

Управление динамическими режимами наноразмерного сверхпроводящего интерферометра¹⁾

И. А. Терещенко^{+,*}, М. М. Хренов^{+,*}, Н. В. Кленов^{+,×2)}, О. В. Тихонова^{+,*}

⁺ Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

^{*} Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына МГУ, 119991 Москва, Россия

[×] ВНИИА им. Духова, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 октября 2023 г.

После переработки 18 января 2024 г.

Принята к публикации 18 января 2024 г.

Найдено аналитическое решение, описывающее динамические процессы в наноразмерном сверхпроводящем интерферометре с пренебрежимо малыми индуктивностями, включенном в высокочастотный резонатор. Проанализировано влияние нелинейности в системе, а также воздействие внешней параметрической накачки. В широком диапазоне проведен скрининг обнаруженных динамических режимов исследуемой наноструктуры и получены их положения на плоскости параметров. Продemonстрировано существенное влияние фазовых эффектов на эволюцию системы и выявлены фазовые соотношения, позволяющие управлять интенсивностью сигнала на выходе. Обнаруженные эффекты открывают новые возможности для разработки и тестирования базовых элементов современных вычислительных квантовых систем.

DOI: 10.31857/S1234567824030108, EDN: sqigii

Введение. Системы с джозефсоновскими контактами (ДК), интегрированные в волноводы (резонаторы), – важная часть современных квантовых вычислительных систем, а также прорывных фундаментальных экспериментов. Простейший пример – сверхпроводящий наноразмерный интерферометр (СКВИД; вид сверху на структуру при тонкопленочной реализации, расчет растекания токов, эквивалентная схема и типовая микрофотография представлены на рис. 1). Подобные системы используют, например, для настройки связи между искусственными атомами через резонатор и анализа их состояний, исследования динамического эффекта Казимира и т.п. [1–6]. В таких применениях даже эпизодическое превышение критического значения для протекающего через элемент тока ведет к формированию импульсов напряжения и провоцирует “квазичастичное отравление” сверхпроводниковых квантовых регистров. Эти требования практики заставляют вернуться к анализу мало-диссипативных динамических процессов в интерферометре [7, 8] и возможностей управления ими, в том числе и под действием квазимонохроматического излучения (“накачки”) [9].

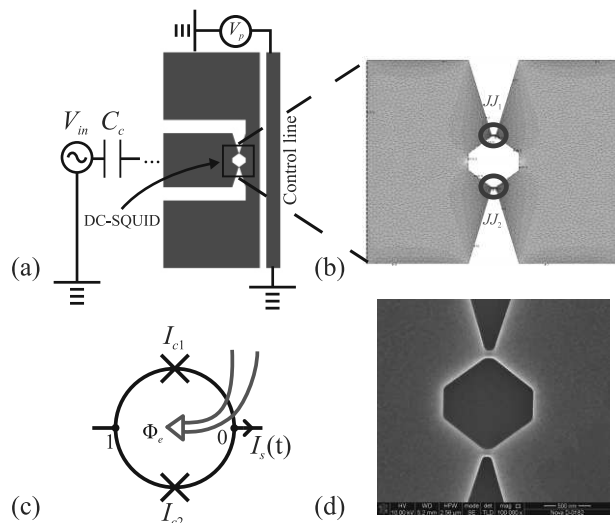


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Топология двухконтактного СКВИДа, включенного в копланарный волновод с контрольной линией для задания магнитного потока накачки в кольцо интерферометра; (б) – моделирование растекания токов в СКВИДа в программном пакете 3D-MLSI [10, 11]; (с) – схема двухконтактного СКВИДа с пренебрежимо малой геометрической индуктивностью под действием внешнего магнитного потока Φ_e ; (д) – снимок наноразмерного СКВИДа в сканирующем электронном микроскопе

¹⁾ См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru.

²⁾ e-mail: nvklenov@mail.ru

Также поиск аналитического решения “уравнения движения” для наноразмерного интерферометра в резонаторе под действием переменного сигнала “накачки” представляет интерес из-за необходимости перехода в ряде случаев к рассмотрению поведения системы в квантовом режиме (причем по законам квантовой механики может быть описана как наноструктура, так и поле в резонаторе) [12]. В данной работе найдено аналитическое решение, описывающее динамические процессы в наноразмерном сверхпроводящем интерферометре с пренебрежимо малыми индуктивностями и в широком диапазоне проведен скрининг обнаруженных динамических режимов в зависимости от значений параметров исследуемой наносистемы.

Модель. В центре нашего исследования двухконтактный интерферометр – тонкопленочное сверхпроводящее кольцо с двумя “слабыми местами”, выполненным в виде сужений. Схематическое изображение примера физической реализации СКВИДа, интегрированного в сверхпроводящий резонатор с возможностью подведения магнитного сигнала “накачки”, представлено на рис. 1а (синим цветом показаны участки сверхпроводящей тонкой пленки). Протекающий через интерферометр транспортный ток, I_S , создается источником входного сигнала, V_{in} . Дополнительно действующее на интерферометр магнитное поле накачки прилагается при помощи элемента “Control line”. Описанный дизайн в последнее время востребован экспериментаторами из-за своей простоты и совместимости с технологическими решениями, используемыми в сверхпроводниковых квантовых вычислениях (см., например, [13]).

