

УДК 519.24:534.8:681.884

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОБРАБОТКИ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ АКТИВНЫХ ШУМОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

© 2023 г. К. В. Дмитриев\*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

\*E-mail: kdmitrie@lanat.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Предложен итерационный алгоритм для восстановления акустических характеристик неоднородной среды на основе значений матриц когерентности, полученных при нескольких ракурсах облучения с использованием шумовых сигналов. Моделирование показывают хорошее качество и быструю сходимость получаемых оценок.

DOI: 10.31857/S0367676522700144, EDN: JSCWBG

Методы определения внутренней структуры и параметров упругой неоднородной среды по данным измерений акустического поля представляют большой интерес. “Классическая” постановка задачи акустической томографии состоит в облучении исследуемого объекта заданными полями с разных ракурсов и в приеме рассеянных сигналов с последующей их обработкой. Таким методам посвящена обширная литература, например, [1–4]. В последнее время получили развитие подходы, в которых акустическое поле создается естественными или антропогенными источниками шумового типа. Например, в гидроакустике [5, 6] такие источники могут быть связаны с судходством или с естественными шумами моря; в геоакустике [7] – с микросейсмями; в медицинской термотомографии [3, 8] – с тепловым акустическим шумом среды и полями дополнительной “подсветки”. При этом алгоритмы обработки регистрируемых шумовых сигналов используют в качестве входных данных статистические характеристики этих сигналов, например, матрицу когерентности, в отличие от алгоритмов “классической” томографии, обычно основанных на обработке фазы и амплитуды.

В настоящей работе предлагается метод корреляционной обработки сигналов в томографической схеме с использованием шумовых зондирующих сигналов. Пусть исследуемая неоднородность занимает конечную область пространства  $\mathfrak{X}$ , вне которой находится однородная непоглощающая среда со скоростью звука  $c_0$ . Внутри  $\mathfrak{X}$

фазовая скорость звука и амплитудный коэффициент поглощения равны  $c(\vec{z})$  и  $\alpha(\vec{z})$ , соответственно. Кроме этого, внутри  $\mathfrak{X}$  присутствуют неизвестные некоррелированные случайные источники поля  $F(\vec{z})$ .

Томографическая схема содержит  $N$  элементов малого размера, расположенных в точках  $\vec{z}_i \notin \mathfrak{X}$ . Каждый из элементов последовательно выступает в роли источника сигнала, в то время как остальные – в роли приемников. Это обеспечивает  $N$  ракурсов томографирования. Еще один (нулевой) “ракурс” реализуется, когда ни один из элементов не излучает, и все они регистрируют только поля источников  $F(\vec{z})$ . При заданной геометрии возможны два режима работы такой томографической схемы. Первый режим, монохроматический, предполагает использование гармонических зондирующих сигналов с частотой  $\omega$ . На всех приемниках регистрируется поле акустического давления  $p^{(n)}(\vec{z})$  при каждом  $n$ -м ракурсе излучения. Во втором режиме, шумовом, излучаются случайные узкополосные сигналы со средней частотой  $\omega$ , и регистрируются значения функции когерентности поля  $\Gamma^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) = \langle p^{(n)}(\vec{z}_i) \{p^{(n)}(\vec{z}_j)\}^* \rangle$  для каждой пары приемников  $(i; j)$ . Здесь символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по реализациям, а звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Временная зависимость полей в каждом из режимов выбирается в виде  $\sim \exp(-i\omega t)$  и для краткости здесь и далее опускается.

