

# Инвариантность эволюции спектров ветровых волн в океане как статистический аттрактор

А. Н. Пушкарёв<sup>+</sup><sup>\*</sup>, В. В. Геогджаев<sup>++1)</sup>, С. И. Бадулин<sup>++</sup>

<sup>+</sup>Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

<sup>\*</sup>Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

<sup>×</sup>Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, 117997 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 октября 2024 г.

После переработки 1 ноября 2024 г.

Принята к публикации 7 ноября 2024 г.

В численном эксперименте наблюдается феномен инвариантности эволюции спектров ветровых волн в океане. После сильного возмущения происходит быстрое восстановление характеристик автомодельного роста. Такое поведение интерпретируется как проявление статистического аттрактора, связанного с обобщенным спектром Колмогорова–Захарова и подтверждается численным моделированием спектров волнения в рамках кинетического уравнения для волн на воде (уравнения Хассельманна). Это уравнение со специальной функцией накачки, приближенной к обычно используемым в волновых моделях, имеет семейства точных автомодельных решений. Выбранная функция накачки минимизирует “неавтомодельный” фон волновых спектров и позволяет оценить “чистые” скорости стремления решения к автомодельному режиму эволюции. Степенные показатели точных автомодельных решений используются как параметры аттракторов в двумерном фазовом пространстве, моделирующих этот процесс.

DOI: 10.31857/S0370274X24120162, EDN: CDBSPG

## 1. Моделирование спектров ветровых волн.

Мы рассматриваем кинетическое уравнение для поверхностных гравитационных волн:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = S_{nl} + S_{in} + S_{diss}. \quad (1)$$

Это уравнение широко используется для моделирования и прогноза морского волнения. Здесь  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k}, t)$  – спектр энергии волн,  $S_{nl}$  – член, описывающий нелинейные четырехволновые взаимодействия,  $S_{in}$  – ветровая накачка,  $S_{diss}$  – диссипация. Уравнение (1) было выведено Клаусом Хассельманном [1], хотя его аналоги были известны намного раньше [2, 3].

Нелинейный член  $S_{nl}$  в (1) описывает четырехволновые нелинейные взаимодействия [1]. Некоторые эффекты, связанные с ограничениями четырехволновыми взаимодействиями и гипотезой гауссости волнового поля были продемонстрированы в [4, 5]. В работе [6] было исследовано влияние квазирезонансных взаимодействий на эволюцию спектра волнения. Тем не менее, мы рассматриваем уравнение (1) как общепринятую физическую модель и основу прогноза волнения.

Нелинейный член  $S_{nl}$  был выведен из основных уравнений гидродинамики и хорошо исследован теоретически. В отличие от него, члены  $S_{in}$  (накачка) и  $S_{diss}$  (диссипация) известны только как эмпирические параметризации; их точная математическая модель отсутствует. Основные усилия в исследованиях ветровых волн направлены на построение новых параметризаций для этих членов, лучше согласующихся с результатами экспериментов и наблюдений. Считается, что таким образом можно добиться улучшения прогноза волнения с помощью соответствующих моделей (см., например, [7]).

Процесс вывода уравнения (1) предполагает, что внешние воздействия  $S_{in}$  и  $S_{diss}$  малы по сравнению с  $S_{nl}$ . Простое сравнение этих членов дает обратный результат, показывая малость нелинейного члена [8]. Эта проблема была решена в [9, 10] путем сравнения скоростей эволюции спектра, связанных с этими членами. Доминирование столкновительного интеграла  $S_{nl}$  в (1) является естественным следствием ряда физических гипотез, на которых строится сам вывод кинетического уравнения.

