

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В УЗКИХ ТРУБКАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ

© 2025 г. В. А. Гусев*, К. О. Комаровский

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», Москва, Россия

*E-mail: vgusev@bk.ru

Поступила в редакцию 14.11.2024 г.

После доработки 03.12.2024 г.

Принята к публикации 30.12.2024 г.

Изучены явления, которые возникают при распространении акустических волн в узких трубках с переменным сечением. Для трубки определен специальный закон изменения поперечного сечения. Исследован режим туннелирования волны через плавное сужение. Учтено влияние присоединенной массы на границах области сужения трубки. Построены частотные зависимости коэффициента прохождения волны по энергии с учетом присоединенной массы. Отмечены особенности описания диссипативных эффектов в трубках.

Ключевые слова: присоединенная масса, туннелирование волны, уравнение Вебстера, коэффициент прохождения.

DOI: 10.31857/S0367676525040255, EDN: GUPMFL

ВВЕДЕНИЕ

Трубы с постоянным и переменным сечением являются неотъемлемой частью всех звукопроводов, используемых на практике. По этой причине изучение законов распространения звука в такой системе имеет большое значение для решения всех акустических вопросов, связанных с экспериментальными исследованиями и обработкой их результатов.

Исследованию вопросов распространения звуковых волн в бесконечном акустическом волноводе посвящено огромное количество работ. Особое место среди рассматриваемых проблем занимают задачи, в которых волновод имеет изменяющийся профиль сечения. Данный класс задач вызывает повышенный интерес, так как в зоне изменения сечения происходит перестроение фронта волны, что, в свою очередь, порождает ряд интересных эффектов.

Данная работа посвящена анализу особенностей распространения акустических волн в составных трубках переменного сечения, в которых разные участки могут обладать различными акустическими характеристиками. При этом на стыке таких участков существенную роль играет присоединенная масса, вводимая для описания переходного процесса трансформации волны. Для описания этих эффектов нужно решить полную задачу прохождения и отражения волны через об-

ласть сужения. Кроме того, в работе приведен краткий обзор базовых уравнений для описания акустических волн с учетом нелинейности и диссипации среды.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА ПО ТРУБКЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим ситуацию, когда акустическая волна распространяется в узкой трубке, на одном из участков которой есть плавное сужение с переменным сечением (см. рис. 1). Параметры среды — плотность ρ_1 и скорость звука c_1 — в области *II* с сужением ($0 < x < d$) в общем случае отличаются от параметров среды — плотности ρ_0 и скорости звука c_0 — на участках *I* и *III* с постоянным сечением. Рассмотрение одинаковых сред на участках *I* и *III* упрощает конечные выражения, но не ограничивает общности полученных результатов.

В линейном приближении волны в рупорах, трубках, концентраторах и других волноводных системах с переменным поперечным сечением $S(x)$ описываются уравнением Вебстера [1–3]:

$$\frac{1}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

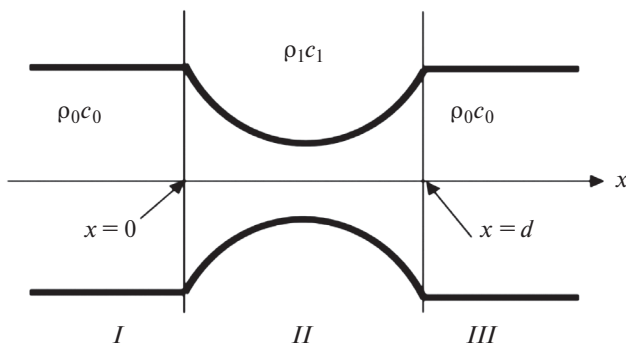


Рис. 1. Трубка содержит область сужения II ($0 < x < d$), заполненную средой с плотностью ρ_1 и скоростью c_1 звука.

Здесь x — координата, отсчитываемая вдоль оси системы, p — акустическое давление, c — скорость звука, в дальнейшем ρ — плотность среды.

