

УДК 533.9

ГЕНЕРАЦИЯ КВАЗИЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ МЕДЛЕННЫХ НЕОБЫКНОВЕННЫХ ВОЛН КАППА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ С КОНУСОМ ПОТЕРЬ

© 2024 г. Д. Р. Шкляр^{a, *}, Н. С. Артеха^{a, b, **}^aИнститут космических исследований РАН, Москва, Россия^bНИУ “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*e-mail: david@iki.rssi.ru

**e-mail: natalya.arteha@mail.ru

Поступила в редакцию 01.07.2024 г.

После доработки 02.08.2024 г.

Принята к публикации 10.08.2024 г.

Выполнено детальное исследование генерации медленных необыкновенных (МН) волн в магнитосфере Земли. В предположении, что распределение энергичных электронов описывается функцией распределения вида К-функции с конусом потерь, рассчитан инкремент неустойчивости МН-волн и изучена его зависимость как от параметров функции распределения горячих частиц, так и от плотности холодных частиц, которая характеризуется отношением плазменной электронной частоты к электронной циклотронной частоте: ω_p / ω_c . Это отношение является одним из ключевых параметров задачи. Для различных значений ω_p / ω_c получены зависимости инкремента неустойчивости от параметра функции распределения К, параметра конуса потерь l , температуры распределения и ее анизотропии. Выявлена и объяснена немонотонная, квазипериодическая зависимость инкремента от отношения частоты к электронной гирочастоте, которая проявляется в зависимости экваториального инкремента от L -оболочки, либо зависимости инкремента от широты на фиксированной L -оболочке.

Ключевые слова: медленные необыкновенные волны, каппа-распределение, конус потерь, двойной плазменный резонанс, инкремент волны

DOI: 10.31857/S0367292124100063, EDN: FCPCYU

1. ВЕДЕНИЕ

Резонансное взаимодействие волн и частиц является одним из фундаментальных процессов в околоземной плазме [1]. Это взаимодействие в значительной степени определяет спектры наблюдаемых волн, также как и динамику энергичных частиц в плазмосфере, в частности, в радиационных поясах Земли. По существующим представлениям, резонансное взаимодействие с волнами играет важную роль в ускорении и питч-угловом рассеянии энергичных частиц, приводящем к их высыпанию в атмосферу [2].

Как известно, условие резонансного взаимодействия волны с частицами в магнитоактивной плазме имеет вид

$$v_{\parallel} = \frac{\omega - n\omega_c / \gamma}{k_{\parallel}}, \quad (1)$$

где $v_{\parallel}$ — скорость частицы вдоль внешнего магнитного поля, ω — частота волны, ω_c — абсолютная величина электронной циклотронной частоты, γ — релятивистский фактор, $k_{\parallel}$ — параллельная (вдоль внешнего магнитного поля) компонента волнового вектора и n — номер циклотронного резонанса. Очевидно, что резонансные условия (1) могут быть выполнены только в случае, когда стоящая в правой стороне равенства (1) величина, называемая резонансной скоростью, меньше скорости света c . Хотя в случае $(\omega - n\omega_c / \gamma) \ll \omega$ резонансные условия могут быть выполнены и тогда, когда показатель преломления

$N \equiv kc / \omega < 1$, наиболее благоприятные условия для резонансного взаимодействия, очевидно, имеют место при $N \gg 1$. В области частот, существенно превышающих частоту нижнего гибридного резонанса, — такие волны принято называть электронными волнами, — существуют две волновые моды, показатель преломления которых может существенно превышать единицу — это свистовая мода и медленная необыкновенная (МН) мода, иногда называемая также z -модой [3]. Следуя [3], в настоящей работе мы будем использовать первое из указанных названий.

Резонансное взаимодействие свистовых волн с энергичными частицами плазмы исследовано достаточно полно, и этим исследованиям, без преувеличения, посвящено огромное число работ. Здесь мы укажем лишь некоторые обзорные статьи на эту тему [4–8].

МН-волны и связанные с ними эффекты также изучались достаточно интенсивно. В работе [9], например, параллельно исследовалась циклотронная неустойчивость свистовых и медленных необыкновенных волн, и обосновывалась необходимость учета релятивистских эффектов для резонансных частиц во втором случае. Многие результаты в этом направлении, полученные до 2002 г., суммированы в обзоре [10]. Как известно, МН-волны занимают частотный диапазон от частот ниже электронной плазменной частоты ω_p вплоть до верхнегибридной частоты ω_{UH} , причем, при $\omega_p \gg \omega_c$ этот диапазон достаточно узкий. Как мы увидим ниже, именно вблизи верхнегибридной частоты инкремент МН-волн имеет максимальное значение.

Верхнегибридные волны регулярно наблюдаются в магнитосфере Земли и обычно используются для оценки электронной плазменной частоты и концентрации холодных электронов [11]. Согласно [12] интенсивные квазиэлектростатические волны вблизи верхнегибридной частоты наблюдаются за плазмопаузой при всех локальных временах. Они наблюдаются в локализованных областях со средней протяженностью по радиусу порядка 0.35 радиуса Земли R_E на широтах от экватора вплоть до 50° . Важной особенностью верхнегибридных волн является их высокая интенсивность $\sim 1\text{--}20$ мВ/м и достаточно узкая спектральная ширина: менее 10% от центральной частоты. Из более поздних работ, посвященных экспериментальным и теоретическим исследованиям верхнегибридных волн, укажем статьи [13–16].