Уравнение Хассельманна дает хорошие результаты для разнообразных параметров моделирования и прогноза волнения. В этой статье мы занимаемся волнами на глубокой воде. В этом случае (1) по-

<sup>1)</sup>e-mail: vvg@mail.geogjaev.ru

казывает устойчивые черты: универсальность формы спектра и характерные особенности роста волнения. Некоторые из этих особенностей, такие как инвариантность формы спектра [11] и типичные показатели степенного роста энергии и периода волн [12] наблюдались в предыдущих экспериментальных исследованиях. Связь этих свойств с приближенными автомодельными решениями изучалась как численно [13, 14], так и путем сопоставления с экспериментальными результатами [15]. В настоящей статье мы анализируем автомодельные решения уравнения Хассельманна (1) со специальной функцией источника, воспроизводящей известные функции источника в прогностических моделях [16]. Такая функция источника обеспечивает существование точных автомодельных решений. В рамках такой физической постановки мы демонстрируем релаксацию к “естественному” режиму эволюции как феномен восстановления системы. Мы предлагаем ассоциировать этот феномен восстановления с существованием аттрактора. Параметры семейства автомодельных решений могут считаться физическими характеристиками этого аттрактора. Релаксация системы к этим параметрам характеризует процесс стремления к аттрактору как целое, не обращаясь к деталям эволюции волновых спектров в различных масштабах.

**2. Что такое восстановление растущего волнения?** Стабильность предполагает способность системы (физической, биологической, социальной и т.п.) противостоять внешнему влиянию, возвращаясь к “естественному” состоянию. Примерами могут являться восстановление леса после пожара или океанской экосистемы после разлива нефти. Под “естественному” обычно понимают устойчивое состояние системы, существенно определяемое небольшим числом параметров. Устойчивость в подобных системах обычно ассоциируется с аттракторами и является объектом теории динамических систем (см., например, [17]).

В настоящей статье мы исследуем феномен роста ветрового волнения в океане. Мы исследуем спектры волнения, определяемые такими характеристиками, как высота, частота и направление волн. В отличие от описанных в предыдущем параграфе случаев, фазовое пространство в данном случае является бесконечномерным, и сами объекты не являются квазистационарными. Мы предлагаем связать нестационарные и неоднородные решения кинетического уравнения (1) с концепцией восстановления физической системы. Параметры, определяющие эволюцию этих решений могут служить индикаторами восстановления, показывая стремление к автомодельности.

Таким образом, сводя задачу к меньшему количеству измерений, мы можем исследовать поведение системы, опираясь на малое количество параметров, как и в случае классических аттракторов.

Более чем 60 лет исследователи пробовали выразить параметры растущих ветровых волн как степенные зависимости от времени  $t$  или разгона  $x$ :  $E \sim t^p$ , ( $E \sim x^p$ ) для полной энергии волн и  $\omega_p \sim t^q$  ( $\omega_p \sim x^q$ ) для характерной частоты. Такие аппроксимации были направлены на установление соответствия результатов полевых наблюдений и численного моделирования волнения (например, [12, 18, 19]). В отсутствие разработанной теории ветрового волнения, показатели  $p, q$  считались независимыми, хотя и лежащими в определенных диапазонах:  $0.7 < p < 1.1$ ,  $0.23 < q < 0.33$  [20].

В. Е. Захаров с соавторами выдвинули концепцию автомодельного роста ветрового волнения [14, 20, 21], показавшую замечательное количественное согласие с экспериментами, проведенными в течение более 60 лет. Основным практическим результатом стало обнаружение связи между показателями  $p$  and  $q$  (так называемого “магического соотношения”). Для простейшей ситуации временного роста (т.е. роста со временем в однородном океане) справедливо:

$$10q_\tau - 2p_\tau = 1. \quad (2)$$

Для пространственного случая (стационарное развитие в одном направлении) аналогично:

$$9q_\chi - 2p_\chi = 1 \quad (3)$$

(см. [14, 20, 22, 23]). В дальнейшем мы ограничимся случаем временного роста, опуская индексы в (2). Справедливость “магических соотношений” (2), (3) для автомодельного роста волн при различных параметризациях накачки и диссиляции была установлена в серии работ [13, 14, 20, 24]. Было показано, что автомодельное ядро спектра существует с относительно слабым неавтомодельным фоном. Такое “двуухфазное” состояние не зависит от конкретного вида функции источника  $S_{\text{in}} + S_{\text{diss}}$  в уравнении (1). Таким образом, автомодельное решение вида

$$\varepsilon = t^{p+q} F((\omega t)^q) \quad (4)$$

оказывается хорошей аппроксимацией спектра растущего волнения.