Для описания волновых процессов в среде вводится запаздывающая функция Грина  $G(\vec{z}; \vec{z}')$ . Она удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и уравнению Гельмгольца

$$\nabla_{\vec{z}}^2 G(\vec{z}; \vec{z}') + k^2(\vec{z})G(\vec{z}; \vec{z}') = \delta(\vec{z} - \vec{z}'), \quad (1)$$

где  $k^2(\vec{z}) = \omega^2/c^2(\vec{z}) + 2i\omega\alpha(\vec{z})/c(\vec{z})$  – квадрат волнового числа  $k(\vec{z})$ . При  $n$ -м ракурсе излучения источники поля представлены суммой  $F(\vec{z}) + F^{(n)}\delta(\vec{z}_n - \vec{z})$  неизвестных случайных источников  $F(\vec{z})$  и текущего зондирующего источника  $F^{(n)}\delta(\vec{z}_n - \vec{z})$ . Для нулевого ракурса при этом полагается  $F^{(0)} = 0$ . Тогда поле акустического давления в каждом из случаев равно

$$p^{(n)}(\vec{z}) = \int_{\mathfrak{R}} G(\vec{z}; \vec{z}')F(\vec{z}')d\vec{z}' + F^{(n)}G(\vec{z}; \vec{z}_n). \quad (2)$$

Функция когерентности принимает вид

$$\Gamma^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) = \int_{\mathfrak{R}} G(\vec{z}_i; \vec{z})G^*(\vec{z}_j; \vec{z})I(\vec{z})d\vec{z} + G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)G^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n)I^{(n)}; \quad i, j = \overline{1, N}; \quad i, j \neq n,$$

где учтено, что все источники некоррелированные, и введены их плотности мощности и мощность, соответственно:  $\langle F(\vec{z})F^*(\vec{z}') \rangle = I(\vec{z})\delta(\vec{z} - \vec{z}')$  и  $\langle F^{(n)}\{F^{(n)}\}^* \rangle = I^{(n)}$ .

В монохроматическом режиме работы первое слагаемое в (2) является помехой, а второе – полезным сигналом. Поэтому целесообразно выбирать частоту  $\omega$  и мощность  $I^{(n)}$  так, чтобы второе слагаемое преобладало. Тогда при известных амплитудах  $F^{(n)}$  вычисляются значения  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  функций Грина, где  $i = \overline{1, N}; i \neq n$ . В шумовом режиме работы при известных мощностях  $I^{(n)}$  вычисляются значения

$$Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) = \left\{ \Gamma^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) - \Gamma^{(0)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) \right\} / I^{(n)} = G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)G^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n), \quad (3)$$

где  $i, j = \overline{1, N}; i, j \neq n$ . Величины  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  и  $Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j)$  не зависят от источников  $F(\vec{z})$  и служат входными данными для одного из возможных алгоритмов решения обратной задачи рассеяния. В рамках этой задачи определяется  $k(\vec{z})$ , а значит, и функция Грина  $G(\vec{z}; \vec{z}')$  для всех значений своих аргументов. Восстановление  $F(\vec{z})$  при известной функции Грина  $G(\vec{z}; \vec{z}')$  – обратная задача излучения, которая является некорректной, и ее решение не единственно [1–3]. Эта задача не рассматривается в настоящей работе.

Если предположить, что область  $\mathfrak{R}$  заполнена фоновой средой с известным волновым числом  $k_{bg}(\vec{z})$  (нижний индекс “bg” – сокращение от

“background”, т.е. “фоновый”), то акустические поля будут определяться запаздывающей функцией Грина  $G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$  для этой среды. Такая функция Грина удовлетворяет уравнению (1), в котором следует положить  $k_{bg}(\vec{z})$  вместо  $k(\vec{z})$ . Для описания различия между исследуемой средой и фоновой средой вводится функция рассеивателя  $\epsilon_{bg}(\vec{z}) = k_{bg}^2(\vec{z}) - k^2(\vec{z})$ . Тогда для функций Грина этих двух сред справедливо уравнение Липпмана–Швингера [1–3]:

$$G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') \equiv G(\vec{z}; \vec{z}') - G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}') = \int_{\mathfrak{R}} G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}'')\epsilon_{bg}(\vec{z}'')G(\vec{z}''; \vec{z}')d\vec{z}'' \quad (4)$$

