ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2024, том 50, № 12, с. 1547–1556

УДК 533.9

ПОЛНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛА УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С ТЯЖЕЛЫМИ НЕЙТРАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

© 2024 г. Е. И. Бочков[a], *

[a] *Российский федеральный ядерный центр – ВНИИЭФ, Саров, Нижегородская область, Россия*

**e-mail: e_i_bochkov@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.10.2024 г.
После доработки 12.11.2024 г.
Принята к публикации 18.11.2024 г.

Выполнен вывод полного дифференциального разложения интеграла упругих столкновений электронов с тяжелыми нейтральными частицами для случая, когда функция распределения электронов не является симметричной относительно некоторого направления. Вывод выполнен в предположении, что кинетическая энергия электронов намного превышает энергию теплового движения атомов и молекул. Показано, как полученное разложение может быть использовано при выводе уравнений для моментов функции распределения электронов.

Ключевые слова: функция распределения электронов, кинетическое уравнение, интеграл столкновений, дифференциальное разложение

DOI: 10.31857/S0367292124120126 **EDN:** EEBLAU

1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее полное описание эволюции ансамбля электронов в электрическом поле возможно в рамках уравнения Больцмана, которое в наиболее общем случае является нестационарным интегро-дифференциальным уравнением для функции распределения электронов (ФРЭ) в шестимерном фазовом пространстве ($\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$). В данной работе рассматривается случай слабоионизованного газа, когда столкновениями электронов друг с другом и с ионами можно пренебречь. Учитываются только упругие и неупругие столкновения электронов с нейтральными атомами или молекулами газа. В этом случае эволюция ФРЭ $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ подчиняется кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \times \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F}_e \times \nabla_{\mathbf{p}} f = \mathrm{St}_{\mathrm{el}} + \mathrm{St}_{\mathrm{ex}} + \mathrm{St}_{\mathrm{ion}}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{F}_e = -q_e\mathbf{E}$ – сила, действующая на электрон, где q_e – элементарный заряд, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля; $\mathbf{v}$ – скорость электрона; $\mathrm{St}_{\mathrm{el}}, \mathrm{St}_{\mathrm{ex}}, \mathrm{St}_{\mathrm{ion}}$ – компоненты интеграла столкновений электронов, отвечающие за изменение ФРЭ в упругих столкновениях, в процессах возбуждения и ионизации атомов или молекул соответственно.

В статье [1] в предположении, что ФРЭ является симметричной относительно вектора $\mathbf{e} = -\mathbf{E}/E$, выполнен вывод дифференциального разложения интеграла упругих столкновений $\mathrm{St}_{\mathrm{el}}$ по производным косинуса μ полярного угла θ между вектором импульса $\mathbf{p}$ и единичным вектором $\mathbf{e}$. Отметим, что предположение о симметричности ФРЭ относительно направления $\mathbf{e}$ означает, что плазмы является локально однородной в поперченном относительно данного вектора направлении. В данной работе получено полное дифференциальное разложение интеграла упругих столкновений, в предположении, что кинетическая энергия электронов значительно превышает энергию теплового движения атомов (молекул) и последние можно считать неподвижными.

2. ИНТЕГРАЛ УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С ТЯЖЕЛЫМИ НЕЙТРАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

На рис. 1 показана геометрия рассеяния электрона, которая тождественна использованной в работах [2, 3]. Система координат задается ортами: $\mathbf{i} = [\mathbf{p}\times[\mathbf{e}\times\mathbf{p}]]/(p^2\sin\theta)$, $\mathbf{j} = [\mathbf{p}\times\mathbf{e}]/(p\cos\theta)$, $\mathbf{k} = \mathbf{p}/p$, где $\mathbf{p}$ – импульс электрона после рассеяния. В этой системе координат $\mathbf{k}$ — это полярная ось, полярный угол совпадает с углом рассеяния $\psi\in[0,\pi]$, а угол $\alpha\in[0,2\pi]$ между вектором $\mathbf{j}$ и направлением проекции импульса $\mathbf{p}'$ до рассеяния на плоскость $\mathbf{ij}$ является азимутальным углом. Связь между векторами $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$ определяется уравнением [3]

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{p}}{p}p'\cos\psi + \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{e}}{p\sin\theta}p'\sin\psi\sin\alpha + \\ +\frac{\mathbf{p}\times[\mathbf{e}\times\mathbf{p}]}{p^2\sin\theta}p'\sin\psi\cos\alpha. \quad (2)$$

Далее будем предполагать, что энергия электрона не меняется в процессе упругого рассеяния, поскольку масса электронов много меньше массы атомов (молекул). Заметим, однако, что соответствующий член, описывающий потерю энергии электроном в упругих столкновениях, может быть легко получен, по аналогии с тем как это было сделано в [2, 3].

Вводя малый параметр $\delta = \sqrt{1-\xi}$, где $\xi = \cos\psi$, распишем уравнение (2) по компонентам:

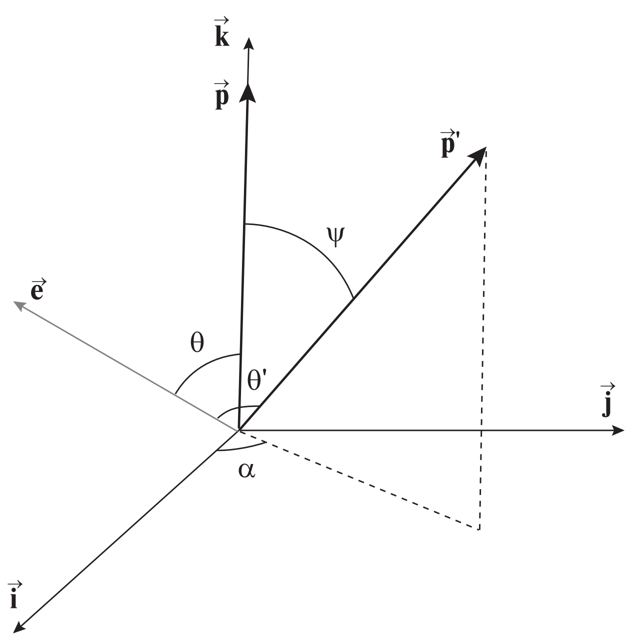

Рис. 1. Геометрия рассеяния электрона.

$$p'_x = p_x(1-\delta^2) + \left(\frac{p_y p\sin\alpha - p_x p_z\cos\alpha}{p_\perp}\right)\delta\sqrt{2-\delta^2},$$
$$p'_y = p_y(1-\delta^2) - \left(\frac{p_x p\sin\alpha + p_y p_z\cos\alpha}{p_\perp}\right)\delta\sqrt{2-\delta^2}, \quad (3)$$
$$p'_z = p_z(1-\delta^2) + p_\perp\cos\alpha\,\delta\sqrt{2-\delta^2}.$$