В двух из них [13, 16] отмечалось преимущественное возбуждение верхнегибридных волн в экваториальной области. Роль интенсивных верхнегибридных волн в генерации узкополосного излучения Сатурна изучалась в работе [17] по данным миссии Cassini. В этой работе для вычисления инкремента использована достаточно сложная функция распределения энергичных частиц, состоящая из трех компонент: двухтемпературного максвелловского распределения, каппа-распределения с выраженным конусом потерь и параллельного пучка. Выбирая подходящие параметры трех распределений, опираясь на наблюдения, возможно получить достаточно большой инкремент и коэффициент усиления z -моды, которые позволяют объяснить наблюдения.

В случае, когда волна возбуждается в результате взаимодействия с частицами на одном из циклотронных резонансов, а частота волны совпадает с частотой верхнего гибридного резонанса, говорят о двойном плазменном резонансе. Такая терминология часто используется в работах, посвященных радиоизлучению Солнца, в частности, так называемым “зебра”-структурам и всплескам типа “головастиков”. Исследованию возбуждения волн на двойном плазменном резонансе и объяснению на этой основе спектральных структур в солнечных радиовсплесках посвящено большое количество работ, среди которых укажем цикл работ [18–20], а также работу [21]. В этих работах неустойчивость на двойном плазменном резонансе исследовалась для случая, типичного для плазмы солнечной короны, состоящей из достаточно горячей фоновой плазмы, определяющей дисперсию волн, и энергичной компоненты малой плотности с анизотропным распределением по скоростям, определяющей возбуждение или поглощение волн. В отличие от рассматриваемого в настоящей работе случая “холодной” фоновой плазмы, в случае горячего фона в диапазоне частот между частотой отсечки МН-волн и верхнегибридной частотой существуют другие собственные колебания плазмы, так называемые бернштейнские моды, представляющие собой продольные (или квазиэлектростатические) колебания. Исследование циклотронной неустойчивости плазмы солнечной короны с учетом релятивистских эффектов для энергичной компоненты плазмы, а также возможных нелинейных эффектов, а именно, комбинационного рассеяния

бернштейновских мод, приводящего к их трансформации в электромагнитное излучение, позволили авторам указанного цикла работ объяснить “зебра”-структуры и “головастики” в солнечных радиовсплесках. Помимо указанного цикла работ [18–20] отметим более позднюю работу [22], где неустойчивость на двойном плазменном резонансе также рассматривалась как источник солнечных “зебра”-структур, однако исследовалась численными методами. Авторы использовали численные расчеты методом частиц в ячейках (PIC) в 3-мерной релятивистской модели и функцию распределения Дори–Геста–Харриса (DGH) [23] для описания эволюции неустойчивости на двойном плазменном резонансе и генерации верхнегибридных волн.

В нашей работе генерация МН-волн исследуется для случая, более характерного для магнитосферы Земли, где фоновую плазму с хорошей степенью точности можно считать “холодной”. По постановке задачи и исследуемой проблеме наша работа близка к указанной выше статье [16]. В отличие от [16], где для вычисления инкремента используется кольцевое распределение в пространстве скоростей, мы используем к-распределение с конусом потерь. Кроме того, основное внимание в нашей работе уделено влиянию отношения плазменной и циклотронной электронных частот и параметров функции распределения энергичных частиц на зависимость инкремента МН-волн от частоты и угла волновой нормали. Эти вопросы тесно связаны с проблемой определения наиболее вероятной области возбуждения МН-волн в магнитосфере. Решению указанных вопросов и посвящена настоящая работа. В следующем разделе мы приведем дисперсионные характеристики МН-волн, знание которых необходимо для ответа на поставленные вопросы. В третьем разделе обсудим модельную функцию распределения, которая будет использоваться при вычислении инкремента. Выражение для инкремента квазиэлектростатических волн и результаты его численного расчета составляют содержание четвертого раздела. В пятом разделе суммируются результаты работы.

2. НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕДЛЕННЫХ НЕОБЫКНОВЕННЫХ (МН) ВОЛН

Квадрат показателя преломления $N^2 = k^2 c^2 / \omega^2$ для волн в холодной магнитоактивной плазме определяется уравнением (см., например, [3])

$$AN^4 + BN^2 + C = 0, \quad (2)$$

где коэффициенты A, B и C выражаются через компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ и угол волновой нормали θ соотношениями

$$\begin{aligned} A &= \epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta, \\ B &= -\epsilon_1 \epsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) - (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \theta, \\ C &= \epsilon_3 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2), \end{aligned} \quad (3)$$

а сами компоненты $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ даются выражениями

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\omega^2 - \omega_{UH}^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}, \\ \epsilon_3 &= \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ω_p и ω_c – электронная плазменная частота и абсолютная величина электронной гирочастоты, соответственно, и $\omega_{UH} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}$ – верхнегибридная частота. Для рассматриваемых в данной работе МН-волн вкладом ионных членов в компоненты тензора диэлектрической проницаемости можно пренебречь. Уравнение (2) лежит в основе теории волн в холодной магнитоактивной плазме. Его вывод, а также определение входящих в него величин могут быть найдены во многих учебниках по волновым процессам в плазме (см., например, [3, 24, 25]). В этой работе мы используем обозначения и определения волновых мод, принятые в монографии [3].

