ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2023, том 87, № 10, с. 1478–1481

УДК 517.957

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМАХ СО СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ АТТРАКТОРА

© 2023 г. А. А. Тарасова[1, *], О. И. Москаленко[1]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”, Саратов, Россия*

**E-mail: tarasova121200@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.04.2023 г.
После доработки 22.05.2023 г.
Принята к публикации 28.06.2023 г.

Исследовано перемежающееся поведение вблизи границы фазовой синхронизации для систем со сложной топологией аттрактора. С помощью расчета статистических характеристик длительностей ламинарных фаз установлено, что в случае относительно слабой расстройки между системами на границе фазовой синхронизации имеет место перемежаемость “игольного ушка”.

DOI: 10.31857/S0367676523702587, **EDN:** PSCOIR

ВВЕДЕНИЕ

Феномен хаотической синхронизации является одним из наиболее интересных и важных явлений современной теории колебаний, привлекающих пристальное внимание большого количества ученых [1–3]. Интерес к этому явлению обусловлен как его фундаментальностью, так и широким спектром практических применений.

Одним из типов хаотической синхронизации является фазовая синхронизация [4, 5]. Она означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, при этом амплитуды этих сигналов остаются несвязными друг с другом и выглядят хаотическими. На границе фазовой синхронизации наблюдается перемежающееся поведение, причем тип перемежаемости, реализуемый в данном случае зависит от величины расстройки между системами. В случае относительно слабой расстройки этот тип поведения классифицируется как перемежаемость “игольного ушка” [6], при большой расстройке наблюдается перемежаемость “кольца” [7]. Статистические характеристики для этих типов перемежаемости являются, соответственно, тоже различными.

Результаты, полученные в контексте перемежающейся фазовой синхронизации, затрагивают ограниченный класс динамических систем. Это, как правило, системы, характеризующиеся аттрактором ленточного типа или системы с относительно простой топологией аттрактора [8]. Однако, известны системы с более сложной (двулистной) структурой [8, 9], например, с аттрактором типа двойной спирали, подобных исследований для которых до настоящего времени проведено не было. Поэтому целью настоящей работы является исследование характеристик перемежающегося поведения, имеющего место на границе фазовой синхронизации в системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Коротко остановимся на основных терминах и определениях. В основе концепции фазовой синхронизации лежит понятие мгновенной фазы $\varphi(t)$ хаотического сигнала, которая может вводиться в рассмотрение несколькими разными способами [1, 5]. Одним из самых распространенных из них является введение фазы как угла поворота в полярной системе координат.

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \tag{1}$$

при этом все траектории на плоскости (x, y) должны вращаться вокруг начала координат, не пересекая и не огибая его. О наличии фазовой синхронизации говорят в том случае, когда фазы хаотических сигналов взаимодействующих систем оказываются захваченными, т.е. выполняется условие:

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| < \mathrm{const}, \tag{2}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – мгновенные фазы этих систем.

Как отмечалось во Введении, переход от асинхронного состояния к фазовой синхронизации происходит через перемежаемость [6, 7]. В этом случае зависимость разности фаз от времени представляет собой чередование участков, где выполняется условие захвата фаз, называемых синхронными или ламинарными фазами поведения, и достаточно резких скачков на величину 2π, называемых турбулентными всплесками.

Для определения типа перемежаемости, наблюдаемого вблизи границы фазовой синхронизации, необходимо произвести расчет статистических характеристик длительностей ламинарных фаз: распределений длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (параметра связи). Для режима перемежаемости "игольного ушка" характерен экспоненциальный характер распределения длительностей ламинарных фаз

$$N(\tau) = \frac{1}{T}\exp\left(-\frac{\tau}{T}\right), \tag{3}$$

а зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности подчиняется закономерности:

$$T = \exp\left(k\left|\varepsilon - \varepsilon_c\right|^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{4}$$

где k – некоторая положительная константа, ε_c – критическое значение управляющего параметра (параметра связи ε), соответствующее границе фазовой синхронизации [6, 10, 11].