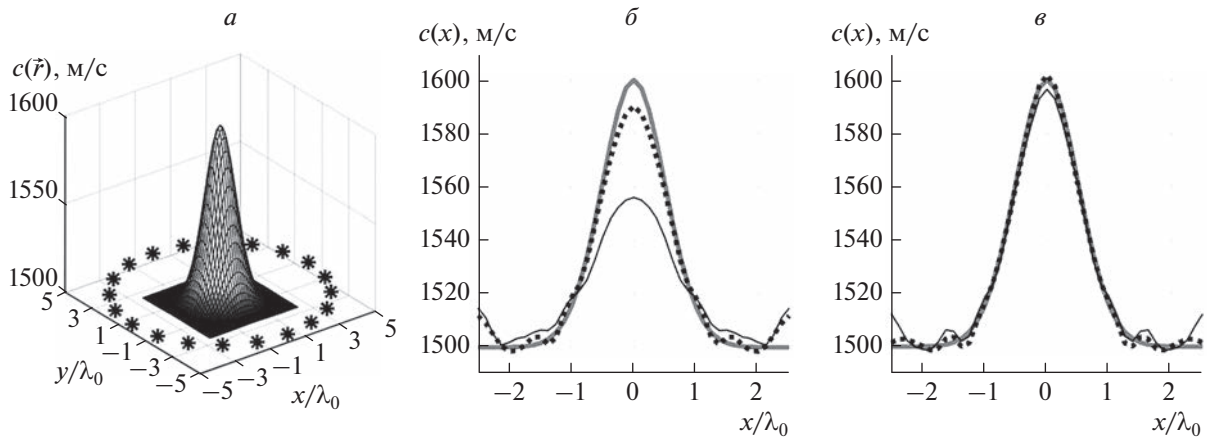
Здесь  $G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}')$  – функция, определяющая рассеянное поле. В частном случае, когда фоновая среда однородная и занимает все пространство, т.е.  $k_{bg}(\vec{z}) = k_0 \equiv \omega/c_0$ , ее функция Грина известна аналитически и равна  $G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}') = G_0(\vec{z}; \vec{z}')$ . Для функции рассеивателя, вычисляемой относительно такой среды, вводится обозначение без нижнего индекса “bg”:  $\epsilon(\vec{z}) = k_0^2 - k^2(\vec{z})$ .

Решение уравнение (4) относительно  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$  – трудная задача, поскольку в правую его часть наряду с неизвестной функцией  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$  входит неизвестная функция Грина неоднородной среды  $G(\vec{z}; \vec{z}')$ . Для слабых рассеивателей (для них везде выполнено  $G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') \ll G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$ ) в правой части (4) можно заменить  $G(\vec{z}; \vec{z}')$  на  $G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$  (борновское приближение). Тогда это уравнение упрощается и может быть решено численно путем дискретизации и сведения его к системе линейных уравнений. Для рассеивателей средней силы (для них везде выполнено  $G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') < G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$ ) борновского приближения недостаточно, но можно применить итерационную процедуру [1, 4]. Она состоит в следующем:

1. На нулевой итерации ( $m = 0$ ) фоновая среда полагается однородной с волновым числом, равным  $k_0$ , и задается априорная оценка рассеивателя  $\epsilon_0(\vec{z}) = k_0^2(\vec{z}) - k_{apriori}^2(\vec{z})$ . Если такой информации нет, то полагается  $\epsilon_0(\vec{z}) = 0$ .

2. Пусть в результате предыдущей,  $(m - 1)$ -й, итерации была получена оценка рассеивателя  $\epsilon_{m-1}(\vec{z})$ . Тогда на первом шаге  $m$ -й итерации решается прямая задача рассеяния и находится функция Грина среды  $G_m(\vec{z}; \vec{z}')$ . С этой целью можно, например, воспользоваться уравнением (4), где произведены замены функций Грина  $G(\vec{z}; \vec{z}')$  на  $G_m(\vec{z}; \vec{z}')$ ;  $G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$  на  $G_0(\vec{z}; \vec{z}')$  и функции  $\epsilon_{bg}(\vec{z}'')$  на  $\epsilon_{m-1}(\vec{z}'')$ :

$$G_m(\vec{z}; \vec{z}') = G_0(\vec{z}; \vec{z}') + \int_{\mathfrak{R}} G_0(\vec{z}; \vec{z}'')\epsilon_{m-1}(\vec{z}'')G_m(\vec{z}''; \vec{z}')d\vec{z}''.$$



