

Наклон и анизотропия дираковского спектра, вызванные перекрытием блоховских функций

З. З. Алисултанов^{+*1)}, Н. А. Демиров[×]

*Московский физико-технический институт (МФТИ), Международный центр теоретической физики им. А. А. Абрикосова, 141701 Долгопрудный, Россия

×Институт физики, Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, 367015 Махачкала, Россия

×Объединенный институт высоких температур РАН (ОИВТРАН), 125412 Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 апреля 2023 г.

После переработки 14 апреля 2023 г.

Принята к публикации 14 апреля 2023 г.

Показано, что в системах с дираковскими точками, возникающими при пересечении зон, принадлежащих эквивалентным представлениям группы симметрии возможно перекрытие этих зон. Такое перекрытие приводит к наклону и дополнительной анизотропии дираковского спектра, а также перенормировке скорости. В то же время, учет перекрытия не нарушает общих условий существования устойчивой точки пересечения зон. Эффективный дираковский гамильтониан при наличии перекрытия зон является псевдоэрмитовым и соответствует эффективному действию безмассового спинорного поля в искривленном пространстве-времени.

DOI: 10.31857/S1234567823100105, EDN: cnsjbg

Дираковские и вейлевские полуметаллы находятся в центре внимания многих исследователей из-за их уникальных свойств, таких как киральная аномалия, отрицательное магнитосопротивление, фермиарочные поверхностные состояния и т.д. [1]. В этих материалах реализуются так называемые безмассовые моды, подчиняющиеся уравнениям Дирака и Вейля [2, 3]. Трехмерные дираковские полуметаллы интересны с фундаментальной точки зрения тем, что они представляют собой удобную платформу для изучения $3 + 1$ дираковского вакуума. В отличие от вейлевского полуметалла, в дираковском полуметалле линейный спектр образуется в результате пересечения вырожденных зон (см., например, [4, 5]). Возникновение дираковской точки в результате такого пресечения, как правило, защищено симметриями пространственной группы кристаллической решетки (самый известный пример – точки Дирака в графене [6, 7]), а не отличным от нуля числом Черна, как в вейлевских полуметаллах, или неэквивалентностью представлений группы симметрии зоны Бриллюэна, к которым принадлежат пересекающиеся зоны.

Отдельный интерес представляют дираковские системы с наклонным спектром. Такой спектр возникает при пересечении электронных и дырочных ферми-карманов [8–12]. В этой статье мы изучаем

возможности перекрытия зон в окрестности точки Дирака и индуцированный таким перекрытием наклон спектра. Про физические причины перекрытия зон будет упомянуто ниже. Здесь укажем на самые общие требования. В общем случае, такое перекрытие возможно, когда пересекающиеся зоны относятся к эквивалентным представлениям группы симметрии. Таким образом, мы изучаем ситуацию, когда с одной стороны между зонами имеется перекрытие, а с другой – эти зоны пересекаются в некоторых точках зоны Бриллюэна. Возможность существования таких устойчивых точек пересечения была предсказана еще в пионерской работе Херринга [13]. Согласно Херрингу, такие изолированные точки пересечения зон могут возникать в кристаллах без центра инверсии, причем они могут лежать в плоскости симметрии зоны Бриллюэна или в плоскости, перпендикулярной оси второго порядка. В кристаллах с центром инверсии пересечение зон, принадлежащих эквивалентным представлениям, также возможно, только областью пересечения будут не изолированные точки, а замкнутые кривые в зоне Бриллюэна. В настоящей работе нас интересует случай изолированных точек пересечения.

Покажем, что зоны, относящиеся к различным, но эквивалентным представлениям, могут перекрываться. Для этого необходимо показать, что интеграл перекрытия

¹⁾e-mail: zaur0102@gmail.com

$$S_k^{\alpha\beta} = \int d^3\mathbf{r} \psi_k^{(\alpha)*} \psi_k^{(\beta)} \quad (1)$$

не обращается в нуль. В этом выражении k – это квантовое число, характеризующее зону (в нашем случае это волновой вектор), а верхние индексы (α, β) обозначают различные представления группы, к которым относятся соответствующие зоны, т.е.