Для анализа растекания тока в рассматриваемых сверхпроводящих тонкопленочных структурах ($t \ll l$, $t \sim \lambda_L$, где t – толщина сверхпроводника, l – характерный планарный размер пленки, λ_L – лондоновская глубина) мы численно решали уравнения Лондонов с использованием метода конечных элементов [10]. Из результатов таких расчетов на рис. 1b видно, что в сверхпроводящем контуре формируются два “слабых места” – джозефсоновских контакта – из-за того, что плотность тока в сужениях, выделенных рамками, превышает критическое значение [14, 15]. Кроме того, использование программного пакета 3D-MLSI [10, 11] позволило на основе полученного пространственного распределения рассчитать матрицу индуктивностей, причем индуктивность петли рассматриваемого интерферометра оказалась порядка 0.65 пГн. Так как критический ток джозефсоновских контактов примерно равен $I_{C1} = I_{C2} \approx 25$ мкА (рис. 1с), значение безраз-

мерной индуктивности петли интерферометра составило $\beta_l = \frac{2\pi L I_{C1}}{\Phi_0} = 0.05 \ll 1$. Это позволяет рассматривать СКВИД в приближении малости безразмерной индуктивности β_l и ввести его полную фазу $\varphi(t)$ [16, 17]. Эта величина, определяемая разностью фаз комплексного параметра порядка в противоположных “концах” интерферометра (“1” и “0” на рис. 1с), играет роль обобщенной координаты. В таком случае поведение системы аналогично поведению одиночного ДК (т.е. нелинейного осциллятора), полный критический ток которого зависит от величины внешнего магнитного потока Φ_e . Полный сверхток через такой интерферометр может быть записан в следующем виде:

$$I_S(t) = I_c \cos(\varphi_e) \sin(\varphi(t)), \quad (1)$$

где $\varphi_e = \pi(\Phi_e/\Phi_0)$ – “внешняя фаза”, $\Phi_0 = h/2e$ – квант магнитного потока, Φ_e – задаваемый внешний магнитный поток. Если внешний поток задается гармонической функцией с определенной частотой, система является параметрическим элементом с потоковой накачкой по отношению к внешнему сигналу [18, 19]. В данной работе аналитически исследуется динамика системы под действием гармонических сигнала и накачки в рамках модели с шунтирующими емкостью и нормальным сопротивлением (RCSJ) [8, 9].

Полное уравнение динамики рассматриваемой системы под действием гармонического сигнала $I_s(\tau)/I_c = i_s \cos \Omega\tau$ и накачки внешним магнитным потоком $\varphi_e(\tau) = \varphi_0 + \varepsilon \cos(\Omega_p\tau + \Delta)$ удобно исследовать в безразмерном виде:

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + \cos(\varphi + \varepsilon \cos(\Omega_p\tau + \Delta)) \sin \varphi = i_s \cos \Omega\tau, \quad (2)$$

где производные берутся по безразмерному времени $\tau = t\omega_{\text{plasma}}$, частоты $\Omega = \omega/\omega_{\text{plasma}}$ нормированы на плазменную частоту $\omega_{\text{plasma}} = \sqrt{2eI_c/(\hbar C)}$, $\alpha = (1/R)\sqrt{\hbar I_c/(2e)}$, C и R – емкость и сопротивление СКВИДа соответственно, ε – нормированная амплитуда переменной составляющей $\varphi_e(\tau)$ частоты Ω_p , Δ – сдвиг фазы накачки относительно сигнала. Для малой амплитуды накачки ($\varepsilon \ll 1$) справедливо следующее разложение:

$$\begin{aligned} \cos[\varphi_0 + \varepsilon \cos(\Omega_p\tau + \Delta)] &\cong \\ &\cong \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \varepsilon \cos(\Omega_p\tau + \Delta). \end{aligned}$$

Поскольку выбор постоянной составляющей внешней фазы φ_0 произволен, уравнение динамики (2) можно переписать в следующей форме:

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + [1 + \varepsilon \cos(\Omega_p\tau + \Delta)] \sin \varphi = i_s \cos \Omega\tau. \quad (3)$$

Анализ различных динамических режимов. Рассмотрим сначала влияние внешней параметрической накачки при условии малости собственной нелинейности в системе. Оставляя только линейные по φ слагаемые и вводя собственную частоту осциллятора $\omega_0 = 1$, получим уравнение, описывающее динамику джозефсоновского осциллятора с затуханием под действием внешней параметрической накачки:

$$\ddot{\varphi} + \alpha \dot{\varphi} + [1 + \varepsilon \cos(\Omega_p \tau + \Delta)] \omega_0^2 \varphi = i_s \cos \Omega \tau. \quad (4)$$

Отдельный интерес представляет резонансный случай, при котором частота подаваемого сигнала совпадает с собственной частотой осциллятора $\Omega = \omega_0$, а частота накачки в 2 раза больше ($\Omega_p = 2\omega_0$), так что имеет место параметрический резонанс. Для данной задачи было найдено аналитическое решение, имеющее следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi[\tau] = & \cos[\omega_0 \tau] (A + \mu_1 e^{k_1 \tau} + \mu_2 e^{k_2 \tau}) + \\ & + \sin[\omega_0 \tau] (B + \eta_1 \mu_1 e^{k_1 \tau} + \eta_2 \mu_2 e^{k_2 \tau}), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$k_{1,2} = \frac{-4\omega_0^2 \alpha \pm \sqrt{-4\omega_0^2 \alpha^4 + \varepsilon^2 \alpha^2 \omega_0^4 + 4\varepsilon^2 \omega_0^6}}{2(\alpha^2 + 4\omega_0^2)}, \quad (6)$$

а коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \eta_1, \eta_2, A, B$ могут быть найдены из начальных условий (подробный вывод представлен в дополнительных материалах к статье).