Уравнение Вебстера (1) применимо для трубок, характерный радиус которых мал по сравнению с длиной волны: $r_0 \ll \lambda$. Основное приближение, закладываемое при выводе этого уравнения, состоит в том, чтобы волна сохраняла одномерный характер распространения, несмотря на изменение поперечного сечения трубки. Это условие хорошо выполняется для узких трубок, в которых из-за наличия дисперсии эффективно возбуждается и распространяется только поршневая мода. Для трубок с большим характерным радиусом поперечного сечения это уравнение также будет применимо, если радиус по мере распространения меняется относительно медленно. Если в каких-то областях трубки площадь сечения изменяется достаточно быстро, то плоский характер движения в переходной области может нарушаться. Эти искажения характера движения обычно феноменологически учитываются введением присоединенной массы, описывающей инерционное сопротивление [4, 5]. Условия применимости уравнения Вебстера к решаемой в данной работе задаче будут также обсуждены далее.

ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УЧАСТОК ТРУБКИ С СУЖЕНИЕМ С УЧЕТОМ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИИ И ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ

Даже в случае наиболее простого, линейного уравнения Вебстера (1), исследование выявляет весьма любопытные эффекты. Один из них — туннелирование акустических волн при их распространении через плавно сужающийся волноводный канал [6–10]. Этот режим соответствует прохождению через сужение неоднородной волны и был рассмотрен в работах [6, 7].

Как упоминалось выше, в области сравнительно резкого изменения площади поперечного сечения могут возникать вихревые движения, для

учета которых вводится присоединенная масса. Поскольку профиль сечения, представленный на рис. 1, хотя и является непрерывным, но содержит разрыв производной, то здесь также возможно появление присоединенной массы. В работах [6, 7] этот фактор не рассматривался. Данная работа как раз посвящена исследованию влияния присоединенной массы на эффект туннелирования при плавном сужении сечения трубки.

Для получения точных решений уравнения (1) введем вместо давления p новую функцию F :

$$p(x, t) = \frac{F(x, t)}{\sqrt{S(x)}}. \quad (2)$$

Для этой функции уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{S(x)}} \frac{\partial^2 \sqrt{S(x)}}{\partial x^2} F. \quad (3)$$

Зададим в уравнении (3) площадь поперечного сечения в специальном виде

$$S(x) = S_m \cosh^2 \left[\theta \left(x - \frac{d}{2} \right) \right], \quad \theta = \frac{2}{d} \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{S_m}}. \quad (4)$$

Здесь константы S_m , d — геометрические характеристики участка переменной толщины: S_m — минимальная безразмерная площадь сужения, достигаемая при значении координаты $x = \frac{d}{2}$, и d — длина этого участка.

Тогда уравнение (3) сведем к виду:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \theta^2 F. \quad (5)$$

Тем самым исходное уравнение удалось свести к уравнению с постоянными коэффициентами, что позволяет получить точное решение. Уравнение (5) по сравнению с волновым уравнением содержит дополнительное слагаемое, которое отвечает за низкочастотную дисперсию. Это слагаемое позволяет выбирать различные режимы прохождения волны в зависимости от частоты.

Особенно интересен режим туннелирования волны. Говоря о туннелировании, часто имеют в виду квантовые эффекты проникновения частиц через потенциальные барьеры, высота которых больше энергии самих частиц. В данном случае речь идет о ситуации, когда в области сужения реализуется режим неоднородной волны. При этом в низкочастотном диапазоне затухание незначительно, а фазовый сдвиг отсутствует [6]. В результате на частотной зависимости коэффициента прохождения формируется плато, где его значение близко к единице. Волна проходит практически без потерь и искажений.

Подставляя гармоническую волну частоты ω , $F = F_0 e^{-i\omega t}$, уравнение (5) можно привести к виду:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (k_1^2 - \theta^2) F = 0, \quad (6)$$

где $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ — волновое число в среде.

Очевидно, что эффект туннелирования возможен только в некотором узком диапазоне соответствующих параметров, который еще предстоит найти. Режим туннелирования волны отвечает значению $\theta^2 > k_1^2$. Этот режим может быть реализован для низких частот $k_1 < \theta$ или

$$\omega < \frac{2c}{d} \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{S_m}}, k_1 d < 2 \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{S_m}}. \quad (7)$$