Как известно (см., например, [3]), топология зависимости квадрата показателя преломления от частоты волны ω и угла волновой нормали θ зависит от отношения плазменной и циклотронной электронных частот: ω_p / ω_c . МН волны существуют в диапазоне частот от частоты отсечки

$$\omega_0 = -\frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_p^2}, \quad (5)$$

для которой показатель преломления обращается в ноль, до резонансной частоты ω_r , на которой показатель преломления обращается в бесконечность. Последняя определяется соотношением

$$\omega_r^2 = \frac{\omega_{UH}^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{UH}^4}{4} - \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta}. \quad (6)$$

Обратим внимание, что частота отсечки зависит только от параметров плазмы, но не зависит от угла распространения волны, в то

время как резонансная частота зависит от угла распространения θ и имеет следующие предельные значения:

$$\begin{aligned}\omega_r(\theta = 0) &= \max(\omega_p, \omega_c), \\ \omega_r(\theta = \pi/2) &= \omega_{UH}.\end{aligned}\quad (7)$$

Отметим некоторые особенности МН-волн. Из всех волновых мод, которые существуют в холодной магнитоактивной плазме, МН-волны единственные, показатель преломления которых может быть как меньше, так и существенно больше единицы. Независимо от величины ω_p / ω_c , т. е. от отношения электронной плазменной и циклотронной частот, диапазон МН-волн всегда включает плазменную частоту электронов, причем, на этой частоте показатель преломления всегда равен единице, независимо от величины ω_p / ω_c и угла распространения θ [26]. Поскольку ω_p является частотой отсечки обыкновенной волны (О-моды), то всегда существует диапазон частот, в котором одновременно существует и МН- и О-мода. Это является важной предпосылкой для возможной трансформации волн в неоднородной плазме.

Другой особенностью МН-волн является то, что, в отличие от других мод, поляризация МН-волн при $\omega_p / \omega_c < 1$ может быть как левой, так и правой, в зависимости от частоты и угла распространения. При $\omega_p / \omega_c > 1$ МН-волны для всех углов распространения и доступных частот имеют левую поляризацию. Поляризация МН-волн на плоскости (θ, ω) показана на рис. 1 для трех значений параметра ω_p / ω_c . Положительные и отрицательные значения отвечают правой и левой поляризации, соответственно, а абсолютная величина равна эллиптичности электрического поля, т. е. отношению меньшей полуоси эллипса поляризации к большей. Обратим внимание, что при продольном распространении, т. е. при $\theta = 0$ поляризация волны, как это хорошо известно, всегда является круговой, причем, при $\omega_p / \omega_c > 1$ поляризация является левой, а при $\omega_p / \omega_c < 1$ волны имеют левую поляризацию при $f < f_p$ и правую поляризацию при $f > f_p$. Такой скачок поляризации связан со скачком показателя преломления МН-волны при $f = f_p$ и $\theta = 0$.

3. КАППА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В однородной среде каппа-распределение электронов с конусом потерь имеет вид

$$f(P) = \frac{n_0}{\pi^{3/2} P_{\parallel T} P_{\perp T}^2} \frac{\Gamma(\kappa + l + 1)}{\kappa^{l+3/2} \Gamma(l + 1) \Gamma(\kappa - l/2)} \cdot \left(\frac{P_{\perp}}{P_{\perp T}} \right)^{2l} \left(1 + \frac{P_{\parallel}^2}{\kappa P_{\parallel T}^2} + \frac{P_{\perp}^2}{\kappa P_{\perp T}^2} \right)^{-(\kappa + l + 1)}.\quad (8)$$

Здесь P — релятивистский импульс частицы с компонентами $P_{\parallel}, P_{\perp}$ вдоль и поперек внешнего магнитного поля, $P_{\parallel T}, P_{\perp T}$ — соответствующие “тепловые” значения, κ — основной параметр каппа-распределения, l — параметр конуса потерь и $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Функция распределения (8) нормирована таким образом, что

$$\int f(P) d^3 P = n,$$

где n — не зависящая от координат плотность частиц. Выражение (8) является прямым обобщением функции распределения, приведенной в работе [27], на случай релятивистских частиц.

Обобщим выражение (8) на случай неоднородной среды. Как известно, невозмущенная функция распределения в неоднородной среде должна зависеть от интегралов движения, в качестве которых мы выберем модуль релятивистского импульса P , через который релятивистский γ -фактор выражается соотношением (m — масса электрона, c — скорость света)

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{P^2}{m^2 c^2}},$$

и поперечный адиабатический инвариант (магнитный момент) M ,

$$M = \frac{P_{\perp}^2}{2m\omega_c},$$

где, как и выше, $\omega_c = |e| B_0 / mc$ — абсолютная величина электронной циклотронной частоты, e — заряд электрона, B_0 — модуль внешнего магнитного поля. Обобщение (8) на случай неоднородной плазмы приводит к выражению

$$f_0(P, M) = C \left(\frac{M}{M_T} \right)^l \cdot \left(1 + \frac{P^2}{\kappa P_T^2} - A_T \frac{M}{\kappa M_T} \right)^{-(\kappa + l + 1)},\quad (9)$$

где

$$P_T^2 \equiv P_{\parallel T}^2; \quad M_T = \frac{P_{\perp T}^2}{2m\omega_{ceq}}; \quad A_T = \frac{P_{\perp T}^2}{P_{\parallel T}^2} - 1,$$