Следующий шаг был сделан В. Е. Захаровым и соавторами в работе [25] (далее ZRP – Zakharov–Resio–Pushkarev), где было построено семейство *точных автомодельных решений* (1) со степенной функцией накачки:

$$S_{\text{in}} \sim \omega^{s+1} \quad (5)$$

с показателем  $s$ , связанным с параметром роста волн:

$$q = \frac{1}{s+1}. \quad (6)$$

Накачка ZRP (5) построена как чистый случай накачки, быстро реализующей автомодельные решения, свободные от “мусорного” фона. Этим она отличается от других эмпирических параметризаций  $S_{\text{in}}$ . Легко видеть, что значения  $s = 4/3$ ,  $s = 2$ ,  $s = 8/3$  отвечают линейному росту, соответственно, волнового импульса, энергии и волнового действия со временем (или разгоном) [26, 27]. Примеры в статье приведены для случая молодых волн с  $s = 4/3$ .

**3. Автомодельное решение, его восстановление и статистический аттрактор.** Мы демонстрируем структурную устойчивость автомодельного решения уравнения (1) посредством численного анализа и сравнения с экспериментом [20]. Целью является изучение восстановления спектра после того, как автомодельное решение было подвергнуто сильному возмущению. Явление быстрого восстановления спектра после резкого изменения скорости и направления ветра ранее изучалось как с использованием уравнения Хассельманна (например, [28]), так и с помощью решения динамических уравнений (репродуцированные уравнения Захарова, см., например, [29]). Наше исследование частично воспроизводит постановку упомянутых исследований, но предлагает альтернативную трактовку результатов. Мы подчеркиваем не столько аномально высокую скорость релаксации, сколько структурную устойчивость возникающих автомодельных решений.

После сильного возмущения решение может как эволюционировать к автомодельному состоянию с теми же параметрами  $p$  и  $q$ , так и перейти к другому автомодельному решению из того же семейства. Возвращение к исходному автомодельному состоянию может трактоваться как существование в системе аттрактора, обеспечивающего восстановление режима роста. Мы используем “чистую” функцию накачки ZRP, чтобы подчеркнуть переход решения в “чистую” автомодельную форму с теми же параметрами  $p$  и  $q$ , связанными с показателем ветровой накачки  $s$ . Немаловажным вопросом является скорость релаксации, т.е., время возвращения к исходному состоянию. Эта скорость может быть определена как численно, так и экспериментально.

Численные расчеты были выполнены с функцией накачки ZRP [30]

$$S_{\text{in}}(\omega, \theta) = \gamma(\omega, \theta) \cdot \varepsilon(\omega, \theta) \quad (7)$$

$$\gamma(\omega, \theta) = A \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{water}}} \omega \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^s q(\theta) \quad (8)$$

$$A = 0.05 \quad (9)$$

$$q(\theta) = \begin{cases} \cos^2 \theta & \text{for } -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (10)$$

$$\omega_0 = \frac{g}{U_{10}}, \quad \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{water}}} = 1.3 \cdot 10^{-3} \quad (11)$$

Здесь  $\rho_{\text{air}}$  и  $\rho_{\text{water}}$  – плотности воды и воздуха,  $U_{10}$  – скорость ветра на стандартной высоте 10 м.

Использовалась сетка из 281 узлов по частоте и 144 по углу. Нелинейные взаимодействия рассчитывались для набора из 49152 квадруплетов. Для ускорения вычислений сетка частот была ограничена сверху частотой 2 Гц. Это ограничение слегка повлияло на показатель  $p$  (см. ниже).