Как видно, режим туннелирования действительно соответствует ситуации, когда длина сужения d меньше длины волны. Таким образом, изменение площади поперечного сечения происходит достаточно резко и возникает вопрос о правомерности использования модели уравнения Вебстера (1) в данном случае. Рассматриваемая ситуация с плавным, но достаточно быстрым изменением площади сечения является промежуточным вариантом между двумя модельными ситуациями: 1) плавным и медленным сужением, для которого уравнение Вебстера является адекватной моделью, и 2) резким скачкообразным сужением, которое моделируется тонкой перегородкой и для которого полное прохождение возможно только на нулевой частоте. Вторая из этих моделей полностью опускает эффект плавности изменения площади сечения. Адекватность применения модели уравнения Вебстера для данного случая можно обосновать наличием предельного перехода от одной модели к другой. Действительно, устремляя длину сужения к нулю, мы видим, что сужение будет происходить скачком, а полное прохождение звука будет только на нулевой частоте. Эффекты, возникающие при конечной длине сужения, будем моделировать, как обычно, добавлением присоединенной массы.

Для нахождения коэффициентов отражения и прохождения волны, запишем граничные условия в области: $0 < x < d$. Потребуем непрерывности полей давления p и скорости u :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad u = -\frac{i}{k\rho c} \frac{dp}{dx}.$$

В местах контакта трубок разного сечения, вообще говоря, изменяется характер движения среды, волна перестает быть плоской. Для феноменологического описания переходного процесса вводят присоединенную массу. Можно ожидать, что в случае плавного изменения сечения трубок эта масса меньше, чем для случая резкого скачка сечения. Тем не менее, важно посмотреть, насколько существенно влияние присоединенной массы.

После подстановки решения в виде неоднородной волны в граничные условия, получим си-

стему уравнений:

$$\begin{cases} P_i + P_r = P_+ + P_- + iP'(0), \\ P_i - P_r = i\frac{\alpha}{k_1} [P_+ (\mu - b) - P_- (\mu + b)], \\ P_+ e^{-\mu d} + P_- e^{\mu d} = P_t + iP'(d), \\ i\frac{\alpha}{k_1} [P_+ e^{-\mu d} (\mu + b) - P_- e^{\mu d} (\mu - b)] = P_t. \end{cases} \quad (8)$$

В формуле (8) P_i, P_r, P_t — амплитуды падающей, отраженной, прошедшей волн, P_+, P_- — амплитуды волн, распространяющихся внутри трубки — в области II, $P'(0) = \frac{M_1 \omega u_I}{S_1}$, $P'(d) = \frac{M_2 \omega u_{III}}{S_2}$, M_1, M_2 — присоединенная масса на входе в трубу и выходе соответственно, u_I, u_{III} — колебательная скорость на границе $x = 0$, $x = d$, соответственно, $b \equiv \frac{2}{d} \sqrt{1 - S_m} \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{S_m}}$, $\mu = \sqrt{\theta^2 - k_1^2}$, $\alpha = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_1 c_1}$ — отношение акустических импедансов двух сред, S_1, S_2 — безразмерные площади сечения трубки при $x = 0$ и $x = d$.

Решая систему (8), найдем выражения для P_- и P_+ :

$$P_+ = \frac{2P_i}{\Delta} e^{\bar{\mu}} \left[1 - \gamma \frac{M_1 \omega}{S_1} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} - \bar{b}) - i \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} - \bar{b}) \right], \quad (9)$$

$$P_- = \frac{2P_i}{\Delta} e^{-\bar{\mu}} \left[1 + \gamma \frac{M_1 \omega}{S_2} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} + \bar{b}) - i \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} + \bar{b}) \right], \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta = e^{\bar{\mu}} & \left[1 - \frac{M_1 \omega}{S_1} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} - \bar{b}) + i \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} - \bar{b}) \right] \times \\ & \times \left[1 - \gamma \frac{M_1 \omega}{S_2} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} - \bar{b}) + i \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} - \bar{b}) \right] - \\ & - e^{-\bar{\mu}} \left[1 + \frac{M_1 \omega}{S_1} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} + \bar{b}) - i \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} + \bar{b}) \right] \times \\ & \times \left[1 + \gamma \frac{M_1 \omega}{S_2} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} + \bar{b}) - i \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} + \bar{b}) \right], \end{aligned}$$

а также введены безразмерные параметры:

$$\bar{k}_1 = k_1 d; \quad \bar{\mu} = \mu d; \quad \bar{b} = bd; \quad \gamma = \frac{M_2}{M_1}.$$