Здесь использовано стандартное обозначение
$$p_\perp = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}.$$

В выбранной системе координат интеграл упругих столкновений электронов с неподвиными частицами выражается следующим образом [2, 3]:

$$\mathrm{St_{el}} = N\upsilon\int\limits_{\omega'}\left[f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t) - f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right]\sigma_{el}(p,\psi)d\omega', \quad (4)$$

где $\sigma_{el}(p,\psi)$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния, $d\omega' = \sin\psi d\psi d\alpha$ — элемент телесного угла в пространстве импульсов, N — концентрация нейтральных частиц, υ — модуль скорости электрона. Далее в тексте для сокращения записи мы будем опускать зависимость $f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t)$ от радиус-вектора $\mathbf{r}$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛА УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ В СЛУЧАЕ СИММЕТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Предполагая, что ФРЭ симметрична относительно некоторого направления (направление $\vec{\mathbf{e}}$ на рис. 1), в [1] получено следующее дифференциальное разложение $\mathrm{St_{el}}$:

$$\mathrm{St_{el}} = N\upsilon\int\limits_{\omega'}\left[f(p,\mu',t) - f(p,\mu,t)\right]\sigma_{el}(p,\psi)\,d\omega' = \\ = N\upsilon\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{tr}^{(l)}(p)}{2^l(l!)^2}\frac{\partial^l}{\partial\mu^l}\left\{(1-\mu^2)^l\frac{\partial^l f}{\partial\mu^l}\right\}, \\ \sigma_{tr}^{(l)}(p) \equiv 2\pi\int_{-1}^{1}(1-\xi)^l\sigma_{el}(p,\xi)\,d\xi. \quad (5)$$

Введем обозначение для дифференциальных операторов, входящих в формулу (5) $\widehat{D}_l \equiv \frac{\partial^l}{\partial\mu^l}\left\{(1-\mu^2)^l\frac{\partial^l f}{\partial\mu^l}\right\}$. Покажем теперь, что данные операторы удовлетворяют рекуррентному соотношению, которое будет важно в дальнейшем:

$$\widehat{D}_1 = \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right\},$$
$$\widehat{D}_l = \left[\widehat{D}_1 + (l-1)l\right]\widehat{D}_{l-1},\ l>1. \quad (6)$$

Для доказательства рассмотрим вспомогательную функцию $g = (1-\mu^2)^{l-1}\dfrac{\partial^{l-1} f}{\partial\mu^{l-1}}$, тогда

$$
\begin{gathered}
\widehat{D}_l f = \frac{\partial^l}{\partial\mu^l}\left\{(1-\mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial\mu^l}\right\} = \\
= \frac{\partial^l}{\partial\mu^l}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial g}{\partial\mu} + 2(l-1)\mu g\right\} = \\
= (1-\mu^2)\frac{\partial^{l+1} g}{\partial\mu^{l+1}} - 2l\mu\frac{\partial^l g}{\partial\mu^l} - \\
-l(l-1)\frac{\partial^{l-1} g}{\partial\mu^{l-1}} + 2(l-1)\mu\frac{\partial^l g}{\partial\mu^l} + \\
+2l(l-1)\frac{\partial^{l-1} g}{\partial\mu^{l-1}} = (1-\mu^2)\frac{\partial^{l+1} g}{\partial\mu^{l+1}} - \\
-2\mu\frac{\partial^l g}{\partial\mu^l} + l(l-1)\frac{\partial^{l-1} g}{\partial\mu^{l-1}}, \\
\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right\} + (l-1)l\right]\widehat{D}_{l-1} f = \\
= \left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right\} + (l-1)l\right]\frac{\partial^{l-1} g}{\partial\mu^{l-1}} = \\
= (1-\mu^2)\frac{\partial^{l+1} g}{\partial\mu^{l+1}} - 2\mu\frac{\partial^l g}{\partial\mu^l} + (l-1)l\frac{\partial^{l-1} g}{\partial\mu^{l-1}}.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Из (6) очевидным образом следует:

$$
\widehat{D}_l = \widehat{D}_1\left(\widehat{D}_1 + 1\times 2\right)\left(\widehat{D}_1 + 2\times 3\right)\cdots\left(\widehat{D}_1 + (l-1)l\right). \tag{8}
$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$
\widehat{D}_l = \widehat{D}_1^{(l)} + c_{l-1}^l\,\widehat{D}_1^{(l-1)} + \ldots + c_1^l\,\widehat{D}_1, \tag{9}
$$

при этом коэффициенты вычисляются по теореме Виета

$$
\begin{aligned}
& c_{l-1}^l = 1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + l(l-1), \\
& c_{l-2}^l = 1\times 2\times 2\times 3 + \ldots + 1\times 2l(l-1) + \ldots + \\
& +(l-2)(l-1)(l-1)l, \\
& \ldots \\
& c_1^l = 1\times 2\times 2\times 3\cdots(l-1)l.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Отметим также, что данные числа удовлетворяют системе уравнений

$$
\begin{aligned}
& (-1)^l[1\cdot 2]^l + (-1)^{l-1}[1\cdot 2]^{l-1}c_{l-1}^l + \ldots + (-1)[1\cdot 2]^1 c_1^l = 0, \\
& (-1)^l[2\cdot 3]^l + (-1)^{l-1}[2\cdot 3]^{l-1}c_{l-1}^l + \ldots + (-1)[2\cdot 3]^1 c_1^l = 0, \\
& \ldots \\
& (-1)^l[(l-1)\cdot l]^l + (-1)^{l-1}[(l-1)\cdot l]^{l-1}c_{l-1}^l + \ldots + \\
& +(-1)[(l-1)\cdot l]^1 c_1^l = 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Данная система полезна при выводе уравнений моментов ФРЭ из кинетического уравнения (1), о чем будет сказано в разд. 5.

Для наглядности выпишем несколько первых операторов (9):

$$
\begin{aligned}
\widehat{D}_2 &= \widehat{D}_1^{(2)} + 2\widehat{D}_1, \\
\widehat{D}_3 &= \widehat{D}_1^{(3)} + 8\widehat{D}_1^{(2)} + 12\widehat{D}_1, \\
\widehat{D}_4 &= \widehat{D}_1^{(4)} + 20\widehat{D}_1^{(3)} + 108\widehat{D}_1^{(2)} + 144\widehat{D}_1.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Замечая, что оператор $\widehat{D}_1 = \dfrac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\dfrac{\partial}{\partial\mu}\right\}$ совпадает с соответствующим членом в операторе Лапласа, записанном в сферической системе координат,

$$
p^2\Delta_{\mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial p}\left(p^2\frac{\partial}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},
$$

можно предположить, что в случае учета зависимости ФРЭ от азимутального угла φ, члены дифференциального разложение интеграла упругих столкновений будут иметь вид тождественный (9), но только с оператором

$$
\widehat{D}_1 = \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.
$$

Далее мы докажем данное предположение.

4. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Разложим подынтегральную функцию в выражении (4) ряд по малому параметру δ:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{St_{el}} = N\upsilon\int_{-1}^{1}\sigma_{\mathrm{el}}(p,\xi)\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1!}\frac{df(\mathbf{p}'(\delta),t)}{d\delta}\bigg|_{\delta=0}\times\right. \\
\times\delta + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(\mathbf{p}'(\delta),t)}{d\delta^2}\bigg|_{\delta=0}\delta^2 + \ldots + \\
\left.+\frac{1}{n!}\frac{d^n f(\mathbf{p}'(\delta),t)}{d\delta^n}\bigg|_{\delta=0}\delta^n + \ldots\right)d\alpha\, d\xi.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Нашей целью является вычислить все члены данного разложения, выполнив интегрирование по переменным α и ξ. Для того чтобы вычислить производные по δ в выражении (13), воспользуемся формулой Фаа Ди Бруно для n-й производной сложной функции векторного аргумента $f(u(x), \upsilon(x), ..., z(x))$ [4]:

$$\frac{f^{(n)}}{n!} = \sum_{k_1+2k_2+...+nk_n=n} \frac{\hat{B}_1^{k_1}\hat{B}_2^{k_2}\cdots\hat{B}_n^{k_n}}{k_1!k_2!\cdots k_n!} f(u,\upsilon,...,z),$$
$$\hat{B}_j = \frac{u_j}{j!}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\upsilon_j}{j!}\frac{\partial}{\partial \upsilon} + ... + \frac{z_j}{j!}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{14}$$

где величины

$$u_j = \frac{d^j u(x)}{dx^j}, \quad \upsilon_j = \frac{d^j \upsilon(x)}{dx^j}, \quad ....,$$
$$z_j = \frac{d^j z(x)}{dx^j}, \quad j = 1,...,n \tag{15}$$

представляют собой называемые дифференциальные переменные, которые в формуле (14) рассматриваются как независимые переменные, перестановочные друг с другом и с операторами дифференцирования ∂_u, ∂_υ, ..., ∂_z. Суммирование в формуле (14) ведется по целым неотрицательным числам k_1, k_2, ..., k_n , которые являются решением диофантового уравнения $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$.

В нашем случае операторы $\hat{B}_j$ имеют следующий вид:

$$\hat{B}_j = \frac{1}{j!}\left\{\left.\frac{d^j p'_x(\delta)}{d\delta^j}\right|_{\delta=0}\frac{\partial}{\partial p_x} + \left.\frac{d^j p'_y(\delta)}{d\delta^j}\right|_{\delta=0} \times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial p_y} + \left.\frac{d^j p'_z(\delta)}{d\delta^j}\right|_{\delta=0}\frac{\partial}{\partial p_z}\right\}. \tag{16}$$

$$\left.\frac{dp'_x(\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \sqrt{2}\left(\frac{p_y p\sin\alpha - p_x p_z\cos\alpha}{p_\perp}\right),$$
$$\left.\frac{dp'_y(\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0} = -\sqrt{2}\left(\frac{p_x p\sin\alpha + p_y p_z\cos\alpha}{p_\perp}\right),$$
$$\left.\frac{dp'_z(\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \sqrt{2}p_\perp\cos\alpha,$$
$$\left.\frac{d^{2j+1}p'_i(\delta)}{d\delta^{2j+1}}\right|_{\delta=0} = -\frac{(2j)!}{2^{3j}(2j-1)(j!)^2}\left.\frac{dp'_i(\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0},$$
$$j > 1, \quad i = x, y, z.$$

Тогда для операторов $\hat{B}_j$ получаем следующие выражения:

$$\hat{B}_2 = -p_x\frac{\partial}{\partial p} - p_y\frac{\partial}{\partial p_y} - p_z\frac{\partial}{\partial p_z} \equiv \hat{c},$$
$$\hat{B}_{2j} = 0, \quad j > 1; \quad \hat{B}_1 = \sqrt{2}\left(\hat{a}\sin\alpha + \hat{b}\cos\alpha\right), \tag{18}$$
$$\hat{B}_{2j+1} = -\frac{(2j)!}{2^{3j}(2j-1)(j!)^2}\hat{B}_1, \quad j > 1,$$

где

$$\hat{a} \equiv \frac{p}{p_\perp}\left(p_y\frac{\partial}{\partial p_x} - p_x\frac{\partial}{\partial p_y}\right),$$
$$\hat{b} \equiv p_\perp\frac{\partial}{\partial p_z} - \frac{p_z}{p_\perp}\left(p_x\frac{\partial}{\partial p_x} + p_y\frac{\partial}{\partial p_y}\right).$$

С учетом того, что все операторы $\hat{B}_{2j} = 0$ при $j > 1$, формула (14) в нашем случае принимает вид:

$$\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f}{d\delta^n}\right|_{\delta=0} = \sum_{\substack{k_1+2k_2+3k_3...+\\+(2[n/2]-1)k_{2[n/2]-1}=n}} \frac{\hat{B}_2^{k_2}}{k_2!}\frac{\hat{B}_1^{k_1}\hat{B}_3^{k_3}\cdots\hat{B}_{2[n/2]-1}^{k_{2[n/2]-1}}}{k_1!k_3!\cdots k_{2[n/2]-1}!}f(\mathbf{p},t) =$$
$$= \sum_{\substack{k_1+2k_2+3k_3...+\\+(2[n/2]-1)k_{2[n/2]-1}=n}} \frac{\hat{c}^{k_2}}{k_2!}L(k_1,k_3,...,k_{2[n/2]-1})2^{K/2}\left(\hat{a}\sin\alpha + \hat{b}\cos\alpha\right)^K f(\mathbf{p},t). \tag{19}$$

Вычисляем по формулам (3) производные величин $p'_x(\delta), p'_y(\delta), p'_z(\delta)$ по δ в нуле

$$\left.\frac{d^2p'_i(\delta)}{d\delta^2}\right|_{\delta=0} = -2p_i, \quad \left.\frac{d^{2j}p'_i(\delta)}{d\delta^{2j}}\right|_{\delta=0} = 0,$$
$$j > 1, \quad i = x, y, z, \tag{17}$$