**Рис. 1.** Моделируемая зависимость скорости звука  $c(\vec{r})$  от координат внутри неоднородности – рассеивателя средней силы; звездочками условно обозначены позиции элементов томографической схемы (а). Значения скорости звука на прямой  $y = 0$  для моделируемой зависимости и для результатов ее восстановления после  $m = 10$  итераций (б) и после  $m = 100$  итераций (в). Тонкая черная сплошная линия соответствует результатам восстановления в монохроматическом режиме; толстая черная пунктирная линия – в шумовом режиме. Толстая серая линия соответствует исходной неоднородности.

3. На втором шаге  $m$ -й итерации среда, заданная функцией рассеивателя  $\epsilon_{m-1}(\vec{z})$ , считается фоновой. Тогда уравнение (4) в борновском приближении имеет вид

$$G(\vec{z}_i; \vec{z}_n) - G_m(\vec{z}_i; \vec{z}_n) = \int_{\mathfrak{R}} G_m(\vec{z}_i; \vec{z}) \epsilon_{bg}(\vec{z}) G_m(\vec{z}; \vec{z}_n) d\vec{z}, \quad (5)$$

где вместо произвольных точек  $\vec{z}$  и  $\vec{z}'$  указаны координаты  $\vec{z}_i$  и  $\vec{z}_n$  элементов томографической схемы. Значения функции Грина  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  считаются заданными, поэтому такое уравнение решается относительно  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$ , и делается новая оценка  $\epsilon_m(\vec{z}) = \epsilon_{m-1}(\vec{z}) + \epsilon_{bg}(\vec{z})$ .

Наконец, если рассеиватель сильный (в некоторых точках  $G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') > G_0(\vec{z}; \vec{z}')$ ), его восстановление представляет наибольшую сложность, и описанная процедура может не приводить к верному решению задачи.

В шумовом режиме работы величины  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  неизвестны. Поэтому нужно модифицировать третий шаг описанного итерационного алгоритма. Для этого выполняется подстановка (4) в (3) и получается

$$\begin{aligned} & Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) - G_{bg}(\vec{z}_i; \vec{z}_n) G_{bg}^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n) = \\ & = G_{bg}(\vec{z}_i; \vec{z}_n) \int_{\mathfrak{R}} G_{bg}^*(\vec{z}_j; \vec{z}') \epsilon_{bg}^*(\vec{z}') G^*(\vec{z}'; \vec{z}_n) d\vec{z}' + \\ & + G_{bg}^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n) \int_{\mathfrak{R}} G_{bg}(\vec{z}_i; \vec{z}') \epsilon_{bg}(\vec{z}') G(\vec{z}'; \vec{z}_n) d\vec{z}' + \\ & + \iint_{\mathfrak{R}} \epsilon_{bg}(\vec{z}') \epsilon_{bg}^*(\vec{z}'') G_{bg}(\vec{z}_i; \vec{z}') G_{bg}^*(\vec{z}_j; \vec{z}'') \times \\ & \times G(\vec{z}'; \vec{z}_n) G^*(\vec{z}''; \vec{z}_n) d\vec{z}' d\vec{z}'' . \end{aligned}$$