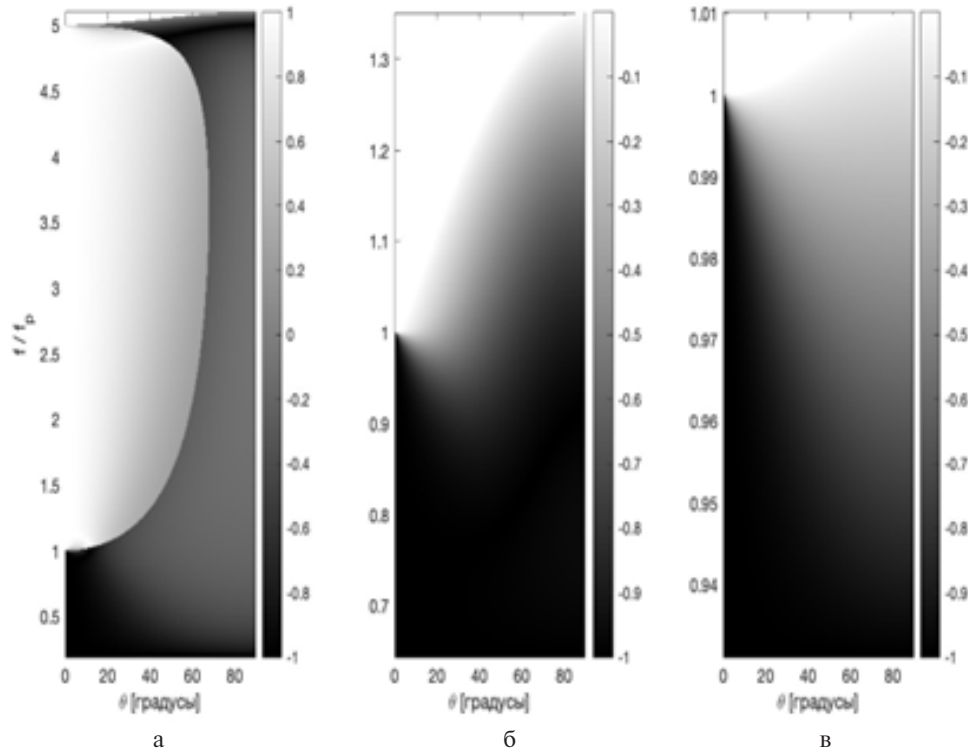


Рис. 1. Поляризация МН-волн как функция частоты и угла распространения для трех значений параметра ω_p / ω_c : 0.2 (а), 1.1 (б), 7 (в).

и ω_{ceq} — экваториальная циклотронная частота. Величина A_T характеризует анизотропию распределения по $P_{\perp T}^2$ и $P_{\parallel T}^2$, которые определяют спадание функции распределения с ростом $P_{\perp}$ и $P_{\parallel}$. При переходе к бимаксвелловскому распределению величины $P_{\perp T}^2$ и $P_{\parallel T}^2$ пропорциональны поперечной и продольной температуре соответственно. Как видно из определения, величина A_T всегда лежит в диапазоне от -1 до $+\infty$. При $P_{\perp T}^2 = P_{\parallel T}^2$ анизотропия $A_T = 0$. В случае $P_{\perp T}^2 > P_{\parallel T}^2$, который характерен для пробочных магнитных конфигураций, каковой является магнитосфера Земли, величина $A_T > 0$, однако при $P_{\perp T}^2 < P_{\parallel T}^2$ величина $-1 < A_T < 0$. Для полноты исследования этот случай также рассмотрен в нашей работе. Постоянная C выражается через плотность частиц на экваторе и другие постоянные параметры распределения следующим образом:

$$C = \frac{n_{eq}}{2\pi^{3/2} m \omega_{ceq} P_T M_T} \frac{\Gamma(\kappa + l + 1)}{\kappa^{l+3/2} \Gamma(l + 1) \Gamma(\kappa - 1/2)},$$

где n_{eq} — плотность частиц на экваторе. Для распределения (9) локальная плотность $\tilde{n}(z)$ связана с экваториальной плотностью n_{eq} соотношением

$$\tilde{n}(z) = n_{eq} \left(\frac{\omega_{ceq}}{\omega_c} \right)^l \left[1 + A_T \left(1 - \frac{\omega_{ceq}}{\omega_c} \right) \right]^{l-1}, \quad (10)$$

где z — координата вдоль заданной силовой линии.

4. ЛИНЕЙНЫЙ ИНКРЕМЕНТ

Приведем выражение для локального линейного инкремента квазиэлектростатической МН-волны, распространяющейся под углом θ к внешнему магнитному полю. Как было показано в [6], в пределе малых амплитуд, что соответствует линейному приближению, локальный инкремент свистовой волны в неоднородной плазме совпадает с линейным инкрементом для однородной среды, в которой параметры совпадают с локальными параметрами неоднородной плазмы. Под параметрами подразумеваются как параметры плазмы, а именно, плазменная и циклотронная частоты, так и параметры волны: частота и угол волновой нормали.