ОБЪЕКТ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве объекта исследования выступают две однонаправленные связанные системы Лоренца:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) - \varepsilon_{1,2}(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= r_{1,2}x_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= -bz_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r_1 = 40$, $r_2 = 35$ – управляющие параметры; $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$ – параметры связи [12]. При выбранных значениях управляющих параметров аттракторы обеих систем характеризуются двулистной структурой, что не позволяет ввести в рассмотрение фазы хаотических сигналов исследуемых систем традиционным способом (см. предыдущий раздел).

Для введения фаз взаимодействующих систем Лоренца по аналогии с работой [13] использовался переход к новой системе координат $(z_{1,2}, u_{1,2})$, где $u_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2}$, в которой траектории обеих систем вращаются относительно точек $\left(z_{1,2}^0, u_{1,2}^0\right)$. В новой системе координат мгновенные фазы взаимодействующих систем могут быть введены в рассмотрение как углы поворота в полярной системе координат в соответствии с выражением:

$$\mathrm{tg}\varphi_{1,2} = \frac{u_{1,2} - u_{1,2}^0}{z_{1,2} - z_{1,2}^0}, \tag{6}$$

где $\left(z_1^0, u_1^0\right) = (39; 12.49)$, $\left(z_2^0, u_2^0\right) = (33.86; 11.7)$. Тогда диагностика фазовой синхронизации в системе (5) может осуществляться тем же способом, что и для систем с более простой структурой, путем проверки выполнения условия захвата фаз (2) для различных значений параметра связи ε.

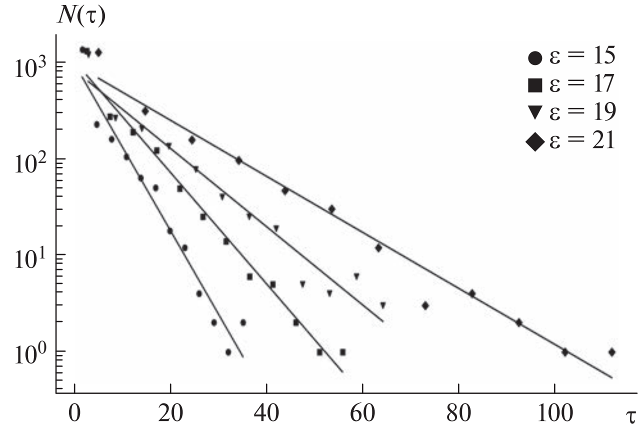

Рис. 1. Распределения длительностей ламинарных фаз $N(\tau)$ двух однонаправленно связанных систем Лоренца (5), полученные при различных значениях параметра связи ε, и соответствующие им аппроксимации экспоненциальным законом (3): $\varepsilon = 15$ (●), $\varepsilon = 17$ (■), $\varepsilon = 19$ (▼), $\varepsilon = 21$ (◆).

Для анализа перемежающегося поведения вблизи границы фазовой синхронизации в системе двух однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца (5) использовался метод выделения ламинарных и турбулентных фаз, предложенный в работе [14]. Разность фаз между системами была сведена к диапазону шириной 2π, а начало и конец ламинарной фазы определялись путем проверки пребывания этой разности внутри заранее установленного диапазона значений. Были получены статистические характеристики длительностей ламинарных фаз и проведено их сопоставление с теоретическими закономерностями (3), (4), характерными для перемежаемости "игольного ушка".

На рис. 1 представлены распределения длительностей ламинарных фаз для четырех различ-

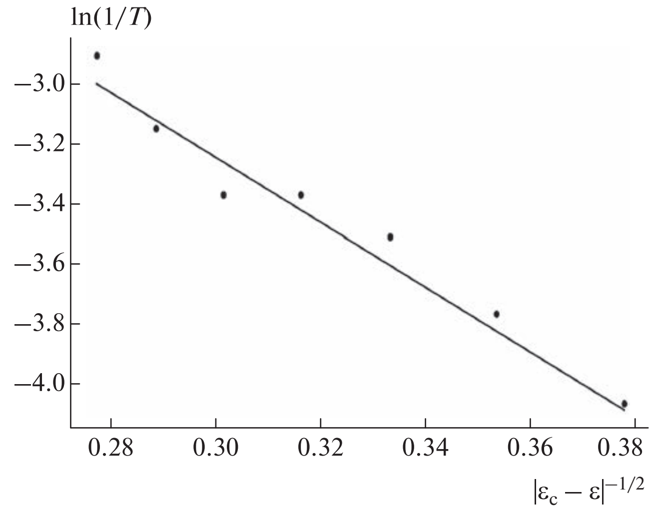

Рис. 2. Зависимость средней длительности ламинарных $\ln(1/T)$ фаз от параметра надкритичности $|\varepsilon_c - \varepsilon|^{-1/2}$, полученная для двух однонаправленно связанных систем Лоренца (5), и ее аппроксимация закономерностью (4).

