

Реконструкция двумерных турбулентных течений и их параметров с помощью физически-информированных нейронных сетей

В. Парфеньев^{†*1)}, М. Блуменау^{*×}, И. Никитин^{†*}

[†]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

^{*}Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 101000 Москва, Россия

[×]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 июня 2024 г.

После переработки 2 сентября 2024 г.

Принята к публикации 8 сентября 2024 г.

Определение параметров системы и полного состояния потока на основе ограниченных измерений скорости может быть чрезмерно трудоемким при использовании классических алгоритмов ассимиляции данных. В этой работе мы применяем алгоритмы машинного обучения для решения этой проблемы. В качестве примера мы рассматриваем умеренно турбулентное течение жидкости, возбуждаемое стационарной силой и описываемое двумерным уравнением Навье–Стокса с линейным трением о дно. Основываясь на плотных во времени, разреженных в пространстве и, вероятно, зашумленных данных о скорости, мы с высоким пространственным разрешением реконструируем поле скорости, восстанавливаем давление и внешнюю силу с точностью до гармонической функции и ее градиента, соответственно, а также определяем неизвестные вязкость жидкости и коэффициент трения о дно. Валидация метода производится путем анализа среднеквадратичных ошибок реконструкций и их энергетических спектров. Мы исследуем зависимость этих метрик от степени разреженности и зашумленности исходных измерений скорости. Наш подход основан на обучении физически-информированных нейронных сетей путем минимизации функции потерь, которая штрафует за отклонение от предоставленных данных и нарушение физических уравнений. Предлагаемый алгоритм извлекает дополнительную информацию из измерений скорости, потенциально расширяя возможности методов PIV/PTV.

DOI: 10.31857/S0370274X24100215, EDN: XOTOTD

1. Введение. Экспериментальные исследования течений жидкости предполагают измерение их характеристик. Собранные данные могут обладать низким пространственно-временным разрешением или быть искажены измерительным шумом. Иногда величина, представляющая интерес, не может быть измерена напрямую, и ее приходится реконструировать на основе других измерений (например, давление можно определить по известному полю скорости [1]). Различные методы ассимиляции данных, основанные на сопряженных и ансамблевых вариациях, решают эти задачи, объединяя экспериментальные данные с численным моделированием [2, 3]. Основная идея состоит в том, чтобы найти состояние потока, которое удовлетворяет уравнению Навье–Стокса и минимизирует отклонение от наблюдений. Фундаментальный недостаток такого подхода заключается в вычислительной сложности, необходимой для проведения множества численных симуляций с различными начальными

условиями и неизвестными параметрами системы, которые подбираются в процессе оптимизации. Как только они найдены, связанная с ними эволюция течения дает доступ к полному состоянию системы и с намного большим разрешением, чем исходные данные.

Недавно был предложен альтернативный подход, в котором численный солвер заменяется на физически-информированную нейронную сеть (англ. PINN (Physics-Informed Neural Network)) [4]. Реконструкция течения также рассматривается как задача минимизации. Нейронная сеть получает на вход координаты и момент времени, а на выходе возвращает величины, характеризующие состояние течения. Функция потерь штрафует за отклонение от имеющихся данных и нарушение основных уравнений. Подчеркнем, что теперь основные уравнения не соблюдаются строго, вместо этого соответствующий дисбаланс используется в качестве штрафа в задаче оптимизации. Главными преимуществами такого подхода являются относительная простота реализации и лучшая применимость для плохо определен-

¹⁾e-mail: parfenius@gmail.com

ных задач. В частности, PINN могут использоваться в областях с неизвестными граничными условиями [5], тогда как численное моделирование в этом случае невозможно.

Детальное сравнение обоих методов было проведено в работе [6], где было показано, что PINN, как правило, менее точны для разреженных данных. Однако в будущем ситуация может измениться, поскольку PINN – это относительно новая технология, которая в настоящее время активно совершенствуется. Примеры применения этого метода ко все более сложным конфигурациям течений можно найти в недавних обзорах [7–9].

В этой работе мы применяем PINN к конкретному примеру двумерной турбулентности, мотивированному экспериментальными исследованиями [10–13]. Мы полагаем, что проводимые измерения позволяют определить скорость жидкости в некоторых точках пространства и времени. Эти данные, например, могут быть получены с помощью методов PIV/PTV (англ. Particle Image/Tracking Velocimetry), которые отслеживают положения частиц, помещенных в поток жидкости, в последовательные моменты времени для определения поля скорости. Собранные данные предполагаются плотными во времени, но могут быть разреженными в пространстве и содержать ошибки измерений. Плотность во времени означает, что методы PIV/PTV позволяют измерять мгновенную скорость потока с разумной точностью. Разреженность в пространстве подразумевает, что мы хотим разрешать масштабы, которые малы по сравнению с характерным расстоянием между точками измерений. Методы ассимиляции данных, которые мы обсуждаем, связывают последовательные моменты времени, воспроизводя динамику, определяемую уравнением Навье–Стокса. Это позволяет комбинировать информацию о поле скорости из разных моментов времени, повышая точность и пространственное разрешение возможных реконструкций.

Наша цель – улучшить экспериментальные данные за счет повышения их пространственного разрешения и определения характеристик потока и параметров системы, которые не были измерены напрямую. В частности, мы хотим реконструировать пространственно плотные поля скорости и давления, определить внешнюю силу, а также неизвестную вязкость жидкости и коэффициент трения о дно, основываясь только на измерениях скорости. Знание этих дополнительных величин позволит нам лучше описать и охарактеризовать свойства рассматриваемой системы. Настоящее исследование дополняет недав-

ние работы [14–17], анализируя другую конфигурацию потока.

