

О ВОЗМОЖНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЕДИНЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ В ПЛОСКОСТИ ДВУМЕРНОЙ СВЕРХРЕШЕТКИ НА ОСНОВЕ ГРАФЕНА

© 2025 г. С. Ю. Глазов^{1,*}, Н. Е. Мещерякова¹, И. Н. Федулов²

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный социально-педагогический университет», Волгоград, Россия

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет», Ханты-Мансийск, Россия

*E-mail: ser-glazov@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.11.2024 г.

После доработки 03.12.2024 г.

Принята к публикации 30.12.2024 г.

Исследована возможность распространения плоской уединенной электромагнитной волны в плоскости квадратной двумерной сверхрешетки на основе графена под различными углами к ее осям. Получено нелинейное уравнение, описывающее векторный потенциал уединенной электромагнитной волны для случая слабой неаддитивности энергетического спектра носителей заряда в бесстолкновительном приближении. Показано, что распространение плоских уединенных волн возможно либо вдоль осей сверхрешетки, либо под углом 45° к ним.

Ключевые слова: уединенные электромагнитные волны, солитоны, графен, двумерные сверхрешетки, уравнение синус–Гордона, двойное уравнение синус–Гордона.

DOI: 10.31857/S0367676525040228, EDN: GUNSUZ

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы получили развитие многочисленные исследования физических свойств структур на основе графена, в частности в оптике графеновых сверхрешеток (ГСР). Несмотря на то, что на сегодняшний день существуют определенные технологические сложности и ограничения в изготовлении графеновых сверхструктур, активно ведутся теоретические и экспериментальные исследования как одномерных [1–8], так и двумерных (2D) [9–16] ГСР и получено большое количество интересных результатов. Несомненно, в недалеком будущем графеновые сверхструктуры будут иметь важное практическое значение для генерации и усиления электромагнитных волн, в частности сверхкоротких уединенных электромагнитных волн (УЭВ) [17, 18]. В последнее время возник интерес к 2D ГСР, образуемой периодически чередующимися в шахматном порядке прямоугольными областями диоксида SiO_2 и карбида кремния SiC . В отличие от карбида кремния, диоксид кремния не влияет на энергетический спектр графена, в то время как карбид кремния вызывает появление в его спектре запрещенной зоны («щели») шириной приблизи-

тельно 0.26 эВ и вследствие чередования участков щелевой и бесщелевой модификаций графена возникает минизонный спектр. Модельный энергетический спектр такой 2D ГСР исследован в [5], а в работах [14–16] рассмотрены особенности распространения УЭВ. В статье [16] изучено взаимодействие плоских УЭВ, распространяющихся вдоль осей квадратной ГСР во взаимно перпендикулярных направлениях. В настоящей работе исследована возможность распространения плоской УЭВ вдоль произвольно выбранных направлений для квадратной 2D ГСР.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Спектр 2D ГСР, состоящей из чередующихся в шахматном порядке прямоугольных областей щелевого и бесщелевого графена, в одноминизонном приближении имеет вид [5]

$$\varepsilon(\vec{p}) = \pm \sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos(p_x d_1)) + \Delta_2^2 (1 - \cos(p_y d_2))}, \quad (1)$$

где p_x , p_y — проекции квазиимпульса электрона на оси СР, d_1 , d_2 — периоды 2D ГСР (здесь и да-

лее $\hbar = 1$). Непараболичность спектра двумерной графеновой сверхрешетки влечет за собой появление нелинейных свойств, в частности возможность распространения в ней УЭВ.

Эволюция УЭВ описывается уравнением д'Аламбера для векторного потенциала

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}(A_x, A_y) = 0, \quad (2)$$

где $V = c\chi^{-1/2}$ — скорость электромагнитной волны в отсутствии электронов, χ — эффективная диэлектрическая проницаемость среды. Векторный потенциал связан с напряженностью электрического поля $\vec{E} = -(1/c) \partial \vec{A} / \partial t$. При решении задачи мы выбираем кулоновскую калибровку векторного потенциала, а также пренебрегаем столкновениями.

Плотность электрического тока определяется в виде

$$\vec{j} = -e \sum n(\vec{p}) \vec{v} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right), \quad (3)$$

где $n(\vec{p})$ — функция распределения электронов, $v(\vec{p}) = (\partial \epsilon / \partial p_x, \partial \epsilon / \partial p_y)$ — скорость электронов.

