

РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПЛАЗМЫ В ЗАДАННОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

© 2024 г. В. Н. Шаповалов^a, А. В. Шаповалов^a, Т. Б. Гольдварг^{a,*}

^aКалмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова, Элиста, Россия

*e-mail: goldvarg.tatyana@mail.ru

Поступила в редакцию 14.04.2024 г.

После доработки 19.09.2024 г.

Принята к публикации 25.09.2024 г.

Проведена редукция системы уравнений МГД для равновесных состояний плазмы в заданном потенциальном поле к одному дифференциальному уравнению.

Ключевые слова: плазма, равновесное состояние, потенциал, уравнения МГД

DOI: 10.31857/S0367292124110103, **EDN:** FAUQOW

1. ВВЕДЕНИЕ

В многочисленных работах по равновесным состояниям свободной идеальной плазмы, инвариантных относительно какой-либо однопараметрической группы геометрических симметрий, изучаются свойства решений дифференциального уравнения, к которому редуцируют соответствующую систему МГД, здесь эталонными считаются исследования Града и Шафранова [1, 2]. Система МГД для инвариантных равновесных состояний плазмы в потенциальном внешнем поле проинтегрирована полностью в работе [3], в которой в явном виде записаны напряженность магнитного поля, давление и плотность плазмы для произвольного инвариантного равновесного состояния, инвариантного относительно группы симметрии, генерируемой естественным образом однопараметрической группой движений с вектором Киллинга $\mathbf{w}$ евклидова пространства. В системе координат (x) , где $\mathbf{w}^n(x) = \delta^{n3}$, все характеристики плазмы не зависят от переменной x^3 ; $\mathbf{H} = \mathbf{w} \cdot h(A)/\mathbf{w}^2 + [\nabla(A) \times \mathbf{w}]/\mathbf{w}^2$. В переменных $a = A(x)$, $u = U(x)$ давление и плотность имеют вид

$$p(a, u) = - \int \left(\nabla \cdot \frac{\nabla(A)}{\mathbf{w}^2} - \frac{hh'}{\mathbf{w}^2} - \frac{qh}{\mathbf{w}^4} \right) da,$$

$$\rho = - \frac{\partial p}{\partial u}.$$

Здесь $h(A)$, $A(x^1, x^2)$ — произвольные функции своих аргументов; $q = \text{const}$. Хотя невозможно описать столь же полно произвольное несимметричное равновесное состояние, представляет интерес «максимально полное» интегрирование условий равновесия, точнее редукция их к одному дифференциальному уравнению. Этому посвящена настоящая работа.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Запишем систему МГД равновесных состояний в виде

$$[[\nabla \times \mathbf{H}] \times \mathbf{H}] = -\nabla p + \rho \cdot \nabla U, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

Здесь $(\mathbf{H}/4\pi)^{1/2}$ — вектор напряженности магнитного поля; скаляры p , ρ , U — давление, плотность плазмы, заданный потенциал внешнего поля соответственно. Подчеркнем, в настоящей работе реализован локальный подход к изучению состояний: рассматривается идеальная плазма в области, где характеристики состояния описываются однозначными гладкими функциями и можно ввести систему координат (x') , в которой две компоненты контравариантного вектора $\mathbf{H}$ (скажем, 1-я и 2-я) равны нулю. Теперь в исходной системе координат (x) имеем $\mathbf{H} = h(x)[\nabla(x^1) \times \nabla(x^2)]$. Принимая во внимание (2), находим $h = h(x^1(x), x^2(x))$. Таким образом справедливо представление

$$\mathbf{H}(x) = [\nabla A(x) \times \nabla B(x)]. \quad (3)$$

Здесь A , B — произвольные однозначные гладкие функции (потенциалы). Отметим, что исследования по симметрии дифференциальных уравнений [4] являются локальными теориями. Теперь (1) можно представить как уравнение в дифференциалах

$$d(p(x)) = (\nabla B(x) \cdot \nabla \times [\nabla A(x) \times \nabla B(x)])dA(x) - (\nabla A(x) \cdot \nabla \times [\nabla A(x) \times \nabla B(x)])dB(x) - \rho(x)dU(x). \quad (4)$$

Рассмотрим возможные случаи.