Проведенный анализ показывает, что разреженных (150 векторов на изображение), но точных измерений скорости достаточно для реконструкции плотного (65536 векторов на изображение) поля скорости с относительной среднеквадратичной ошибкой около 0.2% и столь же плотных полей давления и внешней силы с точностью в несколько раз хуже для типичных экспериментальных условий. Вязкость жидкости и трение о дно восстанавливаются с относительной ошибкой в несколько процентов. Разработанный метод устойчив к небольшому шуму ($\leq 1\%$) в исходных данных для скорости и даже способен исправлять ошибки измерений, основываясь на том факте, что восстановленные величины должны удовлетворять уравнению Навье–Стокса и условиям несжимаемости. По мере увеличения уровня шума в исходных данных точность восстановления снижается. Мы также анализируем изменение точности реконструкций в зависимости от плотности измерений скорости. Анализ энергетических спектров показывает, что малые масштабы восстанавливаются хуже всего, особенно при зашумленных измерениях.

2. Основные уравнения. Мы рассматриваем двумерное течение несжимаемой $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ жидкости, описываемое уравнением Навье–Стокса:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \alpha \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

где $\mathbf{v}$ – двумерное поле скорости, p – давление, α – трение о дно и ν – кинематическая вязкость. Внешняя сила $\mathbf{f}$ предполагается стационарной во времени. Нас интересует умеренно турбулентный режим, для которого нелинейное слагаемое в уравнении Навье–Стокса играет существенную роль. Наблюдение за течением происходит в некоторой области с открытыми границами, и для его изучения мы измеряем поле скорости. У нас нет никакой информации о поле давления и внешней силе, за исключением того, что последняя постоянна во времени.

Важно понимать, что в такой постановке задачи давление и внешняя сила не могут быть четко разделены. Действительно, проводя разложение Гельмгольца, внешнюю силу можно представить как сумму градиентного и соленоидального полей. Градиентный вклад может быть включен в определение давления, и тогда, без потери общности, внешнюю силу в уравнении (1) можно считать соленоидальной, т.е. $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$. Однако, даже принимая во внимание это условие, разделение давления и внешней силы все равно не является однозначным. Эти величины определены с точностью до преобразований

$p(\mathbf{r}, t) \rightarrow p(\mathbf{r}, t) + h(\mathbf{r}) + c(t)$, $f(\mathbf{r}) \rightarrow f(\mathbf{r}) + \nabla h(\mathbf{r})$, где $h(\mathbf{r})$ – гармоническая функция $\nabla^2 h(\mathbf{r}) = 0$ в зоне наблюдений, а $c(t)$ – произвольная функция, не зависящая от пространственных координат. Однозначное определение $h(\mathbf{r})$ и $c(t)$ невозможно без знания граничных условий для давления и внешней силы на краях наблюдаемой области. Отметим, что $h(\mathbf{r})$ не зависит от времени, поскольку предполагается, что внешняя сила статична.

Вышеизложенное следует иметь в виду при определении точности работы алгоритма. В дальнейшем, чтобы характеризовать ошибки восстановления поля давления и внешней силы, мы будем сравнивать значения их лапласиана $\nabla^2 p$ и ротора $\phi = \partial_x f_y - \partial_y f_x$, соответственно. Знание динамики поля скорости позволяет нам однозначно определить эти величины.

3. Генерация данных. Данные для этого исследования получены численным интегрированием уравнения (1) при помощи пакета GeophysicalFlows.jl [18], который ранее успешно применялся для моделирования двумерной турбулентности [19–21]. Код может быть исполнен на графических процессорах, что обеспечивает высокую производительность. Ошибки совмещения гармоник устраняются при помощи правила двух третей. Моделирование проводится в дважды периодической области размером $2\pi \times 2\pi$. Измерения скорости осуществляются в области наблюдений, которая меньше и имеет размер $L \times L$, где $L = \pi$, см. рис. 1а. Поскольку граничные условия на краях зоны наблюдений неизвестны, применение методов ассимиляции данных, основанных на сопряженных и ансамблевых вариациях, затруднено.

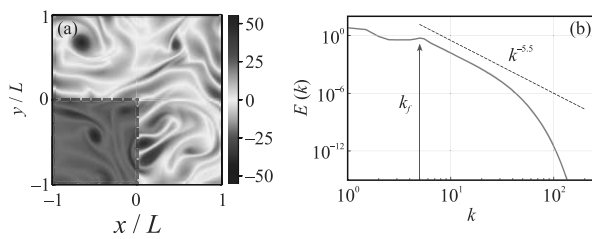


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Поле завихренности и (б) – энергетический спектр в статистически стационарном состоянии. Затененная область соответствует зоне наблюдений

Параметры системы $\nu = 0.01$ и $\alpha = 0.1$ выбраны в согласии с экспериментом [11]. Внешняя сила имеет вид Колмогорова:

$$f_x = f_0 \sin(k_f y), \quad f_y = 0, \quad (2)$$

где $f_0 = 10$ и $k_f = 5$. Начальное условие может быть произвольным, поскольку после переходного процес-

са течение достигает статистически-стационарного состояния. В этом режиме мы сохраняем данные с шагом $\Delta t = 0.02$ на протяжении $T = 4$, что соответствует нескольким оборотам флуктуаций течения. Такая частота записи данных моделирует запись видео с частотой 50 кадров в секунду в лабораторном эксперименте. Пространственное разрешение прямого численного моделирования (англ. DNS (Direct Numerical Simulation)) составляет 512^2 точек для всей расчетной области и 256^2 для зоны наблюдений.

Рисунок 1а показывает поле завихренности $\omega = \partial_x v_y - \partial_y v_x$ в статистически-стационарном состоянии. Течение хаотично и не содержит явного отпечатка внешней силы. Поскольку в задаче присутствуют два механизма диссипации (вязкость и трение о дно), то состояние системы можно описать двумя безразмерными параметрами [22]: числом Рейнольдса $Re = UL/\nu \approx 1.3 \times 10^3$ и $Rh = U/(\alpha L) \approx 13$, где мы воспользовались среднеквадратичной скоростью потока $U \approx 4.1$ и размером области наблюдений $L = \pi$. Энергетический спектр показан на рис. 1б. Он демонстрирует, что течение в основном определяется модами с волновыми векторами $k \lesssim k_f$.