$$\psi_k^{(\alpha,\beta)} = \sum_q G_{kq}^{(\alpha,\beta)} \psi_q^{(\alpha,\beta)}. \quad (2)$$

Подставляя в (1) и суммируя обе части по всем элементам группы, получаем

$$gS_k^{\alpha\beta} = \sum_{qq'} \int d^3\mathbf{r} \psi_q^{(\alpha)*} \psi_{q'}^{(\beta)} \sum_G G_{kq}^{(\alpha)*} G_{kq'}^{(\beta)}, \quad (3)$$

где g есть размерность группы. Так как мы рассматриваем эквивалентные представления, то

$$G^{(\beta)} = AG^{(\alpha)}A^{-1}. \quad (4)$$

Учитывая это соотношение, из предыдущего равенства получаем

$$S_k^{\alpha\beta} = \frac{A_{kk}}{f_\alpha} \sum_{qq'} \int d^3\mathbf{r} \psi_q^{(\alpha)*} \psi_{q'}^{(\beta)} A_{qq'}^{-1}, \quad (5)$$

где мы воспользовались условием ортонормированности представления

$$\sum_G G_{ki}^{(\alpha)*} G_{mn}^{(\alpha)} = \frac{g}{f_\alpha} \delta_{km} \delta_{in}, \quad (6)$$

где f_α есть размерность представления. Если учесть ортогональность блоховских зон по волновому вектору, то получаем

$$S_k^{\alpha\beta} = \frac{A_{kk}}{f_\alpha - 1} \sum_{q \neq k} S_q^{\alpha\beta} A_{qq}^{-1}. \quad (7)$$

Таким образом, интеграл перекрытия не обращается тождественно в нуль в случае различных, но эквивалентных неприводимых представлений. Легко показать, что в случае неэквивалентных представлений интеграл перекрытия тождественно обращается в нуль.

Получим эффективный дираковский гамильтониан и спектр в рамках двухзонной модели при наличии перекрытия между зонами. Для этого мы повторим простейший вывод двухзонного гамильтониана. Вектор состояния в двухзонной модели имеет вид $|\Psi_{\mathbf{p}}\rangle = C_u |u_{\mathbf{p}}\rangle + C_v |v_{\mathbf{p}}\rangle$, где амплитуда $C_{u/v}$ соответствует блоховским функциям $|u_{\mathbf{p}}\rangle / |v_{\mathbf{p}}\rangle$. Умно-

жая слева волновое уравнение $H |\Psi_{\mathbf{p}}\rangle = E_{\mathbf{p}} |\Psi_{\mathbf{p}}\rangle$ на $\langle u_{\mathbf{p}}|$ и $\langle v_{\mathbf{p}}|$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{uu}^{\mathbf{p}} & \mathcal{H}_{uv}^{\mathbf{p}} \\ \mathcal{H}_{vu}^{\mathbf{p}} & \mathcal{H}_{vv}^{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \end{pmatrix} = \\ & = E_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} S_{uu}^{\mathbf{p}} & S_{uv}^{\mathbf{p}} \\ S_{vu}^{\mathbf{p}} & S_{vv}^{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \end{pmatrix} = \\ & = [f_0(\mathbf{p}) + \sigma_i f_i(\mathbf{p})] \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathcal{H}_{ab}^{\mathbf{p}} = \langle a_{\mathbf{p}} | \mathcal{H} | b_{\mathbf{p}} \rangle$ есть матричный элемент гамильтониана с $a, b = u, v$, а $S_{\mathbf{p}}^{ab} = \langle a_{\mathbf{p}} | b_{\mathbf{p}} \rangle = \int a_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) b_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ есть интеграл перекрытия зон, σ_i есть матрица Паули с $i = x, y, z$, а $f_0(\mathbf{p})$ умножается на единичную матрицу 2×2 . Обычно блоховские функции считаются ортогональными, так что матрица перекрытия в (8) становится единичной $S_{\mathbf{p}}^{ab} = \delta_{ab}$. Однако в реальных материалах это, строго говоря, не так (например, одной из главных причин такого являются многочастичные эффекты) [14–19]. Возможность перекрытия блоховских функций можно увидеть и из простых рассуждений. Для этого введем блоховские функции в простейшем виде $u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{R})} \phi_u(\mathbf{r}-\mathbf{R})$ и $v_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{R})} \phi_v(\mathbf{r}-\mathbf{R})$, где ϕ_u, ϕ_v есть атомные орбитали, соответствующие зонам u, v , а \mathbf{R} есть радиус-вектор атома в узле решетки. Тогда интеграл перекрытия может быть записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) v_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \\ & = \sum_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')} \int \phi_u^*(\mathbf{r}-\mathbf{R}') \phi_v(\mathbf{r}-\mathbf{R}) d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Орбитали, соответствующие данному атому ($\mathbf{R} = \mathbf{R}'$), всегда ортогональны: $\int \phi_u^*(\mathbf{r}-\mathbf{R}') \phi_v(\mathbf{r}-\mathbf{R}) d^3\mathbf{r} = \delta_{ab}$. Однако, для различных атомов $\mathbf{R} \neq \mathbf{R}'$, строго говоря, такой ортогональности нет, что приводит к отличным от нуля недиагональным элементам матрицы перекрытия $S_{\mathbf{p}}^{ab}$. Это дает ненулевое перекрытие между блоховскими зонами. Следует при этом отметить, что в самой точке вырождения перекрытие тождественно обращается в нуль из-за теоремы Крамера. Действительно, согласно этой теореме в точке пересечения \mathbf{p}_0 существует связь между зонами $\mathcal{T} |u_{\mathbf{p}_0}\rangle = |v_{\mathbf{p}_0}\rangle$, где \mathcal{T} – оператор обращения времени. Тогда можно показать, что $\langle u_{\mathbf{p}_0} | \mathcal{T} u_{\mathbf{p}_0} \rangle = 0$ [20, 21]. Уравнение (8) можно переписать в виде

