

Влияние квантовой расфазировки на ток через квантовый точечный контакт в периодически меняющемся внешнем поле¹⁾

И. Ермаков^{†*}, О. Лычковский^{×+2)}

[†]Отдел математических методов квантовых технологий,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 119991 Москва, Россия

^{*}Российский квантовый центр, 121205 Москва, Россия

[×]Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 октября 2023 г.

После переработки 14 ноября 2023 г.

Принята к публикации 15 ноября 2023 г.

Рассматриваются две одномерные квантовые XX -цепочки, соединенные квантовым точечным контактом с осциллирующими параметрами. Если цепочки изначально поляризованы в противоположных направлениях, можно ожидать установления спинного тока через квантовый точечный контакт. Недавно было показано [Phys. Rev. B **103**, L041405 (2021)], что на самом деле, когда частота осцилляций превышает критическое значение, ток полностью прекращается, и квантовый точечный контакт фактически становится изолятором. В настоящей работе исследуется влияние квантовой расфазировки на этот эффект. Показано, что любое ненулевое значение расфазировки приводит к появлению тока.

DOI: 10.31857/S1234567824010087, EDN: saihcb

Введение. Транспорт через квантовый точечный контакт (КТК) с осциллирующими параметрами традиционно привлекает значительное внимание. Возможность управления макроскопическим квантовым состоянием электронного газа с помощью внешнего зависящего от времени воздействия привлекательна как с точки зрения практических приложений [1, 2], так и в силу теоретической значимости [3–9].

Преыдушие исследования одного из авторов [10] выявили неравновесный фазовый переход [11, 12] в замкнутой системе, состоящей из двух цепочек свободных фермионов, разделенных осциллирующим КТК. В частности, было обнаружено, что когда частота осцилляций, ω , превышает критическое значение ω_c , равное ширине зоны для цепочки, ток падает до нуля, т.е. КТК становится изолятором³⁾. Напро-

тив, когда частота меньше этого критического значения, $\omega < \omega_c$, КТК становится проводником и устанавливается ненулевой ток между цепочками⁴⁾.

В настоящей работе мы исследуем, как слабое взаимодействие с окружающей средой изменяет эту картину. В частности, мы рассматриваем эффект марковской расфазировки, который может быть описан с помощью уравнения Горини-Коссаковский-Сударшана-Линдблада (ГКСЛ). Мы демонстрируем, что расфазировки любой конечной величины достаточно для того, чтобы сделать КТК проводящим даже при частоте, выше критической. Таким образом, расфазировка приводит к исчезновению фазового перехода.

Известно, что, в силу преобразования Йордана-Вигнера одномерная свободно-фермионная цепочка с перескоком между ближайшими соседями унитарно эквивалентна одномерной XX -модели спинов 1/2 [15]. В данной статье мы работаем со спинами. Вместо двух фермионных цепочек мы рассматриваем две спиновых XX -цепочки. Изначально они поляризованы в противоположных направлениях. Ток частиц на фермионном языке соответствует спиново-

¹⁾См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

²⁾e-mail: o.lychkovskiy@skoltech.ru

³⁾Из общих соображений можно ожидать замедления динамических процессов для частот, превышающих ширину зоны. Для локально взаимодействующих систем многих тел можно доказать строгое ограничение, экспоненциально малое по частоте [13]. В работе [10] был получен более сильный результат: для некоторых (но не для всех) КТК усредненный за цикл ток строго равен нулю (а не просто мал) в неравновесном установившемся состоянии для произвольной частоты выше критической.

⁴⁾Похожий фазовый переход для переменного тока был обнаружен в [14].

му току на языке спинов. Этот ток стремится выравнивать разницу поляризацій.

Спиновая (кубитная) картина особенно удобна в контексте квантовых вычислений. Недавние достижения в области небольших квантовых устройств с шумами [16, 17], таких как сверхпроводящие процессоры и решетки холодных атомов, уже позволяют проводить экспериментальные исследования в области квантовой многочастичной физики. Было бы интересно реализовать предложенный в [10] КТК на одном из существующих устройств такого типа. Известно, что динамика XX -модели может быть воспроизведена с помощью определенного узкого набора двухкубитных квантовых вентилях [18–20], что дополнительно упрощает ее реализацию на квантовом процессоре.