Для имитации измерений скорости мы случайным образом выбираем N_{data} точек $\{\mathbf{r}_n^d, t_n^d\}_{n=1}^{N_{\text{data}}}$ в пространственно-временной $(256 \times 256 \times 200)$ области наблюдений. Мы рассматриваем случай, когда среднее расстояние между точками измерений для одного момента времени сравнимо с масштабом внешней силы или превышает его. Оказывается, что настолько разреженных данных достаточно для реконструкции полей и определения параметров системы с хорошей точностью. В экспериментах, на которые мы опираемся, пространственное разрешение измерений скорости обычно гораздо выше. В такой ситуации имеет смысл проредить измеренное поле скоростей, выбирая случайным образом небольшое число точек, что значительно ускоряет реконструкцию. Основная цель в данном случае – определить параметры системы и величины, которые не могут быть измерены напрямую. Если экспериментальные данные изначально разрежены в пространстве, то расположение точек измерений в близкие моменты времени может иметь некоторую пространственную корреляцию, которую мы не учитываем в нашей модели измерений. Влияние таких корреляций на точность реконструкции требует дальнейшего исследования и выходит за рамки данной работы.

Измеренная скорость $\mathbf{v}^d(\mathbf{r}_n^d, t_n^d)$ может отличаться от DNS данных $\mathbf{v}(\mathbf{r}_n^d, t_n^d)$ из-за экспериментальных ошибок. Мы моделируем этот шум как

$$\mathbf{v}^d = \begin{pmatrix} 1 + \eta_1 & 0 \\ 0 & 1 + \eta_2 \end{pmatrix} \mathbf{v}, \quad (3)$$

где $\eta_i \sim \mathcal{N}(0, \varepsilon^2)$ – независимые нормально распределенные случайные величины, а стандартное отклонение ε контролирует интенсивность шума. Идеальные данные соответствуют $\varepsilon = 0$. Заметим, что такой простой подход учитывает только ошибки в определении амплитуды скорости и игнорирует ошибки, связанные с определением положения вектора скорости в пространстве.

В большинстве примеров ниже мы используем $N_{\text{data}} = 3 \times 10^4$, если явно не указано другое значение. В среднем это соответствует 150 точкам измерений на снимок в сравнении с 65536 точками при полном разрешении. Собранные данные $\mathbf{v}^d(\mathbf{r}_n^d, t_n^d)$ используются для последующей реконструкции течения и параметров системы с помощью PINN.

4. Физически-информированная нейронная сеть. В этом разделе мы подробно описываем метод PINN, применяемый в исследовании. Мы одновременно обучаем две независимые нейронные сети, см. рис. 2а. Первая нейронная сеть аппроксимирует поля скорости и давления в некоторой точке пространства и времени. У этой сети есть три входных и три выходных нейрона, $(\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{p}) = \mathcal{F}_{\theta_1}(x, y, t)$. Вторая нейронная сеть предназначена для предсказания внешней силы и имеет по два нейрона на входе и выходе, $(\hat{f}_x, \hat{f}_y) = \mathcal{G}_{\theta_2}(x, y)$. Векторами θ_1 и θ_2 обозначены обучаемые параметры сетей. Кроме того, мы будем предполагать, что трение о дно и кинематическая вязкость жидкости нам неизвестны. Так как эти величины положительны, удобно представить их в виде $\hat{\alpha} = e^{\lambda_1}$ и $\hat{\nu} = e^{\lambda_2}$. Скалярные параметры λ_1 и λ_2 будут корректироваться во время обучения PINN вместе с θ_1 и θ_2 .

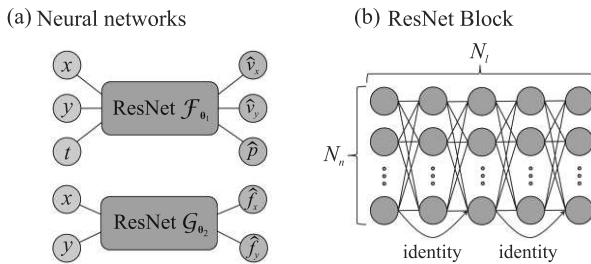


Рис. 2. (Цветной онлайн) (а) – Схемы нейронных сетей и (б) – используемая ResNet архитектура

Нейронные сети должны быть достаточно сложными, чтобы воспроизводить закономерности, характерные для рассматриваемого турбулентного течения. Теорема универсальной аппроксимации гаран-

тирует, что это возможно [23, 24]. В оригинальной работе [4] авторы использовали полносвязную архитектуру нейронной сети, однако здесь мы реализовали архитектуру типа ResNet [25] для обеих нейронных сетей, поскольку мы обнаружили, что она работает лучше в соответствии с результатами, представленными ранее [26]. Использованная нами архитектура представлена на рис. 2б. Параметры N_l и N_n обозначают количество скрытых слоев и нейронов в каждом скрытом слое соответственно. Выход $\mathbf{Y}_k$ слоя с номером k определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{2j+1} &= \sigma \left(\hat{W}_{2j+1} \mathbf{Y}_{2j} + \mathbf{b}_{2j+1} + \mathbf{Y}_{2j-1} \right), \quad j \geq 0, \\ \mathbf{Y}_{2j} &= \sigma \left(\hat{W}_{2j} \mathbf{Y}_{2j-1} + \mathbf{b}_{2j} \right), \quad j \geq 1, \\ \mathbf{Y}_{N_l+1} &= \hat{W}_{N_l+1} \mathbf{Y}_{N_l} + \mathbf{b}_{N_l+1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{Y}_{-1} \equiv \mathbf{0}$ для удобства обозначений, $\mathbf{Y}_0$ соответствует входному слою, $\mathbf{Y}_{N_l+1}$ обозначает выходной слой, $\hat{W}$ и $\mathbf{b}$ – это веса и смещения (обучаемые параметры сетей, которые образуют вектор θ), а σ – это нелинейная активационная функция, применяемая поэлементно. В качестве активационной функции мы используем гиперболический тангенс, поскольку такой выбор обеспечивает разумный компромисс между временем обучения и результирующей точностью [15].