$$(S_{\mathbf{p}})^{-1} [f_0(\mathbf{p}) + \sigma_i f_i(\mathbf{p})] \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $S_{\mathbf{p}}^{ab}$ есть матрица в правой части уравнения (8). В окрестности точки Дирака мы имеем $f_i(\mathbf{p}) \approx v_F p_i$ и $f_0(\mathbf{p}) = 0$. Если записать компоненты интеграла перекрытия в виде $S_{\mathbf{p}}^{uu(vv)} = 1$ (это следует из нормировки функций Блоха), $S_{\mathbf{p}}^{uv} = (i\vartheta_y - \vartheta_x)/v_F = (S_{\mathbf{p}}^{vu})^*$, то соответствующий эффективный гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}} = (S_{ab}^{\mathbf{p}})^{-1} [f_0(\mathbf{p}) + \sigma_i f_i(\mathbf{p})]$ принимает вид

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{1 - \beta^2} (\boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (v_F \mathbf{p} + i[\mathbf{p} \times \boldsymbol{\vartheta}])), \quad (11)$$

где $\beta = \vartheta/v_F$, $\vartheta = |\boldsymbol{\vartheta}|$. Спектр такого гамильтониана имеет вид

$$\varepsilon(p) = \frac{\boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p} \pm \sqrt{(\boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{p})^2 + (1 - \beta^2)v_F^2 p^2}}{1 - \beta^2}. \quad (12)$$

Как видно, в гамильтониане из-за перекрытия возникает новый векторный параметр $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_x, \vartheta_y, 0)$, приводящий к наклону спектра. На рисунке 1 показан спектр при различных значениях параметра перекрытия. Далее в статье мы полагаем, что $v_F = 1$.

Заметим, что гамильтониан (11) является неэрмитовым. Однако спектр такого гамильтониана действителен. Это связано с тем, что в действительности этот гамильтониан является псевдоэрмитовым, т.е. обладает свойством

$$\tilde{\mathcal{H}}^\dagger = \eta \tilde{\mathcal{H}} \eta^{-1}, \quad (13)$$

где оператор η может быть представлен в виде $\eta = D^\dagger D$, где D есть некоторый невырожденный оператор. Условие псевдо-эрмитовости (13) является более общим условием действительности спектра гамильтониана [22–25]. Для эрмитового гамильтониана оператор D унитарен и условие (13) превращается в обычное условие эрмитовости. Покажем, что для нашего гамильтониана (11) это условие выполняется всегда из-за того, что $\beta < 1$. Необходимо доказать, что условие

$$\eta \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + i[\mathbf{p} \times \boldsymbol{\vartheta}]) \eta^{-1} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - i[\mathbf{p} \times \boldsymbol{\vartheta}]) \quad (14)$$