Разлагая скорость электронов в двумерный ряд Фурье и предполагая электронный газ невырожденным, имеем выражение для плотности тока

$$\vec{j} = -\frac{en_0}{a} \times \left(\frac{\Delta_1^2 d_1}{\Delta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{nm} \sin(n\phi_x) \cos(m\phi_y), \right. \\ \left. \times \left(\frac{\Delta_2^2 d_2}{\Delta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{nm} \sin(n\phi_y) \cos(m\phi_x) \right) \right), \quad (4)$$

где n_0 — концентрация 2D электронов, a — толщина графена, $\vec{\phi} = \frac{e}{c} (A_x d_1, A_y d_2)$ — безразмерный векторный потенциал, $B_{nm} = a_{nm} I_{nm} / I_{00}$,

$$I_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(my) \exp \left[-\sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos(x)) + \Delta_2^2 (1 - \cos(y))} / kT \right] dx dy,$$

$$a_{nm} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x) \sin(nx) \cos(my) dx dy}{\sqrt{1 + \frac{\Delta_1^2}{\Delta_0^2} (1 - \cos(x)) + \frac{\Delta_2^2}{\Delta_0^2} (1 - \cos(y))}}.$$

C_{nm} вычисляется аналогично B_{nm} посредством разложения в ряд Фурье проекции скорости электронов на ось y .

В дальнейшем ограничимся частным случаем квадратной решетки $d_1 = d_2 = d$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$. В этом случае $B_{nm} = C_{nm}$.

В общем случае решение уравнения (2) с учетом плотности тока в виде (4) возможно только численно. Компоненты плотности тока вдоль осей x и y в общем случае отличны от нуля и результирующий вектор плотности тока сложным образом зависит от координат и времени. Однако можно показать, что в рассматриваемом нами случае квадратной симметричной сверхрешетки существуют такие значения угла θ между осью x и направлением распространения волны, при которых направление вектора плотности тока не будет меняться относительно направления векторного потенциала и, более того, совпадет с ним. В этом случае возможно введение новой системы координат, в которой одна из координатных осей совпадает с направлением вектора плотности тока, что автоматически означает равенство нулю перпендикулярной компоненты плотности тока в этой, новой системе координат. Тем самым возможно сведение (2+1)-размерной задачи к одномерной (1+1).

Выберем направление распространения плоской УЭВ под углом θ к оси x и обозначим его x' . Вследствие симметрии системы будем рассматривать углы θ , находящиеся в первой четверти квадранта. Геометрия задачи приведена на рис. 1. Перейдем к одномерному случаю, спроецировав (2) на ось y' и с учетом $\phi = \phi_{y'} = edA/c$, $\phi_{x'} = 0$, $\omega_0^2 = 2\pi e^2 n_0 \Delta^2 d^2 / c^2 \Delta_0$, получим

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \omega_0^2 \left(-\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{nm} \times \right. \\ \times \sin(n\phi_x) \cos(m\phi_y) + \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{nm} \times \\ \left. \times \sin(n\phi_y) \cos(m\phi_x) \right) = 0. \quad (5)$$

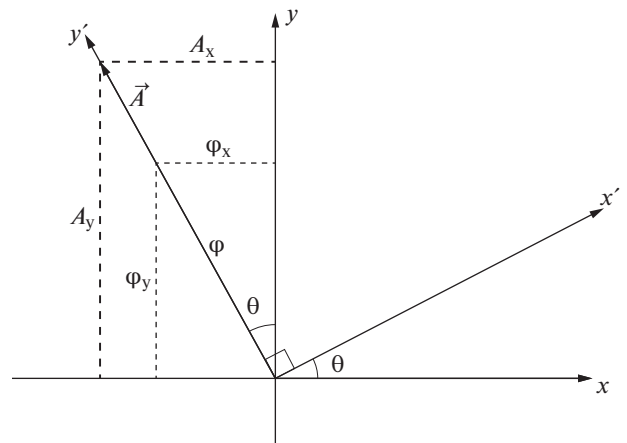


Рис. 1. Геометрия задачи.

Здесь проекция плотности тока на ось y' получена при помощи проекций плотности тока на оси x и y

$$j_{y'} = -j_x \sin \theta + j_y \cos \theta. \quad (6)$$

Связь между компонентами векторного потенциала в нештрихованной и штрихованной системах координат задается следующим образом: $\phi_x \cos \theta = -\phi_y \sin \theta$, $\phi_x = -\phi \sin \theta$, $\phi_y = \phi \cos \theta$.