В общем случае увеличение размера нейронной сети может уменьшить ошибку предсказаний, если ей предоставляется достаточно данных для обучения. Здесь мы фиксируем $N_l = 7$, $N_n = 250$ для $\mathcal{F}_{\theta_1}(\mathbf{r}, t)$ и $N_l = 5$, $N_n = 30$ для $\mathcal{G}_{\theta_2}(\mathbf{r})$. Отметим, что $\mathcal{G}_{\theta_2}(\mathbf{r})$ значительно проще, чем $\mathcal{F}_{\theta_1}(\mathbf{r}, t)$, поскольку она не зависит от времени и внешняя сила обычно не имеет сложной пространственной структуры.

Обучение нейронных сетей предполагает минимизацию функции потерь, состоящей из двух слагаемых. Первое слагаемое описывает отклонение между прогнозируемой и измеренной скоростью:

$$\mathcal{L}_{\text{data}} = \frac{1}{N_{\text{data}} U^2} \sum_{n=1}^{N_{\text{data}}} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_n^d, t_n^d) - \mathbf{v}^d(\mathbf{r}_n^d, t_n^d)|^2, \quad (5)$$

где $U^2 = \sum_n \mathbf{v}_d^2(\mathbf{r}_n^d, t_n^d) / N_{\text{data}}$ – это основанная на измерениях оценка среднеквадратичной скорости потока. Второе слагаемое в функции потерь учитывает отклонение предсказаний от уравнения Навье–Стокса и условий несжимаемости:

$$\mathcal{L}_{\text{eq}} = \frac{1}{N_{\text{eq}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{eq}}} [e_1^2(\mathbf{r}_n^e, t_n^e) + e_2^2(\mathbf{r}_n^e, t_n^e) + e_3^2(\mathbf{r}_n^e)], \quad (6)$$

где $\{\mathbf{r}_n^e, t_n^e\}_{n=1}^{N_{\text{eq}}}$ – это точки коллокации, в которых анализируются отклонения и

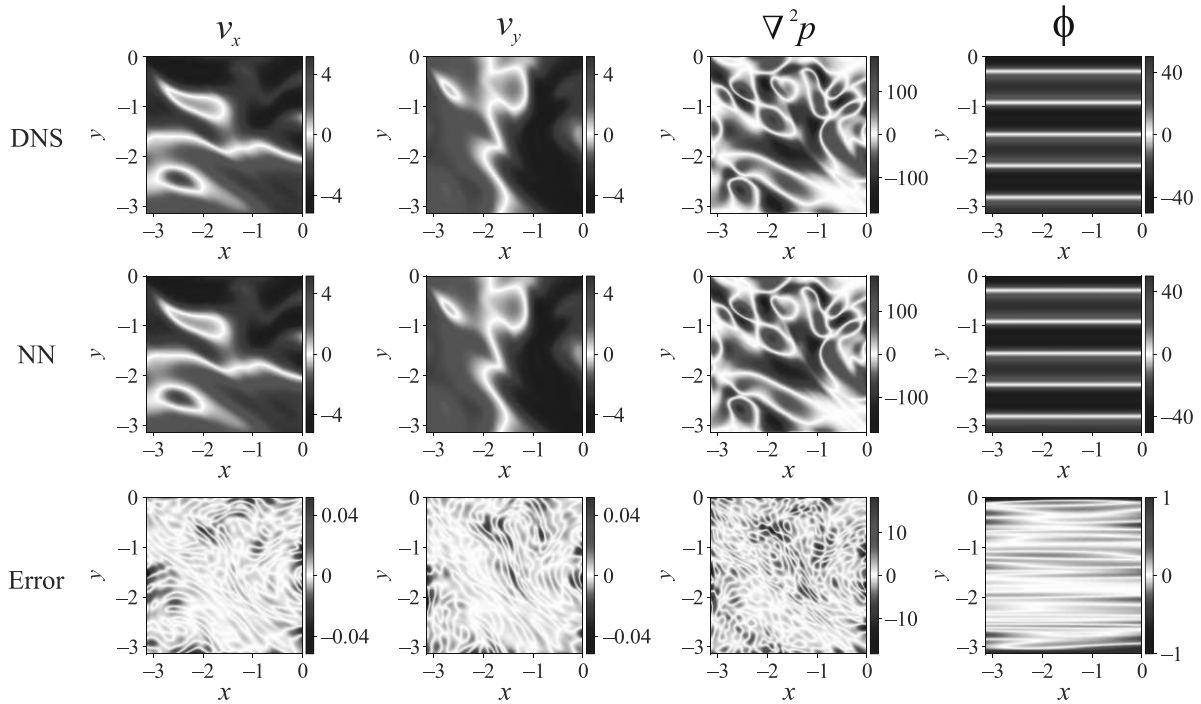


Рис. 3. (Цветной онлайн) Сравнение данных DNS и предсказаний PINN для модели, обученной на незашумленных измерениях скорости. Количество точек данных и точек коллокации составляет $N_{\text{data}} = 3 \times 10^4$ и $N_{\text{eq}} = 9 \times 10^4$ соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \left(\partial_t \hat{\mathbf{v}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}} + \nabla \hat{p} + e^{\lambda_1} \hat{\mathbf{v}} - e^{\lambda_2} \nabla^2 \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{f}} \right) L/U^2, \\ e_2 &= (\partial_x \hat{v}_x + \partial_y \hat{v}_y) L/U, \\ e_3 &= \left(\partial_x \hat{f}_x + \partial_y \hat{f}_y \right) L^2/U^2. \end{aligned}$$