с $\eta = D^\dagger D$ выполняется при $\vartheta < 1$. Из эрмитовости матрицы $\eta = D^\dagger D$ следует общий вид этой матрицы

$$\eta = a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}, \quad (15)$$

где $a_0, \mathbf{a} \in \mathbb{R}$. Условие (14) теперь переписывается в виде

$$\begin{aligned} (a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} &= \\ = (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} (a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (16)$$

Это условие выполняется при $a_0 = 1$ и $\mathbf{a} = -\boldsymbol{\vartheta}$. Если представление $\eta = D^\dagger D$ возможно, то $\det \eta = \det(D^\dagger D) = |\det(D)|^2 > 0$. Отсюда следует, что

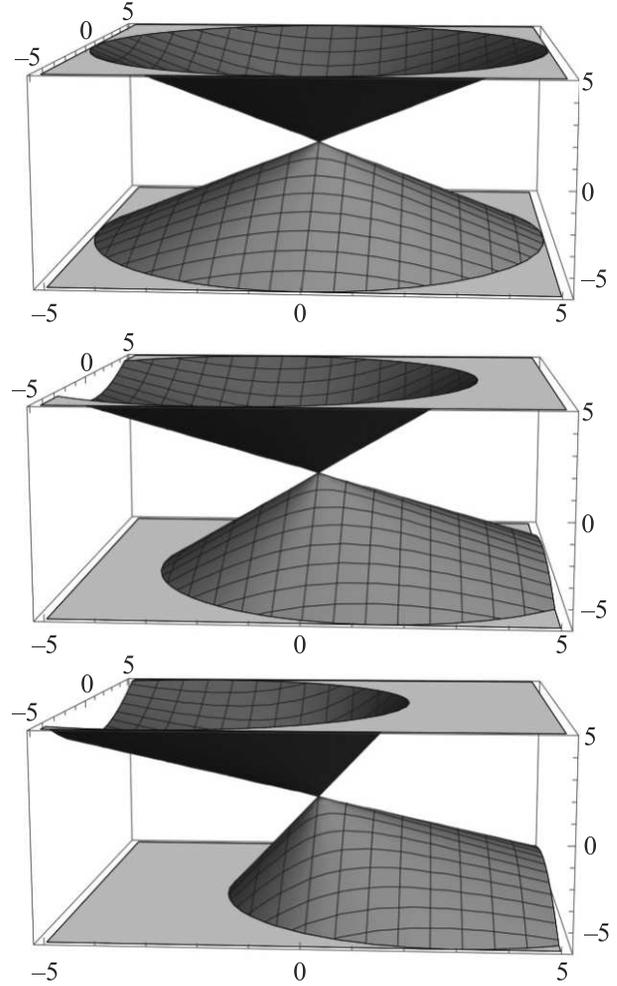


Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость энергии от импульса (12) при $p_z = 0$ при наличии перекрытия, которое для простоты задано в виде $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_x, 0, 0)$. Верхний рисунок соответствует $\vartheta_x = 0$, средний $\vartheta_x = 0.3$, нижний $\vartheta_x = 0.6$. По горизонтальным осям отложены (p_x, p_y)

$a_0^2 - a_i^2 > 0$. Другими словами, если $a_0^2 - a_i^2 < 0$, то представление $\eta = D^\dagger D$ невозможно и условие действительности спектра (13) не выполняется. Таким образом, мы приходим к выводу, что спектр гамильтониана (11) вещественен при $\vartheta < 1$. В частности, это означает, что топологические характеристики такого гамильтониана ничем не отличаются от случая простого дираковского гамильтониана $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$.