Вычисление линейного инкремента для МН-волны в неоднородной плазме проводится аналогичным образом. Соответствующие вклады приведены в Приложении. Линейный инкремент является суммой вкладов от всех

циклотронных резонансов. В релятивистском случае резонансные условия имеют вид

$$P_{\parallel} = P_m \equiv \frac{m(\omega\gamma - n\omega_c)}{k_{\parallel}}, \quad (11)$$

где, как и выше, ω и $k_{\parallel}$ — частота волны и продольная составляющая волнового вектора, а n — номер циклотронного резонанса. В отличие от нерелятивистского случая, когда резонансные условия определяют продольную скорость частиц, взаимодействующих с волной на n -м циклотронном резонансе, соотношение (11) определяет кривую на плоскости $(P_{\parallel}, P)$, вблизи которой частицы взаимодействуют с волной на n -м резонансе. Мы будем обозначать линейный инкремент через γ_L (не путать с релятивистским γ -фактором). Полученное в Приложении выражение для линейного инкремента квазиэлектростатической МН-волны, распространяющейся под произвольным углом к внешнему магнитному полю, имеет вид

$$\gamma_L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{Ln}, \quad (12)$$

$$\gamma_{Ln} = \frac{(\pi e m \omega E_0)^2}{2 |k_{\parallel}| k^2 U} \int_{P_{min}}^{\infty} dP \gamma^2 J_n^2 \left(k_{\perp} \sqrt{\frac{2M}{m\omega_c}} \right) \left(\frac{\partial f_0}{\partial P} + \frac{nP}{m\omega\gamma} \frac{\partial f_0}{\partial M} \right) \Bigg|_{M=M_m(P)}.$$

Здесь E_0 — амплитуда электрического поля линейно поляризованной квазиэлектростатической МН-волны, U — ее плотность энергии,

$$U = \frac{E_0^2}{8\pi} \left\{ 1 + \frac{\omega_p^2 \omega_c^2}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2} \right\} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta, \quad (13)$$

$P_{min} = |P_m|$, J_n — функция Бесселя индекса n , и $M = M_m(P)$ означает, что после дифференцирования величина M во всех выражениях под знаком интеграла заменяется на резонансное значение $M_m(P)$, определяемое соотношением

$$M_m(P) = \frac{P^2 - P_m^2}{2m\omega_c}, \quad (14)$$

где P_m определено в (11). Подчеркнем, что входящая в (13) плазменная частота ω_p определяется плотностью “холодных” частиц, которая должна быть существенно больше плотности горячих частиц n_{eq} и $\tilde{n}(z)$ для того, чтобы используемое нами выражение для инкремента волны было применимо. Отметим также, что хотя

выражение (12) содержит сумму по бесконечному числу резонансов, заметный вклад в инкремент вносит конечное число резонансов n ; это число, а также номера резонансов зависят от параметров волны, параметров плазмы и вида функции распределения.

Введем безразмерные переменные и параметры функции распределения согласно соотношениям

$$p = \frac{P}{mc}, \quad \mu = \frac{M\omega_{ceq}}{mc^2}, \quad (15)$$

$$p_T = \frac{P_T}{mc}, \quad \mu_T = \frac{M_T\omega_{ceq}}{mc^2}.$$

В новых переменных функция распределения (9) и общее выражение γ_{Ln} для вклада в инкремент волны от n -го резонанса принимают вид

$$f_0(p, \mu) = \frac{n_{eq}}{2\pi^{3/2} (mc)^3 p_T \mu_T} \cdot \frac{\Gamma(\kappa + l + 1)}{\kappa^{l+3/2} \Gamma(l+1) \Gamma(\kappa - 1/2)} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_T} \right)^l \left(1 + \frac{p^2}{\kappa p_T^2} - A_T \frac{\mu}{\kappa \mu_T} \right)^{-(\kappa+l+1)}, \quad (16)$$

$$\gamma_{Ln} = \frac{(\pi e m \omega E_0)^2}{2 |k_{\parallel}| k^2 U} \int_{P_{min}}^{\infty} dp \gamma^2 J_n^2(p) \cdot \left(\frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{np\omega_{ceq}}{\omega\gamma} \frac{\partial f_0}{\partial \mu} \right) \Bigg|_{\mu=\mu_m(p)}, \quad (17)$$

где

$$\rho = N \sin \theta \left(\frac{2\mu\omega^2}{\omega_c \omega_{ceq}} \right)^{1/2},$$

$$N = \frac{kc}{\omega}, \quad \mu_m = M_m \frac{\omega_{ceq}}{mc^2}$$

и M_m определено в (14). Подстановка (16) в (17) приводит к следующему выражению для инкремента квазиэлектростатической МН-волны в случае распределения энергичных электронов вида каппа-функции с конусом потерь:

$$\begin{aligned} \gamma_{Ln} &= \frac{\pi^{1/2} (eE_0 m \omega)^2}{4 |k_{\parallel}| k^2 U} \frac{n_{eq}}{(mc)^3 p_T \mu_T} \cdot \\ &\cdot \frac{\Gamma(\kappa + l + 1)}{\kappa^{l+3/2} \Gamma(l + 1) \Gamma(\kappa - 1/2)} g_{Ln}, \\ g_{Ln} &= \int_{p_{min}}^{\infty} dp \gamma^2 J_n^2(\rho) \left(\frac{\mu_{rm}}{\mu_T} \right)^{l-1} \times \\ &\times \left(1 + \frac{p^2}{\kappa p_T^2} - \frac{\mu_{rm}}{\kappa \mu_T} A_T \right)^{-(\kappa+l+2)} \times \\ &\times \left\{ -\frac{2p}{\kappa p_T^2} \frac{(\kappa + l + 1) \mu_{rm}}{\mu_T} + \frac{n p \omega_{ceq}}{\omega \gamma} \times \right. \\ &\times \left. \left[\left(1 + \frac{p^2}{\kappa p_T^2} - A_T \frac{\mu_{rm}}{\kappa \mu_T} \right) \frac{l}{\mu_T} + \frac{A_T (\kappa + l + 1) \mu_{rm}}{\kappa \mu_T^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