Типичным шумом в квантовом процессоре является расфазировка. Поэтому естественно задаться вопросом, какое влияние расфазировка будет оказывать на явление, обнаруженное в [10]. Это является дополнительной мотивацией нашего исследования.

Наш подход к задаче основан на решении ГКСЛ в представлении Гейзенберга. Известно, что для XX -модели с расфазировкой пространство операторов фрагментировано на динамически не связанные между собой подпространства разной размерности [21–24]. Это сильно упрощает задачу и позволяет нам численно исследовать достаточно большие системы, что, в свою очередь, дает возможность построить надежную физическую картину.

Модель. Марковская диссипативная динамика может быть описана уравнением ГКСЛ в представлении Гейзенберга [25],

$$\partial_t O_t = i[H, O_t] + \mathcal{D}^\dagger O_t, \quad (1)$$

с начальными условиями $O_{t=0} = O$. Здесь O_t и O являются, соответственно, представлениями Гейзенберга и Шредингера наблюдаемой O , H – гамильтониан, а $\mathcal{D}^\dagger$ – сопряженный супероператор диссипации (диссипатор), который имеет вид

$$\mathcal{D}^\dagger O_t \equiv \gamma \sum_j \left(l_j^\dagger O_t l_j - \frac{1}{2} \{ l_j^\dagger l_j, O_t \} \right), \quad (2)$$

где l_j – операторы Линдблада, γ – вещественная положительная константа, а $\{\cdot, \cdot\}$ обозначает антикоммутатор. Если известен оператор Гейзенберга O_t наблюдаемой, то эволюция во времени ее среднего значения задается выражением $\langle O \rangle_t = \text{tr } O_t \rho_0$, где ρ_0 – начальное состояние системы.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид (ср. [10]):

$$H = H_L + H_R + V_t, \quad (3)$$

где H_L и H_R описывают две XX -цепочки, а V_t описывает осциллирующий КТК, который соединяет эти две цепочки. Явный вид этих трех вкладов в гамильтониан таков:

$$H_L = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{L-1} (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y),$$

$$H_R = \frac{1}{4} \sum_{j=L}^{2L-1} (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y), \quad (4)$$

$$V_t = \frac{\sin(\omega t)}{4} (\sigma_L^x \sigma_{L+1}^x + \sigma_L^y \sigma_{L+1}^y), \quad (5)$$

где σ_j^α , $\alpha = x, y, z$ являются матрицами Паули на j -м сайте, L обозначает количество спинов в каждой цепочке, а ω – частоту возбуждения. Подчеркнем, что V_t – единственный член гамильтониана, который зависит от времени. V_t обращается в ноль при $\omega = 0$; в этом пределе цепочки не связаны друг с другом.

Операторы Линдблада l_j имеют вид

$$l_j = \sigma_j^z, \quad j = 1, 2, \dots, 2L. \quad (6)$$

Известно, что такие операторы Линдблада вызывают расфазировку, то есть затухание недиагональных элементов матрицы плотности в базисе, собственном для σ_j^z .

Изначально система приготавливается в чистом состоянии $\rho_0 = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$, где

$$|\Psi_0\rangle = |0_1 \dots 0_L\rangle \otimes |1_{L+1} \dots 1_{2L}\rangle \quad (7)$$

и $|0_j\rangle$, $|1_j\rangle$ являются собственными векторами σ_j^z , такими, что $\sigma_j^z |0_j\rangle = -|0_j\rangle$, $\sigma_j^z |1_j\rangle = |1_j\rangle$.