Вычисления были организованы следующим образом:

1. В качестве начального условия была взята ступенчатая функция (показана пунктиром на рис. 1).

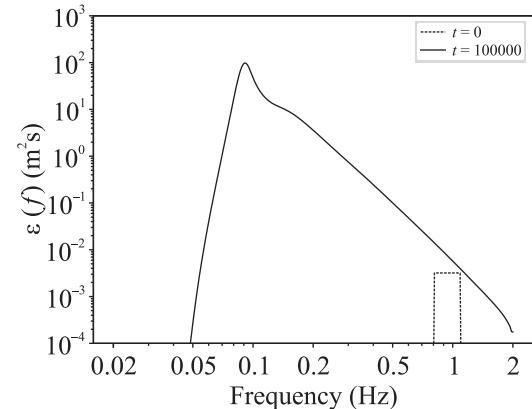


Рис. 1. Начальное условие (пунктир) и развитое автомодельное решение при  $t = 100000$  с (сплошная линия)

2. Уравнение (1) решалось для временной задачи (т.е. для пространственно-однородной постановки  $\nabla_k N_k \equiv 0$ ). Скорость ветра  $U_{10} = 10$  м/с и его направление считались постоянными. Параметр накачки  $s = 4/3$  в (5) был фиксирован;
3. В момент  $t_0 = 50000$  с скорость ветра изменялась до более высокого значения  $U_{10} = 20$  м/с и вычисления продолжались до  $t_f = 100000$  с.
4. Полученные результаты исследовались на соответствие критериям автомодельности, а именно: достижения “магического соотношения” (3) и установление универсальной формы волнового спектра.

На рисунке 2 изображены график полной энергии волн для скорости ветра 10 м/с и график полной энергии после увеличения скорости ветра до 20 м/с. После увеличения скорости ветра при  $t_0 \simeq 50000$  с скорость роста волнения резко меняется на большее значение.

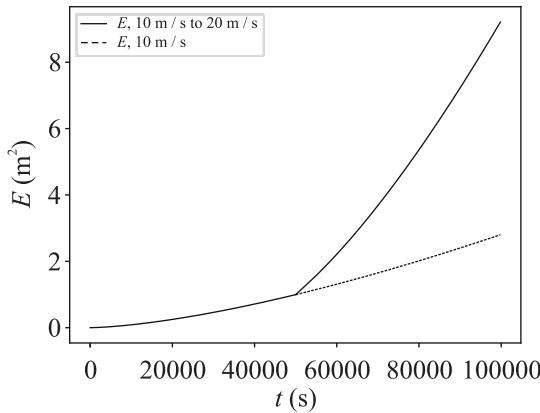


Рис. 2. Полная энергия волн

На рисунке 3 представлены показатели степенных аппроксимаций  $p$  и  $q$ . До перемены ветра мы используем  $E \sim t^p$  для полной энергии и  $\omega_m \sim t^{-q}$  для средней частоты. После перемены ветра полагаем, что “начальная точка” автомодельного решения сдвинулась и считаем  $E \sim (t - t_0)^p$  и  $\omega_m \sim (t - t_0)^{-q}$ , где  $t_0 = 35000$  с. Сдвиг времени  $t_0$  несущественен на больших временах, но заметно влияет на скорость стремления к автомодельному пределу. Показатели  $p$  и  $q$  сохраняют свои значения даже после перемены ветра (соответствующие кривые на графике на рис. 3 почти сливаются). Значение  $p$  на рис. 3 слегка отклоняется от теоретического значения  $10/7$ . Причиной этого расхождения является ограниченный частотный диапазон вычислений, из которого по техническим причинам были исключены частоты выше 2 Гц. Тем не менее, результат достаточно близок к теоретическому значению.