Здесь

$$K = k_1 + k_3... + k_{2[n/2]-1};$$
$$L = \frac{(-1)^{k_3+\cdots+k_{2[n/2]-1}}}{k_1!k_3!\cdots k_{2[n/2]-1}!}\prod_{j=1}^{[n/2]-1}\left(\frac{(2j)!}{2^{3j}(2j-1)(j!)^2}\right)^{k_{2j+1}}$$

Далее необходимо проинтегрировать выражение (19) по переменной α. Эта задача сводиться к вычислению интеграла $\int_0^{2\pi}\left(\hat{a}\sin\alpha+\hat{b}\cos\alpha\right)^K d\alpha$. Данный интеграл равен нулю, если K нечетное число, но поскольку

$$K = k_1 + k_3 \ldots + k_{2[n/2]-1} = \\ = n - 2k_2 - 2(k_3 \ldots + k_{2[n/2]-1}) - \\ -2(k_5 + \ldots + k_{2[n/2]-1}) - \ldots - 2k_{2[n/2]-1},$$

то четность числа K совпадает с четностью числа n. Из этого следует, что $\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2l+1)!}\frac{d^{2l+1}f}{d\delta^{2l+1}}\Big|_{\delta=0} d\alpha = 0.$

Далее рассмотрим случай с четными значениями $n = 2l$ и соответственно K. Для удобства записи введем обозначения:

$$\begin{gathered} k_2 = m_2, \\ k_1 + k_3 \ldots + k_{2l-1} = 2m_1, \\ k_3 \ldots + k_{2l-1} = m_3, \\ \ldots \\ k_{2l-1} = m_{l+1}. \end{gathered} \tag{20}$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\left(\hat{a}\sin\alpha+\hat{b}\cos\alpha\right)^{2m_1} d\alpha = \\ = 2\pi\frac{(2m_1)!}{2^{2m_1}(m_1!)^2}(\hat{a}^2+\hat{b}^2)^{m_1}. \tag{21}$$

С учетом данного выражения и новых обозначений интеграл по переменной α от выражения (19) при четных значениях n имеет следующий вид:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2l)!}\frac{d^{2l}f}{d\delta^{2l}}\Big|_{\delta=0} d\alpha == 2\pi\sum_{m_2=0}^{l}\frac{\hat{c}^{m_2}}{m_2!}\times \\ \times \sum_{\substack{m_1+m_3\ldots+m_{l+1}=l-m_2 \\ m_1\ge m_3\ge\ldots\ge m_{l+1}\ge 0}} L(m_1,m_3,\ldots,m_{l+1})\frac{(2m_1)!}{2^{m_1}(m_1!)^2}(\hat{a}^2+\hat{b}^2)^{m_1} f, \tag{22}$$

где операторы

$$\hat{a}^2+\hat{b}^2 = p^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} - \\ -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_i p_j\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} = p^2\Delta_{\mathbf{p}} - (\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^2, \tag{23} \\ \hat{c} = -\sum_{i=1}^{3} p_i\frac{\partial}{\partial p_i} = -(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}}).$$

Теперь вычислим выражение (22) при $l = 1$. В этом случае сумма в выражении (22) сводится только к двум членам со значениями $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ ($L = 1/2$) и $m_1 = 0$, $m_2 = 1$ ($L = 1$):

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{d\delta^2}\Big|_{\delta=0} d\alpha = 2\pi\left(\hat{c}+(\hat{a}^2+\hat{b}^2)/2\right)f = \\ = 2\pi\frac{1}{2}\left(p^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_i p_j\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_j} - 2\sum_{i=1}^{3} p_i\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = \\ = 2\pi\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{3}\left[\left(p^2\delta_{ij} - p_i p_j\right)\frac{\partial f}{\partial p_j}\right]. \tag{24}$$

Далее, подставляя данное соотношение в выражение (13) и интегрируя по переменной ξ, получаем первый член дифференциального разложения интеграла упругих столкновений:

$$\mathrm{St}_{\mathrm{el}} = \frac{N\upsilon\sigma_{tr}(p)}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{3}\left[\left(p^2\delta_{ij} - p_i p_j\right)\frac{\partial f}{\partial p_j}\right] + \ldots \tag{25}$$

Данное выражение хорошо известно [5], и имеем прямой аналог в классическом уравнении Фоккера–Планка [6]. Отметим также, что дифференциальный оператор в формуле (24) может быть записан в дивергентном виде:

$$\hat{D}_1 f \equiv \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{3}\left[\left(p^2\delta_{ij} - p_i p_j\right)\frac{\partial f}{\partial p_j}\right] = \\ = p^2\Delta_{\mathbf{p}} f - (\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^2 f - 2(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}} f) = \\ = \mathrm{div}_{\mathbf{p}}(p^2\nabla_{\mathbf{p}} f - \mathbf{p}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}} f)). \tag{26}$$

Соответственно в сферической системе координат $\hat{D}_1 = \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

На следующем шаге вновь вернемся к формуле и вычислим числовой коэффициент при старших производных. Очевидно, что для этого нужно взять значения $m_1 = l, m_2 = m_3 = \ldots = m_{l+1} = 0$. Соответственно числовой коэффициент при члене $(\hat{a}^2+\hat{b}^2)^l$ будет равен $\frac{1}{2^l(l!)^2}$; вынесем этот коэффициент из-под знака суммы в выражении (22):

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2l)!}\frac{d^{2l}f}{d\delta^{2l}}\Big|_{\delta=0} d\alpha = \frac{2\pi}{2^l(l!)^2}\hat{D}_l f,\quad \hat{D}_l \equiv \sum_{m_2=0}^{l}\frac{\hat{c}^{m_2}}{m_2!}\times \\ \times \sum_{\substack{m_1+m_3\ldots+m_{l+1}=l-m_2 \\ m_1\ge m_3\ge\ldots\ge m_{l+1}\ge 0}} L(m_1,m_3,\ldots,m_{l+1})\frac{2^l(l!)^2}{2^{m_1}(m_1!)^2}(2m_1)!(\hat{a}^2+\hat{b}^2)^{m_1}. \tag{27}$$

Далее следует самый важный шаг. Мы хотим доказать рекуррентное соотношение, аналогичное (6):

$$\hat{D}_l = \left\lceil \hat{D}_1 + (l-1)l \right\rceil \hat{D}_{l-1},\ l > 1, \tag{28}$$

только теперь оператор $\widehat{D}_1$ определятся формулой (26).

