\tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi(a+1)+2C_0M_\varphi(\alpha_1+1.5)+3\gamma_q\tilde{C}_4 M_\varphi^2(\alpha_1+1.5)+0.5\alpha_1^2,$$
$$\omega_2^2 = 18C_6^5C_*^3C_\beta M_\varphi M_\varphi^0 b^2+4C_*C_6^5C_\beta M_\varphi^2(b\alpha_2+1.5b^2+\alpha_2^2)+2C_6^5M_\varphi^3(\alpha_2+1.5)+$$
$$+C_*^2C_6^5M_\varphi^2M_\varphi^0(b+1)+6\gamma_q C_* C_\lambda\tilde{C}_4 M_\varphi^0 C_*^2b^2+2\gamma_q C_\lambda M_\varphi\tilde{C}_4 C_*(b\alpha_2+\alpha_2^2+1.5b^2)+$$
$$+C_0C_*^2M_\varphi^0b^2+3\gamma_q C_*^2\tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi b^2+C_0M_\varphi\alpha_2^2+1.5\gamma_q\tilde{C}_4 M_\varphi^2\alpha_2^2+0.5\alpha_2^2,$$
$$\omega_3^2 = 18C_6^5C_*^3C_\beta M_\varphi M_\varphi^0+4C_*C_6^5C_\beta M_\varphi^2(\alpha_3^2+\alpha_3+1.5)+C_6^5M_\varphi^3\alpha_3^2+0.5C_*^2C_6^5M_\varphi^2M_\varphi^0+$$

$$+\, 6\gamma_q C_* C_\lambda \tilde{C}_4 M_\varphi^0 C_*^2 b^2 + 2\gamma_q C_\lambda M_\varphi \tilde{C}_4 C_*(\alpha_3+\alpha_3^2+1.5) + C_0 C_*^2 M_\varphi^0 + 2\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi + \\ + C_0 M_\varphi \alpha_3^2 + 1.5\gamma_q \tilde{C}_4 M_\varphi^2 \alpha_3^2 + (1.5+\alpha_3),$$

$$\omega_4^2 = 6C_* C_6^5 C_\beta M_\varphi^2 + C_6^5 M_\varphi^3 + 3\gamma_q C_\lambda M_\varphi \tilde{C}_4 C_* + C_0 M_\varphi + 1.5\gamma_q \tilde{C}_4 M_\varphi^2 + 0.5. \tag{43}$$

Пусть исходные данные задачи (30) таковы, что выполняются условия

$$\mu_0\omega_1^2 < \mu_1(1-\varepsilon_1), \quad \mu_0\omega_2^2 < \mu_2(1-\varepsilon_2), \tag{44}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1)$ – произвольные числа. При выполнении (44) оценка (42) принимает вид

$$|A_1| + |A_2| \leqslant \mu_1(1-\varepsilon_1)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2(1-\varepsilon_2)\|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \mu_0(\omega_3^2\|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2\|\varphi^d\|_Q^2). \tag{45}$$

Используя (45), из неравенства (34) получаем

$$\mu_0\|\varphi\|_Q^2 \leqslant \mu_0(\varphi,\varphi^d)_Q - \varepsilon_1\mu_1\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 - \varepsilon_2\mu_2\|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \mu_0(\omega_3^2\|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2\|\varphi^d\|_Q^2). \tag{46}$$

Отбрасывая неположительные слагаемые $-\varepsilon_1\mu_1\|\lambda\|_{s,\Omega}^2$ и $-\varepsilon_2\mu_2\|\beta\|_{1,\Omega}^2$ в правой части, из (46) находим

$$\|\varphi\|_Q^2 \leqslant \|\varphi\|_Q\|\varphi^d\|_Q + \omega_3^2\|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2\|\varphi^d\|_Q^2. \tag{47}$$

Неравенство (47) представляет собой квадратичное неравенство относительно $\|\varphi\|_Q$. Решив его, приходим к следующей оценке для $\|\varphi\|_Q$:

$$\|\varphi\|_Q \leqslant (\omega_4+1)\|\varphi^d\|_Q + \omega_3\|f\|_\Omega.$$

Поскольку $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi^d = \varphi_1^d - \varphi_2^d$, $f = f_1 - f_2$, то она эквивалентна оценке

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|_Q \leqslant (\omega_4+1)\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + \omega_3\|f_1-f_2\|_\Omega. \tag{48}$$

В случае когда $Q=\Omega$, неравенство (48) имеет в $L^2(\Omega)$ смысл оценки устойчивости компоненты $\hat{\varphi}$ решения $(\hat{\varphi},\hat{u})$ задачи (30) относительно малых возмущений функций $\varphi^d \in L^2(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. При $f_1 = f_2$ (48) переходит в оценку

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|_Q \leqslant (\omega_4+1)\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q,$$

справедливую при выполнении условия (44). Если, кроме того, $\varphi_1^d = \varphi_2^d$, то из этой оценки следует, что $\varphi_1 = \varphi_2$ в Q. Это даёт вместе с (46) при $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, что $\lambda = 0$ и $\beta = 0$, а из (22) при $\lambda = 0$, $\beta = 0$ и $f = 0$ тогда следует, что $\varphi = 0$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$ в Ω. Последнее означает единственность решения задачи (15) при выполнении условия (44).

