

УДК 539.17.01:539.142:539.143

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ЯДРА ${}^9\text{Be}$ В АЛЬФА-КЛАСТЕРНОЙ МОДЕЛИ МЕТОДОМ ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2024 г. А. С. Бажин^{1,2,*}, В. В. Самарин^{1,2}

¹Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

²Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Университет «Дубна», Дубна, Россия

*e-mail: vichshizik@gmail.com

Поступила в редакцию 15.03.2024

После доработки 24.03.2024

Принята к публикации 29.04.2024

Энергия и квадрат модуля волновой функции основного состояния ядра ${}^9\text{Be}$, как системы из двух альфа-кластеров и внешнего нейтрона, вычислены методом гиперсферических функций. Система гиперрадиальных уравнений решена с использованием кубических сплайнов. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными для среднеквадратичного зарядового радиуса и распределения электрического заряда в ядре.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, гиперрадиальные уравнения, альфа-кластерная модель, метод кубических сплайнов

DOI: 10.31857/S0367676524080104, EDN: OQYFDL

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что ряд легких ядер могут быть представлены как состоящие из альфа-частиц (альфа-кластеров) и внешних (валентных) нуклонов [1, 2]. Структура ядер ${}^9\text{Be}$, ${}^{10}\text{Be}$ как систем, состоящих из двух α -кластеров и, соответственно, одного ($2\alpha + n$) и двух нейтронов ($2\alpha + 2n$) рассмотрена в работах [3, 4] с использованием фейнмановских интегралов по траекториям (континуальных интегралов). Было показано, что наиболее вероятной в ядре ${}^9\text{Be}$ является конфигурация ядерной “молекулы” с нейтроном между α -частицами. Простой в реализации с помощью параллельных вычислений метод фейнмановских интегралов по траекториям позволяет получить плотность вероятности системы нескольких взаимодействующих частиц в числовой форме (в форме многомерных таблиц). Это делает неудобным выполнение усреднений по возможным положениям частиц, в частности, при расчетах зарядовых распределений и среднеквадратичного зарядового радиуса. Поэтому в данной работе для нахождения волновой функции основного состояния трехтельной системы ${}^9\text{Be}$ ($\alpha + n + \alpha$) использовано разложение по гиперсферическим функциям [5]. Основной математической задачей метода гиперсферических функций является численное решение системы гиперсферических уравнений для функций, представляющих собой коэффициенты разложения по гиперсферическим гармоникам. В данной работе

для решения указанной задачи применен метод кубических сплайнов [6]. Он позволяет уменьшить число узлов радиальной сетки и находить значения функций между узлами с помощью гладкой интерполяции с обеспечением непрерывности функции вместе с ее первой и второй производными. Потенциал взаимодействия α -частиц был выбран в форме модифицированного потенциала, описывающего s -рассеяние низкоэнергетических α -частиц. Для описания взаимодействия нейтрона с α -частицей был использован псевдопотенциал, предложенный в работе [4]. Выполненные расчеты зарядовых распределений и среднеквадратичного зарядового радиуса дали согласие с экспериментальными данными

МЕТОД ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ТРЕХТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Гамильтониан системы, состоящей из двух α -кластеров и нейтрона с массами m_α и m_n , соответственно, в системе центра масс и при использовании векторов Якоби

$$\vec{R} = \vec{r}_{\alpha 2} - \vec{r}_{\alpha 1}, \quad \vec{r} = \vec{r}_n - \frac{\vec{r}_{\alpha 1} + \vec{r}_{\alpha 2}}{2}, \quad (1)$$

имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\vec{R}} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\vec{r}} + V_{\alpha-\alpha}(R) + V_{\alpha-n}(r_1) + V_{\alpha-n}(r_2), \quad (2)$$

где

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_n}, \quad M = \frac{m_\alpha}{2}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_n} + \frac{1}{2m_\alpha},$$

$$\mu = \frac{2m_\alpha m_n}{2m_\alpha + m_n}, \quad (3)$$

$V_{\alpha-\alpha}$ и $V_{\alpha-n}$ — потенциальные энергии взаимодействия, соответственно, α -частиц друг с другом и α -частицы с нейтроном,

$$r_1 = |\vec{r}_n - \vec{r}_{\alpha 1}| = \left| \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{R} \right|, \quad r_2 = |\vec{r}_n - \vec{r}_{\alpha 2}| = \left| \vec{r} + \frac{1}{2} \vec{R} \right|. \quad (4)$$

Уравнение Шредингера с гамильтонианом (2) для системы в векторах Якоби имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\vec{R}} \Psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\vec{r}} \Psi + [V_{12}(R) + V_{13}(\rho_1) + V_{23}(\rho_2)] \Psi = E \Psi. \quad (5)$$

При переходе к нормированным координатам Якоби с использованием величин (3)

$$\vec{x} = \vec{R} \sqrt{\frac{1}{m_0 x_0^2}} \sqrt{\frac{m_\alpha}{2}}, \quad \vec{y} = \vec{r} \sqrt{\frac{1}{m_0 x_0^2}} \sqrt{\frac{2m_\alpha m_n}{2m_\alpha + m_n}}, \quad (6)$$

уравнение Шредингера (5) для системы примет простую форму

$$-\Delta_{\vec{x}} \Psi - \Delta_{\vec{y}} \Psi + 2b_0 [\tilde{V}_{12}(R) + \tilde{V}_{13}(\rho_1) + \tilde{V}_{23}(\rho_2)] \Psi = 2b_0 \tilde{E} \Psi, \quad (7)$$

где $b_0 = m_0 x_0^2 \varepsilon_0 / \hbar^2 \approx 0.02392$, $m_0 = 1$ а. е. м., $x_0 = 1$ фм, $\varepsilon_0 = 1$ МэВ, $E = E/\varepsilon_0$, $\tilde{V}(\rho) = V(\rho)/\varepsilon_0$.