Анализ полученного решения позволяет выявить существование различных режимов динамики системы в зависимости от соотношения параметров α и $\frac{\omega_0 \varepsilon}{2}$ (см. рис. 2). Фактически возникает конкуренция

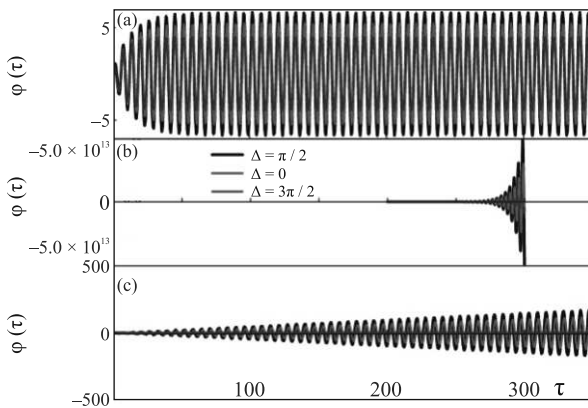


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость джозефсоновской фазы от нормированного времени $\phi(\tau)$ для: (а) – стационарного режима ($\alpha = 0.2, \varepsilon = 0.25$); (б) – режима экспоненциального роста колебаний ($\alpha = 0.1, \varepsilon = 0.5$); (с) – режима линейного роста ($\alpha = 0.25, \varepsilon = 0.5$); $i_s = 1$

процессов параметрического усиления и затухания в системе. Так, в случае сильного затухания, однородное решение полностью затухает, и в результате на больших временах “выживут” лишь колебания с постоянным значением амплитуды, поддерживаемые подаваемым входным сигналом. Примеры динамических процессов в таком стационарном режиме представлены на рис. 2а для нескольких значений фазы накачки Δ . При более сильной накачке система сама генерирует экспоненциально возрастающие колебания, амплитуда которых зависит от входного сигнала, причем параметрическая генерация будет происходить в любом случае, даже при его отсутствии (см. рис. 2б). Выделенным случаем является выполнение точного равенства $\alpha = \frac{\omega_0 \varepsilon}{2}$, что соответствует компенсации затухания усилением, вызываемым накачкой. Для данного режима, представленного на рис. 2с, характерен бесконечный линейный рост амплитуды колебаний (режим аналогичен резонансному раскачиванию амплитуды колебаний осциллятора внешней силой в отсутствие затухания). Следует отметить, что в данном случае линейный рост амплитуды происходит для всех фаз, кроме $\Delta = \frac{3\pi}{2}$, при которой реализуются только затухающие решения для амплитуд осцилляций в (5) за исключением частного решения с постоянной амплитудой. В данном режиме при такой фазе накачки достигается абсолютный минимум величины сигнала на выходе.

Аналитическое решение уравнения (4) было получено и в условиях, когда частота подаваемого сигнала Ω отличается от собственной частоты системы, однако условие параметрического резонанса сохраняется: $\Omega_p = 2\Omega$.

В данном случае общее решение было получено в следующей форме:

$$\begin{aligned} \varphi[\tau] = & (\delta_1 \exp(\gamma_1 \tau) + \delta_2 \exp(\gamma_2 \tau) + A_0) \cos(\Omega \tau) + \\ & + (\delta_1 \chi_1 \exp(\gamma_1 \tau) + \delta_2 \chi_2 \exp(\gamma_2 \tau) + B_0) \sin(\Omega \tau), \end{aligned} \quad (7)$$

где параметры γ_1 и γ_2 имеют достаточно сложный вид, а коэффициенты $\delta_1, \delta_2, \chi_1, \chi_2, A_0$ и B_0 могут быть найдены из начальных условий (подробный вывод представлен в дополнительных материалах к статье). Из анализа общего решения, аналогично резонансному случаю, можно выявить наличие трех динамических режимов для разных значений параметра:

$$K_0 = 4\alpha^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 + 4 \left(\omega_0 - \frac{\Omega^2}{\omega_0} \right)^2 - \varepsilon^2 \omega_0^2. \quad (8)$$

Так, если $K_0 > 0$, то действительные части экспоненциальных коэффициентов γ_1 и γ_2 отрицательны, и со

временем решение достигает постоянной амплитуды осцилляций, что соответствует стационарному режиму. Если $K_0 < 0$, то γ_1 и γ_2 имеют разные знаки, реализуется режим экспоненциального роста. В случае, когда $K_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, а $\gamma_2 < 0$, имеет место режим линейного роста. Полученное выражение для параметра K_0 позволяет построить 2D-распределение для иллюстрации характера динамики системы в зависимости от параметра накачки и частоты подаваемого сигнала при фиксированном коэффициенте затухания (см. рис. 3).

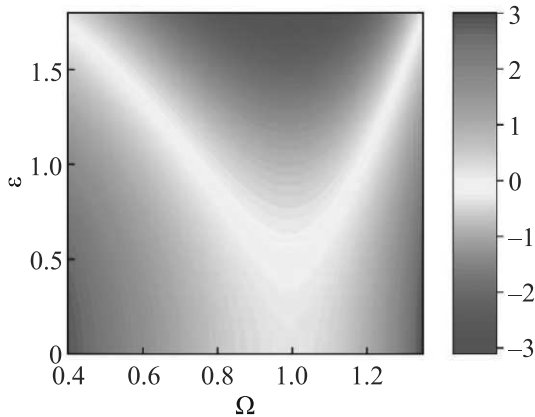


Рис. 3. (Цветной онлайн) 2D-распределение параметра K_0 в зависимости от величины накачки ε и частоты подаваемого сигнала Ω при фиксированном коэффициенте затухания $\alpha = 0.2$

Из рисунка 3 видно, что при не слишком малой накачке с ростом частоты подаваемого сигнала смена динамического режима происходит четыре раза вне зависимости от величины параметра α . Действительно, при больших отстройках имеет место выход на стационарный режим, который с приближением к резонансной частоте сменяется режимом линейного роста. В окрестности же резонанса наблюдается режим экспоненциального роста. В случае малой интенсивности накачки данный режим не достигается из-за большой роли затухания в системе. В областях частот, значительно отстроенных от резонанса, реализуется стационарный режим.