Вычисление правых частей подразумевает дифференцирование выходов нейронных сетей по входным параметрам с использованием автоматического дифференцирования [27]. Отметим, что число и расположение точек коллокации не ограничены измерениями и могут быть выбраны произвольно. Мы фиксируем $N_{\text{eq}} = 9 \times 10^4$, причем часть этих точек совпадает с точками измерений $\{\mathbf{r}_n^d, t_n^d\}_{n=1}^{N_{\text{data}}}$, а остальные генерируются случайным образом. Также отметим, что вместо выполнения условий несжимаемости, нейронные сети могут предсказывать функции тока [4, 28]. Однако в этом случае вычисление слагаемых в уравнении Навье–Стокса предполагает вычисление производных более высокого порядка, что значительно замедляет процесс обучения.

Полная функция потерь определяется выражением

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{data}} + \beta \mathcal{L}_{\text{eq}}, \quad (7)$$

где β – это коэффициент, уравнивающий оба слагаемых. Его значение можно адаптивно изменять в процессе обучения [29, 30], но мы используем более

простую стратегию, в которой этот параметр фиксирован. Эмпирически мы обнаружили, что $\beta = 0.02$ хорошо подходит для задач рассматриваемого типа.

Минимизация функции потерь (7) выполняется градиентным оптимизатором, который находит оптимальные параметры сети $\{\theta_1, \theta_2\}$ и параметры уравнений $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Сначала мы обучаем модель на протяжении 10^5 эпох с помощью оптимизатора Adam [31] со скоростью обучения $\mu = 10^{-3}$. Эпоха означает один полный проход по набору данных. В целях сокращения времени обучения мы реализовали метод смешанной точности [32]. Затем мы применяем оптимизатор L-BFGS-B [33], пока отличие функции потерь между итерациями не достигнет машинной точности. Обучение производится на графическом процессоре NVIDIA A100. Код написан с использованием PyTorch [34] и находится в открытом доступе [35].

5. Результаты. Для количественной оценки качества обученных моделей мы используем относительные среднеквадратичные ошибки (англ. RRMSE (Relative Root-Mean-Square Errors)), которые подразумевают усреднение по области наблюдений $\|\dots\|_2 = \sqrt{\frac{1}{L^2} \int d^2r |\dots|^2}$ и по времени $\langle \dots \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T dt \dots$

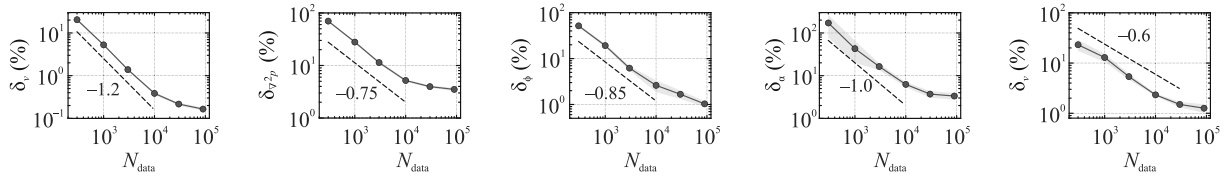


Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость относительных среднеквадратичных ошибок реконструкций PINN от количества N_{data} данных, использованных для обучения. Пунктирные линии добавлены для сравнения и указаны их наклоны. Закрашенные области соответствуют стандартным отклонениям, которые были оценены путем обучения пяти независимых моделей PINN для каждого значения N_{data}

$$\delta_Q = \left\langle \frac{\|\hat{Q} - Q\|_2}{\|Q\|_2} \right\rangle_T, \quad (8)$$

где $\hat{Q}$ обозначает интересующую нас физическую величину, предсказанную PINN, а Q – ее точное значение из DNS. Мы анализируем, насколько хорошо реконструируются скорость, давление, внешняя сила, коэффициент трения о дно и вязкость жидкости. Однако, как обсуждалось ранее в разделе 2, давление и внешняя сила не могут быть однозначно определены по измерениям поля скорости. Поэтому, чтобы определить точность реконструкции этих полей, мы анализируем ошибки в определении лапласиана давления $\nabla^2 p$ и ротора внешней силы $\phi = \partial_x f_y - \partial_y f_x$. Кроме того, чтобы протестировать статистические свойства предсказанного поля скорости, мы сравниваем энергетические спектры эталонного и реконструированного течений.

Влияние плотности исходных данных. Сначала мы обучили модели PINN на данных без шума. Мы зафиксировали число $N_{\text{eq}} = 9 \times 10^4$ точек для проверки уравнений и варьировали число N_{data} точек измерений в диапазоне от 3×10^2 до 9×10^4 для исследования зависимости точности предсказаний от плотности входных данных. Оказалось, что реконструкции, основанные на входных данных с $N_{\text{data}} \geq 10^4$, имеют высокую точность. На рис. 3 мы сравниваем данные DNS с предсказаниями нейронных сетей в зоне наблюдений в некоторый момент времени для модели PINN, обученной на $N_{\text{data}} = 3 \times 10^4$ измерениях скорости. Результаты оказываются очень близкими, а различия в основном локализованы на малых масштабах.

На рисунке 4 представлены RRMSE для поля скорости, лапласиана давления, ротора внешней силы, трения о дно и вязкости жидкости. По мере увеличения N_{data} ошибки сначала быстро уменьшаются по степенному закону ($N_{\text{data}} \leq 10^4$), а затем зависимости плавно выходят на насыщение ($N_{\text{data}} \geq 10^4$). Подобное поведение наблюдалось ранее для более простой задачи реконструкции двумерных затухающих

вихрей Тейлора [15]. Ошибка реконструкции поля скорости составляет менее 0.5% для $N_{\text{data}} \geq 10^4$, в то время как для других величин ошибки примерно на порядок больше. Такое поведение объясняется отсутствием измерений для этих величин, поэтому модель восстанавливает их исключительно из анализа физических уравнений.