При выводе инкремента МН-волны мы считали, что электрическое поле волны линейно поляризовано вдоль волнового вектора и, соответственно, магнитное поле волны мало. Как будет видно из дальнейшего, это условие действительно выполняется для частот, близких к резонансным, т. е. при

$$\omega \simeq \omega_r(\theta),$$

где $\omega_r(\theta)$ определяется выражением (6). Как видно из (18), выражение γ_{Ln} может быть положительным и вносить вклад в инкремент только в случае, когда положительным является выражение в квадратных скобках. Само же это выражение является немонотонной функцией анизотропии A_T , поэтому следует ожидать, что и инкремент волны будет немонотонной функцией A_T , что и подтверждают приведенные ниже расчеты.

Для определения области вероятного возбуждения МН-волн в магнитосфере при выбранной функции распределения энергичных частиц мы будем использовать дипольную модель внешнего магнитного поля и гиротропную модель плотности холодных частиц, в которой $n_{cold} \propto B_0$, а именно

$$\omega_p^2 = \frac{S^2}{27} \omega_{ceq}^0 \omega_c,$$

где ω_{ceq}^0 — значение электронной гирочастоты на поверхности Земли на экваторе и $S = const$. При таком выборе коэффициента пропорциональности между ω_p^2 и ω_c отношение ω_p / ω_c на экваторе на $L = 3$ равно S . Очевидно, что в выбранной гиротропной модели отношение ω_p / ω_c возрастает с уменьшением ω_c и убывает с ростом ω_c . В частности, величина ω_p / ω_c убывает вдоль силовой линии при движении от экватора к полюсу и возрастает с ростом L -оболочки при фиксированной магнитной широте. На рис. 2 и 3 показаны рассчитанные значения инкремента МН-волн как функции частоты и угла распространения для двух L -оболочек и трех значений широты, соответствующих значений параметра ω_p / ω_c и допустимых диапазонов частот. В этих расчетах мы использовали следующие параметры функции распределения горячих частиц и распределения холодной плазмы:

$$\begin{aligned} \kappa &= 2, \quad l = 1, \quad P_T = 0.45 mc, \quad A_T = 1, \\ n_{eqhot} &= 0.01 n_{eqcold}, \quad S = 3. \end{aligned}$$

В области выше темной сплошной линии поляризация волны близка к линейной, что мы предполагали при вычислении инкремента. Как видно, максимум инкремента волны лежит в этой области, что оправдывает принятое упрощение. Подчеркнем, что условие линейной поляризации волны тесно связано с условием $N^2 \gg 1$, поскольку, как известно, при $N^2 \rightarrow \infty$, поляризация волны становится линейной.

На рис. 2 приведены результаты расчета инкремента на $L = 3$ для трех широт: $\lambda = 0^\circ$ (рис. 2а), $\lambda = 30^\circ$ (рис. 2б) и $\lambda = 45^\circ$ (рис. 2в). Кроме того, на каждом рисунке указаны частота и угол волновой нормали, соответствующие максимальному инкременту на всей плоскости, а также само значение максимального инкремента. На рис. 3 показаны результаты расчета инкремента для $L = 4.5$ и трех значений широт $\lambda = 0, 30$ и 55° на рис. 3а, б, в соответственно. Мы видим, что при фиксированных параметрах функции распределения энергичных частиц, на обеих L -оболочках инкремент волны максимален на экваторе, поэтому дальнейшее исследование инкремента МН-волн от параметров холодной плазмы и функции распределения энергичных частиц выполнены для широты $\lambda = 0$. Как показывают оценки, для рассматриваемых параметров продольная резонансная энергия для многих циклотронных ре-