Влияние фазы накачки Δ на динамику системы. Важным параметром, определяющим динамику системы и позволяющим управлять ею, является фаза накачки Δ . Проанализируем влияние этой фазы в резонансном случае. Для иллюстрации найденных особенностей системы были построены 2D-распределения $|\varphi(\Delta, \tau)|$ для режима экспоненциального роста (рис. 4а) и стационарного режима (рис. 4б).

Видно, что в каждом из рассматриваемых режимов существуют определенные значения фазы Δ , при которых реализуется локальный экстремум выходного сигнала $\varphi[\tau]$. Так, из рис. 4 видно, что для обоих режимов наибольшее значение функции $\varphi[\tau]$ наблюдается преимущественно при фазе $\Delta = \frac{\pi}{2}$, в то время как в окрестности фазы $\Delta = \frac{3\pi}{2}$ достигается минимум. Данный результат также хорошо согласуется с зависимостями $\varphi[\tau]$, представленными на рис. 2, для различных Δ .

Для более детального анализа влияния фазы накачки были построены 2D-распределения амплитуды экспоненциально возрастающего и ограниченного решения, представленные на рис. 5, в зависимости от параметра накачки ε и фазы накачки Δ при фиксированном значении коэффициента затухания α .

В случае отсутствия затухания в системе наблюдается только экспоненциальный рост решения из-за параметрического резонанса. При этом была обнаружена такая фаза накачки $\Delta_{\min}$, при которой реализуется минимум амплитуды выходного сигнала $\varphi(\tau)$. В случае малых амплитуд накачки она может быть найдена из следующего уравнения:

$$2 = \varepsilon \cos(\Delta_{\min}) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \sin(\Delta)} \right). \quad (9)$$

Анализ данного уравнения показал, что величина искомой $\Delta_{\min}$ оказывается близка к $\frac{3\pi}{2}$. Как следствие, выполнено соотношение $\frac{1}{1 + \sin(\Delta_{\min})} \gg \frac{1}{2}$, и уравнение (9) принимает вид:

$$2 = \varepsilon \cos(\Delta_{\min}) - 2 \sin(\Delta_{\min}). \quad (10)$$

Решение данного уравнения приводит к следующему выражению для фазы накачки, обеспечивающей минимальную амплитуду решения в режиме экспоненциального роста:

$$\Delta_{\min} = \arcsin \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4}} \right) - \arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4}} \right). \quad (11)$$

Для сравнения со случаем ненулевого параметра затухания, эта зависимость нанесена на 2D-распределение, см. рис. 5а.

При наличии затухания в системе в режиме экспоненциального роста $\alpha < \left(\frac{\omega_0 \varepsilon}{2} \right)$ зависимость $\Delta_{\min}(\varepsilon)$ ведет себя аналогично случаю отсутствия затухания (см. рис. 5а). Параметр затухания α следующим образом влияет на пороговые значения амплитуд накачки, обеспечивающие реализацию данного режима: с его ростом критическая фаза $\Delta = \frac{3\pi}{2}$ достигается при все больших амплитудах накачки.

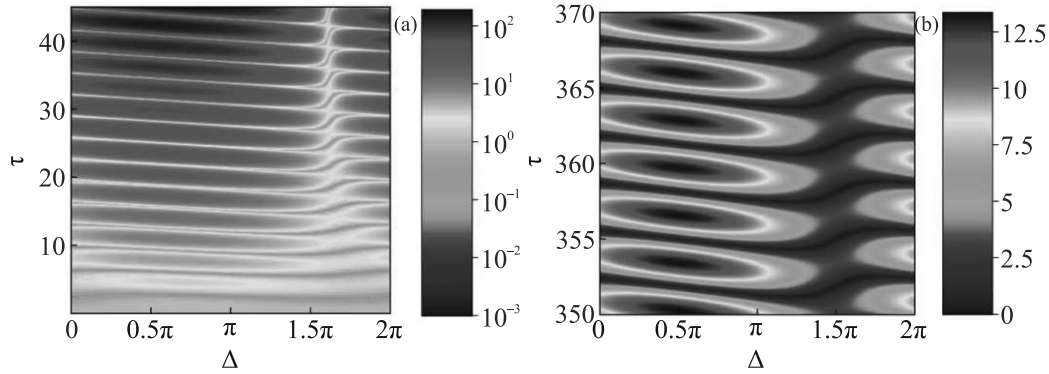


Рис. 4. (Цветной онлайн) 2D-распределение модуля зависимости $\varphi[\tau]$ от времени и фазы накачки Δ при фиксированных параметрах в случае: (a) – режима экспоненциального роста ($\alpha = 0.1$, $\varepsilon = 0.5$); (b) – стационарного режима ($\alpha = 0.2$, $\varepsilon = 0.25$). $i_S = 1$, $\omega_0 = 1$