Прежде всего заметим, что в выражение (27) для оператора $\widehat{D}_l$ входят только дифференциальные операторы вида

$$(p^2\Delta_{\mathbf{p}})^{\beta}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma} = p^{2\beta}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma}\Delta_{\mathbf{p}}^{(\beta)} = = p^{2\beta}\sum_{i_1=1}^{3}\cdots\sum_{i_\gamma=1}^{3} p_{i_1}\cdots p_{i_\gamma}\frac{\partial^{\gamma}}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_\gamma}}\times \times\sum_{j_1=1}^{3}\cdots\sum_{j_\beta=1}^{3}\frac{\partial^{2\beta}}{\partial p_{j_1}^2\cdots\partial p_{j_\beta}^2}. \tag{29}$$

Тогда, если ввести оператор $\widehat{P} = \widehat{D}_1 + (l-1)l$ и использовать соотношение (30), то

$$\widehat{P}\left\{\lambda^{\beta}\tau^{\gamma}\right\} = \gamma(\gamma-1)\lambda^{\beta+1}\tau^{\gamma-2} + 2\gamma\lambda^{\beta+1}\tau^{\gamma-1} + +\lambda^{\beta+1}\tau^{\gamma} - \gamma(\gamma+1)\lambda^{\beta}\tau^{\gamma} - 2(\gamma+1)\lambda^{\beta}\tau^{\gamma+1} - -\lambda^{\beta}\tau^{\gamma+2} + (l-1)l\lambda^{\beta}\tau^{\gamma}. \tag{32}$$

Выражение в формуле (27) для оператора $\widehat{D}_l$ можно формально рассмотреть как многочлен по переменным λ и τ. Необходимо теперь показать, что если подействовать на этот многочлен оператором $\widehat{P}$, действие которого на члены многочлена определяется по правилу (32), то мы получим многочлен соответствующий оператору $\widehat{D}_{l+1}$, т. е.

$$\sum_{m_2=0}^{l+1}\frac{(-\tau)^{m_2}}{m_2!}\sum_{\substack{m_1+m_3\ldots+m_{l+2}=l+1-m_2\\ m_1\ge m_3\ge\ldots\ge m_{l+2}\ge 0}} L(m_1,m_3,\ldots,m_{l+2})\frac{2^{l+1}((l+1)!)^2}{2^{m_1}(m_1!)^2}(2m_1)!(\lambda-\tau^2)^{m_1} = = \widehat{P}\sum_{m_2=0}^{l}\frac{(-\tau)^{m_2}}{m_2!}\sum_{\substack{m_1+m_3\ldots+m_{l+1}=l-m_2\\ m_1\ge m_3\ge\ldots\ge m_{l+1}\ge 0}} L(m_1,m_3,\ldots,m_{l+1})\frac{2^{l}(l!)^2}{2^{m_1}(m_1!)^2}(2m_1)!(\lambda-\tau^2)^{m_1}. \tag{33}$$

Напомним, что величины p_i и ∂_{p_i} здесь рассматриваются как независимые переменные. Далее, опуская длинные выкладки, выпишем сразу результат действия оператора

$$\widehat{D}_1 = p^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}p_ip_j\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j} - 2\sum_{i=1}^{3}p_i\frac{\partial}{\partial p_i}$$

на выражение (29):

$$\widehat{D}_1\left\{(p^2\Delta_{\mathbf{p}})^{\beta}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma}\right\} = = \gamma(\gamma-1)p^{2(\beta+1)}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma-2}\Delta_{\mathbf{p}}^{(\beta+1)} + + 2\gamma p^{2(\beta+1)}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma-1}\Delta_{\mathbf{p}}^{(\beta+1)} + p^{2(\beta+1)}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma}\Delta_{\mathbf{p}}^{(\beta+1)} - - \gamma(\gamma+1)p^{2\beta}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma}\Delta_{\mathbf{p}}^{(\beta)} - - 2(\gamma+1)p^{2\beta}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma+1}\Delta_{\mathbf{p}}^{(\beta)} - - p^{2\beta}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma+2}\Delta_{\mathbf{p}}^{(\beta)}. \tag{30}$$

Введем обозначения:

$$\lambda \equiv p^2\Delta_{\mathbf{p}}, \tau \equiv (\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}}), \quad \lambda^{\beta}\tau^{\gamma} = p^{2\beta}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})^{\gamma}\Delta_{\mathbf{p}}^{(\beta)}. \tag{31}$$

тогда, соответственно будет справедливо рекуррентное соотношение (28).

Для этого вновь рассмотрим здесь случай, когда ФРЭ зависит только от угловой переменной μ. Мы можем записать выражение для интеграла столкновений, аналогичное (13):

$$\mathrm{St}_{\mathrm{el}} = N\upsilon\int_{-1}^{1}\sigma_{\mathrm{el}}(p,\xi)\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{1!}\frac{df(\mu'(\delta),t)}{d\delta}\bigg|_{\delta=0}\times \times\delta + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(\mu'(\delta),t)}{d\delta^2}\bigg|_{\delta=0}\delta^2 + \ldots + +\frac{1}{n!}\frac{d^nf(\mu'(\delta),t)}{d\delta^n}\bigg|_{\delta=0}\delta^n + \ldots\right)d\alpha\, d\xi, \tag{34}$$

где $\mu'(\delta) = \mu(1-\delta^2) + \sqrt{1-\mu^2}\delta\sqrt{2-\delta^2}\cos\alpha$ [1]. Далее мы вновь воспользуемся формулой Фаа Ди Бруно (14), только теперь операторы $\widehat{B}$ будут равны

$$\widehat{B}_2 = -\mu\frac{\partial}{\partial\mu} = \hat{c}, \quad \widehat{B}_{2j} = 0, j > 1; \tag{35}$$

$$\widehat{B}_1 = \sqrt{2}\left(\hat{b}\cos\alpha\right), \quad \hat{b} = \sqrt{1-\mu^2}\,\frac{\partial}{\partial\mu},$$

$$\widehat{B}_{2j+1} = -\frac{(2j)!}{2^{3j}(2j-1)(j!)^2}\widehat{B}_1, j > 1.$$

В итоге получаем выражение, аналогичное (19):

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{d\delta^n}\bigg|_{\delta=0} = \sum_{\substack{k_1+2k_2+3k_3\ldots+\\+(2[n/2]-1)k_{2[n/2]-1}=n}} \frac{\widehat{B}_2^{k_2}}{k_2!}\frac{\widehat{B}_1^{k_1}\widehat{B}_3^{k_3}\cdots\widehat{B}_{2[n/2]-1}^{k_{2[n/2]-1}}}{k_1!k_3!\cdots k_{2[n/2]-1}!}f(\mu,t) =$$
$$= \sum_{\substack{k_1+2k_2+3k_3\ldots+\\+(2[n/2]-1)k_{2[n/2]-1}=n}} \frac{\hat{A}^{k_2}}{k_2!}L(k_1,k_3,\ldots,k_{2[n/2]-1})2^{K/2}\left(\hat{b}\cos\alpha\right)^K f(\mu,t). \quad (36)$$