В общем случае, когда $f_1 \neq f_2$, используя соотношение

$$\|\varphi\|_Q\|\varphi^d\|_Q \leqslant \|\varphi\|_Q^2 + (1/4)\|\varphi^d\|_Q^2,$$

вытекающее из неравенства Юнга, из (46) получаем

$$\varepsilon_1\mu_1\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \varepsilon_2\mu_2\|\beta\|_{1,\Omega}^2 \leqslant -\mu_0\|\varphi\|_Q^2 + \mu_0(\varphi,\varphi^d)_Q + \mu_0(\omega_3^2\|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2\|\varphi^d\|_Q^2) \leqslant \\ \leqslant (\mu_0/4)\|\varphi^d\|_Q^2 + \mu_0(\omega_3^2\|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2\|\varphi^d\|_Q^2). \tag{49}$$

Из (49) вытекают оценки

$$\|\lambda\|_{s,\Omega} \leqslant \sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1}(\omega_3\|f\|_\Omega + (\omega_4+0.5)\|\varphi^d\|_Q),$$

$$\|\beta\|_{1,\Omega} \leqslant \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2}(\omega_3\|f\|_\Omega + (\omega_4+0.5)\|\varphi^d\|_Q),$$

которые с учётом (19) запишем в виде

$$\|\lambda_1-\lambda_2\|_{s,\Omega}\leqslant\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1}(\omega_3\|f_1-f_2\|_\Omega+(\omega_4+0.5)\|\varphi_1^d-\varphi_2^d\|_Q),\tag{50}$$

$$\|\beta_1-\beta_2\|_{1,\Omega}\leqslant\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2}(\omega_3\|f_1-f_2\|_\Omega+(\omega_4+0.5)\|\varphi_1^d-\varphi_2^d\|_Q).\tag{51}$$

Из (50), (51) и (22) следует оценка для разности $\varphi_1-\varphi_2$:

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|_{1,\Omega}\leqslant C_*(a\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1}+b\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2}+1)\|f_1-f_2\|_\Omega+$$

$$+C_*(\omega_4+0.5)(a\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1}+b\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2})\|\varphi_1^d-\varphi_2^d\|_Q,\tag{52}$$

где $a=C_0M_\varphi+\gamma_q\tilde{C}_4M_\varphi^2$, $b=C_6^5M_\varphi^3$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия (i) и (j), K – ограниченное множество, пара $(\varphi_i,u_i)\in H^1(\Omega)\times K$ является решением задачи (30), отвечающим заданным функциям $\varphi_i^d\in\in L^2(Q)$ и $f_i\in L^2(\Omega)$, $i=1,2$, где $Q\subset\Omega$ – произвольное открытое ограниченное множество. Предположим, что $\mu_0>0$ и выполняется условие (44). Тогда справедливы оценки (48), (50) и (52), где ω_i, $i=\overline{1,4}$, определены в (43).*

Следствие. *Пусть выполняются условия (i), (j), K – ограниченное множество, $\varphi_1^d=\varphi_2^d$ в Q и $f_1=f_2$ в Ω. Тогда если $\mu_0>0$ и справедливо условие (44), решение $(\varphi,u)\in H^1(\Omega)\times K$ задачи (30) единственно.*

Отметим, что устойчивость решения экстремальной задачи (30) доказана при положительных параметрах μ_1 и μ_2, удовлетворяющих условию (44). При фиксированных значениях μ_0, μ_1 и μ_2 оно означает условие малости на исходные данные задачи (30). Таким образом, слагаемые $(\mu_1/2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2$ и $(\mu_2/2)\|\beta\|_{1,\Omega}^2$ в выражении (30) для минимизируемого функционала J вносят необходимый регуляризирующий эффект.

Заключение. Доказанная локальная устойчивость (единственность) оптимальных решений задачи (30) дополняет результаты статьи [15], в которой установлена релейность оптимального управления β. Управление λ ввиду большей гладкости не может обладать этим свойством. Не являясь локальным, свойство релейности устанавливается без использования регуляризации, но, как правило, не является и строгим (см. [19]). При этом в экстремальных задачах маскировки принцип минимакса более востребован, чем устойчивость оптимального управления (см. [20]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00271).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ito K., Kunish K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Probl. 1997. V. 14. P. 995–1013.
2. *Nguyen P.A., Raymond J.-P.* Control problems for convection–diffusion equations with control localized on manifolds // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2001. V. 6. P. 467–488.
3. *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Тр. Ин-та математики и механ. УРО РАН. 2006. Т. 16. С. 76–101.
4. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. механ. и техн. физика. 2008. № 4. С. 24–35.
5. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1645–1664.
6. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
7. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. P. 678–689.

8. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. and Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
9. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Об устойчивости решений задач управления для уравнения конвекции–диффузии–реакции с сильной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 493–504.
10. *Brizitskii R.V., Saritskaya Zh.Yu.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26. № 6. P. 821–833.
11. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.
12. *Барановский Е.С., Домнич А.А.* О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 317–327.
13. *Baranovskii E.S.* Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids // J. of Optimization Theory and Appl. 2021. V. 189. P. 623–645.
14. *Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.* Разрешимость нестационарных уравнений трёхмерного движения теплопроводных вязких сжимаемых двухкомпонентных жидкостей // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. № 4. С. 147–204.
15. *Бризицкий Р.В., Быстрова В.С., Сарицкая Ж.Ю.* Анализ краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 635–648.
16. *Алексеев Г.В., Романов В.Г.* Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14. № 2. С. 15–20.
17. *Алексеев Г.В., Левин В.А., Терешко Д.А.* Оптимизационный метод в задачах дизайна сферических слоистых тепловых оболочек // Докл. АН СССР. 2017. Т. 476. № 5. С. 512–517.
18. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Оценки устойчивости решений задач управления для уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 8. С. 993–1004.
19. *Чеботарев А.Ю.* Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 3. С. 381–390.
20. *Alekseev G.V., Tereshko D.A.* Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2019. V. 135. P. 1269–1277.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, г. Владивосток,
Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток

Поступила в редакцию 13.07.2022 г.
После доработки 18.01.2023 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.