Можно подумать, что при наличии перекрытия между зонами изменятся условия существования точек контакта этих зон, полученных впервые в [13]. В частности, это могло бы привести к устранению точек контакта и открытию щели. Давайте повторим вывод поведения энергетического спектра вблизи контакта в рамках $\mathbf{k}\mathbf{p}$ -приближения при наличии

перекрытия. В рамках теории **к**p-приближения (межэлектронное взаимодействие V учитывается в рамках приближения Хартри) имеем

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{i\hbar^2}{m} \mathbf{k} \cdot \nabla + \frac{\hbar^2}{2m} + V \right] |u_{\mathbf{k}}\rangle = E_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}}\rangle. \quad (17)$$

Согласно стандартной процедуре, в окрестности контакта $\mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa}$, где $\boldsymbol{\kappa}$ есть малое отклонение, величина $-\frac{i\hbar^2}{m} \boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla$ рассматривается как возмущение. При наличии перекрытия получим следующее выражение для изменения энергии $\delta E(\mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa})$ при малом отклонении от контакта

$$\begin{aligned} \delta E(\mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa}) &= \\ &= \pm \frac{\sqrt{(\boldsymbol{\kappa} \cdot \bar{\mathbf{f}})^2 + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \text{Reg})^2 + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \overline{\text{Img}})^2}}{1 - \vartheta_x^2} + o(\kappa^2), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + i\vartheta_x \text{Img}$, $\overline{\text{Img}} = \text{Img} - i\vartheta_x \mathbf{f}$ и мы для простоты положили $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_x, 0, 0)$, а вектора \mathbf{f} и \mathbf{g}

$$\mathbf{f} = -i \frac{\hbar^2}{m} [\langle u_{\mathbf{k}} | \nabla u_{\mathbf{k}} \rangle - \langle v_{\mathbf{k}} | \nabla v_{\mathbf{k}} \rangle], \quad (19)$$

$$\mathbf{g} = i \frac{\hbar^2}{m} \langle u_{\mathbf{k}} | \nabla v_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (20)$$

Достаточное условие существования контакта сводится к тому, чтобы ни один из трех векторов $\mathbf{f} + i\vartheta_x \text{Img}$, Reg , $\text{Img} - i\vartheta_x \mathbf{f}$ тождественно не обращался в нуль. Если какой-нибудь из этих векторов тождественно обращается в нуль, то всегда будет существовать направление $\boldsymbol{\kappa}$, для которого остальные два вектора будут в перпендикулярной плоскости. В этом направлении спектр будет квадратичен по импульсу (так как линейный член ряда Тейлора тождественно обращается в нуль), т.е. любое сколь угодно малое возмущение может создать разрыв зон. При наличии центра инверсии вектор Reg всегда равен нулю. Следовательно, в этом случае не будет изолированной точки контакта зон. При отсутствии центра инверсии, вообще говоря, тождественно в нуль не обращается ни один из векторов. Для каких-то направлений $\boldsymbol{\kappa}$ при наличии перекрытия можно ожидать, что $\text{Img} - i\vartheta_x \mathbf{f} = 0$. Но такое равенство возможно только при $\text{Img} = \mathbf{f} \equiv 0$, так как вектор \mathbf{f} действительный. Однако, даже если предположить, что вектор \mathbf{f} стал по каким-то причинам комплексным, то и в этом случае условия $\text{Img} - i\vartheta_x \mathbf{f} = 0$ еще не достаточно, чтобы контакт исчез. Должно еще выполняться дополнительное условие $\mathbf{f}, \text{Reg} \perp \boldsymbol{\kappa}$ для данного направления вектора $\boldsymbol{\kappa}$. Таким образом, мы приходим к выводу,

что обращение в нуль подкоренного выражения в изолированной точке возможно только при условии, что три вектора $\mathbf{f}, \text{Reg}, \text{Img}$ компланарны, либо хотя бы один из них тождественно обращается в нуль. Это полностью совпадает с выводами работы [13], т.е. учет перекрытия влияет только на форму спектра и не затрагивает фундаментальные условия существования точки Дирака.