После интегрирования данного выражения по переменной α получаем, что все нечетные производные также дадут нули, а четные —

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2l)!}\frac{d^{2l}f}{d\delta^{2l}}\bigg|_{\delta=0} d\alpha = \frac{2\pi}{2^l(l!)^2}\widehat{D}_l f,$$

$$\widehat{D}_l \equiv \sum_{m_2=0}^{l}\frac{\hat{c}^{m_2}}{m_2!}\sum_{\substack{m_1+m_3\ldots+m_{l+1}=l-m_2\\ m_1\geq m_3\geq\ldots\geq m_{l+1}\geq 0}} L(m_1,m_3,\ldots,m_{l+1})\frac{2^l(l!)^2}{2^{m_1}(m_1!)^2}(2m_1)!(\hat{b}^2)^{m_1}, \quad (37)$$

$$\hat{c} = -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}, \qquad \hat{b}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - \mu^2\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}.$$

Вводя обозначения $\lambda = \dfrac{\partial^2}{\partial\mu^2}$, $\tau = \mu\dfrac{\partial}{\partial\mu}$, мы вновь здесь приходим к многочлену от λ и τ тождественному полученному ранее (стоящему в правой части равенства (33)).

Рассмотрим теперь действие оператора $\widehat{P} = \widehat{D}_1 + (l-1)l$ на члены $\tau^\gamma\lambda^\beta = \mu^\gamma\dfrac{\partial^{\gamma+2\beta}}{\partial\mu^{\gamma+2\beta}}$, только теперь оператор

$$\widehat{D}_1 = \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - \mu^2\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - 2\mu\frac{\partial}{\partial\mu}:$$

$$\widehat{P}\left\{\tau^\gamma\lambda^\beta\right\} = \left[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - \mu^2\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - 2\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\times$$
$$\times\left\{\mu^\gamma\frac{\partial^{\gamma+2\beta}}{\partial\mu^{\gamma+2\beta}}\right\} + (l-1)l\lambda^\beta\tau^\gamma = \quad (38)$$
$$= \gamma(\gamma-1)\mu^{\gamma-2}\frac{\partial^{\gamma+2\beta}}{\partial\mu^{\gamma+2\beta}} +$$
$$+2\gamma\mu^{\gamma-1}\frac{\partial^{\gamma+1+2\beta}}{\partial\mu^{\gamma+1+2\beta}} + \mu^\gamma\frac{\partial^{\gamma+2\beta+2}}{\partial\mu^{\gamma+2\beta+2}} -$$
$$-\gamma(\gamma-1)\mu^\gamma\frac{\partial^{\gamma+2\beta}}{\partial\mu^{\gamma+2\beta}} - 2\gamma\mu^{\gamma+1}\frac{\partial^{\gamma+1+2\beta}}{\partial\mu^{\gamma+1+2\beta}} -$$
$$-\mu^{\gamma+2}\frac{\partial^{\gamma+2\beta+2}}{\partial\mu^{\gamma+2\beta+2}} - 2\gamma\mu^\gamma\frac{\partial^{\gamma+2\beta}}{\partial\mu^{\gamma+2\beta}} -$$
$$-2\mu^{\gamma+1}\frac{\partial^{\gamma+1+2\beta}}{\partial\mu^{\gamma+1+2\beta}} + (l-1)l\mu^\gamma\frac{\partial^{\gamma+2\beta}}{\partial\mu^{\gamma+2\beta}} =$$
$$= \gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}\lambda^{\beta+1} + 2\gamma\tau^{\gamma-1}\lambda^{\beta+1} + \tau^\gamma\lambda^{\beta+1} -$$
$$-\gamma(\gamma+1)\tau^\gamma\lambda^\beta - 2(\gamma+1)\tau^{\gamma+1}\lambda^\beta -$$
$$-\tau^{\gamma+2}\lambda^\beta + (l-1)l\tau^\gamma\lambda^\beta.$$

Как видим, данное выражение относительно переменных λ и τ полностью совпадает с выражением (32). Таким образом, можно считать доказанным равенство (33), справедливость которого в этом случае следует из истинности утверждения (6), доказанного ранее. В свою очередь, из справедливости равенства (33) следует и истинность рекуррентного соотношения (28).

В итоге после интегрирования членов ряда (13) по переменной ξ (напомним, что $\delta^2 = 1-\xi$)

получаем следующее дифференциальное разложение $\mathrm{St_{el}}$:

$$\mathrm{St_{el}} = N\upsilon\int_{\omega'}\left[f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t) - f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right]\sigma_{el}(p,\xi)\,d\omega' =$$
$$= N\upsilon\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{tr}^{(l)}(p)}{2^l(l!)^2}\widehat{D}_l f(\mathbf{r},\mathbf{p},t),$$
$$\sigma_{tr}^{(l)}(p) = 2\pi\int_{-1}^{1}(1-\xi)^l\sigma_{el}(p,\xi)\,d\xi, \tag{39}$$
$$\widehat{D}_1 f = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{3}\left[\left(p^2\delta_{ij} - p_i p_j\right)\frac{\partial f}{\partial p_j}\right] =$$
$$= \mathrm{div}_{\mathbf{p}}(p^2\nabla_{\mathbf{p}} f - \mathbf{p}(\mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}} f)),$$
$$\widehat{D}_l f = \left[\widehat{D}_1 + (l-1)l\right]\widehat{D}_{l-1} f,\quad l > 1.$$

5. ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ К ВЫВОДУ СИСТЕМЫ МНОГОГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ ФРЭ

Покажем, как полученное разложение (39) может быть использовано для получения системы многогрупповых уравнений для моментов ФРЭ. Обычно при выводе из уравнения (1) уравнений для моментов ФРЭ используют разложение ФРЭ в ряд по ортогональным функциям, например, полиномам Эрмита–Чебышева [7], или функциям Барнетта [8]. Недостатком данного подхода является его ограниченность областью низких энергий, где угловое распределение электронов обладает слабой анизотропией. В случае же релятивистских электронов данное приближение не выполняется, поскольку угловое распределение электронов сильно анизотропно [9]. Используя полученное здесь дифференциальное разложение (39), можно получить систему уравнений для моментов ФРЭ как в области низких, так и высоких энергий.