Начальное условие (7) означает, что левая и правая цепочки полностью поляризованы в противоположных направлениях, см. рис. 1. Заметим, что при $\omega = 0$, т.е. когда цепочки не взаимодействуют, это состояние является собственным состоянием гамильтониана (3). Более того, соответствующая матрица плотности ρ_0 является стационарным состоянием уравнения ГКСЛ (1). Проще говоря, в отсутствие КТК профиль намагниченности (7), остается неизменным со временем, независимо от наличия или отсутствия расфазировки.

Решение системы уравнений ГКСЛ. В общем случае численное решение уравнения ГКСЛ (1) требует экспоненциального количества ресурсов. Это связано с тем, что размерность пространства операторов для $2L$ кубитов растет как 4^{2L} . Однако для некоторых диссипативных систем пространство операторов разбивается на динамически не связанные

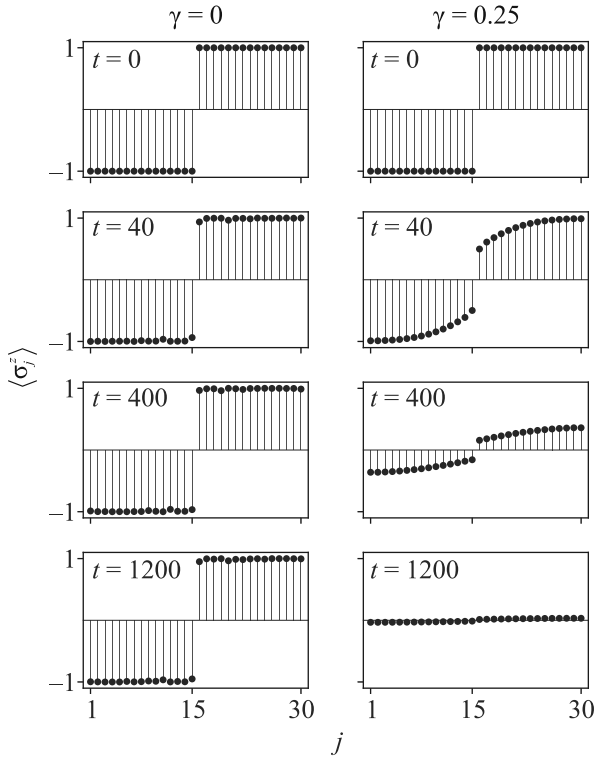


Рис. 1. (Цветной онлайн) Эволюция профиля поляризации двух спиновых XX -цепочек, соединенных КТК и инициализированных в состоянии (7), в отсутствие (левая колонка) и при наличии (правая колонка) расфазировки. Общее число спинов составляет $2L = 30$, частота возбуждения $\omega = 2.5$. Можно видеть, что в отсутствие расфазировки КТК является изолятором, в то время как при наличии расфазировки КТК проводит спиновый ток

секторы, размерность некоторых из которых является полиномиальной по количеству кубитов [21, 26–32]. Рассматриваемая система относится к этому типу [21–24]. В частности, подпространство, содержащее интересующие нас наблюдаемые, а именно, z -проекции спинов, σ_j^z , имеет размерность, пропорциональную L^2 . Ниже мы явно построим это подпространство.

Сначала рассмотрим модель без диссипации, $\gamma = 0$. В этом случае система является замкнутой и уравнение (1) – это уравнение Гейзенберга. Введем следующие операторы, известные как строки Онсагера (см. [24, 33–35]):

$$\begin{aligned} A_j^0 &= -\sigma_j^z, \\ A_j^n &= \sigma_j^x \left(\prod_{m=1}^{n-1} \sigma_{j+m}^z \right) \sigma_{j+n}^x, \\ A_j^{-n} &= \sigma_j^y \left(\prod_{m=1}^{n-1} \sigma_{j+m}^z \right) \sigma_{j+n}^y, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} B_j^n &= \frac{i}{2} \sigma_j^x \left(\prod_{m=1}^{n-1} \sigma_{j+m}^z \right) \sigma_{j+n}^y, \\ B_j^{-n} &= -\frac{i}{2} \sigma_j^y \left(\prod_{m=1}^{n-1} \sigma_{j+m}^z \right) \sigma_{j+n}^x, \quad 1 \leq n \leq 2L-1. \end{aligned}$$