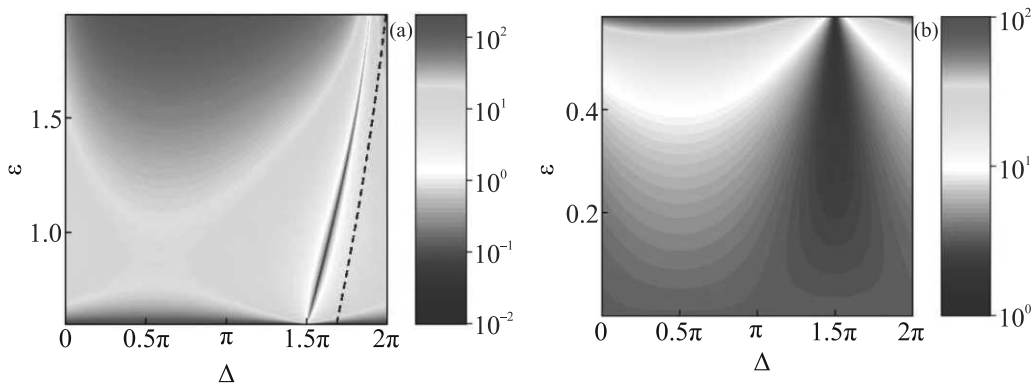


Рис. 5. (Цветной онлайн) 2D-распределение амплитуды решения (5), соответствующего: (a) – режиму экспоненциального роста и (b) – стационарному режиму в зависимости от амплитуды накачки ε и фазы накачки Δ при $\alpha = 0.3$ в момент времени $\tau = 13$

Для меньших же амплитуд накачки имеет место стационарный режим, которому соответствует ограничение решения по абсолютному значению, минимум которого, как видно из рис. 5b, достигается при $\Delta = \frac{3\pi}{2}$. Максимум амплитуды решения в этом случае реализуется при фазах в широкой окрестности $\frac{\pi}{2}$, поскольку спад амплитуды происходит очень плавно. Существование двух локальных экстремумов, реализующихся при $\Delta = \frac{\pi}{2}$ (максимум) и при $\Delta = \frac{3\pi}{2}$ (минимум), легко увидеть из уравнения:

$$-\frac{\varepsilon}{2} \sin(\Delta) \cos(\Delta) + \cos(\Delta) \left(\frac{\alpha}{\omega_0} + \frac{\varepsilon}{2} \sin(\Delta) \right) = 0. \quad (12)$$

Также было обнаружено, что в отличие от резонансного случая, условия минимума выходного сигнала существенно зависят как от величины ненулевой частотной отстройки, так и от ее знака. На рисунках 6 и 7 приведены 2D-распределения, аналогичные пред-

ставленным на рис. 5, но полученные для различных значений частоты входного сигнала.

Как видно, существенный сдвиг максимума и минимума амплитуды решения наблюдается при уменьшении входной частоты по сравнению с резонансным значением. Также претерпевает существенное изменение и зависимость этих условий от амплитуды накачки. В режиме экспоненциального роста зависимость $\Delta_{\min}(\varepsilon)$ берет свое начало не из точки $\Delta = \frac{3\pi}{2}$, а из точки, которая сдвигается либо в сторону π , либо 2π в зависимости от знака отстройки частоты, что хорошо видно на рис. 6 и 7. Таким образом, возникает возможность управлять выходным сигналом на практике за счет варьирования частотной отстройки. Дополнительный анализ показал, что увеличение затухания в системе до некоторой степени препятствует смещению начала зависимости $\Delta_{\min}(\varepsilon)$ с удалением частоты от резонанса.

При слабой накачке наступает стационарный режим (см. рис. 6b и 7b). Отметим, что в отличие от ре-

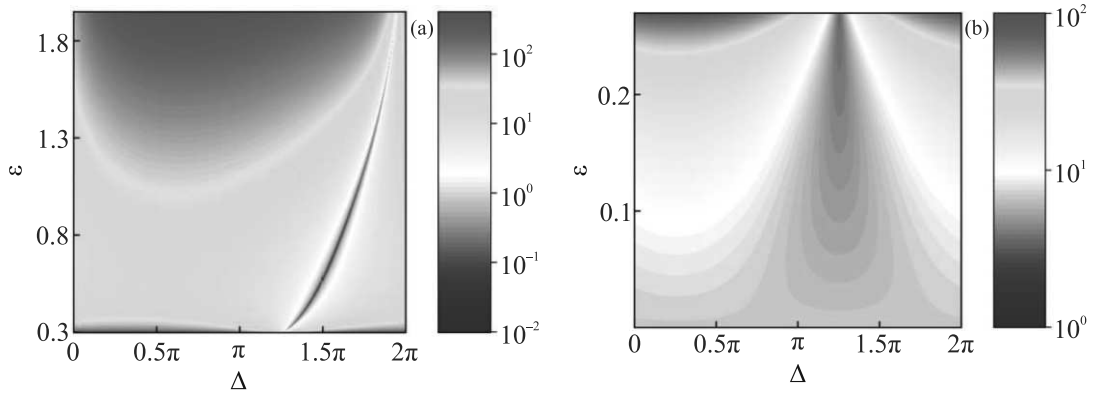


Рис. 6. (Цветной онлайн) 2D-распределение амплитуды решения (7), соответствующего: (а) – режиму экспоненциального роста и (б) – стационарному режиму в зависимости от амплитуды накачки ε и фазы накачки Δ при $\alpha = 0.1$ в момент времени $\tau = 13$ при $\alpha = 0.1$, $\Omega = 1.05$, $i_s = 1$, $\omega_0 = 1$