Для того чтобы получить систему многогрупповых уравнений интересуемый интервал значений импульса $\left[p_{\min}, p_{\max}\right]$ разбивается на K частей $\Delta p_{k+1/2,k-1/2} = p_{k+1/2} - p_{k-1/2}$, $k = 1, \ldots, K$ [11, 12]. Величина нулевого (концентрация электронов) и первого (плотность потока) момента ФРЭ в k-й группе определяется следующим образом:

$$n_k(\mathbf{r},t) \equiv \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp\int_{-1}^{1} d\mu\int_0^{2\pi} f(\mathbf{r},p,\mu,\varphi,t)d\varphi,$$

$$\mathbf{j}_k(\mathbf{r},t) \equiv \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp\int_{-1}^{1} d\mu\int_0^{2\pi} \mathbf{v}f(\mathbf{r},p,\mu,\varphi,t)d\varphi. \tag{40}$$

Для получения уравнения для изменения величины $n_k(\mathbf{r},t)$ необходимо проинтегрировать кинетическое уравнение (1) по шаровому слою в пространстве импульсов $p\in[p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$, $\mu\in[-1, 1]$ и $\varphi\in[0,2\pi]$. Интегрируя левую часть кинетического уравнения (1), получаем выражение

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \mathrm{div}_{\mathbf{r}}\mathbf{j}_k + \frac{(\mathbf{j}_{k+1/2}\mathbf{F}_\mathrm{E})}{\upsilon_{k+1/2}(p_{k+1} - p_k)} - \frac{(\mathbf{j}_{k-1/2}\mathbf{F}_\mathrm{E})}{\upsilon_{k-1/2}(p_k - p_{k-1})}. \tag{41}$$

Для получения уравнения для изменения величины $\mathbf{j}_{k+1/2}(\mathbf{r},t)$ необходимо умножить уравнение (1) на вектор $\mathbf{v}$ и проинтегрировать по шаровому слою $p\in[p_k, p_{k+1}]$, $\mu\in[-1, 1]$ и $\varphi\in[0,2\pi]$, в итоге получаем выражение

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{k+1/2}}{\partial t} + \mathrm{div}_{\mathbf{r}}\Pi_{k+1/2} + \frac{(\Pi_{k+1}\mathbf{F}_\mathrm{E})}{\upsilon_{k+1}(p_{k+3/2} - p_{k+1/2})} - \frac{(\Pi_k\mathbf{F}_\mathrm{E})}{\upsilon_k(p_{k+1/2} - p_{k-1/2})} - \mathbf{F}_\mathrm{E}\frac{\upsilon_{k+1/2}n_{k+1/2}}{p_{k+1/2}}, \tag{42}$$

где тензор второго ранга Π_k – это тензор плотности потока импульса.

Далее необходимо проинтегрировать члены $\mathrm{St_{el}}$, $\mathrm{St_{ex}}$, $\mathrm{St_{ion}}$, стоящие в правой части уравнения (1). В [10], где был выполнен вывод системы многогрупповых уравнений для нулевого и первого момента функции распределения электронов низких энергий, при интегрировании правой части уравнения (1) использовалось приближение Лоренца для ФРЭ. Используя полученное здесь дифференциальное разложение (39) можно выполнить интегрирование, не используя этого упрощения.

Рассмотрим это на примере интеграла упругих столкновений $\mathrm{St_{el}}$. В случае нулевого момента, интегрируя выражение (39) по шаровому слою естественно, поскольку число электронов не меняется в процессе упругого рассеяния, получаем ноль ввиду равенств

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\widehat{D}_l f(p,\mu,\varphi,t)\,d\varphi\,d\mu = 0, \tag{43}$$

так как

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\widehat{D}_1 g(p,\mu,\varphi,t)\,d\varphi\,d\mu =$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial g}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\right]d\varphi\,d\mu = 0.$$

В случае уравнения первого момента, используя равенство

$$\int\limits_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2dp\int_{-1}^{1}d\mu\int\limits_{0}^{2\pi}\mathbf{v}\widehat{D}_l f(p,\mu,\varphi,t)d\varphi = = -2\int\limits_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2dp\int_{-1}^{1}d\mu\int\limits_{0}^{2\pi}\mathbf{v}f(p,\mu,\varphi,t)d\varphi, \tag{44}$$

получаем, что ненулевой вклад даст только первый член разложения (39), а все остальные члены дадут нули ввиду первого уравнения системы (11).

Аналогично при выводе уравнения для второго момента Π_k, используя равенство

$$\int\limits_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2dp\int_{-1}^{1}d\mu\int\limits_{0}^{2\pi} v_i v_j\,\widehat{D}_l f(p,\mu,\varphi,t)d\varphi = = 2\int\limits_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2dp\int_{-1}^{1}d\mu\int\limits_{0}^{2\pi}(p^2\delta_{ij} - 3v_i v_j)f(p,\mu,\varphi,t)d\varphi, \tag{45}$$

можно показать, что не нулевой вклад при интегрировании величины $\mathrm{St}_{\mathrm{el}}$ дадут только первые два члена ряда (39), остальные дадут нули в силу второго равенства системы (11). В общем случае при получении уравнения для n-го момента отличный от нуля вклад дадут только первые n членов ряда (39).

Отметим, без рассмотрения, что похожим образом используя некоторые упрощения (предполагается, что электрон не меняет направления своего движения в процессе возбуждения атомов, и процесс ионизации рассматривается как рассеяние электрона на свободном электроне) [11, 14], можно выполнить и интегрирование величин $\mathrm{St}_{\mathrm{ex}}$, $\mathrm{St}_{\mathrm{ion}}$. В итоге можно получить следующую систему многогрупповых уравнений для нулевого и первого момента ФРЭ

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \mathrm{div}_{\mathbf{r}}\mathbf{j}_k = \frac{(\mathbf{F}_{\mathrm{E}}\times\mathbf{j}_{k-1/2})}{\upsilon_{k-1/2}(p_k - p_{k-1})} - \frac{(\mathbf{F}_{\mathrm{E}}\times\mathbf{j}_{k+1/2})}{\upsilon_{k+1/2}(p_{k+1} - p_k)} - (\nu_{\mathrm{ion},k} + \nu_{\mathrm{ex},k})n_k + \sum_m \nu^{(m)}_{\mathrm{ex},k_m} n_{k_m} + \sum_{l=l_k}^{K} s_{lk}\upsilon_l n_l,$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{k+1/2}}{\partial t} + \mathrm{div}_{\mathbf{r}}\Pi_{k+1/2} = = \frac{(\mathbf{F}_{\mathrm{E}}\times\Pi_k)}{\upsilon_k(p_{k+1/2} - p_{k-1/2})} - \frac{(\mathbf{F}_{\mathrm{E}}\times\Pi_{k+1})}{\upsilon_{k+1}(p_{k+3/2} - p_{k+1/2})} + \mathbf{F}_{\mathrm{E}}\frac{\upsilon_{k+1/2}n_{k+1/2}}{p_{k+1/2}} - (\nu_{\mathrm{tr},k+1/2} + \nu_{\mathrm{ion},k+1/2} + \nu_{\mathrm{ex},k+1/2})\mathbf{j}_{k+1/2} + \sum_m(\upsilon_{k+1/2}/\upsilon_{k_m+1/2})\nu^{(m)}_{\mathrm{ex},k_m+1/2}\mathbf{j}_{k_m+1/2} + \sum_{l=l_k+1/2}^{K} s_{l+1/2,k+1/2}\mu_0(\varepsilon_{l+1/2},\varepsilon_{k+1/2})\upsilon_{k+1/2}\mathbf{j}_{l+1/2}, \tag{46}$$