На рисунке 4 представлено “магическое значение” подсчитанное по показателям рис. 3. Видно, что магическое значение  $M = 9q - 2p \simeq 1$  выдерживается как до, так и после перемены ветра при  $t_0 = 50000$  с. Показаны два графика: для перемены ветра и для ее отсутствия. Подчеркнем, что после перемены ветра значение  $M$  восстанавливается очень быстро.

**4. Стабильность и восстановление спектров ветровых волн.** Мы показали быстрое стремление численных решений к автомодельным режимам. При этом, во-первых, показатели  $p$  и  $q$  приближаются к теоретическим значениям, во-вторых, устанавлива-

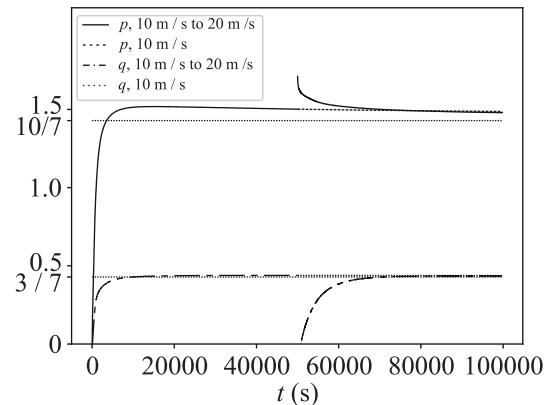


Рис. 3. Локальные значения степенных показателей для полной энергии волн  $E \sim t^p$  и средней частоты  $\omega_m \simeq t^{-q}$

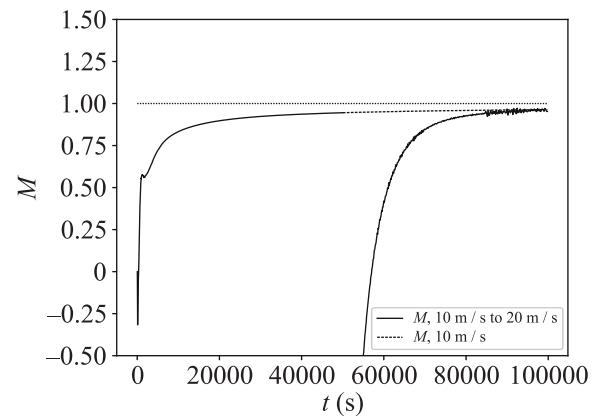


Рис. 4. Магическое значение  $M = (2p - 9q)$  до и после перемены ветра

ется универсальная форма автомодельного спектра  $F$ . Первый процесс легко увидеть на рис. 3, 4. Для количественной оценки скорости приближения формы спектра к универсальной введем безразмерные энергию и частоту

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{\omega}{\omega_{\max}(t)}, \quad (12)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega}, t) = \frac{\varepsilon(\omega, t)}{\varepsilon_{\max}}, \quad (13)$$

нормализованные на максимум энергии  $\varepsilon_{\max}$  и соответствующую частоту  $\omega_{\max}$ . Далее вычисляем среднеквадратичное отклонение формы спектра от эталонной в момент времени  $t_{\text{ref}}$ :

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{\int (\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega}, t) - \tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega}, t_{\text{ref}}))^2 d\tilde{\omega}}{\int \tilde{\varepsilon}^2(\tilde{\omega}, t_{\text{ref}}) d\tilde{\omega}}}. \quad (14)$$

Величина  $\delta$  характеризует расхождение между решениями в окрестности спектрального пика. Отклоне-

ния спектрального “хвоста” (высокие частоты) с малыми значениями плотности энергии слабо влияют на  $\delta$ . Устойчивость формы спектрального “хвоста” поддерживается прямым колмогоровским каскадом.