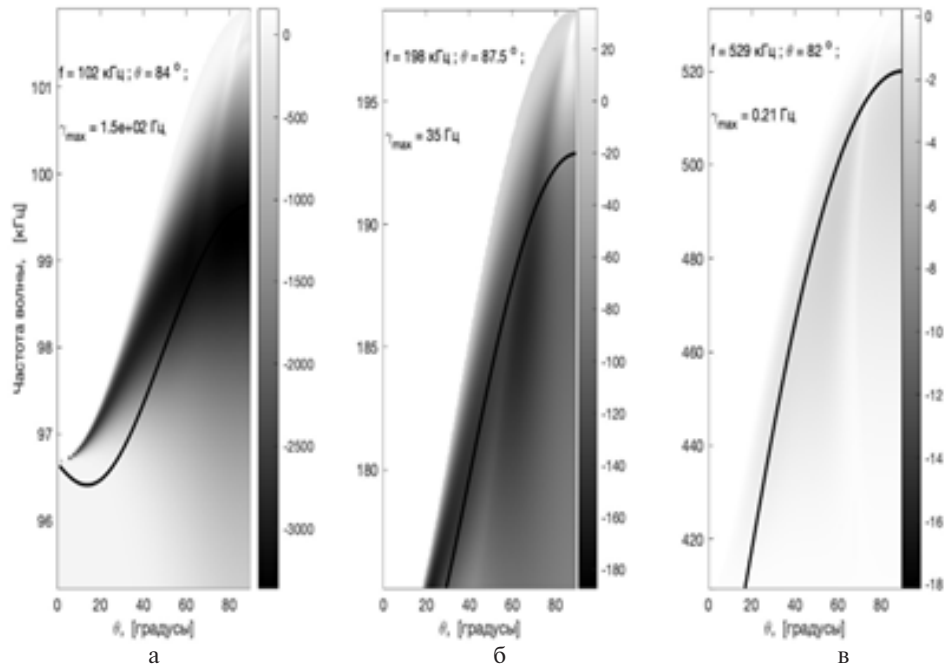


Рис. 2. Инкремент МН-волны как функция частоты и угла распространения на L -оболочке $L = 3$ для трех значений широты $\lambda = 0$ (а), 30 (б) и 45° (в).

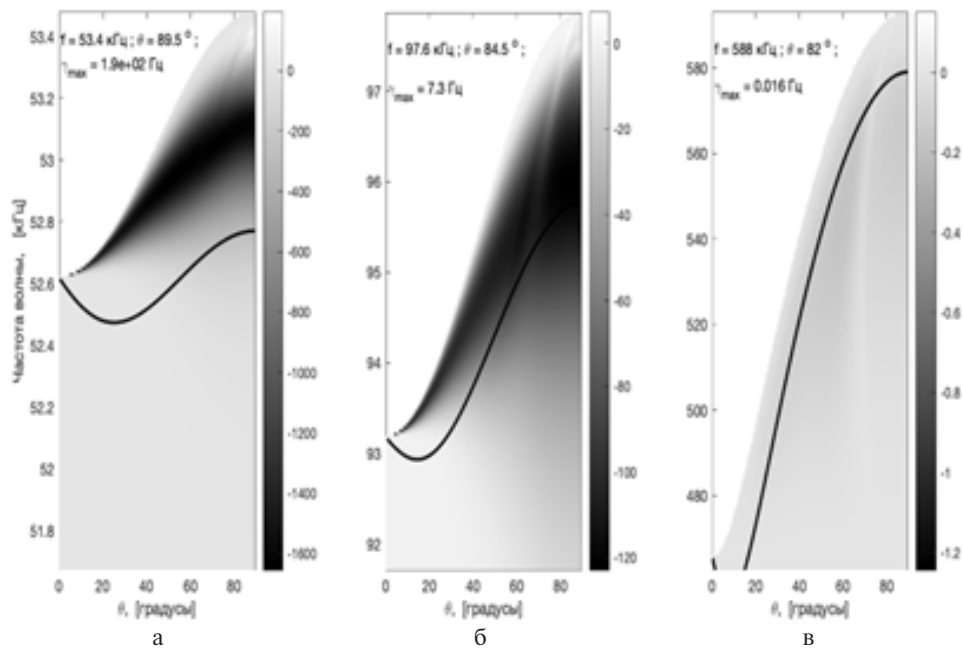


Рис. 3. Инкремент МН-волны как функция частоты и угла распространения на L -оболочке $L = 4,5$ для трех значений широты $\lambda = 0$ (а), 30 (б) и 55° (в).

зонансов, вносящих заметный вклад в инкремент, может превышать 1.5 МэВ, что делает необходимым учет релятивистских эффектов. На необходимость учета релятивистских эффектов при вычислении инкремента МН-волн в магнитосфере Земли было указано в работе [9].

На рис. 4 представлена зависимость инкремента от тепловой энергии горячих частиц T , через которую параметр функции распределения p_T^2 (см. (16)) выражается как $p_T^2 = (1 + T / 512)^2 - 1$, где T — энергия в кэВ. Показанная на рис. 4 величина — это максимальное по всем углам волновой