На рисунке 5 мы сравниваем энергетические спектры течения с его реконструкцией PINN для анализа статистических свойств поля скорости. Поскольку область наблюдений не является периодической, при построении спектров мы использовали оконную функцию Ханна. По этой причине спектр DNS несколько отличается от представленного ранее на рис. 2b. Энергетические спектры поля скорости хорошо воспроизводятся для $N_{\text{data}} \geq 10^3$. Заметные отличия наблюдаются только для более разреженных данных, и они в основном локализованы на малых масштабах с $k \gg k_f$.

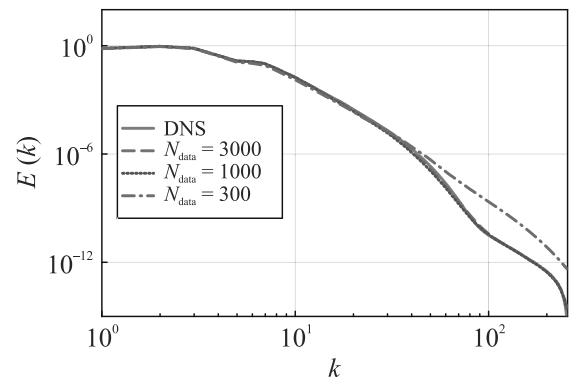


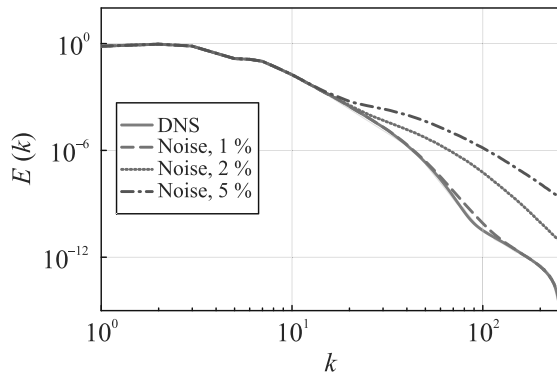
Рис. 5. (Цветной онлайн) Энергетические спектры для данных DNS и моделей PINN, обученных с различным количеством N_{data} точек измерений

Влияние измерительного шума. Теперь мы фиксируем $N_{\text{data}} = 3 \times 10^4$ и повторяем обучение, но модели получают на вход зашумленные измерения скорости. В таблице 1 приведены зависимости средних значений и стандартных отклонений ошибок предсказаний от уровня шума, полученные усреднением

Таблица 1. Зависимость средних значений и стандартных отклонений ошибок предсказаний PINN от уровня шума ε

ε	$\delta_v, \%$	$\delta_{\nabla^2 p}, \%$	$\delta_\phi, \%$	$\delta_\alpha, \%$	$\delta_\nu, \%$	$\delta_{p-\langle p \rangle_T}, \%$
0	0.22 ± 0.01	4.0 ± 0.2	1.6 ± 0.3	3.9 ± 0.5	1.5 ± 0.1	0.58 ± 0.03
0.005	0.28 ± 0.01	4.7 ± 0.1	1.7 ± 0.4	3.1 ± 0.9	1.2 ± 0.2	0.86 ± 0.03
0.01	0.50 ± 0.03	10.1 ± 1.8	2.0 ± 0.4	2.2 ± 1.8	0.7 ± 0.5	1.7 ± 0.1
0.02	2.39 ± 0.06	157 ± 9	5.4 ± 0.8	41.4 ± 4.4	12.3 ± 0.9	7.7 ± 0.3
0.05	5.84 ± 0.28	478 ± 43	13.0 ± 2.7	188 ± 26	56.1 ± 2.0	17.3 ± 1.0

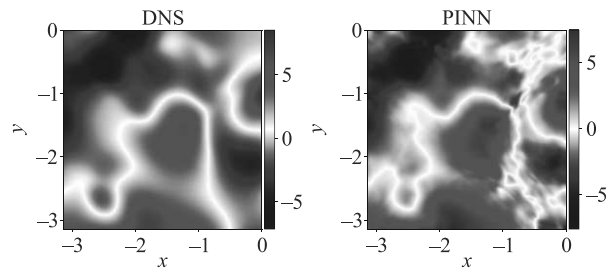
по десяти моделям PINN в каждом случае. Разработанный алгоритм оказывается устойчивым к малому шуму ($\varepsilon \leq 0.01$) во входных данных. Более того, ошибки для восстановленной скорости в этом случае меньше, чем уровень шума. Таким образом, алгоритм PINN способен корректировать небольшие ошибки измерений, основываясь на том, что поле скорости должно удовлетворять уравнению Навье–Стокса и условию несжимаемости.

**Рис. 6.** (Цветной онлайн) Энергетические спектры для данных DNS и моделей PINN, обученных с различным уровнем шума в исходных данных

По мере увеличения интенсивности шума ($\varepsilon \geq 0.02$) эффективность обученных моделей постепенно снижается. Поскольку для турбулентного потока диссипативные слагаемые вносят относительно небольшой вклад в уравнение Навье–Стокса, модель быстро теряет способность предсказывать коэффициент трения α и вязкость жидкости ν . В то же время точность определения поля скорости и внешней силы остается сопоставимой с уровнем шума.