Результат расчета  $\delta(t)$  (14) среднеквадратичного отклонения усредненного по углу нормированного спектра как функции нормированной частоты  $\tilde{\omega}(t) = \omega/\omega_p$  (12) от эталонного спектра при  $t_{\text{ref}} = 100000$  с показан на рис. 5. Видно, что спектр возвращается к эталонному весьма быстро. Столь замечательный эффект аномально быстрой релаксации волновых спектров наблюдался экспериментально в [31] и был воспроизведен численно в [32].

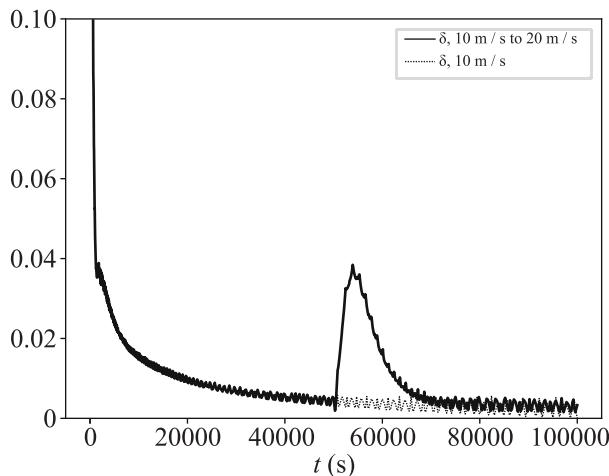


Рис. 5. Среднеквадратичное отклонение спектра от референсного в зависимости от времени. (Мелкие колебания возникают из-за наличия сетки в численных расчетах)

Таким образом, приходим к выводу:

Автомодельное поведение ветрового волнения структурно устойчиво по отношению к изменению ветра и характерное время перехода к этому поведению весьма мало.

Подобное восстановление автомодельного режима имеет глубокие физические следствия. Рисунок 6 показывает усредненный по углу спектр нормированный на спектральный максимум как функцию безразмерной частоты  $\omega/\omega_m$ . Показаны три спектра: до, в момент и после изменения ветра. Видно, что форма спектра остается практически неизменной (кривые почти совпадают); спектр имеет выраженный пик и стабильный “хвост” спектра Колмогорова–Захарова  $E(\omega) \sim \omega^{-4}$ .

Итак, рис. 6 показывает, что решения кинетического уравнения (1) демонстрируют свойства автомодельного ансамбля (4). Следовательно, стремление к автомодельной асимптотике для нашей бесконеч-

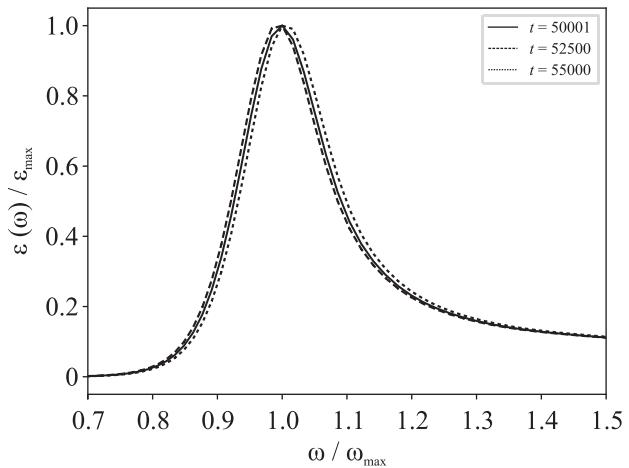


Рис. 6. Форма нормализованного спектра до, в момент и после изменения ветра

номерной системы может быть адекватно охарактеризовано всего двумя безразмерными параметрами: “магическим числом”  $M$  и параметром  $\delta$  (14), отклонением от автомодельной формы спектра. Таким образом, эволюция рассматриваемой системы и ее спектров качественно напоминают динамику классических конечномерных аттракторов.

Примеры статистических аттракторов в нелинейных уравнениях в частных производных хорошо известны. В работе [33] было показано, что солитоны в неинтегрируемых одномерных и двумерных НУШ являются статистическими аттракторами. Недавно этот результат был подтвержден экспериментально в [34].