ядра ${}^9\text{Be}$ полный момент равен нулю $L = 0$ (его проекция также нулевая $M = 0$), поэтому $l_x = l_y = l$ и разложение производится по функциям

$$\Phi_n^l(\Omega) = \frac{1}{2^{l_x}} N_n^l (\sin 2\alpha)^l P_n^{l+1/2, l+1/2}(\cos 2\alpha) \times \sum_{m_x} (l m m_y = -m | 00) Y_{lm}(\theta_x, \varphi_x) Y_{l-m}(\theta_y, \varphi_y). \quad (9)$$

Здесь $(l_x l_y m_x m_y | LM)$ — коэффициенты Клебша—Гордона, $P_n^{l+1/2, l+1/2}$ — полиномы Якоби порядка n (n — целое число), гипермомент K равен

$$K = 2n + 2l_x, \quad (10)$$

и нормировочный коэффициент определяется формулой

$$N_n^l = \frac{2n!(2l+2n+2)(n+2l+1)!}{\sqrt{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}}, \quad (11)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Функции $\Phi_{K00}^l(\Omega)$ (9) фактически зависят лишь от угла α и угла θ между векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$

$$\Phi_n^l(\alpha, \theta) =$$

$$= \frac{1}{2^l} N_n^l (\sin 2\alpha)^l P_n^{l+1/2, l+1/2}(\cos 2\alpha) \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(\cos \theta). \quad (12)$$

Волновая функция Ψ_0 основного состояния системы, состоящей из двух α -кластеров и нейтрона, представляет собой ряд с суммированием по l , n в котором функции $\chi_n^l(\rho)$ определяются из системы гиперрадиальных уравнений

$$\Psi_0(\alpha, \theta, \rho) = \sum_{ln} \chi_n^l(\rho) \rho^{-5/2} (\sin \alpha \cos \alpha)^l N_n^l P_n^{l+1/2, l+1/2}(\cos 2\alpha) \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(\cos \theta), \quad (13)$$

Волновую функцию Ψ системы в шестимерном пространстве векторов Якоби $(\vec{x}, \vec{y})$ представляют в виде, зависящем от гиперрадиуса $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, четырех углов θ_x , φ_x , θ_y , φ_y единичных векторов $(\hat{x}, \hat{y})$ в направлениях нормированных векторов Якоби $(\vec{x}, \vec{y})$ и пятого угла α , определяемого отношением длин этих векторов,

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) представляют в виде разложения по известным гиперсферическим функциям, зависящих от углов $\Omega = (\alpha, \theta_x, \varphi_x, \theta_y, \varphi_y)$ и квантовых чисел: L — полного момента, l_x , l_y — орбитальных моментов относительного движения пары α -кластеров и движения нейтрона относительно центра масс пары и гипермомента K [5]. У основного состояния

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \chi_n^l(\rho) + \left[2\tilde{E}b_0 - \frac{1}{\rho^2} (K+3/2)(K+5/2) \right] \chi_n^l(\rho) = 2b_0 \sum_{n'l'} \tilde{U}_{nn'}^{l:l'}(\rho), \quad (14)$$

с граничными условиями

$$\chi_n^l(0) = 0, \quad \chi_n^l(\rho) \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (15)$$

и матрицей связи каналов

$$\tilde{U}_{nn'}^{l:l'}(\rho) = \langle l n 0 | \tilde{U} | l' n' 0 \rangle. \quad (16)$$

Для вычисления матрицы связи (16)

$$\tilde{U}_{n;n'}^{l:l'}(\rho) = \int d\Omega \Phi_{n'}^{l'l'*} \tilde{U} \Phi_n^l = \int_0^{\pi/2} d\alpha \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \int_0^\pi d\theta \sin \theta \Phi_{n'}^{l'l'*} \tilde{U} \Phi_n^l \quad (17)$$

с потенциальной энергией системы, включающей парные взаимодействия

$$U = V_{\alpha-\alpha}(R) + V_{\alpha-n}\left(\left|\frac{1}{2}\vec{R} - \vec{r}\right|\right) + V_{\alpha-n}\left(\left|\frac{1}{2}R + \vec{r}\right|\right),$$

$$\tilde{U} = U/\epsilon_0, \quad (18)$$

были использованы квадратурные формулы Гаусса порядка от 32 до 80.

ПРИМЕНЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГИПЕРРАДИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кубические сплайны позволяют не только построить гладкую функцию по ее значениям f_i в узлах сетки, но и выразить значения второй производной $m_i = f''(x_i)$ в узлах сетки через f_i

$$Am = HF, \quad (19)$$

где F — столбец значений f_i , а явный вид матриц A и H приведен в [6]. Это дает удобную возможность сведения краевой дифференциальной задачи к задаче на собственные значения матрицы. Краевая задача для системы N гиперрадиальных уравнений (14) также сводится к задаче на собственные значения и собственные вектора блочной матрицы [4]

$$BF = \lambda F, \quad B = -A^{-1}HF + WF, \quad \lambda = \frac{2\mu}{\hbar^2}E, \quad (20)$$

где

$$W_{i,i} = 2b_0 \tilde{U}_{KK'}^{l_x:l_x'}(\rho_i) +$$

$$+ \frac{1}{\rho_i^2} (K + 3/2)(K + 5/2) \delta_{K,K'} \delta_{l_x:l_x'}, \quad (21)$$

$$A_{i,i} = I \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, \quad A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = I \frac{h_{i+1}}{6}, \quad (22)$$

$$H_{i+1,i} = H_{i,i+1} = I \frac{1}{h_{i+1}}, \quad H_{i,i} = -I \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right), \quad (23)$$

$$F_i = \chi_K^{l_x}(\rho_i), \quad i = 1, \dots, n_p - 1, \quad (24)$$

I — квадратная единичная матрица порядка N и $h_i = \rho_i - \rho_{i-1}$, $i = 1, \dots, n_p$, $\rho_0 = 0$, $\rho_{n_p} = \rho_{\max}$. В общем случае метод может применяться на неравномерной сетке ρ_i , в данной работе была использована равномерная сетка $\rho_i = ih$, $i = 0, \dots, n_p$. Для поиска собственных значений и векторов матрицы в задаче (20) были использованы QR и QL-методы [9], расчеты проводились с помощью пакетного решения NVIDIA CUDA [10]. Часть расчетов были выполнены на гетерогенном кластере Лаборатории информационных технологий ОИЯИ [11].

Взаимодействие α -частицы с нейтроном $V_{\alpha-n}(r)$ было представлено псевдопотенциалом

$$V_{\alpha-n}(r) = -U_{n1}f(r, B_{n1}, a_{n1}) +$$

$$+ U_{n2}f(r, B_{n2}, a_{n2}) - U_{n3}f(r, B_{n3}, a_{n3})f(r, B_{n4}, a_{n4}). \quad (25)$$

Псевдопотенциалы используются в физике металлов для описания взаимодействия валентных электронов с атомными остовами и приближенного расчета внешней части электронной волновой функции, лежащей вне атомного остова. Аналогично псевдопотенциал (25) использован в данной работе для расчета внешней части нейтронной волновой функции, лежащей вне внутренней части α -частицы, занятой тесно расположенными парами протонов и нейтронов. График псевдопотенциала (25) показан на рис. 1а. Приведем значения параметров потенциала (25), предложенных в работе [4]:

$$U_{n1} = 64.8 \text{ МэВ}, \quad B_{n1} = 1.95 \text{ фм}, \quad a_{n1} = 0.25 \text{ фм}, \quad (26)$$

$$U_{n2} = 55.8 \text{ МэВ}, \quad B_{n2} = 1.22 \text{ фм}, \quad a_{n2} = 0.3 \text{ фм}, \quad (27)$$

$$U_{n3} = 107 \text{ МэВ}, \quad B_{n3} = 0.9 \text{ фм}, \quad a_{n3} = 0.5 \text{ фм},$$

$$B_{n4} = 2.7 \text{ фм}, \quad a_{n4} = 1 \text{ фм}, \quad (28)$$

Для описания рассеяния α -частиц при низких энергиях используется потенциал Али-Бодмера [8] с ядерной частью в виде

$$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) = v_1 \exp(-r^2/a_1^2) - v_2 \exp(-r^2/a_2^2) \quad (29)$$

и для кулоновской части $V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r)$, аппроксимированной с помощью функции ошибок $\text{erf}(x)$,

$$V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r) = a_C \text{erf}(b_C r)/r, \quad (30)$$

где $b_C = 0.601 \text{ фм}^{-1}$, $a_C = Z_\alpha^2 e^2 / x_0 = 5.759 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}$ [8]. Значения параметров ядерной части потенциала, определенные из условия близости теоретических и экспериментальных значений фазы s-рассеяния, составляют [8]:

$$v_1 = 125 \text{ МэВ}, \quad a_1^2 = 2.3409 \text{ фм}^2, \quad v_2 = 30.18 \text{ МэВ},$$

$$a_2^2 = 8.1225 \text{ фм}^2. \quad (31)$$

График потенциала взаимодействия α -частиц в форме Али-Бодмера

$$V_{\alpha-\alpha}(r) = V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) + V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r) \quad (32)$$

показан на рис. 1б. Ядерная часть потенциала (32) имеет сильно отталкивательную центральную часть (кор), которую можно объяснить следствием усредненного действия отталкивательного кора нуклон-нуклонного взаимодействия и принципом Паули.