Тун А

$$H(x) \cdot \nabla U(x) \neq 0 \Leftrightarrow [\nabla A(x) \times \nabla B(x)] \cdot \nabla U(x) \neq 0. \quad (5)$$

Введем новые координаты (a, b, u) ,

$$a = A(x), \quad b = B(x), \quad u = U(x).$$

В новых координатах образы скаляров — давления, плотности, потенциала внешнего поля — имеют вид $P(a, b, u)$, $R(a, b, u)$, u , где

$$\begin{aligned} P(A(x), B(x), U(x)) &= p(x), \\ R(A(x), B(x), U(x)) &= \rho(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (4) равносильно системе

$$\frac{\partial P}{\partial a} = M(a, b, u), \quad \frac{\partial P}{\partial b} = N(a, b, u) \quad (7)$$

и определяющему плотность R равенству

$$R(a, b, u) = -\frac{\partial P}{\partial u}. \quad (8)$$

Здесь по определению

$$\begin{aligned} M(A(x), B(x), U(x)) &= (\nabla B(x) \cdot \nabla \times [\nabla A(x) \times \nabla B(x)]), \\ N(A(x), B(x), U(x)) &= -(\nabla A(x) \cdot \nabla \times [\nabla A(x) \times \nabla B(x)]). \end{aligned} \quad (9)$$

Условие совместности системы (7) имеет вид

$$\frac{\partial M(a, b, u)}{\partial b} = \frac{\partial N(a, b, u)}{\partial a}. \quad (10)$$

Запишем это равенство в исходной системе координат (x) . Предварительно: пусть (x') — некоторая система координат, докажем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = e'_{ijk}(x')([\nabla x'^j \times \nabla x'^k] \cdot \nabla)/2. \quad (11)$$

Здесь $e'_{ijk}(x')$ — ковариантные компоненты символа Леви—Чивита в системе координат (x) .

Доказательство: умножая равенство

$$\frac{\partial}{\partial x^q} = \frac{\partial x'^s}{\partial x^q} \frac{\partial}{\partial x'^s}$$

на выражение

$$\frac{\partial x'^r}{\partial x^n} \frac{\partial x'^p}{\partial x^m} e^{nmq}$$

и учитывая тензорный характер символа Леви—Чивита, получаем

$$[\nabla x'^p \times \nabla x'^r] \cdot \nabla = e'^{prs}(x') \frac{\partial}{\partial x'^s}.$$

Умножая это равенство на e'_{ipr} и учитывая, что

$$e'_{ipr}(x')e'^{prs}(x') = 2\delta_i^s,$$

получаем требуемое равенство (11).

Замечание. Запишем для примера равенство (11) для $i = 1$

$$\frac{\partial}{\partial x'^1} = (g'(x'))^{1/2}([\nabla x'^2 \times \nabla x'^3] \cdot \nabla),$$

$$g'(x') = (\nabla x'^1 \cdot [\nabla x'^2 \times \nabla x'^3])^{-2}.$$

Используя (11) и Замечание, находим

$$\frac{\partial}{\partial a} = -(\nabla B \cdot [\nabla A \times \nabla U])^{-1}(\nabla B \cdot [\nabla U \times \nabla]),$$

$$\frac{\partial}{\partial b} = (\nabla B \cdot [\nabla A \times \nabla U])^{-1}(\nabla A \cdot [\nabla U \times \nabla]).$$

Теперь условие совместности (10) в системе координат (x) можно записать в виде

$$\begin{aligned} ([\nabla U \times \nabla A] \cdot \nabla) \cdot (\nabla B \cdot \nabla \times [\nabla A \times \nabla B]) &= \\ = ([\nabla U \times \nabla B] \cdot \nabla) \cdot (\nabla A \cdot \nabla \times [\nabla A \times \nabla B]). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом потенциалы, давление, плотность любого заданного равновесного состояния обращают в тождества уравнения (7), (8), (12). С другой стороны, каждое частное решение $A(x)$, $B(x)$ уравнения (12) обеспечивает совместность системы (7) с неизвестной функцией $P(a, b, u)$ и задает ее в виде

$$P(a, b, u) = \int M(a, b, u)da + N(a, b, u)db$$

с точностью до слагаемого — произвольной функции переменной (u) . Теперь плотность $R(a, b, u)$ определяется из уравнения (8). Следовательно система уравнений (1) и (2) редуцирована к уравнению (12).