Здесь $n+1$ – это “размер” строки Онсагера, то есть количество матриц Паули, которые она содержит. Этот размер варьируется от одного (для A_j^0) до $2L$ (для $A_1^{\pm(2L-1)}$, $B_1^{\pm(2L-1)}$). Индекс j должен быть согласован с n . А именно, для заданного n допустимы значения $j = 1, 2, \dots, 2L - n$. Из этого легко получить, что всего существует $D = 2L(4L-1)$ строк Онсагера.

Легко видеть, что подпространство операторов $\mathcal{P}$, натянутое на D строк Онсагера, является замкнутым относительно коммутации с гамильтонианом (3) [33, 34, 35] (это показано явно в дополнительных материалах). Таким образом, это подпространство отфакторизовывается от остального пространства операторов при эволюции, заданной уравнением Гейзенберга.

Теперь перейдем к случаю с диссипацией, $\gamma > 0$. Легко проверить, что подпространство $\mathcal{P}$ инвариантно относительно диссипативного супероператора с операторами Линдблада (6) [21–24]. Это следует из равенств $\mathcal{D}\sigma_j^{x,y} = -2\sigma_j^{x,y}$ и $\mathcal{D}\sigma_j^z = 0$ (см. дополнительные материалы).

В результате система уравнений ГКСЛ (содержащая D уравнений) полностью определяет динамику внутри подпространства $\mathcal{P}$. Поскольку D квадратично зависит от L , эти уравнения можно эффективно решить для относительно больших размеров системы. На обычном ноутбуке оказывается возможным провести вычисления и получить профиль поляризации в зависимости от времени для систем, состоящих из нескольких десятков кубитов. Результаты вычислений представлены в следующем разделе.

Представляется уместным дать краткий обзор исследуемой модели в фермионной картине. Преобразование Йордана–Вигнера [15], отображает гамильтониан (3) в гамильтониан двух цепочек невзаимодействующих фермионов, соединенных КТК с осциллирующей амплитудой туннелирования [10]. Спиновый оператор σ_j^z отображается на $2n_j - 1$, где n_j – это оператор числа фермионов на j -м сайте, сохранение z -проекции полной поляризации соответствует сохранению числа частиц, спиновый ток отображается на ток частиц, а начальное состояние (7) соответствует пустой левой цепи и полностью заполненной фермионами правой цепи. Строки Онсагера (8) квадратичны по операторам создания и уни-

чтожения фермионов и составляют базис в подпространстве всех квадратичных операторов.

Последнее обстоятельство дает простое объяснение инвариантности пространства строк Онсагера относительно полностью когерентной динамики, генерируемой гамильтонианом (3) (который также квадратичен в фермионной картине).

Причина инвариантности при наличии диссипации более тонкая. Диссипативный супероператор с операторами Линдблада (6) не является квадратичным, а имеет четвертый порядок [21, 27, 28]. Можно было бы возразить, что эти операторы Линдблада эквивалентны стохастическим локальным магнитным полям (в спиновой картине) или химическим потенциалам (в фермионной картине), см., например, [36], что возвращает нас к квадратичному гамильтониану, хотя и со стохастическими членами. Этот аргумент, однако, специфичен для конкретных операторов Линдблада (6). На самом деле, упомянутая инвариантность возникает для широких классов операторов Линдблада, которые, в общем случае, не эквивалентны квадратичным стохастическим гамильтонианам или квадратичным операторам Линдблада [24]. Например, подпространство $\mathcal{P}$ инвариантно и для операторов Линдблада вида $l_j = \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$, $j = 1, \dots, 2L - 1$, которые соответствуют членам четвертого порядка в соответствующем стохастическом гамильтониане. Мы повторили наши расчеты для этих операторов Линдблада, см. дополнительные материалы. Качественная картина не отличается от картины для операторов Линдблада (6).