Проекция уравнения (2) на направление распространения плоской УЭВ, на ось x' , приводит к условию $j_{x'} = 0$. В нашем случае векторный потенциал и плотность тока сонаправлены и перпендикулярны направлению распространения плоской волны. Проекцию плотности тока на ось x' также удобно выразить через проекции плотности тока на оси x и y

$$j_{x'} = j_x \cos \theta + j_y \sin \theta. \quad (7)$$

Из условия $j_{x'} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} & -\cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{nm} \times \\ & \times \sin(n\phi \sin(\theta)) \cos(m\phi \cos(\theta)) + \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{nm} \times \\ & \times \sin(n\phi \cos(\theta)) \cos(m\phi \sin(\theta)) = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Равенство (8) выполняется при произвольных ϕ при определенных значениях угла θ , соответствующих направлению распространения волны под углами 0° и 45° к осям ГСР. Таким образом, уравнение (5) описывает векторный потенциал плоской УЭВ, распространяющейся в квадратной ГСР под углами 0° и 45° к ее осям.

Рассмотрим случай слабой неаддитивности энергетического спектра, при котором можно ограничиться первыми слагаемыми в (5)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \omega_0^2 \left(B_{10} \sin(\phi \sin \theta) \left(1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2B_{11}}{B_{10}} \cos(\phi \cos \theta) \right) \sin \theta + B_{10} \sin(\phi \cos \theta) \left(1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2B_{11}}{B_{10}} \cos(\phi \sin \theta) \right) \cos \theta \right) = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Выполним переход к безразмерным переменным $\eta = x'\omega_0/V$, $\tau = t\omega_0$ и введем обозначение $\beta = 2B_{11}/B_{10}$. Окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \sin \theta \sin(\phi \sin \theta) (1 + \beta \cos(\phi \cos \theta)) + \\ & + \cos \theta \sin(\phi \cos \theta) (1 + \beta \cos(\phi \sin \theta)) = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

В случае, когда $\theta = 0$ или $\theta = \pi/2$, уравнение (10) соответствует уравнению синус–Гордона, а при выполнении условия

$\theta = \pi/4$ уравнение (10) принимает вид уравнения двойной синус–Гордона [14]. Таким образом, уравнение (10) описывает все возможные случаи распространения плоских уединенных волн в 2D симметричной квадратной ГСР (обобщенное уравнение синус–Гордона).

Будем искать решение уравнения (10) в виде бегущей волны, вводя переменную $\xi = (\eta - \frac{u}{V}\tau) / \sqrt{1 - \frac{u^2}{V^2}}$, где u – скорость кинка. После преобразований имеем

$$\begin{aligned} \phi''_{\xi\xi} = & \sin \theta \sin(\phi \sin \theta) (1 + \beta \cos(\phi \cos \theta)) + \\ & + \cos \theta \sin(\phi \cos \theta) (1 + \beta \cos(\phi \sin \theta)). \quad (11) \end{aligned}$$

Умножая обе части уравнения на производную ϕ'_ξ и далее однократно интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\xi} = & \left[2 \left(C - \cos(\phi \sin \theta) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos(\phi \cos \theta) (1 + \beta \cos(\phi \sin \theta)) \right) \right]^{1/2}. \quad (12) \end{aligned}$$

Константа C определяется из соображений равенства нулю производной потенциала при $\phi = 0$.

Фазовые портреты системы при различных значениях угла θ показаны на рис. 2 и 3. Жирные линии соответствуют сепаратрисам. Мы видим, что для значений углов $\theta = 0$ и $\theta = \pi/4$ фазовые траектории системы, соответствующие сепаратрисам, разделяющим области финитного (колебательного, если обратиться к аналогии маятника) и инфинитного (вращательного) движений, соответствуют существованию уединенных волн [19]. В случае углов θ , отличных от 0 , $\pi/4$ и $\pi/2$, соответствующие фазовые траектории не имеют периодического вида, как показано на рис. 3. Жирными линиями на рис. 3 показаны фазовые кривые, соответствующие уравнению (9), при начальном условии $\phi'_{\xi=0} = 0$. Анализ фазового портрета показывает, что данные фазовые кривые не разделяют области финитного и инфинитного движений и, следовательно, не являются сепаратрисами и поэтому, как и следовало ожидать, не могут задавать условия существования плоских уединенных волн вдоль соответствующих направлений относительно осей ГСР. Таким образом, плоские УЭВ в квадратной 2D ГСР могут распространяться лишь в направлениях главных осей или диагонали квадратной ГСР.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача о возможности распространения плоских УЭВ в плоскости 2D ГСР под различными углами к ее осям. Получено обобщенное уравнение синус–Гордона, описывающее распространение уединенного электромагнитного импульса вдоль определенных направлений в плоскости квадратной 2D ГСР со слабой