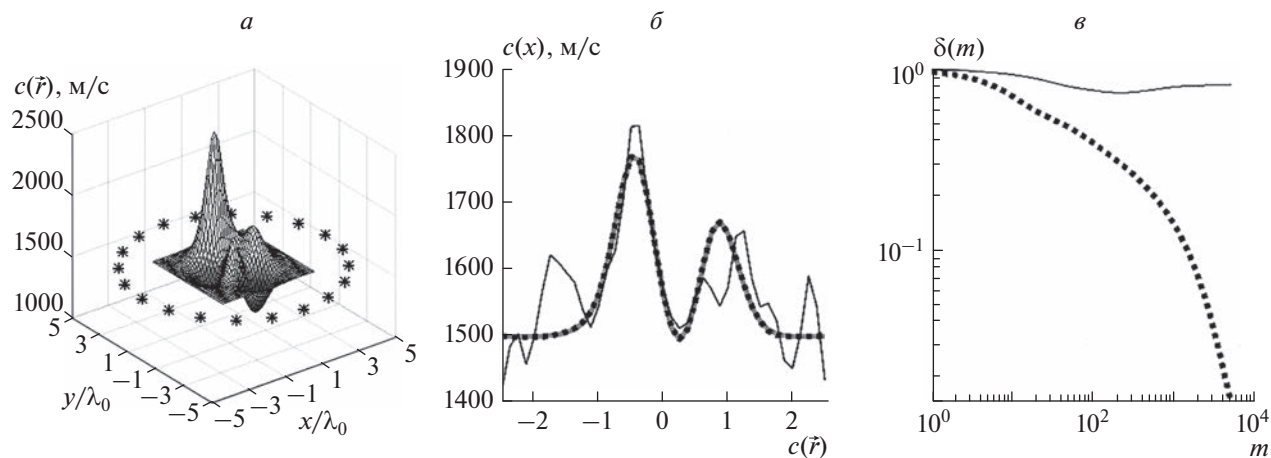
Это уравнение сходно с уравнением Липпмана–Швингера (4), но содержит квадратичный относительно  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$  член в правой части. Считая  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$  малым и ограничиваясь в правой части только слагаемыми, линейными по  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$ , можно записать

$$\begin{aligned} & Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) - G_m(\vec{z}_i; \vec{z}_n) G_m^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n) = \\ & = G_m(\vec{z}_i; \vec{z}_n) \int_{\mathfrak{R}} G_m^*(\vec{z}_j; \vec{z}') \epsilon_{bg}^*(\vec{z}') G_m^*(\vec{z}'; \vec{z}_n) d\vec{z}' + \quad (6) \\ & + G_m^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n) \int_{\mathfrak{R}} G_m(\vec{z}_i; \vec{z}') \epsilon_{bg}(\vec{z}') G_m(\vec{z}'; \vec{z}_n) d\vec{z}' . \end{aligned}$$

Уравнение (6) можно использовать вместо уравнения (5) в модифицированном алгоритме, который пригоден для обработки данных в шумовом режиме.

В качестве иллюстрации, проводилось численное моделирование процесса восстановления для неоднородностей скорости звука в шумовом и, для сравнения, в монохроматическом режимах. Томографическая схема состояла из  $N = 20$  элементов, которые располагались вокруг неоднородности равномерно по окружности радиусом  $R = 5\lambda_0$ , где  $\lambda_0 = 2\pi c_0/\omega$  – длина волны в фоновой среде. Шаг дискретизации при моделировании полагался равным  $\lambda_0/8$ .

В первом случае моделируемая двумерная неоднородность задавалась функцией  $c(\vec{r})$ , которая представлена на рис. 1а и имеет радиально-симметричную гауссову форму. Для такой неоднородности численно рассчитанная величина  $|G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}')/G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')|$  достигает максимального зна-



**Рис. 2.** Моделируемая зависимость скорости звука  $c(\vec{r})$  от координат внутри неоднородности — сильного рассеивателя; звездочками условно обозначены позиции элементов томографической схемы (а). Значения скорости звука, на прямой  $y = x$  для моделируемой зависимости и для результатов ее восстановления (б). Зависимость относительной погрешности восстановления неоднородности от номера итерации (в). Тонкая черная сплошная линия соответствует результатам восстановления в монохроматическом режиме; толстая черная пунктирная линия — в шумовом режиме. Толстая серая линия соответствует исходной неоднородности и практически совпадает с толстой черной пунктирной линией (б).