Результаты. В работе [10] было показано, что в отсутствие диссипации КТК становится изолятором при частотах, превышающих $\omega_c = 2$. Мы проверили этот факт с использованием нашего подхода. Для этого мы провели численные моделирования профиля поляризации для $\gamma = 0$ и $\omega = 2.5$. Результаты представлены на левом графике рис. 1. Можно видеть, что, за исключением небольшой начальной “утечки” поляризации, происходящей в течение первых нескольких циклов (это переходный эффект, также наблюдавшийся в [10]), начальный профиль поляризации действительно сохраняется.

Чтобы подтвердить, что временной интервал, охваченный нашими расчетами, достаточен для установления квазистационарного состояния, мы вычисляем следующую величину:

$$\Delta^R(t) = L - \sum_{j=L+1}^{2L} \langle \sigma_j^z \rangle(t). \quad (9)$$

Эта величина представляет из себя отклонение полной поляризации правой цепочки от начальной поля-

ризации. Если КТК проводит спиновый ток, то поляризация всех спинов в стационарном состоянии будет равна нулю. Как следствие, $\Delta^R(t) \rightarrow L$ при $t \rightarrow \infty$. Если же КТК является изолятором, $\Delta^R(t)$ не должна расти с размером системы. Вместо этого, данная величина должна быстро приблизиться к некоторому конечному в пределе $L \rightarrow \infty$ и, как правило, небольшому значению. Такое поведение является проявлением начальной утечки поляризации⁵⁾.

На рисунке 2 показано, что в случае отсутствия расфазировки $\Delta^R(t)$ остается ниже единицы в те-

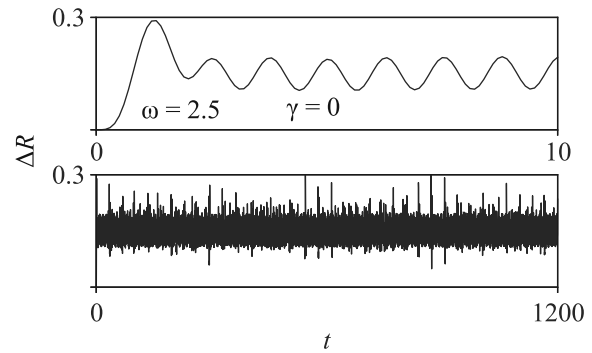


Рис. 2. (Цветной онлайн) Отклонение полной поляризации правой цепочки от начальной поляризации в отсутствие расфазировки. Верхний график охватывает первые несколько циклов колебаний, нижний – весь временной интервал, представленный на рис. 1. Можно видеть, что отклонение остается малым в течение всего исследуемого временного интервала и не стремится к $L = 15$. Это означает, что КТК является изолятором, что согласуется с результатами работы [10]

чение всего рассматриваемого времени и не демонстрирует никакой тенденции к приближению к L . Среднее по времени значение $\Delta^R(t)$ составляет $\langle \Delta^R \rangle_{\text{mean}}^{2L=30} = 0.150$, среднеквадратическое отклонение – $\langle \Delta^R \rangle_{\text{rms}}^{2L=30} = 0.155$. Мы также проверили, что среднее значение не растет с размером системы, в частности, $\langle \Delta^R \rangle_{\text{mean}}^{2L=20} = 0.151$ и $\langle \Delta^R \rangle_{\text{mean}}^{2L=10} = 0.156$ ($\langle \Delta^R \rangle_{\text{rms}}^{2L=20} = 0.150$, $\langle \Delta^R \rangle_{\text{rms}}^{2L=10} = 0.160$). Таким образом, мы приходим к выводу, что КТК действительно является изолятором в отсутствие расфазировки.

Следующим шагом мы провели расчеты для ненулевого значения расфазировки γ . Мы обнаружили, что в этом случае КТК всегда проводит ток,

⁵⁾ Ненулевое значение этой утечки является проявлением того факта, что поляризация каждой из цепочек по-отдельности не является интегралом движения (как это было бы в случае не взаимодействующих друг с другом цепочек), и начальное состояние (7) не является стационарным состоянием. Утечка сопровождается релаксацией начального состояния к неравновесному стационарному состоянию.