Из уравнений (8)–(10) найдем коэффициент прохождения волны T :

$$\begin{aligned} T = \frac{P_t}{P_i} = 2i \frac{\alpha}{\bar{k}_1} \frac{1}{\Delta} & \left\{ \left[(\bar{\mu} + \bar{b}) \left(1 - \gamma \frac{M_1 \omega}{S} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} - \bar{b}) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - i \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} - \bar{b}) \right) \right] + \left[(\bar{\mu} - \bar{b}) \left(1 + \gamma \frac{M_1 \omega}{S} \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} + \bar{b}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - i \frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} + \bar{b}) \right) \right] \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь для упрощения записи положено $S_1 = S_2 = S$. Если положить $M_1 = 0$, что означает отсутствие присоединенной массы, то выражение (11) примет вид:

$$T = \frac{\frac{i4\alpha\bar{\mu}}{\bar{k}_1}}{e^{i\bar{\mu}} \left[1 + i\frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} - \bar{b}) \right]^2 - e^{-i\bar{\mu}} \left[1 - i\frac{\alpha}{\bar{k}_1} (\bar{\mu} + \bar{b}) \right]^2}. \quad (12)$$

Построим частотные зависимости квадрата коэффициента прохождения волны для отношения параметров $\alpha = 2$ и трех значений минимального сечения трубки $S_m = 0.09, 0.34, 0.71$ (кривые 1, 2, 3 на рис. 2, 3, соответственно).

Для того чтобы подчеркнуть влияние присоединенной массы, вначале построим частотную зависимость коэффициента прохождения волны в ее отсутствие при $M_1 = 0$. Соответствующий график приведен на рис. 2. Видно, что максимальный диапазон частот ($0 < \bar{k}_1 \lesssim 1.75$), где проявляется эффект туннелирования, достигается при $S_m = 0.34$. При больших значениях частоты $\bar{k}_1$ формула (12) переходит в решение, опи-

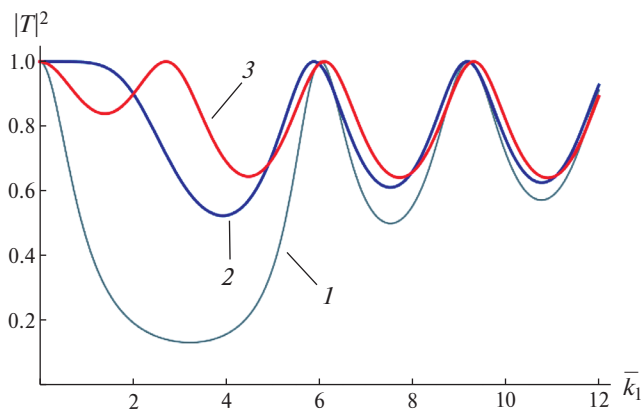


Рис. 2. Частотные зависимости квадрата коэффициента прохождения волны без учета присоединенной массы.

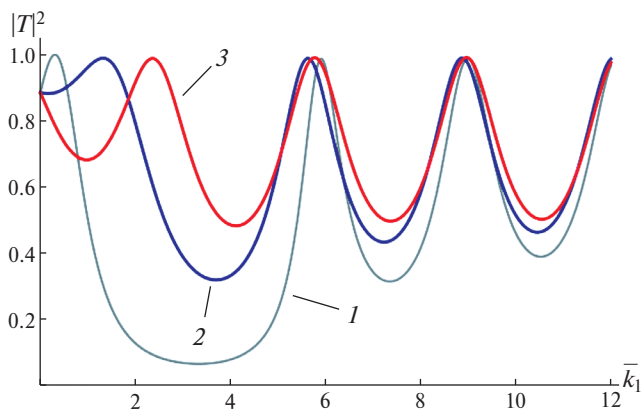


Рис. 3. Частотные зависимости квадрата коэффициента прохождения волны с учетом присоединенной массы.

сывающее осцилляции коэффициента пропуска, соответствующие обычному режиму бегущих волн.