Взаимодействие α -кластеров в составе стабильного ядра ${}^9\text{Be}$, вообще говоря, может отличаться от взаимодействия при столкновениях α -частиц, длящегося в течение достаточно короткого промежутка

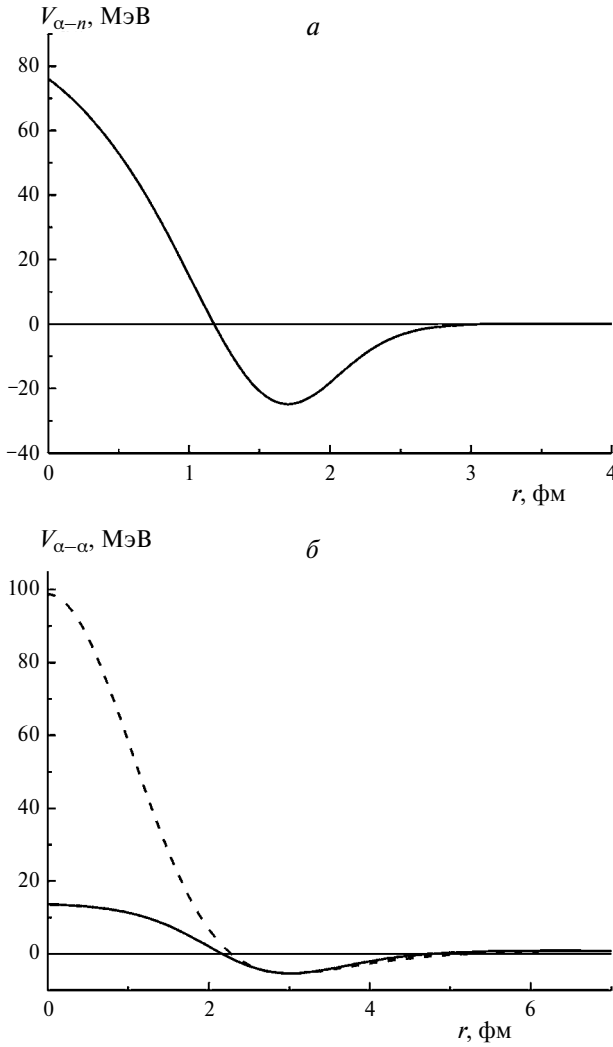


Рис. 1. Графики псевдопотенциала взаимодействия α -частицы с нейтроном $V_{\alpha-n}(r)$ (а) и потенциала взаимодействия α -частиц $V_{\alpha-\alpha}(r)$ (б): потенциала Али-Бодмера (29) (штриховая кривая) и потенциала (33) с параметрами (42), (43) (сплошная кривая).

времени (времени пролета). Для получения бóльших возможностей видоизменения взаимодействия удобно использовать предложенную в работе [4] форму с шестью параметрами

$$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) = -U_{\alpha 1} f(r, B_{\alpha 1}, a_{\alpha 1}) + U_{\alpha 2} f(r, B_{\alpha 2}, a_{\alpha 2}) \quad (33)$$

и функцией $f(r, B, a)$ типа Вудса–Саксона (фермиевского распределения)

$$f(r, B, a) = \left[1 + \exp\left(\frac{r - B}{a}\right) \right]^{-1}, \quad (34)$$

вместо гауссовых экспонент в потенциале Али-Бодмера. В ходе расчетов проводилось варьирование параметров потенциала (33) для обеспечения близости теоретических и экспериментальных значений энергии E_0 основного состояния системы ($\alpha + n + \alpha$),

равной энергии ее разделения на составляющие с противоположным знаком, $E_0 = -E_s$. Экспериментальное значение E_s равно энергии отделения нейтрона $E_s = 1.66452$ МэВ (см., например, [12]), поскольку ядро ${}^8\text{Be}$ не связанное. Среднеквадратичный зарядовый радиус системы $\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle$ определяется среднеквадратичным зарядовым радиусом распределения заряда в α -кластере, который считался таким же, как и для α -частицы $\langle r_{\text{He}}^2 \rangle$, и среднеквадратичным радиусом распределения центров α -кластеров $\langle r_{\alpha}^2 \rangle$

$$\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle = \langle r_{\alpha}^2 \rangle + \langle r_{\text{He}}^2 \rangle, \quad (35)$$

$$\langle r_{\alpha}^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty R^2 dR \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi |\Psi|^2 R_{\alpha}^2 \sin(\theta) d\theta}{\int_0^\infty R^2 dR \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi |\Psi|^2 \sin(\theta) d\theta}, \quad (36)$$

где R_{α} – расстояние между α -частицей и центром масс-системы,

$$R_{\alpha}^2 = \left(\frac{1}{2} \vec{R} + \vec{r} \frac{1}{9} \right)^2 = \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{9} Rr \cos \theta + \frac{1}{81} r^2. \quad (37)$$

Расчеты волновой функции основного состояния Ψ_0 позволяют найти $\langle r_{\alpha}^2 \rangle$, а среднеквадратичные зарядовые радиусы ядер ${}^4\text{He}$ и ${}^9\text{Be}$ равны $\langle r_{\text{He}}^2 \rangle^{1/2} = 1.68$ фм, $\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle^{1/2} = 2.52$ фм (см., например, [12]). Использование распределения электрического заряда $\rho_{\text{He}}(r)$ в ядре ${}^4\text{He}$ позволяет рассчитать распределение электрического заряда в ядре ${}^9\text{Be}$. Экспериментально измеренные распределения $\rho(r)$ электрического заряда в ядрах ${}^4\text{He}$ и ${}^9\text{Be}$ [13, 14], удовлетворяющие условию нормировки с величиной атомного номера ядра Z

$$Z = \int \rho(r) d^3 r. \quad (38)$$

показаны на рис. 2а и 2б. На рис. 2а для ядра ${}^4\text{He}$ зарядовое распределение аппроксимировано функцией

$$\rho_{\text{He}}(r) = \frac{\rho_1}{1 + 2 \exp\left(-\frac{b}{a}\right) \left[\text{ch}\left(\frac{r}{a}\right) - 1 \right]} + \rho_2 \exp\left(-\frac{(r - c)^2}{d^2}\right), \quad (39)$$