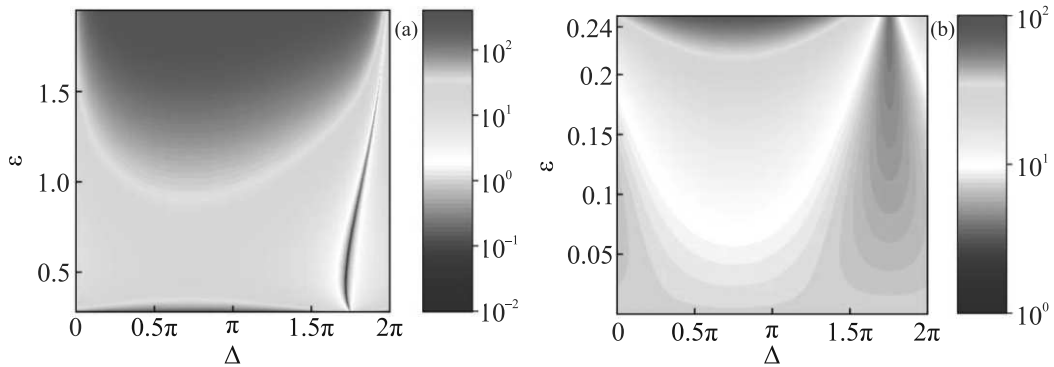


Рис. 7. (Цветной онлайн) 2D-распределение амплитуды решения (7), соответствующего: (а) – режиму экспоненциального роста и (б) – стационарному режиму в зависимости от амплитуды накачки ε и фазы накачки Δ в момент времени $\tau = 13$ при $\alpha = 0.1$, $\Omega = 0.95$, $i_s = 1$, $\omega_0 = 1$

зонансного случая, в случае ненулевой частотной отстройки пороговое значение амплитуды накачки ε_0 , отделяющее стационарный режим от режима экспоненциального роста, оказывается не равно нулю даже при отсутствии затухания в системе:

$$\varepsilon_0 = \frac{2\sqrt{\alpha^2\Omega^2 + \Omega^4 - 2\Omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4}}{\omega_0^2}. \quad (13)$$

В стационарном режиме положение фазы, характеризующей минимум или максимум выходного сигнала, уже перестает зависеть от амплитуды накачки (см. рис. 6b и 7b). Для этого случая было найдено аналитическое выражение для фазы $\Delta_{\max}$, при которой наблюдается максимум выходного сигнала:

$$\Delta_{\max} = \begin{cases} \pi - \arctan \left[\frac{\alpha\Omega}{1-\Omega^2} \right], & \Omega < 1, \\ -\arctan \left[\frac{\alpha\Omega}{1-\Omega^2} \right], & \Omega > 1. \end{cases} \quad (14)$$

Из формулы (14) видно, что величина фазы, приводящей к максимуму выходной амплитуды, суще-

ственно зависит от частоты входного сигнала и коэффициента затухания, но не определяется амплитудой накачки. В пределе резонансного случая $\Delta_{\max} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, в то время как при наличии значительной частотной отстройки $\Delta_{\max} \rightarrow \pi$ или 2π в случаях ее положительного или отрицательного значения, соответственно. При этом, чем ниже коэффициент затухания, тем резче при некоторой отстройке происходит переход от одного значения фазы к другому. Величина фазы, при которой реализуется минимум амплитуды выходящего сигнала, как и в резонансном случае, сдвинута на π относительно фазы максимума.

Обнаружение гистерезиса в системе, не обладающей параметрической накачкой. Учет нелинейности в системе первоначально проводился при отсутствии параметрической накачки. Было показано, что в условиях малых входных токов применимо и оказывается достаточным разложение нелинейного слагаемого $\sin \varphi$ в ряд Тейлора до третьего порядка включительно, причем для сохранения общ-

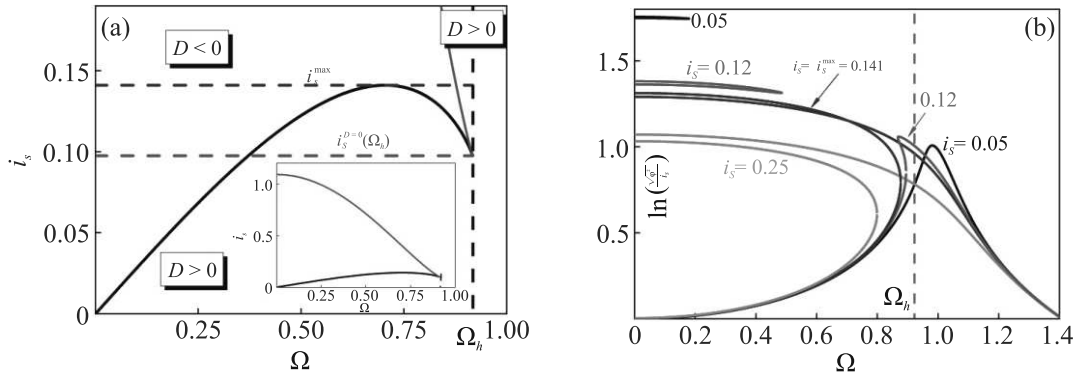


Рис. 8. (Цветной онлайн) (а) – Зависимость $i_{sD=0}(\Omega)$ при $\alpha = 0.1$, $\beta = \frac{1}{6}$ с обозначением $i_{sD=0}(\Omega_h) = 0.09758$, $i_{s\max} = 0.14118$; (б) – АЧХ при $\alpha = 0.1$, $\beta = \frac{1}{6}$ для различных значений амплитуды подаваемого сигнала.

ности коэффициент разложения для наивысшего порядка был обозначен как $(-\beta)$. В этом случае уравнение (3) принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + \varphi\omega_0^2 - \beta\varphi^3 = i_s \cos \Omega\tau. \quad (15)$$

Для нахождения аналитического решения использовалось представление $\varphi[\tau] = \frac{\tilde{\varphi}}{2}e^{i\Omega\tau} + \frac{\tilde{\varphi}^*}{2}e^{-i\Omega\tau}$, которое после подстановки в (17), приводит к следующему уравнению на квадрат модуля амплитуды $|\tilde{\varphi}|^2$:

$$|\tilde{\varphi}|^2 \alpha^2 \Omega^2 + \left(\omega_0^2 - \Omega^2 - \frac{3\beta}{4} |\tilde{\varphi}|^2 \right)^2 |\tilde{\varphi}|^2 = i_s^2. \quad (16)$$