как показано в правой колонке рис. 1. В этом случае поляризация со временем выравнивается, и обе цепочки в конечном итоге становятся полностью деполаризованными. Заметим, что расфазировка имеет свойство способствовать превращению изолятора в проводник и в других случаях, в частности, при локализации (см., например, [37–39]).

Интересно, что ток как функция диссипативной константы γ является немонотонным. Например, скорость роста Δ^R для $\gamma = 2.5$ меньше, чем для $\gamma = 0.25$, как показано на рис. 3. Это поведение яв-

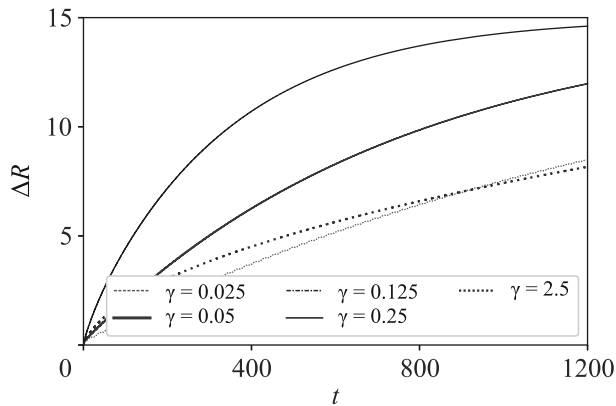


Рис. 3. (Цветной онлайн) Отклонение полной поляризации правой цепочки от начальной поляризации для различных значений расфазировки γ . Общее число спинов составляет $2L = 30$, частота возбуждения $\omega = 2.5$

ляется проявлением диссипативного квантового эффекта Зенона [40, 41]. Этот эффект заключается в том, что сильная диссипация приводит к “заморозке” динамики. Таким образом, мы приходим к выводу, что начальное состояние (7) стабильно в двух противоположных пределах, $\gamma = 0$ и $\gamma \rightarrow \infty$.

Заключение. Мы исследовали неравновесную физику двух диссипативных спиновых XX-цепочек, соединенных осциллирующим квантовым контактом. Ранее было показано, что в отсутствие диссипации контакт не проводит спиновый ток при частотах осцилляций выше критической [10]. Мы показали, что этот эффект неустойчив относительно квантовой расфазировки – контакт неизбежно начинает проводить ток при любом ненулевом значении расфазировки.

Финансирование работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российской Федерации в лице Минобрнауки России (соглашение #075-15-2020-788).