где

$$\rho_1 = 0.112 \text{ фм}^{-3}, \quad \rho_2 = 0.0073 \text{ фм}^{-3}, \quad (40)$$

$$a = 0.367 \text{ фм}, \quad b = 1.32 \text{ фм}, \quad c = 0.762 \text{ фм}, \quad d = 0.5 \text{ фм}. \quad (41)$$

Величины E_0 , $\langle r_{\alpha}^2 \rangle^{1/2}$, $\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle^{1/2}$ и распределение электрического заряда в ядре ${}^9\text{Be}$ были рассчитаны для потенциала Али-Бодмера (29) с фиксированными параметрами и для потенциала (33) с варьируемыми параметрами. Достаточно хорошее согласие

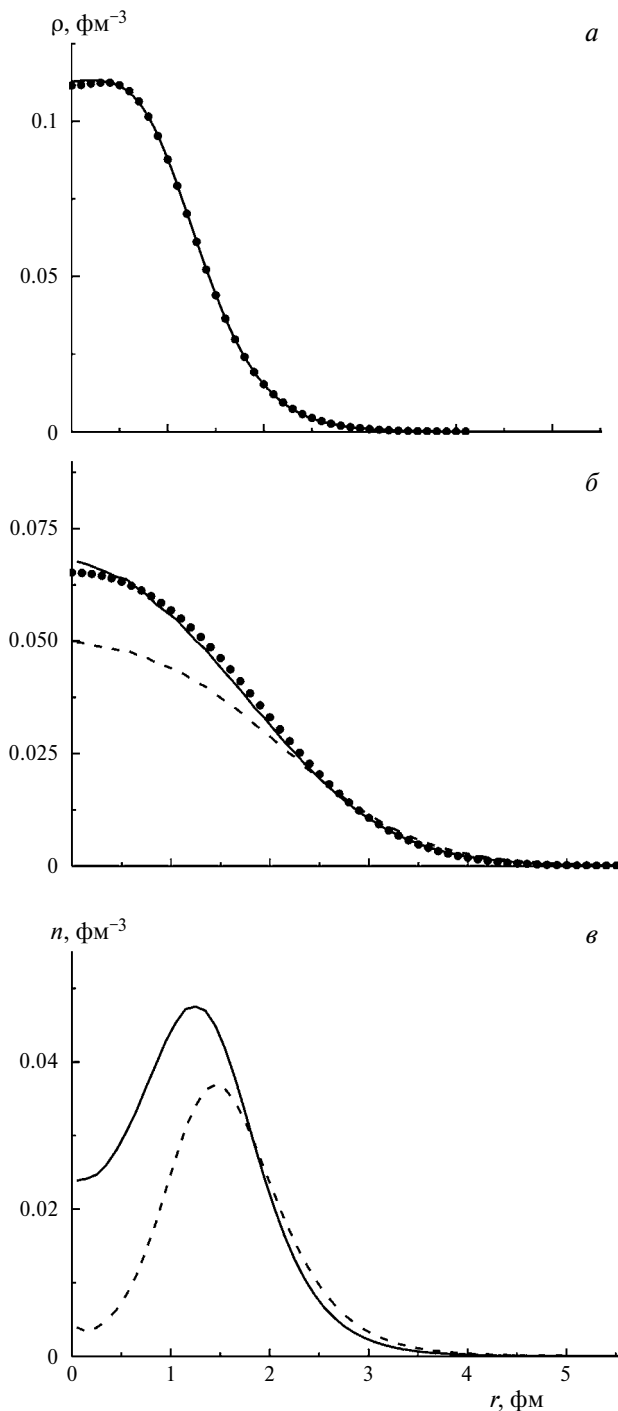


Рис. 2. Плотность $\rho_{\text{He}}(r)$ распределения электрического заряда (в единицах элементарного заряда) в ядре ${}^4\text{He}$ (а): экспериментальные данные из работы [13] (точки) и их аппроксимация (39) (кривая). Плотность $\rho(r)$ распределения электрического заряда (в единицах элементарного заряда) в ядре ${}^9\text{Be}$ (б): экспериментальные данные из работы [14] (точки) и расчеты для потенциалов $V_{\alpha-\alpha}(r)$ взаимодействия α -частиц Али-Бодмера (29) (штриховая кривая), и взаимодействия α -кластеров (33) (сплошная кривая). Функции распределения по радиусам r_1 центров α -кластеров для потенциала (33) (сплошная кривая) и потенциала Али-Бодмера (29) (штриховая кривая) (в).