Окончательно для искомой функции $\chi = |\tilde{\varphi}|^2$ получаем следующее кубическое уравнение:

$$\chi^3 - \frac{8}{3\beta}(1 - \Omega^2)\chi^2 + \frac{16}{9\beta^2}(\alpha^2\Omega^2 + (1 - \Omega^2)^2)\chi - \frac{16i_s^2}{9\beta^2} = 0. \quad (17)$$

Анализ решений позволяет выделить различные случаи. Если дискриминант кубического уравнения $D > 0$, то уравнение будет иметь один действительный корень, в то время как в случае отрицательного дискриминанта уравнение будет иметь три действительных решения, что соответствует случаю наличия гистерезиса в системе. Таким образом, зная зависимость дискриминанта уравнения (17) от таких параметров, как i_s , Ω , α , и β , можно легко определить, когда в системе возможно наблюдение гистерезиса. Для построения так называемой “карты” значений дискриминанта было найдено решение уравнения $D(i_s, \Omega, \alpha, \beta) = 0$, которое определяет связь входного сигнала i_s и частоты Ω и характеризуется двумя ветвями:

$$i_{sD=0,1,2} = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{\beta}} \times \sqrt{(1 - \Omega^2)(9\alpha^2\Omega^2 + (1 - \Omega^2)^2) \mp \tilde{\Omega}}, \quad (18)$$

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{(-3\alpha^2\Omega^2 + (1 - \Omega^2)^2)^3}.$$

Получим условие действительности значений функции $i_{sD=0}$ (20) в зависимости от частоты Ω , которое оказалось одинаковым для обеих ветвей:

$$\Omega \leq \Omega_h = \frac{\sqrt{3\alpha^2 + 2 - \sqrt{3}\alpha\sqrt{(3\alpha^2 + 4)}}}{\sqrt{2}}. \quad (19)$$

Неравенство (19) определяет диапазон частот, при которых подкоренное выражение внутреннего корня в формуле (18) неотрицательно. Таким образом, выделена область значений частоты подаваемого сигнала, при которых в принципе возможен гистерезис. На рисунке 8а построены обе ветви зависимости (18), разграничивающие области отрицательного и положительного значений дискриминанта (сплошная кривая) с учетом полученного частотного ограничения. Гистерезис возможен только при $D < 0$. Важно отметить, что вторая ветвь решения (18) накладывается более сильное ограничение по частоте сверху чем Ω_h для высоких амплитуд входного сигнала, все сильнее “загибаясь” в область малых частот, так что для сигналов, с амплитудой чуть выше единичной, гистерезис уже не наблюдается (см. вставку на рис. 8а).

Из рисунка 8а хорошо видно, что существуют три характерные области значений амплитуды тока, при которых гистерезис наблюдается либо на одном интервале из диапазона возможных частот, либо на двух частотных интервалах, либо же на всех областях частот, удовлетворяющих условию (19).

Так, при малых амплитудах $i_s < i_{sD=0}(\Omega_h)$ гистерезис образуется в области малых значений частот, причем с увеличением амплитуды тока i_s данный частотный диапазон становится шире, что хорошо подтверждается амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), представленной на рис. 8б для

$i_s = 0.05$. Видно, что каждому значению частоты из диапазона $\Omega \in [0; 0.17971)$ соответствуют три точки на АЧХ. Однако соответствующие ветви решений на рис. 8b оказываются очень близко друг к другу.

В случае, когда $i_{sD=0}(\Omega_h) < i_s < i_{s\max}$, гистерезис образуется в области как малых частот, так и близких к граничной Ω_h . Однако, вторая ветвь уравнения (18) приводит к дополнительному более сильному ограничению входного сигнала по частоте. В этом случае обнаружен интересный эффект вырезания частотного интервала, для которого характерно отсутствие гистерезиса. При этом, чем выше значение амплитуды тока, тем вырезанный интервал меньше. Более того, при $i_s = i_{s\max}$ такого вырезанного интервала вовсе нет. Данный случай весьма интересен, так как значение амплитуды тока $i_{s\max}$ является пороговым: для всех значений $i_s > i_{s\max}$ гистерезис наблюдается на всей области возможных частот подаваемого сигнала, допустимых для гистерезиса. В этом режиме ветви решений, представленных на рис. 8b, уже существенно расходятся, и гистерезис заметно проявляется. Для больших значений частоты $D > 0$, и гистерезис уже не имеет места. Примечательно, что именно при $i_s = i_{s\max}$ кривая АЧХ, не имеющая разрывов, имеет максимальную высоту. Аналитическая формула для определения $i_{s\max}$ была найдена в результате приравнивания производной выражения (20) по Ω к нулю:

$$i_{s\max} = \frac{\sqrt{-621\alpha^6 + 108\alpha^4 + 1296\alpha^2 + 64} - \sqrt{(9\alpha^2 - 4)^6}}{72\sqrt{\beta}}. \quad (20)$$

Обсудим влияние затухания на обнаруженные эффекты. Оказалось, что увеличение затухания в системе существенно укорачивает диапазон допустимых частот и сильно поднимает критическое значение тока $i_{s\max}$, при этом режим с наличием “вырезанного” частотного интервала наблюдается в очень узком диапазоне амплитуд входного тока. В результате, для слабых входных сигналов гистерезис может иметь место только на малых частотах, но очень слабо проявляется. Для высоких значений амплитуды входных сигналов возникает сильное ограничение по частоте сверху. Фактически, область параметров, обеспечивающих заметное проявление эффекта гистерезиса, существенно уменьшается.

Таким образом, удалось показать, что в системе с кубической нелинейностью, не обладающей параметрической накачкой, возникает гистерезис на АЧХ. Показано, что его возникновение, а также связанные

с ним эффекты сильно зависят от исходных параметров системы; были получены диапазоны параметров реализации гистерезиса в зависимости от частоты подаваемого сигнала и его амплитуды.