Если учесть присоединенную массу и положить $\gamma = \frac{M_2}{M_1} = 0.24$, то зависимость коэффициента прохождения волны примет вид, изображенный на рис. 3. Как видно из рис. 3, эффект полного туннелирования в том диапазоне частот, в котором он наблюдался в отсутствие присоединенной массы, разрушается. Коэффициент прохождения достигает единицы только на отдельных частотах. Тем не менее, область, где коэффициент прохождения достаточно близок к единице, остается. Кроме того, при малых значениях безразмерной минимальной площади сечения коэффициент прохождения увеличивается по сравнению со случаем отсутствия присоединенной массы.

Построим график зависимости квадрата коэффициента прохождения от безразмерного волнового числа в зависимости от присоединенной массы $M_1 = 0.14; 0.43; 0.88$ (кривые 1, 2, 3 на рис. 4, соответственно) при одинаковой безразмерной минимальной площади сечения $S_m = 0.34$, для того, чтобы проанализировать, как меняется поле при увеличении присоединенной массы.

Таким образом, из рис. 4 можно сделать вывод, что при увеличении параметра M_1 уменьшается коэффициент прохождения, т.е. увеличение присоединенной массы ведет к тому, что поле искажается сильнее.

Полученные результаты показывают, что, действительно, при учете присоединенной массы условия полного прохождения ухудшаются, частотно-зависимые эффекты проявляются и в низкочастотной области, где расположено плато туннелирования. Тем не менее, можно надеяться, что при распространении низкочастотных сигналов удастся добиться меньшего искажения сигнала. Эта задача требует дальнейшего исследования.

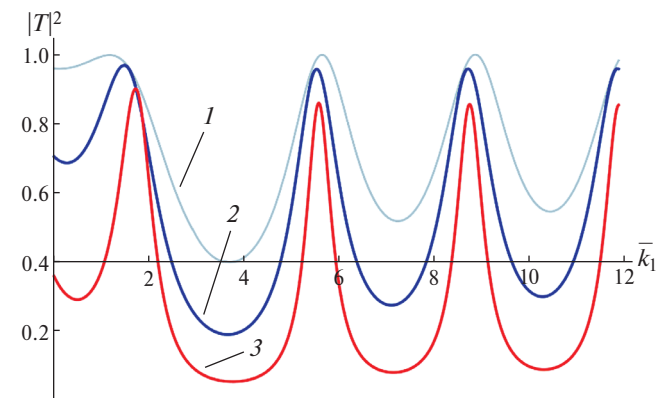


Рис. 4. Частотные зависимости квадрата коэффициента прохождения волны с учетом присоединенной массы при разных M_1 .

УЧЕТ ДИССИПАЦИИ И НЕЛИНЕЙНОСТИ

Говоря о частотно-зависимых эффектах, нельзя не упомянуть и такой существенный фактор, как вязкость среды. Безусловно, она будет вносить искажения, в том числе, и при распространении низкочастотных сигналов. Имея в виду и задачу прохождения волн большой интенсивности, в рамках данной работы отметим следующие особенности.

В задачах, связанных с распространением акустических волн большой интенсивности, возникает обобщенное уравнение типа Вебстера. Оно отличается от уравнения (1) наличием двух дополнительных членов, которые описывают нелинейные и диссипативные эффекты. Обычно это уравнение записывается в виде:

$$\frac{1}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon}{c^4 \rho} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + \frac{b}{\rho c^2} \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} = 0. \quad (13)$$

Здесь ε , b — нелинейный параметр и коэффициент диссипации. Упростить уравнение Вебстера типа (13), особенно при решении нелинейных задач, можно с помощью метода медленно изменяющегося профиля [11, 12]. Этот метод применим, когда изменения площади поперечного сечения происходят медленно. В результате порядок нелинейного уравнения (13) снижается. Следуя стандартной процедуре, перейдем от переменных x, t в уравнении (13) к новым независимым переменным: «медленной» координате $x_1 = \delta x$ (где δ — малый параметр задачи) и «быстрому» времени $\tau = t - \frac{x}{c}$ в бегущей со скоростью звука системе координат. Ограничиваясь стандартной моделью (13) и пренебрегая малыми членами порядка δ^n , $n \geq 2$, приходим к эволюционному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{p}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\ln S(x)) = 0. \quad (14)$$

Обычно отмечается, что уравнения вида (13)–(14) имеют более широкую область применимости и описывают также, например, поля интенсивных ограниченных акустических пучков в неоднородных средах в приближении нелинейной геометрической акустики (НГА), а функция $S(x)$ в этом случае имеет смысл площади поперечного сечения лучевой трубки [12].