где $\nu_{\mathrm{tr}} = N\upsilon\sigma_{\mathrm{tr}}$ — эффективная частота упругих столкновений. Величины $\nu_{\mathrm{ex}} = N\upsilon\sum_m q^{(m)}_{\mathrm{ex}}(\varepsilon)$ и $\nu^{(m)}_{\mathrm{ex},k_m} = N\upsilon q^{(m)}_{\mathrm{ex}}(\varepsilon_{k_m})$, где $q^{(m)}_{\mathrm{ex}}$ — сечение возбуждения m-го уровня атома (молекулы) с энергией возбуждения $\varepsilon^{(m)}_{\mathrm{ex}}$, k_m — это номер отрезка $[p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$ внутри которого лежит значение $p(\varepsilon_k + \varepsilon^{(m)}_{\mathrm{ex}})$.

Величины

$$s_{lk} \equiv N_0\upsilon_k\Delta p_{k+1/2,k-1/2}\sum_m \sigma^{(m)}_{\mathrm{ion}}(\varepsilon_l,\varepsilon_k),$$
$$\nu_{\mathrm{ion},k} \equiv N_0\upsilon_k\sum_m q^{(m)}_{\mathrm{ion}}(\varepsilon_k)$$

и l_k — это номер отрезка $[p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$ в котором лежит значение $p(\varepsilon_k + \min\limits_m\{\varepsilon^{(m)}_{\mathrm{ion}}\})$; μ_0 — это косинус угла рассеяние электрона в процессе ионизации [3], c — скорость света.

Отметим, что при выводе системы уравнений (46) не использовались никакие предположения относительно вида ФРЭ. В этом смысле система (46) является точной. Однако система не замкнута, поскольку в нее входит величина Π_k для определения которой необходимо дополнительное уравнение. Если использовать приближение Лоренца (слабая анизотропия ФРЭ), то в этом случае тензор потока импульса принимает вид $\pi_{k,ij} = \delta_{ij}\dfrac{n_k\upsilon_k^2}{3}$, и, подставляя данное выражение в (46), можно получить замкнутую систему уравнений, которая будет идентична, полученной в [10], за исключением членов, отвечающих за потери энергии электроном в упругих столкновениях, но которыми можно пренебречь в достаточно сильных электрических полях [10, 13].

В статье [14], используя разложение (5), была получена система одномерных многогрупповых уравнений для двух первых моментов функции распределения убегающих электронов в области релятивистских энергий. Но поскольку в процессе вывода предполагалось, что ФРЭ не зависит от азимутального угла φ в пространстве импульсов, то полученная система уравнений не описывала диффузию электронов в направлении, ортогональном направлению дрейфа электронов. Используя полученное здесь разложение (39), можно получить систему многогрупповых уравнений, описывающую транспорт электронов высоких энергий с учетом поперечной диффузии электронов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено дифференциальное представление интеграла упругих столкновений электронов в слабоионизованной плазме в предположении, что кинетическая энергия электронов намного превышает энергию нейтральных частиц (атомов или молекул). При этом первый член разложения совпадает с классическим оператором, фигурирующем в уравнении Фоккера–Планка. Данное дифференциальное разложение может быть использовано для вывода уравнений для моментов ФРЭ во всем диапазоне энергий электрона, в том числе и в области релятивистских энергий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бочков Е.И.* // Физика плазмы. 2022. Т. 48. № 5. С. 463.
2. *Holstein T.* // Physical Review. 1946. V. 70. № 5–6. P. 367.
3. *Бабич Л.П.* // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. № 4. С. 808.
4. *Шабат А.Б., Эфендиев М.Х.* // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9. № 3. С. 132.
5. *Gurevich A.V., Lukyanov A.V., Zybin K.P., and R.A. Roussel-Dupre.* // Electron Kinetics and Applications of Glow Discharges. NATO ASI Series. Series B: Physics. 1998. V. 367. P. 19.
6. *Rosenbluth M.N., MacDonald W.M. and Judd D.L.* // Physical Review. 1957. V. 107. № 1. P 1.
7. *Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е.* Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977.
8. *Simonovic I., Bošnjaković D., Zoran Lj. Petrović, Ronald D. White and Dujko S.* // The European Physical journal D, 2020. https://doi.org/10.1140/epjd/e2020-100574-y
9. *Бабич Л.П., Донской Е.Н., Илькаев Р.И., Куцык И.М., Рюссель-Дюпре Р.А.* // Физика плазмы. 2004. Т. 30. № 6.
10. *Бочков Е.И.* // Физика плазмы. 2024. Т. 50. № 5. С. 592.
11. *Бочков Е.И.* // Физика плазмы. 2023. Т. 49. № 2. С. 175.
12. *Бабич Л.П., Кудрявцева М.Л.* //ЖЭТФ. 2007. Т. 131. № 5. С. 808.
13. *Bochkov E.I.* // Physics of Plasmas. 2024. V. 31. № 10. 103503.
14. *Бочков Е.И.* // ЖЭТФ. 2022. Т. 162. С. 267.

COMPLETE DIFFERENTIAL EXPANSION OF THE INTEGRAL OF ELASTIC COLLISIONS OF ELECTRONS WITH HEAVY NEUTRAL PARTICLES

E. I. Bochkov[a, *]

[a] *Russian Federal Nuclear Center—All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics, Sarov, Nizhny Novgorod oblast, 60719, Russia*

**e-mail: e_i_bochkov@mail.ru*

The derivation of the complete differential expansion of the integral of elastic collisions of electrons with heavy neutral particles is performed for the case when the electron distribution function is not symmetric with respect to some direction. The derivation is made under the assumption that the kinetic energy of electrons greatly exceeds the energy of thermal motion of atoms and molecules. It is shown how the resulting expansion can be used to derive equations for the moments of the electron distribution function.

Keywords: electron distribution function, kinetic equation, collision integral, differential expansion