**5. Обсуждение и выводы.** Мы рассмотрели восстановление океанского ветрового волнения к “естественному” состоянию после сильного возмущения (перемены ветра). Спектр ветровых волн стремится к автомодельному поведению из-за наличия статистического аттрактора. Мы подтвердили эту интерпретацию, решая численно кинетическое уравнение для волн на воде (уравнение Хассельманна). Выбранная нами накачка для (1) минимизирует неавтомодельный фон, что позволяет выделить феномен восстановления “естественного” состояния распространенного волнения “в чистом виде”. Степенные показатели точных автомодельных решений могут быть интерпретированы как параметры аттракторов системы в двумерном фазовом пространстве.

Использование современных достижений физики волн в моделях оперативного прогноза морского волнения является важной задачей исследований климата. Свойство автомодельности спектра ветрового волнения и быстрое восстановление этого со-

стояния после возмущения известно более полувека со времени проведения классического эксперимента JONSWAP (JOint North Sea WAve Project, [35]). В настоящей статье мы используем концепцию автомодельности морского волнения, чтобы показать ее сходство с такими фундаментальными объектами современной физики, как динамические аттракторы.

Следует подчеркнуть две ключевые точки настоящей работы. Во-первых, это использование специальной функции источника, имитирующей генерацию волн ветром. Эта функция, близкая к используемым в моделях ветрового волнения, обеспечивает точную автомодельность решений для кинетического уравнения для глубокой воды (уравнения Хассельманна), что позволяет избавиться от неавтомодельного фона в численных расчетах.

Во-вторых, мы предлагаем конечномерную (конкретно, двумерную) параметризацию для нестационарной (развивающееся ветровое волнение) и непрерывной среды (волнового спектра), что сводит задачу к классическому динамическому аттрактору. Сама возможность такой редукции была показана для случая молодого ветрового волнения. Это тот режим, который обычно наблюдается в полевых экспериментах. Более полное исследование – предмет наших будущих работ.

Мы показали, что классические решения Колмогорова–Захарова, как и недавние их обобщения, локализованные автомодельные спектры, могут быть описаны как статистические аттракторы, подобные известным статистическим аттракторам для нелинейных уравнений в частных производных (таких, к примеру, как солитоны неинтегрируемого НУШ).

**6. Финансирование работы.** Настоящее исследование было поддержано грантом Российского научного фонда № 19-72-30028 “Turbulence and coherent structures in the integrable and non-integrable systems” <https://rscf.ru/en/project/19-72-30028/>.