Примером такого состояния является аксиально-симметричное с потенциалом A вида $[\nabla A \times \nabla U] \neq 0$, в частности, это условие выполнено с $U = U(r, z)$ и $A = A(r, U)$ при $U'_z A'_r \neq 0$. Здесь — произвольная функция своих аргументов.

Тип B

$$H(x) \cdot \nabla U(x) = 0.$$

Не уменьшая общности, запишем произвольное решение уравнения (2) в виде

$$H(x) = \nabla A(x) \times \nabla U(x) \neq 0. \quad (13)$$

Из уравнения (4), полагая в нем $B(x) = U(x)$, получаем: существует функция $P(a, u)$ такая, что

$$p(x) = P(A(x), U(x)), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \rho(x) &= -\frac{\partial P(a, u)}{\partial u} \Big|_{(a=A(x), u=U(x))} - \\ &\quad - \nabla A(x) \cdot \nabla \times [\nabla A(x) \times \nabla U(x)], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \nabla U(x) \cdot \nabla \times [\nabla A(x) \times \nabla U(x)] &= \\ = \frac{\partial P(a, u)}{\partial a} \Big|_{(a=A(x), u=U(x))}. \end{aligned} \quad (16)$$

Задавая произвольно функцию $P(a, u)$, из уравнения (16) находим $A(x)$, затем из уравнения (15) находим $\rho(x)$. Для интегрирования уравнения (16) важно утверждение, перед формулировкой и доказательством которого сделаем несколько замечаний. Перейдем от декартовых координат (x) к координатам (x') :

$$x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = U(x); \quad (17)$$

Приведем выражение $g' = \det(g'_{ij}(x'))$ и отличные от нуля контравариантные компоненты метрического тензора евклидова пространства в системе координат (x')

$$g'^{11} = g'^{22} = 1, \quad g'^{13} = U_{,1}, \quad g'^{23} = U_{,2}, \quad g'^{33} = (\nabla U)^2, \quad 1/g' = (U_{,3})^2|_{(x=x(x'))}, \quad (18)$$

$$q_{,n}(x) = \frac{\partial q(x)}{\partial x^n}.$$

Отметим еще, что скалярный потенциал внешнего поля в координатах (x) задан функцией $U(x)$, а в координатах (x') в силу (17) функцией $U'(x') = x'^3$; таким образом $\partial U'/\partial x'^n = \delta_{3n}$. Далее получена структура уравнения (16) в координатах (x') .

Теорема. В системе координат (x') уравнение (16) не содержит производных потенциала A по переменной x'^3 , т. е. эта переменная входит в уравнение как параметр.

Доказательство. Используя тождества

$$\nabla c \cdot \nabla \times \mathbf{w} = \nabla \cdot (c \nabla \times \mathbf{w}),$$

$$c \nabla \times \mathbf{w} = \nabla \times (c \mathbf{w}) - [\nabla c \times \mathbf{w}],$$

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

приводим уравнение (16) к виду

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ((\nabla U)^2 \cdot \nabla A - (\nabla A \cdot \nabla U) \cdot \nabla U) = \\ = - \frac{\partial P(a, u)}{\partial a} \Big|_{(a=A(x), u=U(x))}. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя выражения для дивергенции контравариантного вектора $\mathbf{w}$ и контравариантных компонент градиента скаляра q , имеем в любой системе координат (x)

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{(w^n(x) \cdot \sqrt{g})_{,n}}{\sqrt{g}}, \quad (\nabla q)^n = g^{nk} q_{,k}.$$

Теперь уравнение (18) в системе координат (x') принимает вид

$$\frac{(g'^{ij} g'^{33} - g'^{3i} g'^{3j}) A'_{,i} \sqrt{g'}}{\sqrt{g'}} = - \frac{\partial P(a, x'^3)}{\partial a} \Big|_{(a=A'(x'))}. \quad (20)$$

Обозначим

$$(g'^{ij} g'^{33} - g'^{3i} g'^{3j}) = N^{ij}.$$

Очевидно $N^{3j} = 0$, таким образом

$$N^{ij} = N^{\alpha\beta} \delta_{\alpha}^i \delta_{\beta}^j \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Теперь уравнение (20) можно записать как

$$\frac{N^{\alpha\beta} A'_{,\beta} \sqrt{g'}}{\sqrt{g'}} = - \frac{\partial P(a, x'^3)}{\partial a} \Big|_{(a=A'(x'))}. \quad (21)$$

Здесь

$$N^{\alpha\beta}(x') = ((\nabla U)^2 \delta_{\alpha\beta} - U_{,\alpha} U_{,\beta})|_{(x=x(x'))}.$$

Теорема доказана.