Однако, если для пучков в приближении НГА запись диссипативного слагаемого в уравнениях (13)–(14) является точной, то для волн в трубке это, вообще говоря, не так. Строгий вывод обобщенного линеаризованного уравнения Вебстера для трубки переменного сечения с учетом вязкости приводит к точному замкнутому уравнению

для колебательной скорости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} (S u) \right) + \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \quad (15)$$

в котором вязкий член имеет обычную структуру, как в уравнении (13), но член с переменной площадью сечения имеет другую структуру по сравнению с уравнением (1) для давления. Переход к замкнутому уравнению для давления возможен только приближенно, с учетом тех или иных слагаемых разного порядка малости. В наиболее простом варианте получаем следующее приближенное замкнутое уравнение для давления:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{S} \left(c_0^2 + \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (16)$$

Здесь член с переменной площадью сечения совпадает с аналогичным членом в уравнении (1), но вязкий член имеет другую структуру, нежели в уравнении (13). Таким образом, обобщенное уравнение Вебстера с учетом вязкости для звука в трубках, вообще говоря, отличается от вида (13), а диссипативные эффекты в трубках и в ограниченных пучках также различаются. Кроме того, различие уравнений (13)–(16) может сказаться на форме волновых профилей, формирующихся в трубке переменного сечения, и возможности нахождения точных аналитических решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами изучено прохождение волны в режиме туннелирования в узких трубках с переменным сечением специального вида. Учтено влияние присоединенной массы на границах области плавного сужения трубки. Выяснилось, что учет присоединенной массы ухудшает условия туннелирования волны: это проявляется в снижении коэффициента прохождения волны в диапазоне частот, где наблюдался режим туннелирования без учета присоединенной массы, а также в сокращении самого диапазона частот. Однако при учете присоединенной массы увеличивается интервал минимальных значений площади поперечного сечения, при которых возможно почти полное прохождение волны (коэффициент прохождения близок к единице). Показано, что увеличение присоединенной массы приводит к уменьшению коэффициента прохождения волны, тем самым поле искажается еще сильнее.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Webster A.G. // Proc. Nat. Acad. Sci. 1919. V. 5. P. 282.

2. *Eisner E.* // In: Physical Acoustics. V. 1. Part B. Ch. 6. N.Y.: Academic Press, 1964.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Курс теоретической физики. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
4. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд. МГУ, 1960.
5. *Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М.* Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2007.
6. *Руденко О.В., Шварцбург А.Б.* // Акуст. журн. 2019. Т. 61. № 1. С. 30.
7. *Руденко О.В., Шварцбург А.Б.* // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 452; *Rudenko O.V., Shvartsburg A.B.* // Acoust. Phys. 2010. V. 56. No. 4. P. 429.
8. *Розанов В.В., Руденко В.О., Сысоев П.Н.* // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 602; *Rozanov V.V., Rudenko V.O., Sysoev P.N.* // Acoust. Phys. 2009. V. 55. No. 4–5. P. 602.
9. *Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В.* // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 481; *Ibragimov N.Y., Rudenko V.O.* // Acoust. Phys. 2004. V. 50. No. 4. P. 406.
10. *Комаровский К.О., Гусев В.А.* // Тр. III Всеросс. акуст. конф. (Санкт-Петербург, 2020). С. 128.
11. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
12. *Ковалев В.Ф., Руденко О.В.* // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 296; *Kovalev V.F., Rudenko V.O.* // Acoust. Phys. 2012. V. 58. No. 3. P. 269.

Features of acoustic wave propagation in narrow pipes of variable cross-section, allowing for the added mass

V. A. Gusev*, K. O. Komarovskii

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

**e-mail: vgusev@bk.ru*

The phenomena arising during the propagation of acoustic waves in narrow tubes with variable cross-section are studied. A special law of cross-sectional variation has been defined for the tube. The mode of wave tunneling through narrowing is investigated. The influence of the added mass on the boundaries of the narrowing area of the tube is taken into account. The frequency dependences of the coefficient of wave transmission over energy are constructed taking into account the added mass.

Keywords: attached mass, wave tunneling, Webster equation, transmission coefficient