чения  $\approx 0.65 < 1$ , и поэтому она относится к классу рассеивателей средней силы. На рис. 1б и 1в представлены результаты ее восстановления в каждом из режимов после  $m = 10$  и  $m = 100$  итераций, соответственно. Можно видеть, что при большом  $m$  итерационный процесс в итоге сходится к искомой зависимости в каждом из случаев, но скорость сходимости для шумового режима значительно выше.

Во втором случае моделируемая зависимость  $c(\vec{r})$  представлена на рис. 2а. Такая неоднородность относится к классу сложных для восстановления сильных рассеивателей, поскольку для нее рассчитанная величина  $|G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') / G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')|$  превышает  $\approx 1.9 > 1$ . На рис. 2б представлены результаты восстановления, полученные после  $m = 5000$  итераций в каждом из режимов, а на рис. 2в изображены зависимости относительной погрешности восстановления  $\delta(m)$ , которые вычисляются для каждой  $m$ -й итерации как  $\delta(m) = \|\epsilon_m(\vec{r}) - \epsilon(\vec{r})\| / \|\epsilon(\vec{r})\|$ .

Можно видеть, что, результат, полученный при обработке данных в шумовом режиме, сходится к моделируемой зависимости, и  $\delta(m)$  стремится к нулю с увеличением  $m$  (рис. 2б и 2в). В монохроматическом режиме результат итераций сильно отличается от моделируемой зависимости. Однако проверка показывает, что он удовлетворяет уравнению (4). Это иллюстрирует неединственность решения уравнения (4) при небольшом  $N$ . Можно предположить, что нахождение истинного решения при шумовом режиме обусловлено большим объемом данных,

который равен в этом случае  $N^2(N-1)/2 \sim N^3$ , в то время как при монохроматическом режиме — только  $N(N-1)/2 \sim N^2$ . Потенциально данное обстоятельство может дать шумовому режиму преимущество. Однако этот вопрос требует отдельного изучения, особенно в отношении наличия линейных зависимостей между компонентами  $Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j)$ .

При моделировании исследовалось влияние помех в исходных данных. Эти помехи вводились в виде нормально распределенной случайной добавки к функциям Грина  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  со стандартным отклонением в 1–2% от среднего значения  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$ , вычисленного по всем элементам антенной решетки. Такая добавка существенно ухудшает результат восстановления, как в монохроматическом, так и в шумовом режимах, что является проявлением неустойчивости решения обратной задачи при восстановлении сильных рассеивателей. С учетом наличия помехи результат восстановления в шумовом режиме по-прежнему оказался лучше, чем результат восстановления в монохроматическом режиме.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Москвы (проект № 21-32-70003).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989.

2. *Devaney A.J.* Mathematical foundations of imaging, tomography and wavefield inversion. Cambridge, N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2012.
3. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 1. Обратные задачи излучения в акустике. М.: ЛЕНАНД, 2020.
4. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 2. Обратные задачи акустического рассеяния. М.: ЛЕНАНД, 2020.
5. *Буров В.А., Сергеев С.Н., Шуруп А.С.* // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 1. С. 51.
6. *Тихоцкий С.А., Преснов Д.А., Собисевич А.Л., Шуруп А.С.* // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 107.
7. *Жостков Р.А., Преснов Д.А., Шуруп А.С., Собисевич А.Л.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2017. Т. 81. № 1. С. 72; *Zhostkov R.A., Presnov D.A., Shurup A.S., Sobisevich A.L.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2017. V. 81. No. 2. P. 64.
8. *Буров В.А., Дмитриев К.В., Румянцева О.Д.* // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 591.

## Object structure reconstruction using correlation processing of the acoustic field of active noise sources

**K. V. Dmitriev\***

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

*\*e-mail: kdmitrie@lanat.ru*

The iterative algorithm is proposed for reconstructing the acoustic characteristics of an inhomogeneous medium based on the values of the coherence matrices obtained at several exposure angles using noise signals. Numerical simulations show good quality and fast convergence of the resulting estimates.