Ошибки в предсказании лапласиана давления достигают огромных значений, но в первую очередь это связано с особенностями введенной метрики, а само давление реконструируется достаточно хорошо. Наличие шума в исходных данных приводит к мелкомасштабным ошибкам, которые усиливаются при вычислении пространственных производных второго порядка. Аналогичные рассуждения применимы и к ошибкам предсказания ротора внешней силы,

но в меньшей степени, поскольку в данном случае вычисляются только производные первого порядка. На рисунке 6 представлено сравнение энергетических спектров для эталонного и реконструированного течений, что подтверждает наличие мелкомасштабных ошибок в предсказанных полях скорости.

**Рис. 7.** (Цветной онлайн) Сравнение модифицированного давления $p - \langle p \rangle_T$ для данных DNS и модели PINN, обученной на входных данных с уровнем шума $\varepsilon = 0.05$

Для оценки точности реконструкции поля давления более прямым образом, мы вводим в рассмотрение модифицированное давление $p - \langle p \rangle_T$. Вычитание среднего по времени значения позволяет устранить неоднозначность в определении давления, связанную с произвольной гармонической функцией $h(\mathbf{r})$, см. подробности в разделе 2. Модифицированное давление определяется с точностью до произвольной константы, поэтому при сравнении этих полей мы также вычитаем из них средние по пространству значения. Полученные результаты показаны на рис. 7, где мы сравниваем модифицированные давления в некоторый момент времени для данных DNS и модели PINN, обученной на поле скорости с уровнем шума $\varepsilon = 0.05$. Несмотря на заметные различия, модифицированные давления в целом похожи друг на друга. Соответствующие RRMSE для всех уровней шума приведены в последнем столбце табл. 1, и они значительно меньше, чем ошибки в реконструкции лапласиана давления.

Заключение. Мы показали, что алгоритм PINN может объединять плотные во времени, пространственно разреженные и, возможно, зашумленные измерения скорости с точной физической моделью яв-

ления для извлечения дополнительной информации из обычных экспериментальных данных. Разработанная методика может быть применена поверх экспериментальных измерений методами PIV/PTV, потенциально расширяя их возможности. В частности, мы исследовали двумерное турбулентное течение жидкости, вызываемое внешней силой, и продемонстрировали, что предложенный подход позволяет восстанавливать пространственно плотные поля скорости и давления, определять внешнюю силу, а также неизвестные вязкость жидкости и коэффициент трения о дно. Способность восстанавливать полное состояние системы по ограниченным измерениям также может найти применение в задачах сжатия экспериментальных данных.

Предложенная методика основана на обучении физически-информированных нейронных сетей путем минимизации функции потерь, которая штрафует за отклонения от предоставленных данных и нарушения физических уравнений. Несмотря на наше стремление выбрать оптимальную архитектуру нейронных сетей и конфигурацию гиперпараметров, тщательное изучение этого вопроса выходит за рамки данной работы. Мы ожидаем, что внедрение более продвинутых архитектур [36–39] может привести к дальнейшему улучшению метода.

Реконструированные течения сравнивались с эталонным путем анализа относительных среднеквадратичных ошибок и энергетических спектров. В целом, результаты показывают хорошую точность для приложений сверхразрешения и определения неизвестных параметров системы, а также демонстрируют умеренную устойчивость к шуму во входных данных. При низком уровне шума алгоритм может исправлять ошибки в измерениях скорости на основе физических уравнений. Разработанная методика может быть полезна для анализа течений в случае, когда физическая модель явления хорошо построена.

Хотя в нашем исследовании использовались плотные во времени измерения скорости, следует отметить, что метод PINN может быть расширен и применен к редким во времени измерениям. В этом случае интервал между последовательными изображениями пассивных частиц достаточно велик, и методы PIV/PTV оказываются неэффективными для определения мгновенной скорости течения. Однако физическую модель явления можно дополнить уравнением, описывающим перенос пассивных частиц, и затем мы можем обучать PINN по экспериментальным изображениям их пространственного распределения. Примеры применения такой стратегии можно найти в работе [40], и вместо пассивных частиц можно так-

же следить за полем температуры [41, 42]. Для турбулентных систем расстояние между последовательными изображениями частиц не может превышать ляпуновское время, но насколько близко можно подойти к этому пределу – вопрос открытый.

Наконец, несмотря на то, что представленные результаты выглядят многообещающими, в данном исследовании не был рассмотрен ряд вопросов, важных для практических приложений:

- В большинстве случаев физическая модель описывает систему лишь приближенно. Например, для течений в тонких слоях жидкости уравнение (1) нарушается для мелкомасштабных мод, размер которых сравним с толщиной слоя. Насколько чувствителен алгоритм PINN к недостаткам физической модели?
- Рассматриваемый поток был пространственно однородным. Будет ли алгоритм работать также хорошо для существенно неоднородных систем? Какие изменения для этого потребуются?
- Процедура, использованная для моделирования измерений скорости, не учитывает всех особенностей экспериментальных измерений PIV/PTV. Было бы полезно исследовать возможности алгоритма, используя экспериментальные данные, собранные в различных условиях. Первые шаги в этом направлении уже сделаны в работах [15–17].
- Как увеличение степени нелинейности потока повлияет на качество предсказаний? Какой объем данных потребуются для достижения желаемой точности реконструкции? Можно ли подойти к проблеме теоретически и найти фундаментальные ограничения на требуемую пространственно-временную плотность исходных данных?

Мы надеемся, что будущие исследования позволят решить эти проблемы и что найденные решения будут способствовать дальнейшему развитию PINN.

Авторы благодарят Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау за предоставление вычислительных ресурсов.