Итак, для вычисления характеристик частного равновесного состояния рассматриваемого типа следует

- 1) задать функцию $P(a, u)$;
- 2) вычислить в переменных (x') величины N ;
- 3) найти какое-либо частное решение $A'(x')$ уравнения (21) и функцию $A(x)$ с помощью (17) по формуле $A(x) = A'(x'(x))$;
- 4) по формулам (13)–(15) получить в системе координат (x) напряженность магнитного поля, давление и плотность.

Очевидно, произвол в выборе функции $P(a, u)$ и частного решения уравнения (21) позволяет найти все равновесные состояния рассматриваемого типа.

Можно привести много примеров таких состояний, однако отобрать из них физически интересные могут только хорошие специалисты в физике плазмы, поэтому приводим без анализа примеры.

Пример 1:

$$U = U(z), \quad p = Q(z) + U'^2 A^2 / 2,$$

$$\rho = -(Q' + U' U'' A^2) / U' - (\nabla A \cdot \nabla \times \mathbf{H}),$$

$$A = a(z) \cos(x \cos(q(z))) \sin(y \sin(q(z))).$$

Здесь $Q(z)$, $q(z)$, $a(z)$ — произвольные функции.

Пример 2:

$$U = U(z), \quad p = Q(z) - U'^2 \exp A,$$

$$\rho = -(Q' - 2U' U'' \exp A) / U' - (\nabla A \cdot \nabla \times \mathbf{H}),$$

$$A = -\ln(2) + 2 \ln \left| \frac{a'(s)}{\text{Re}(a)} \right|.$$

Здесь $Q(z)$, $a(s, z)$ — произвольные функции, $2s = x + iy$.

Отметим следующее.

1. Результатом редукции уравнений (1), (2) с $\nabla U \neq 0$ является одно уравнение на потенциалы; магнитное поле определяет давление и плотность с точностью до слагаемых $q(U)$ и $-q'(U)$ соответственно ($q(U)$ — произвольная функция); при $U = 0$ из (4) имеем систему из двух уравнений на потенциалы, структура которой не допускает ее редукцию к одному уравнению.

2. Указанная неоднозначность в определении давления и плотности означает существование множества «нефизических» решений системы (1), (2), в

которых некоторые параметры плазмы принимают сколь угодно большие значения в достаточно слабом внешнем поле. Похоже, нет конструктивного аналитического алгоритма отсеивания «нефизических» решений.

3. Магнитное поле равновесного состояния («равновесное» поле) несвободной плазмы ($\nabla U \neq 0$) является «равновесным» полем «свободной» плазмы, если и только если $[\nabla(\rho) \times \nabla U] = 0$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты работы.

Система МГД для равновесных состояний плазмы в потенциальном внешнем поле, в которых эквипотенциальные поверхности внешнего поля не являются магнитными, редуцирована к дифференциальному уравнению с частными производными 3-го порядка на потенциалы магнитного поля.

Система МГД для равновесных состояний плазмы в

потенциальном внешнем поле, в которых эквипотенциальные поверхности внешнего поля являются магнитными, редуцирована к дифференциальному уравнению с частными производными 2-го порядка на потенциал магнитного поля.

Полученные результаты не публиковались ранее в научных журналах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grad H., Rubin H.* // Proceed. 2nd UN Confer. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958. V. 31. P. 190.
2. *Shafranov V.D., Leontovich M.A.* // Reviews of Plasma Physics. V. 2 / Ed. M.A. Leontovich. New York: Consultants Bureau, 1966.
3. *Шановалов В.Н., Шановалова О.В.* // Изв. вузов. Физика. 2003. Т. 46.
4. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

EQUILIBRIUM STATES OF PLASMA IN A GIVEN EXTERNAL FIELD

V. N. Shapovalov^a, A. V. Shapovalov^a, and T. B. Gol'dvarg^{a,*}

^a Kalmyk State University, Elista, 358000 Russia

*e-mail: goldvarg.tatyana@mail.ru

The system of MHD equations for the equilibrium states of plasma in a given potential field is reduced to a single differential equation.

Keywords: plasma, equilibrium state, potential, MHD equations