Выше мы показали, что перекрытие между зонами приводит к наклону спектра. Однако, если в точке Дирака пересекаются электронные и дырочные ферми-карманы, то спектр имеет наклон и без перекрытия. Наличие же последнего приводит лишь к дополнительному наклону. Общий гамильтониан, содержащий наклон и перекрытие имеет вид (вывод такой же, что и в случае спектра без наклона, только надо положить $f_0(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p}$)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{1 - \beta^2} [(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \mathbf{p} + \\ &+ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p}) \boldsymbol{\vartheta} + i[\mathbf{p} \times \boldsymbol{\vartheta}])]. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь гамильтониан содержит два параметра $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\vartheta}$. Сразу заметим, что при $\boldsymbol{\vartheta} = -\boldsymbol{\omega}$ наклон исчезает полностью. Таким образом, перекрытие между зонами может привести к тому, что спектр становится прямым. В системе с двумя точками Дирака вектор наклона имеет противоположные знаки в различных точках. Это означает, что за счет перекрытия наклон исчезнет при $\boldsymbol{\vartheta} = -\boldsymbol{\omega}$ только в одной из точек. Таким образом, возможна фаза, когда в одной точке дирака спектр наклонный, а в другой – прямой. Можно подумать, что в таком случае возникнет равновесный ток из-за отличного от нуля суммарного наклона от двух точек. Однако анизотропия спектра такова, что равновесный ток по-прежнему равен нулю. На рисунке 2 приведены спектры (поверхности постоянной энергии) для различных значений параметра перекрытия при наличии наклона.

Наконец, заметим, что гамильтониан (21) соответствует действию спинорного поля в искривленном пространстве-времени. Это можно увидеть, если в рамках тетрадного формализма в общем лагранжиане

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\nu e_\nu^\mu \partial_\mu \psi \quad (22)$$

положить $e_\nu^\mu = v_F \delta_\nu^\mu + \delta_\nu^0 \omega^i \delta_i^\mu + \vartheta_i \delta_\nu^i \delta_0^\mu$. Такие вейлевские фермионы были предложены в работах [26, 27]. Отличие от нуля компонент e_i^0, e_0^i тетрады (эти компоненты равны $e_i^0 = \vartheta_i, e_0^i = \omega^i$) говорит об искривленности пространства-времени. Один из основных выводов настоящей работы состоит в том, что тако-

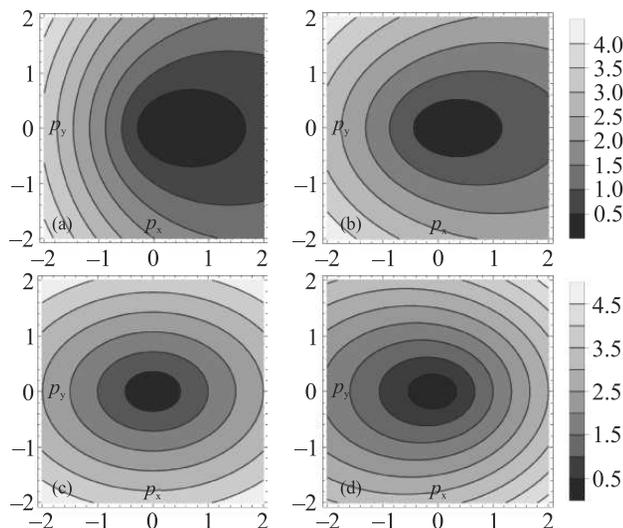


Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектр (поверхности постоянной энергии) гамильтониана (21) при $p_z = 0$ при наличии наклона $\omega = (-0.7, 0, 0)$ при различных значениях перекрытия $\vartheta = (\vartheta_x, 0, 0)$: (a) – $\vartheta_x = 0$; (b) – $\vartheta_x = 0.4$; (c) – $\vartheta_x = 0.7$; (d) – $\vartheta_x = 0.8$

му лагранжиану в точности соответствует гамильтониан (21). Это можно увидеть, составив уравнение Эйлера–Лагранжа. Таким образом, учет перекрытия между зонами эффективно проявляется как искривление пространства-времени для спинорного дираковского поля. Это дает уникальную возможность моделировать в таких дираковских системах различные экзотические явления, связанные с искривлением пространства-времени. В этой связи необходимо упомянуть работу [28] (см. также работу Вильчека с соавторами [29]), в которой неоднородные вейлевские спектры с наклоном были использованы для эффективного моделирования горизонта событий вблизи черных и белых дыр. Однако, такие спектры не содержат связи между пространственными компонентами матрицы Дирака и временной компонентой импульса (тетрада e_i^0), и поэтому не позволяют моделировать все особенности искривленного пространства-времени. Этот недостаток компенсируется перекрытием, за счет которого и возникает не хватающий по симметрии вклад компоненты e_i^0 .