Финансирование работы. Работа В. Парфеньева и И. Никитина выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания FFWR-2024-0017 Института теоретической физики имени Л. Д. Ландау. В. Парфеньев также выражает

благодарность Фонду развития теоретической физики и математики “БАЗИС”, проект 22-1-3-24-1.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. J. van der Kindere, A. Laskari, B. Ganapathisubramani, and R. De Kat, *Exp. Fluids* **60**, 1 (2019).
2. T. A. Zaki and M. Wang, *Phys. Rev. Fluids* **6**(10), 100501 (2021).
3. M. Asch, M. Bocquet, and M. Nodet, *Data assimilation: methods, algorithms, and applications*, SIAM, Philadelphia (2016).
4. M. Raissi, P. Perdikaris, and G. E. Karniadakis, *J. Comput. Phys.* **378**, 686 (2019).
5. A. Arzani, J.-X. Wang, and R. M. D’Souza, *Phys. Fluids* **33**(7), 071905 (2021).
6. Y. Du, M. Wang, and T. A. Zaki, *International Journal of Heat and Fluid Flow* **99**, 109073 (2023).
7. S. Cai, Z. Mao, Z. Wang, M. Yin, and G. E. Karniadakis, *Acta Mechanica Sinica* **37**(12), 1727 (2021).
8. G. E. Karniadakis, I. G. Kevrekidis, L. Lu, P. Perdikaris, S. Wang, and L. Yang, *Nat. Rev. Phys.* **3**(6), 422 (2021).
9. P. Sharma, W. T. Chung, B. Akoush, and M. Ihme, *Energies*, **16**(5), 2343 (2023).
10. G. Boffetta, A. Cenedese, S. Espa, and S. Musacchio, *Europhysics Letters* **71**(4), 590 (2005).
11. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, *Phys. Fluids* **21**(12), 125101 (2009).
12. A. V. Orlov, M. Y. Brazhnikov, and A. A. Levchenko, *JETP Lett.* **107**, 157 (2018).
13. L. Fang and N. T. Ouellette, *Phys. Rev. Fluids* **6**(10), 104605 (2021).
14. H. Eivazi, Y. Wang, and R. Vinuesa, *Measurement science and technology* **35**(7), 075303 (2024).
15. H. Wang, Y. Liu, and S. Wang, *Phys. Fluids* **34**(1), 017116 (2022).
16. P. Clark Di Leoni, K. Agarwal, T. A. Zaki, C. Meneveau, and J. Katz, *Exp. Fluids* **64**(5), 95 (2023).
17. S. Cai, C. Gray, and G. E. Karniadakis, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **73**, 1 (2024).
18. N. Constantinou, G. Wagner, L. Siegelman, B. Pearson, and A. Palóczy, *J. Open Source Softw.* **6**, 3053 (2021).
19. V. Parfenyev, *Phys. Rev. E* **106**(2), 025102 (2022).
20. I. Kolokolov, V. Lebedev, and V. Parfenyev, *Phys. Rev. E* **109**(3), 035103 (2024).
21. V. Parfenyev, *Phys. Fluids* **36**(1), 01514 (2024).
22. P. K. Mishra, J. Herault, S. Fauve, and M. K. Verma, *Phys. Rev. E* **91**(5), 053005 (2015).
23. G. Cybenko, *Math. Control Signals Syst.* **2**(4), 303 (1989).
24. K. Hornik, M. Stinchcombe, and H. White, *Neural Netw.* **2**(5), 359 (1989).
25. K. He, X. Zhang, S. Ren, and J. Sun, *Deep residual learning for image recognition*, in *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, IEEE, Las Vegas, NV, USA (2016), p. 770.
26. C. Cheng and G.-T. Zhang, *Water* **13**(4), 423 (2021).
27. A. G. Baydin, B. A. Pearlmutter, A. A. Radul, and J. M. Siskind, *Phys. Fluids* **18**(153), 1 (2018).
28. V. Kag, K. Seshasayanan, and V. Gopinath, *Phys. Fluids* **34**(5), 055130 (2022).
29. S. Wang, Y. Teng, and P. Perdikaris, *SIAM J. Sci. Comput.* **43**(5), A3055 (2021).
30. X. Jin, S. Cai, H. Li, and G. E. Karniadakis, *J. Comput. Phys.* **426**, 109951 (2021).
31. D. P. Kingma and J. Ba, *arXiv preprint arXiv:1412.6980* (2014).
32. P. Micikevicius, Sh. Narang, J. Alben, G. Diamos, E. Elsen, D. Garcia, B. Ginsburg, M. Houston, O. Kuchaiev, G. Venkatesh, and H. Wu, *arXiv preprint arXiv:1710.03740*, 2017.
33. R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, and C. Zhu, *SIAM J. Sci. Comput.* **16**(5), 1190 (1995).
34. A. Paszke, S. Gross, F. Massa et al. (Collaboration), *Pytorch: An imperative style, highperformance deep learning library*, in *Advances in Neural Information Processing Systems*; H. Wallach, H. Larochelle, A. Beygelzimer, F. d’Alche-Buc, E. Fox, and R. Garnett, Curran Associates, Inc. Red Hook, NY, USA (2019), v. 32.
35. <https://github.com/parfenyev/2d-turb-PINN/>.
36. L. Z. Zhao, X. Ding, and B. A. Prakash, *arXiv preprint arXiv:2307.11833* (2023).
37. S. Wang, B. Li, Y. Chen, and P. Perdikaris, *arXiv preprint arXiv:2402.00326*, 2024.
38. Z. Liu, Y. Wang, S. Vaidya, F. Ruehle, J. Halverson, M. Soljačić, T. Y. Hou, and M. Tegmark, *arXiv preprint arXiv:2404.19756*, 2024.
39. F. Buzaev, J. Gao, I. Chuprov, and E. Kazakov, *Mach. Learn.* **113**, 3675 (2023).
40. M. Raissi, A. Yazdani, and G. E. Karniadakis, *Science* **367**(6481), 1026 (2020).
41. S. Cai, Z. Wang, F. Fuest, Y. J. Jeon, C. Gray, and G. E. Karniadakis, *J. Fluid Mech.* **915**, A102 (2021).
42. P. Clark Di Leoni, L. Agasthya, M. Buzzicotti, and L. Biferale, *Eur. Phys. J. E* **46**(3), 16 (2023).