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

1. C. W. J. Beenakker, P. Baireuther, Y. Herasymenko, I. Adagideli, L. Wang, and A. R. Akhmerov, Phys. Rev. Lett. **122**(14), 146803 (2019).
2. Ch. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **80**(3), 1083 (2008).
3. L. P. Kouwenhoven, A. T. Johnson, N. C. van der Vaart, C. J. P. M. Harmans, and C. T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **67**(12), 1626 (1991).
4. Sh. Nakajima, T. Tomita, Sh. Taie, T. Ichinose, H. Ozawa, L. Wang, M. Troyer, and Y. Takahashi, Nature Phys. **12**(4), 296 (2016).
5. M. Lohse, Ch. Schweizer, O. Zilberberg, M. Aidelsburger, and I. Bloch, Nature Phys. **12**(4), 350 (2016).
6. L. S. Levitov, H. Lee, and G. B. Lesovik, **37**(10), 4845 (1996).
7. D. A. Ivanov, H. W. Lee, and L. S. Levitov, Phys. Rev. B **56**(11), 6839 (1997).
8. J. Keeling, I. Klich, and L. S. Levitov, Phys. Rev. Lett. **97**(11), 116403 (2006).
9. J. Dubois, T. Jullien, F. Portier, P. Roche, A. Cavanna, Y. Jin, W. Wegscheider, P. Roulleau, and D. C. Glatelli, Nature **502**(7473), 659 (2013).
10. O. Gamayun, A. Slobodeniuk, J.-S. Caux, and O. Lychkovskiy, Phys. Rev. B **103**(4), L041405 (2021).
11. J. Marro and R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2005).
12. T. Prosen and E. Ilievski, Phys. Rev. Lett. **107**(6), 060403 (2011).
13. D. A. Abanin, W. De Roeck, and F. Huveneers, Phys. Rev. Lett. **115**, 256803 (2015); DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.256803; URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.256803>.
14. M. Žnidarič, B. Žunkovič, and T. Prosen, Phys. Rev. E **84**, 051115 (2011); DOI: 10.1103/PhysRevE.84.051115; URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.051115>.
15. E. Lieb, Th. Schultz, and D. Mattis, Ann. Physics **16**(3), 407 (1961); ISSN: 0003-4916; DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(61\)90115-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(61)90115-4); URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491661901154>.
16. X. Mi, M. Sonner, M. Y. Niu et al. (Collaboration), Science **378**(6621), 785 (2022).
17. Q. Zhu, Zh.-H. Sun, M. Gong et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. **128**(16), 160502 (2022).
18. L. G. Valiant, *Quantum computers that can be simulated classically in polynomial time*, in *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing* (2001), p. 114; <https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/380752.380785>.

19. B. M. Terhal and D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. A* **65**(3), 032325 (2002).
20. R. Jozsa and A. Miyake, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **464**(2100), 3089(2008).
21. M. Žnidarič, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* **2010**(05), L05002 (2010).
22. N. Shibata and H. Katsura, *Phys. Rev. B* **99**, 174303 (2019); DOI: 10.1103/PhysRevB.99.174303; URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.174303>.
23. X. Turkeshi and M. Schiró, *Phys. Rev. B* **104**(14), 144301 (2021).
24. A. Teretenkov and O. Lychkovskiy, *arXiv preprint arXiv:2304.03155* (2023).
25. H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*, Oxford University Press, N.Y. (2002).
26. T. Prosen, *New J. Phys.* **10**(4), 043026 (2008).
27. V. Eisler, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* **2011**(06), P06007 (2011).
28. K. Temme, M. M. Wolf, and F. Verstraete, *New J. Phys.* **14**(7), 075004 (2012).
29. B. Žunkovič, *New J. Phys.* **16**(1), 013042 (2014).
30. F. H. L. Essler and L. Piroli, *Phys. Rev. E* **102**, 062210 (2020); DOI: 10.1103/PhysRevE.102.062210; URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.062210>.
31. L. R. Bakker, V. I. Yashin, D. V. Kurlov, A. K. Fedorov, and V. Gritsev, *Physical Review A* **102**(5), 052220 (2020).
32. T. Linowski, A. Teretenkov, and L. Rudnicki, *Phys. Rev. A* **106**(5), 052206 (2022).
33. D. K. Jha and J. G. Valatin, *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General* **6**(11), 1679 (1973).
34. T. Prosen, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **31**(21), L397 (1998).
35. O. Lychkovskiy, *SciPost Physics* **10**(6), 124 (2021).
36. A. Kiely, *Europhysics Letters* **134**(1), 10001 (2021); DOI: 10.1209/0295-5075/134/10001; URL: <https://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/134/10001>.
37. S. A. Gurvitz, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 812 (2000); DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.812; URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.812>.
38. M. B. Plenio and S. F. Huelga, *New J. Phys.* **10**(11), 113019 (2008); DOI: 10.1088/1367-2630/10/11/113019; URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/10/11/113019>.
39. M. Žnidarič and M. Horvat, *Eur. Phys. J. B* **86**, 1 (2013).
40. B. Misra and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **18**(4), 756 (1977).
41. C. Presilla, R. Onofrio, and U. Tambini, *Ann. Physics* **248**(1), 95 (1996).