ных значений параметра связи в диапазоне $\varepsilon \in [15; 21]$, соответствующем области перемежающегося поведения в исследуемой системе. Здесь же приведены аппроксимации численно полученных результатов экспоненциальным законом (3). Видно, что при всех рассмотренных значениях параметра связи данные численного моделирования находятся в хорошем соответствии с теоретической закономерностью, характерной для перемежаемости “игольного ушка”.

Дополнительным доказательством наличия именно перемежаемости “игольного ушка” вблизи границы фазовой синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора является подчинение зависимости средней длительности ламинарных фаз T от параметра надкритичности закону (4). По аналогии с работой [10] на рис. 2 приведена зависимость $\ln(1/T)$ от параметра надкритичности $|\varepsilon_c - \varepsilon|^{-1/2}$, полученная для системы (5) в том же диапазоне изменения параметра связи, и ее аппроксимация закономерностью (4). Видно хорошее соответствие численно полученных данных и теоретической закономерности.

Таким образом, статистические характеристики длительностей ламинарных фаз, полученные для однонаправленно связанных систем Лоренца (5), находящихся вблизи границы фазовой синхронизации, удовлетворяют теоретическим закономерностям, характерным для перемежаемости “игольного ушка”, что свидетельствует о реализации именно этого типа поведения в данном случае.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы характеристики перемежающегося поведения, имеющего место вблизи границы фазовой синхронизации в системе двух однонаправленных связанных осцилляторов Лоренца, характеризующихся сложной (двулистной) топологией аттрактора. Показано, что при относительно слабой расстройке между взаимодействующими системами в данном случае наблюдается перемежаемость типа “игольное ушко”. Полученные результаты подтверждены при помощи расчета статистических характеристик длительностей ламинарных фаз и их сопоставления с известными теоретическими закономерностями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук (проект № МД-18.2022.1.2). Отдельные результаты исследования поддержаны Минобрнауки России в рамках программы развития регионального научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2023-949).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G. et al.* // Phys. Reports. 2022. V. 366. P. 1.
2. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
3. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B. et al.* Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.
4. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 6. С. 569.
5. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. No. 11. P. 1804.
6. *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. No. 1. P. 47.
7. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. Art. No. 114101.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
9. *Ханадеев В.А., Москаленко О.И., Короновский А.А.* // Изв. РАН Сер. физ. 2021. Т. 85. № 2. С. 265; *Khanadeev V.A., Moskalenko O.I., Koronovskii A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 2. P. 192.
10. *Москаленко О.И.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. № 19. С. 72; *Moskalenko O.I.* // Tech. Phys. Lett. 2007. V. 33. No. 10. P. 841.
11. *Куровская М.К.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. № 24. С. 48; *Kurovskaya M.K.* // Tech. Phys. Lett. 2008. V. 34. No. 12. P. 1063.
12. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A.A. et al.* // Phys. Rev. E. 2020. V. 102. Art. No. 012205.
13. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V. et al.* // Physica D. 1997. V. 104. No. 4. P. 219.

14. *Журавлев М.О., Куровская М.К., Москаленко О.И.* // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. № 10. С. 31; *Zhuravlev M.O., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* // Tech. Phys. Lett. 2008. V. 34. No. 12. P. 1063.

Analysis of intermittency near the boundary of the phase synchronization in systems with complex topology of attractor

A. A. Tarasova[a], *, O. I. Moskalenko[a]

[a] *Saratov State University, Saratov, 410012 Russia*

**e-mail: tarasova121200@gmail.com*

Intermittent behavior near the boundary of phase synchronization in systems with a complex topology of attractor is studied. Using the calculation of statistical characteristics of the laminar phase lengths it is shown that in the case of a relatively small detuning of the control parameters of interacting systems near the phase synchronization boundary the eyelet intermittency takes place.