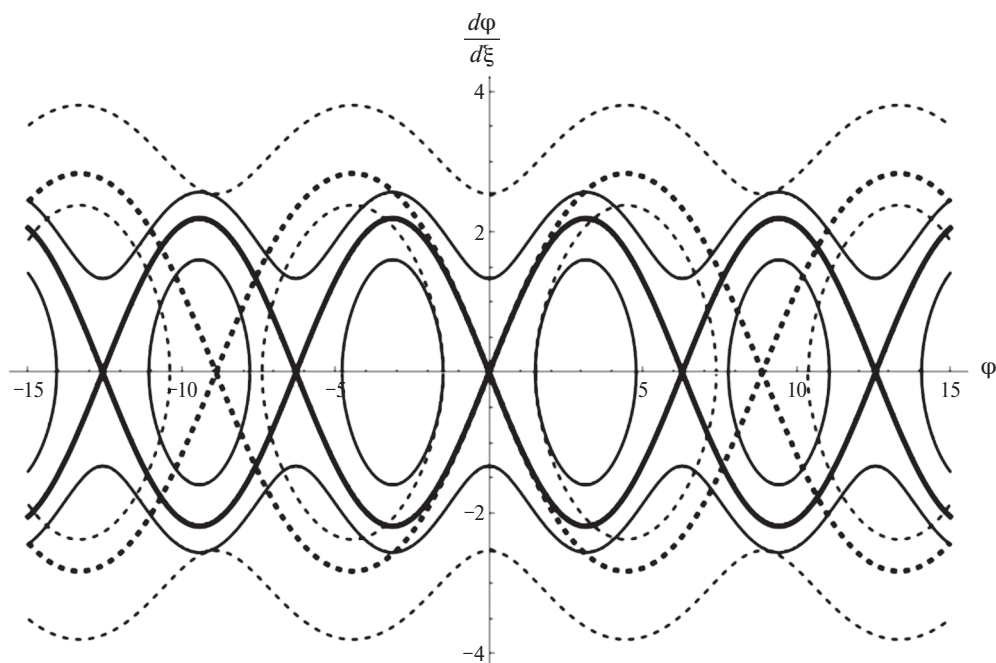


Рис. 2. Фазовый портрет системы при $\theta = 0$ (сплошные линии) и $\theta = \pi/4$ (пунктирные линии). Жирные линии соответствуют сепаратрисам.

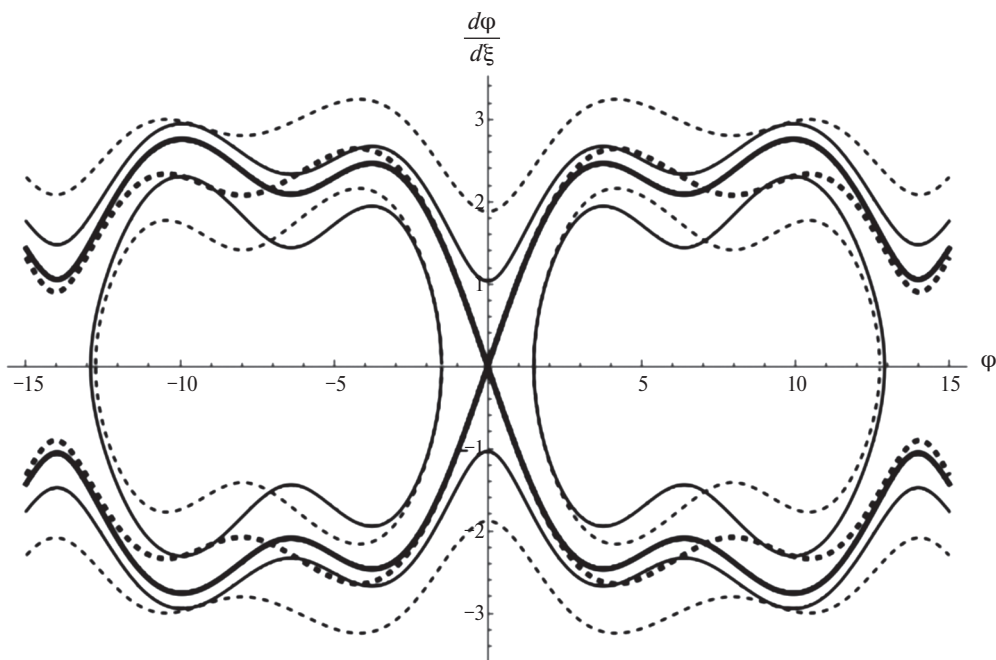


Рис. 3. Фазовый портрет системы при $\theta = \pi/8$ (сплошные линии) и $\theta = \pi/6$ (пунктирные линии).