**7. Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. K. Hasselmann. *J. Fluid Mech.* **12**, 481 (1962).
2. L. W. Nordheim. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **119**, 689 (1928).
3. R. Peierls. *Annalen der Physik* **395**, 1055 (1929).
4. S. Y. Annenkov and V. I. Shrira. *Phys. Rev. E* **106**, L042102 (2022).
5. S. Yu. Annenkov and V. I. Shrira. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **396**, 1 (2004).
6. P. A. E. M. Janssen, *J. Phys. Oceanogr.* **33**, 863 (2003).
7. A. J. Van der Westhuysen, M. Zijlema, and J. A. Battjes. *Coastal Engineering* **454**, 151 (2007).
8. G. J. Komen, S. Hasselmann, and K. Hasselmann, *J. Phys. Oceanogr.* **14**, 1271 (1984).
9. V. E. Zakharov and S. I. Badulin, *Doklady Earth Sciences* **440**(Part 2), 1440 (2011).
10. V. E. Zakharov, *Phys. Scr.* **T142**, 014052 (2010).
11. K. Hasselmann, D. B. Ross, P. Müller, and W. Sell, *J. Phys. Oceanogr.* **6**, 200 (1976).
12. K. K. Kahma and C. J. Calkoen, *Growth curve observations*, in G. J. Komen, L. Cavalieri, M. Donelan, K. Hasselmann, S. Hasselmann, and P. A. E. M. Janssen (editors), *Dynamics and modeling of ocean waves*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1994), p. 74.
13. S. I. Badulin, A. V. Babanin, D. Resio, and V. Zakharov, *Numerical verification of weakly turbulent law of wind wave growth*, in *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence*, Springer, Dordrecht (2008), p. 45.
14. S. I. Badulin, A. N. Pushkarev, D. Resio, and V. E. Zakharov. *Nonl. Proc. Geophys.* **12**, 891 (2005).
15. V. E. Zakharov, S. I. Badulin, V. V. Geogjaev, and A. N. Pushkarev, *Earth and Space Science* **6**(4), 540 (2019).
16. L. Cavalieri, J.-H. G. M. Alves, F. Ardhuin et al. (Collaboration), *Progr. Ocean.* **75**, 603 (2007).
17. V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics, Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag New York, (1989), v. 60.
18. A. V. Babanin and Yu. P. Soloviev. *Mar. Freshwater Res.* **49**, 89 (1998).
19. P. A. Hwang. *J. Geophys. Res.* **111**(C2)C02005, 1 (2006); doi:10.1029/2005JC003180.
20. S. I. Badulin, A. V. Babanin, D. Resio, and V. Zakharov, *J. Fluid Mech.* **591**, 339 (2007).
21. V. E. Zakharov, S. I. Badulin, P. A. Hwang, and G. Caulliez, *J. Fluid Mech.* **708**, 503 (2015).
22. S. I. Badulin, A. N. Pushkarev, D. Resio, and V. E. Zakharov, *Direct and inverse cascade of energy, momentum and wave action in wind-driven sea*, in *7th International workshop on wave hindcasting and forecasting*, Banff, October 2002 (2002), p. 92; <http://www.waveworkshop.org/7thWaves/>, 2002.
23. V. E. Zakharov, *Nonlinear Process. Geophys.* **12**, 1011 (2005).
24. S. I. Badulin and V. E. Zakharov, *Nonlinear Process. Geophys.* **24**, 237 (2017).
25. V. E. Zakharov, D. Resio, and A. Pushkarev. *Nonlinear Process. Geophys.* **24**, 581 (2017).
26. С. И. Бадулин, *Азбука ветрового волнения. Нелинейные волны-2018*, под ред. А. Г. Литвака, А. В. Слюняева, Федер. исслед. центр Ин-т приклад. физики РАН, ИПФ РАН, Нижний Новгород (2019), с. 121.

27. E. Gagnaire-Renou, M. Benoit, and S.I. Badulin, *J. Fluid Mech.* **669**, 178 (2011).
28. I.R. Young, S. Hasselmann, and K. Hasselmann, *J. Phys. Oceanogr.* **17**, 1317 (1987).
29. S.Y. Annenkov and V.I. Shrira, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 024502 (2009).
30. A. Pushkarev and V. Zakharov, *Ocean Modelling* **103**, 18 (2016).
31. I.R. Young, *J. Geophys. Res.* **111**, 1(2006); doi:10.1029/2006JC003540.
32. S.I. Badulin, A.O. Korotkevich, D. Resio, and V.E. Zakharov, *Wave-wave interactions in wind-driven mixed seas*, in *Proceedings of the Rogue waves 2008 Workshop*, IFREMER, Brest, France (2008), p. 77.
33. A. Dyachenko, V. Zakharov, A. Pushkarev, V. Shvets, and V. Yankov, *ZhETF* **96**(6), 2026 (1989).
34. M. Zitelli, F. Mangini M. Ferraro, and S. Wabnitz, *Photonics Research* **9**(5), 741 (2021).
35. K. Hasselmann, T.P. Barnett, E. Bouws et al. (Collaboration), Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), *Deutsches Hydrographische Zeitschrift Suppl.* **12**(A8) (1973), 95 p.