с экспериментальными данными получено при следующих значениях параметров:

$$U_{\alpha 1} = 17.3 \text{ МэВ}, U_{\alpha 2} = 27.25 \text{ МэВ}. \quad (42)$$

$$B_{\alpha 1} = 3.3 \text{ фм}, B_{\alpha 2} = 2.1 \text{ фм}, a_{\alpha 1} = 0.58 \text{ фм}, \\ a_{\alpha 2} = 0.48 \text{ фм}, \quad (43)$$

График потенциала $V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r)$ взаимодействия α -кластеров в ядре ${}^9\text{Be}$ показан на рис. 16. На рис. 2б показаны полученные для потенциала (33) и потенциала Али-Бодмера (29) зарядовые распределения $\rho(r)$ в ядре ${}^9\text{Be}$

$$\rho(r) = \int n(r_1) \rho_{\text{He}}(|\vec{r} - \vec{r}_1|) d\vec{r}_1. \quad (44)$$

Здесь $n(r_1)$ — функция распределения по радиусам r_1 центров α -частиц, нормированная условием

$$\int n(r) d^3r = 2, \quad (45)$$

показана на рис. 2в для потенциала (33) и потенциала Али-Бодмера (29). Функция $n(r_1)$ определяется выражением

$$n(r_1) = \quad (46)$$

$$= 2 \int dR R^2 \int dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\Psi_0(R, r, \theta)|^2 \delta(r_1 - R_\alpha(R, r, \theta)),$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, волновая функция $\Psi_0(R, r, \theta)$ зависящая от модулей векторов Якоби и угла между ними, нормирована условием

$$\int dR R^2 \int dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\Psi_0(R, r, \theta)|^2 = 1, \quad (47)$$

а область интегрирования по переменным R, r задается интервалом значений гиперрадиуса $0 < \rho(R, r) \leq \rho_{\text{max}}$. При численных расчетах дельта-функция Дирака заменялась на столбчатую функцию

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta r}, & \text{при } |r| \leq \frac{\Delta r}{2}, \\ 0, & \text{при } |r| > \frac{\Delta r}{2}. \end{cases} \quad (48)$$

Результаты расчета энергии E_0 основного состояния системы $(\alpha + n + \alpha)$ и среднеквадратичных радиусов $\langle r_\alpha^2 \rangle^{1/2}$, $\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle^{1/2}$ для потенциала Али-Бодмера (29) и для потенциала (33) с параметрами (42), (43) приведены в таблице 1. По рис. 2б видно, что применение потенциала Али-Бодмера не дает правильного распределения заряда и приводит к значениям E_0 и $\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle^{1/2}$ заметно отличающимися от экспериментальных. При использовании потенциала (33) удалось добиться лучшего согласия с экспериментальными данными для энергии и распределения заряда. Небольшое превышение значения для среднеквадратичного зарядового радиуса можно объяснить использованием зарядового распределения в свободном ядре ${}^4\text{He}$, отличающегося от зарядового распределения

Таблица 1. Результаты расчета при $\rho_{\max} = 30$ фм, $h = 0.2$ фм энергии E_0 основного состояния системы $(\alpha + n + \alpha)$ и среднеквадратичных радиусов $\langle r_\alpha^2 \rangle^{1/2}$, $\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle^{1/2}$ для потенциала Али-Бодмера (29) и для потенциала (33) с параметрами (42), (43); экспериментальные значения равны $E_0 = -1.664$ МэВ и $\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle^{1/2} = 2.52$ фм (см., например, [12])

Параметр		E_0 , МэВ		$\langle r_\alpha^2 \rangle^{1/2}$, фм		$\langle r_{\text{Be}}^2 \rangle^{1/2}$, фм	
$n_{\max}$	$l_{\max}$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(29)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(33)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(29)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(33)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(29)$	$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(33)$
2	2	-0.5814	-0.9979	2.3260	2.0577	2.7875	2.6466
4	4	-1.0813	-1.4824	2.2333	2.0	2.7854	2.6020
6	6	-1.2378	-1.6135	2.2308	2.0079	2.7834	2.6081
8	8	-1.2815	-1.6471	2.2418	2.0160	2.7922	2.6144
10	10	-1.2949	-1.6562	2.2502	2.0237	2.7989	2.6203
12	12	-1.2993	-1.6591	2.2530	2.0266	2.8012	2.6225

в α -кластерах ядра ${}^9\text{Be}$. Более точный вид (33) взаимодействия α -кластеров в ядре ${}^9\text{Be}$ отличается более мягким отталкивательным кором, в отличие от потенциала Али-Бодмера для сталкивающихся α -частиц в области малых расстояний между центрами α -кластеров $r \leq 2$ фм. Это позволяет судить о видоизменении α -кластеров в ядре ${}^9\text{Be}$ по сравнению со свободными α -частицами, в частности, об их поляризации, деформации и взаимном перекрытии.