неаддитивностью энергетического спектра в бесстолкновительном приближении. Исследованы фазовые портреты, соответствующие его решению и проанализированы условия существования УЭВ в рассматриваемой ГСР. На основании полученных результатов сделан вывод о том, что плоская УЭВ способна распространяться лишь под углами 0° и 45° осям квадратной ГСР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ратников П.В. // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90. № 6. С. 515; Ratnikov P.V. // JETP Lett. 2009. V. 90. № 6. P. 469.
2. Ratnikov P.V. // Phys. Rev. B. 2020. V. 101. Art. No. 125301.
3. Smirnova D.A., Shadrivov I.V., Smirnov A.I. et al. // Laser Photon. Rev. 2014. V. 8. P. 291.

4. *Bludov Yu.V., Smirnova D.A., Kivshar Yu.S. et al. // Phys. Rev. B. 2015. V. 91. Art. No. 045424.*
5. *Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I. // Physica B. 2013. V. 408. P. 188.*
6. *Martin-Vergara F., Rus F., Villatoro F.R. // Nonlin. Syst. 2018. V. 2. P. 85.*
7. *Кухарь Е.И., Крючков С.В., Ионкина Е.С. // ФТП. 2018. Т. 52. № 6. С. 620; Kukhar E.I., Kryuchkov S.V., Ionkina E.S. // Semiconduct. 2018. V. 52. No. 6. P. 766.*
8. *Завьялов Д.В., Конченков В.И., Крючков С.В. // ЖТФ. 2019. Т. 89. № 10. С. 1473; Zav'yalov D.V., Konchenkov V.I., Kryuchkov S.V. // Tech. Phys. 2019. V. 64. P. 1391.*
9. *Kryuchkov S.V., Popov C.A. // J. Nano- Electron. Phys. 2017. V. 9. No. 2. Art. No. 02013.*
10. *Forsythe C., Zhou X., Watanabe K. et al. // Nature Nanotechnol. 2018. V. 13. P. 566.*
11. *Zhang Y., Kim Y., Gilbert M.J. et al. // NPJ 2D Mater. Appl. 2018. V. 2. P. 31.*
12. *Бадикова П.В., Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 38; Badikova P.V., Glazov S.Yu., Syrodov G.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 1. P. 30.*
13. *Бадикова П.В., Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // ФТП. 2019. Т. 53. № 7. С. 927; Badikova P.V., Glazov S.Yu., Syrodov G.A. // Semiconductors. 2019. V. 53. No. 7. P. 911.*
14. *Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 128; Glazov S.Yu., Syrodov G.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 1. P. 98.*
15. *Glazov S.Yu., Syrodov G.A. // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1740. No. 1. Art. No. 012062.*
16. *Бабина О.Ю., Глазов С.Ю., Федулов И.Н. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 30; Babina O.Yu., Glazov S.Yu., Fedulov I.N. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 22.*
17. *Крючков С.В., Капля Е.В. // ЖТФ. 2003. Т. 48. № 5. С. 53; Kryuchkov S.V., Kaplya E.V. // Tech. Phys. 2003. V. 48. No. 5. P. 576.*
18. *Sun Z., Hasan T., Ferrari A.C. // Physica E. 2012. V. 44. P. 1082.*
19. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.*

On the possibility of propagating a solitary electromagnetic wave in arbitrary directions in the plane of a two-dimensional graphene-based superlattice

S. Yu. Glazov^{a,*}, N. E. Mescheryakova^a, I. N. Fedulov^b

^a*Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, 400005 Russia*

^b*Yugra State University, Khanty-Mansiysk, 628012 Russia*

*e-mail: ser-glazov@yandex.ru

The possibility of propagation of a plane solitary electromagnetic wave in the plane of a square two-dimensional graphene-based superlattice at various angles to its axes is investigated. A nonlinear equation describing the vector potential of a solitary electromagnetic wave is obtained for the case of weak nonadditivity of the energy spectrum of charge carriers in the collisionless approximation. It is shown that the propagation of plane solitary waves is possible either along the axes of the superlattice or at an angle of 45° to them.

Keywords: solitary electromagnetic waves, solitons, graphene, two-dimensional superlattices, sine-Gordon equation, double sine-Gordon equation.