Итак, в этой работе мы изучили эффекты перекрытия зон на дираковский гамильтониан. Эти эффекты должны быть учтены при анализе различных явлений в дираковских системах с наклонным спектром (см., например, [30–33]).

Работа поддержана грантом Российского научного фонда # 22-72-00110.

1. N. P. Armitage, E. J. Mele, and A. Vishwanath, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015001 (2018).
2. P. A. Dirac, *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **117**, 610 (1928).
3. H. Weyl, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **15**(4), 323 (1929).
4. S. Murakami, *New J. Phys.* **9**(9), 356 (2007).
5. S. Murakami, S. Iso, Y. Avishai, M. Onoda, and N. Nagaosa, *Phys. Rev. B* **76**, 205304 (2007).
6. M. Katsnelson, *Graphene: Carbon in Two Dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge (2012).
7. E. Kogan and V. U. Nazarov, *Phys. Rev. B* **85**, 115418 (2012).
8. B. Bradlyn, J. Cano, Z. Wang, M. Vergniory, C. Felser, R. Cava, and B. A. Bernevig, *Science* **353**, aaf5037 (2016).
9. A. A. Soluyanov, D. Gresch, Z. Wang, Q. Wu, M. Troyer, X. Dai, and B. A. Bernevig, *Nature* **527**(7579), 495 (2015).
10. B. J. Wieder, Y. Kim, A. M. Rappe, and C. L. Kane, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 186402 (2016).
11. З. З. Алисултанов, *ЖЭТФ* **152**(5), 986 (2017).
12. З. З. Алисултанов, *Письма в ЖЭТФ* **107**(4), 260 (2018).
13. C. Herring, *Phys. Rev.* **52**, 365 (1937).
14. E. Antoncik and P. T. Landsberg, *Proc. Phys. Soc.* **82**, 337342 (1963).
15. V. Halpern, *J. Phys. Chem. Solids* **24**, 14951502 (1963).
16. N. Bernstein, M. J. Mehl, and D. A. Papaconstantopoulos, *Phys. Rev. B* **66**, 075212 (2002).
17. W. A. Harrison and S. Ciraci, *Phys. Rev. B* **10**, 1516 (1974).
18. J. Tejada and N. J. Shevchik, *Phys. Rev. B* **13**, 2548 (1976).
19. T. B. Boykin, P. Sarangapani, and G. Klimeck, *J. Appl. Phys.* **125**, 144302 (2019).
20. C. Herring, *Phys. Rev.* **52**, 361 (1937).
21. C. Kittel, *Quantum Theory of Solids*, Wiley, N.Y. (1963).
22. A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.* **43**, 205214 (2002).
23. A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.* **43**, 28142816 (2002).
24. A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.* **43**, 39443951 (2002).
25. Z. Z. Alisultanov and E. G. Idrisov, *Phys. Rev. B* **107**, 085135 (2023).
26. J. Nissinen and G. E. Volovik, *JETP Lett.* **105**, 442 (2017).
27. J. Nissinen and G. E. Volovik, *JETP* **127**, 948957 (2018).
28. G. E. Volovik, Black hole and Hawking radiation by type-II Weyl fermions, *JETP Lett.* **104**, 645 (2016), arXiv:1610.00521

-
29. Y. Kedem, E. J. Bergholtz, and F. Wilczek, *Phys. Rev. Research* **2**, 043285 (2020).
30. I. Proskurin, M. Ogata, and Y. Suzumura, *Phys. Rev. B* **91**, 195413 (2015).
31. M. Milićević, G. Montambaux, T. Ozawa, O. Jamadi, B. Real, I. Sagnes, A. Lemaître, L. Le Gratiet, A. Harouri, J. Bloch, and A. Amo *Phys. Rev. X* **9**, 031010 (2019).
32. A. Wild, E. Mariani, and M. E. Portnoi, *Phys. Rev. B* **105**, 205306 (2022).
33. Y. Yekta, H. Hadipour, and S. A. Jafari, *Commun. Phys.* **6**, 46 (2023).