Структуру ядра ${}^9\text{Be}$ дают картины плотности вероятности для трехтельной волновой функции, представленные на рис. 3. Показана плотность вероятности $|\Psi_0|^2$ для двух значений угла между векторами Якоби $\theta = \pi/2$ и $\theta = 0$ в сочетании с потенциальным рельефом. Соответствие между плотностью вероятности и потенциальным рельефом, в частности, наличие локальных максимумов $|\Psi_0|^2$ вблизи локальных минимумов потенциальной энергии свидетельствует о правильности выполненных расчетов. Наиболее вероятной является трехтельная конфигурация с валентным нейтроном между α -частицами при расстоянии между их центрами $x = |\vec{r}_{\alpha_2} - \vec{r}_{\alpha_1}| \approx 3$ фм, что соответствует окрестности минимума потенциала $V_{\alpha-\alpha}(r)$ (рис. 1б). Представленные на рис. 3 распределения плотности вероятности, согласуются с представлениями о структуре ядра ${}^9\text{Be}$ как о ядерной молекуле, состоящей из двух α -частиц (α -кластеров) и внешнего (валентного) нейтрона [3, 4]. Полученные результаты соответствуют приведенным в работах [3, 4] картинам относительного расположения α -кластеров и нейтрона и уточняют пространственные параметры этой ядерной молекулы.

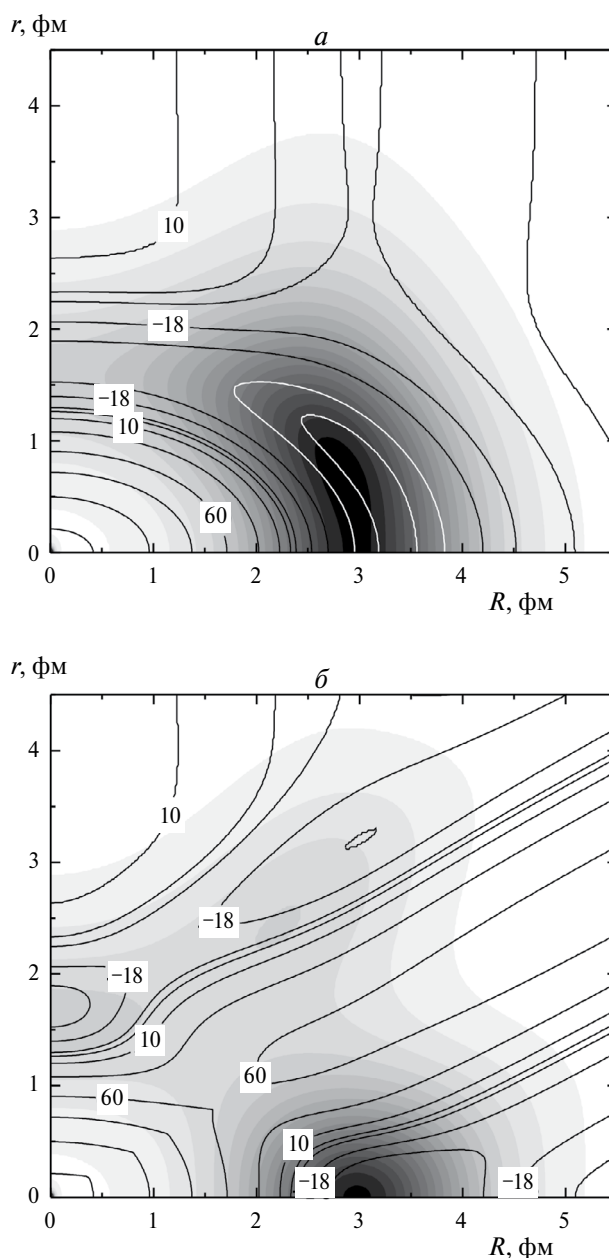


Рис. 3. Плотность вероятности $|\Psi_0(R, r, \cos\theta)|^2$ (градации серого в линейном масштабе) для двух значений угла между векторами Якоби $R, \vec{r}$: $\theta = \pi/2$ (а) и $\theta = 0$ (б), вычисленная для $n_{\max} = 14$, $l_{\max} = 14$, $\rho_{\max} = 30$ фм, $h = 0.2$ фм, вместе с линиями уровня потенциальной энергии системы. В разрывах некоторых линий уровня показаны значения потенциальной энергии системы U (18).

Применение сплайн-интерполяции позволяет построить гладкие решения на всем интервале $(\rho_{\min}, \rho_{\max})$ даже при не очень малом шаге сетки h . Результаты численного решения гиперрадиальных уравнений с использованием интерполяции кубическими сплайнами показаны на рис. 4 для $h = 1$ фм.

Сходимость результатов к точному значению энергии энергия отделения нейтрона от ядра ${}^9\text{Be}$, близкому к экспериментальному значению $E_0 = -1.664$ МэВ (см., например, [12]), продемонстрирована в табл. 1 и 2.

Таблица 2. Таблица значений энергии (в МэВ) основного состояния системы из двух α -кластеров и нейтрона (или энергия отделения нейтрона от ядра ${}^9\text{Be}$) при разном шаге h и разных максимальных значениях квантовых чисел $n_{\max}, l_{\max}$ при $\rho_{\max} = 30$ фм

$n_{\max}$	$l_{\max}$	h , фм		
		1	0.5	0.2
4	4	−1.4160	−1.4661	−1.4824
8	8	−1.5800	−1.6307	−1.6471
12	12	−1.5925	−1.6429	−1.6591
16	16	−1.5939	−1.6442	−1.6602

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод решения гиперрадиальных уравнений может быть полезен для исследования трехтелных систем в ядерной и атомной физике. Для ядра ${}^9\text{Be}$ он позволил рассчитать энергию отделения нейтрона, среднеквадратичный зарядовый радиус, зарядовое распределение и получить согласие с экспериментальными значениями.