Отметим также, что одновременное воздействие и нелинейности, и параметрической накачки в системе может приводить к очень сильному усилению и “раскачке” выходного сигнала. Этот режим лежит за рамками рассмотрения данной статьи. Однако при достаточно слабой накачке наличие затухания в системе будет приводить к ограничению выходного тока по амплитуде, и будет иметь место режим с гистерезисом, аналогичный описанному выше, но характеризующийся другими значениями параметров.

Закключение. В данной работе было найдено аналитическое решение, описывающее динамические процессы в наноразмерном сверхпроводящем интерферометре, включенном в высокочастотный резонатор. Детально проанализировано влияние кубической нелинейности в системе, а также воздействие внешней параметрической накачки. Найдены диапазоны параметров для реализации стационарного режима, а также режимов экспоненциального и линейного роста. Продемонстрировано существенное влияние фазы накачки на динамику системы. Выявлены фазовые соотношения, обеспечивающие максимальное усиление или подавление сигнала на выходе. Показана возможность управления выходящим сигналом за счет варьирования частотной отстройки, что крайне важно для проектирования элементов микроволновых квантовых систем. Обнаружен гистерезис на амплитудно-частотных характеристиках и выявлены диапазоны параметров, обеспечивающих его реализацию.

Авторы признательны Сергею Лисицыну за помощь в изготовлении образцов и Игорю Соловьеву за плодотворные обсуждения.

Финансирование работы. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект # 22-79-10018); И. Т. благодарит фонд “Базис” (грант # 23-2-1-33-1).

Конфликт интересов. Н. В. Кленов заявляет об участии в проекте НИТУ “МИСиС”, “Приоритет-2030”; авторы заявляют об отсутствии других конфликтов интересов; все источники компенсации затрат приведены в предыдущем разделе.

1. V. A. Vozhakov, M. V. Bastrakova, N. V. Klenov, I. I. Soloviev, W. V. Pogozov, D. V. Babukhin, A. A. Zhukov, and A. M. Satanin, *Phys.-Uspekhi* **65**, 421 (2022).

2. M. V. Bastrakova, N. V. Klenov, V. I. Ruzhickiy, I. I. Soloviev, and A. M. Satanin, *Supercond. Sci. Technol.* **35**(5), 055003 (2022).
3. D. V. Popolitova, N. V. Klenov, I. I. Soloviev, S. V. Bakurskiy, and O. V. Tikhonova, *Beilstein J. Nanotechnol.* **10**(1), 1548 (2019).
4. C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori, and P. Delsing, *Nature* **479**(7373), 376 (2011).
5. R. Assouly, R. Dassonneville, T. Peronnin, A. Bienfait, and B. Huard, *Nature Phys.* **19**, 1418 (2023).
6. A. Bilmes, S. Zanker, A. Heimes, M. Marthaler, G. Schon, G. Weiss, A. V. Ustinov, and J. Lisenfeld, *Phys. Rev. B* **96**(6), 064504 (2017).
7. I. I. Soloviev, N. V. Klenov, A. E. Schegolev, S. V. Bakurskiy, and M. Yu. Kupriyanov, *Supercond. Sci. Technol.* **29**(9), 094005 (2016).
8. V. E. Manucharyan, E. Boaknin, M. Metcalfe, R. Vijay, I. Siddiqi, and M. Devoret, *Phys. Rev. B* **76**, 014524 (2007).
9. P. Bunyk, K. Likharev, and D. Zinoviev, *Int. J. High Speed Electron. Syst.* **11**(01), 257 (2001).
10. M. M. Khapaev, A. Y. Kidiyarova-Shevchenko, P. Magnelind, and M. Y. Kupriyanov, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **11**(1), 1090 (2001).
11. M. M. Khapaev, M. Y. Kupriyanov, E. Goldobin, and M. Siegel, *Supercond. Sci. Technol.* **16**(1), 24 (2002).
12. U. C. Mendes, S. Jezouin, P. Joyez, B. Reulet, A. Blais, F. Portier, C. Mora, and C. Altimiras, *Phys. Rev. Applied* **11**, 034035 (2019).
13. D. S. Yakovlev, I. A. Nazhestkin, N. G. Ismailov, S. V. Egorov, V. N. Antonov, and V. L. Gurtovoi, *Symmetry* **15**(2), 550 (2023).
14. V. Bosboom, J. J. W. van der Vegt, M. Yu. Kupriyanov, and A. A. Golubov, *Supercond. Sci. Technol.* **34**(11), 115022 (2021).
15. V. Ruzhickiy, S. Bakurskiy, M. Kupriyanov, N. Klenov, I. Soloviev, V. Stolyarov, and A. Golubov, *Nanomaterials* **13**, 1873 (2023).
16. K. M. Sundqvist, S. Kintas, M. Simoen, P. Krantz, M. Sandberg, C. M. Wilson, and P. Delsing, *Appl. Phys. Lett.* **103**, 102603 (2013).
17. P. Krantz, Y. Reshitnyk, W. Wustmann, J. Bylander, S. Gustavsson, W. D. Oliver, T. Duty, V. Shumeiko, and P. Delsing, *New J. Phys.* **15**(10), 105002 (2014).
18. T. Yamamoto, K. Inomata, M. Watanabe, K. Matsuba, T. Miyazaki, W. D. Oliver, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 042510 (2008).
19. D. J. Parker, M. Savytskyi, W. Vine, A. Laucht, T. Duty, A. Morello, A. L. Grimsmo, and J. J. Pla, *Phys. Rev. Applied* **17**, 034064 (2022).