Авторы выражают благодарность команде гетерогенного кластера лаборатории информационных технологий ОИЯИ за содействие выполнению трудоемких компьютерных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Von Oertzen W., Freer M., Kanada En'yo Y. // Phys. Reports. 2006. V. 432. P. 43.
2. Freer M. // Rep. Progr. Phys. 2007. V. 70. P. 2149.
3. Самарин В.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. С. 1187; Samarin V.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. P. 981.
4. Samarin V.V. // Eur. Phys. J. A. 2022. V. 58. P. 117.
5. Джибути Р.И., Шитикова К.В. Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1993.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. 1980.
7. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 608 с.
8. Ali S., Bodmer A.R. // Nucl. Phys. 1966. V. 80. P. 99.
9. Уилкинсон Р. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ: Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976.
10. Сандерс Д., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических

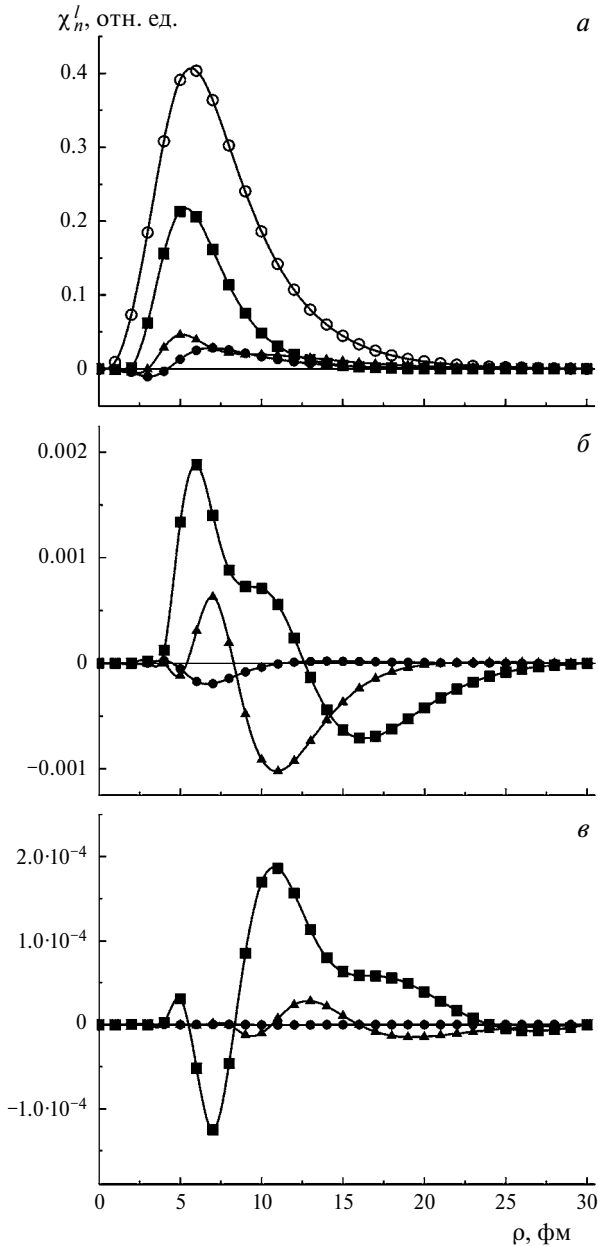


Рис. 4. Примеры решений системы гиперрадиальных уравнений (14) для $n_{\max} = 16, l_{\max} = 16, \rho_{\max} = 30$ фм, $h = 1$ фм.: значения функций $\chi_n^l(\rho)$ в узлах сетки – символы: кружки для $n = l = 0$, квадраты для $n = 1, l = 0$, точки для $n = 0, l = 2$, треугольники для $n = 1, l = 2$ (а); квадраты для $n = 8, l = 0$, точки для $n = 0, l = 8$, треугольники для $n = 1, l = 8$ (б); квадраты для $n = 16, l = 0$, точки для $n = 0, l = 16$, треугольники для $n = 1, l = 16$ (в); результаты интерполяции кубическими сплайнами между узлами – кривые.

- процессоров. М.: ДМК, 2011; Sanders J., Kandrot E. CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming. N.Y.: Addison-Wesley Professional, 2010.
11. <http://hybrilit.jinr.ru>
12. <http://nr.v.jinr.ru>
13. Jansen I.A., Peerdeman R. Th., de Vries C. // Nucl. Phys. 1972. V. A188. P. 337.
14. Sick I. // Phys. Lett. V. 116B. P. 212.

Study of structure of ${}^9\text{Be}$ nucleus in alpha-cluster model by hyperspherical functions method

A. S. Bazhin^{1,2,*}, V. V. Samarin^{1,2}

¹Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980, Russia

²Dubna State University, Dubna, 141982, Russia

*e-mail: vichshizik@gmail.com

The energy and the square modulus of wave function of the ground state of the ${}^9\text{Be}$ nucleus as the system of two alpha-clusters and the outer neutron are calculated using hyperspherical functions. The system of hyperradial equations was solved using cubic spline method. The charge distribution and the root mean square charge radius for the ${}^9\text{Be}$ nucleus were calculated and agreement with the experimental distribution was obtained.

Keywords: Schrödinger equation, hyperradial equations, alpha-cluster model, cubic spline method