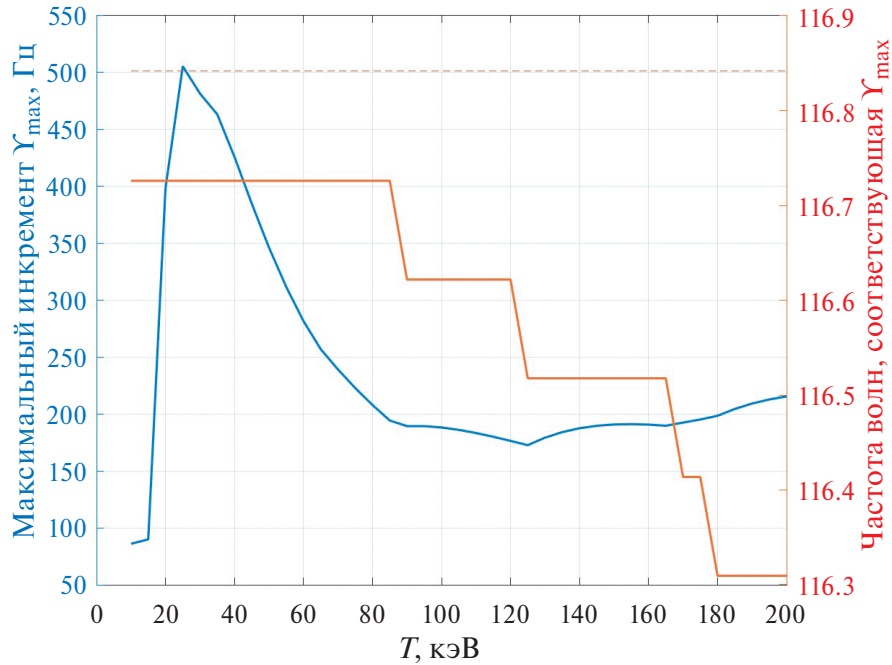


Рис. 4. Максимальный инкремент волны как функция T на $L = 3.5$, $\lambda = 0$ для следующих параметров функции распределения: $k = 2$, $l = 1$, $A_T = 1$, $n_{eq\,hot} = 0.01n_{eq\,cold}$, $S = 4.5$, $\omega_p / \omega_c = 5.67$.

нормали и всем доступным частотам значение инкремента как функция T . (По-существу, это инкремент волны, которая при фиксированных параметрах плазмы и функции распределения энергичных частиц будет возбуждаться в первую очередь. То же самое относится и к другим зависимостям инкремента от параметров функции распределения, которые обсуждаются ниже.) На правой шкале показаны частоты, на которых достигаются соответствующие максимальные значения инкремента. Пунктирной линией показана частота верхнего гибридного резонанса f_{UH} , которая является резонансной частотой МН волн при углах волновой нормали $\theta = 90^\circ$. Поскольку при меньших углах распространения резонансная частота меньше f_{UH} , а частота волны всегда меньше резонансной, то близость частоты максимума инкремента к f_{UH} означает, что этот максимум достигается при углах волновой нормали, близких к 90° , что и подтверждают результаты расчета. Немонотонная зависимость максимального инкремента от T связана с тем, что с ростом T включается большее количество резонансов, дающих существенный, но не знакоопределенный вклад в γ_L .

На рис. 5 показаны зависимость максимального инкремента МН волны от параметра функции распределения k на $L = 3.5$, $\lambda = 0$, а также соответствующий угол волновой нормали. Пара-

метры, к которым относится данный расчет, указаны в подписи к рисунку. Как мы видим, для данных параметров максимальный инкремент монотонно возрастает с ростом k . Кроме того, угол волновой нормали, отвечающий максимуму инкремента, $\sim 90^\circ$, так что соответствующая частота близка к резонансной частоте f_{UH} .

Неустойчивость функции распределения (9) по отношению к возбуждению МН-волн связана с анизотропией и конусом потерь. В отсутствие конуса потерь, инкремент очень мал при произвольной анизотропии. Однако, при наличии конуса потерь, инкремент волны существенно зависит от анизотропии распределения. Эти утверждения подтверждаются расчетами, результаты которых показаны на рис. 6, 7. Приведенные на них результаты относятся к $L = 3$ и параметрам функции распределения $T = 25$ кВ, $k = 2$. Мы видим, что при фиксированной анизотропии A_T максимальный инкремент, вообще говоря, растет с ростом параметра конуса потерь l . Однако зависимость инкремента от анизотропии A_T при фиксированном параметре конуса потерь не является однозначной. В случае положительной анизотропии (см. рис. 6), при малых значениях ω_p / ω_c и фиксированном параметре конуса потерь инкремент сначала растет с ростом A_T а затем сильно падает. При $\omega_p / \omega_c = 1$ и доста-

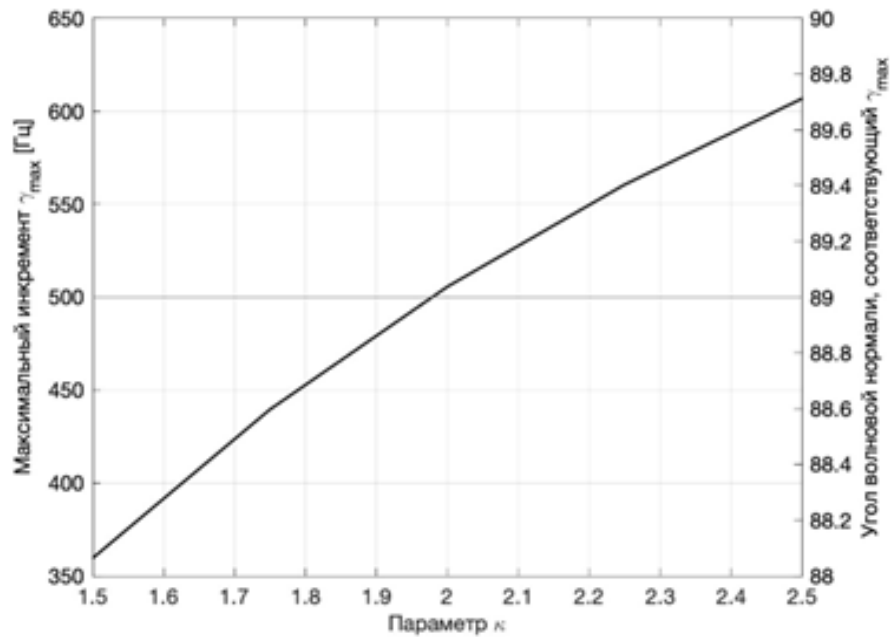


Рис. 5. Максимальный инкремент волны как функция k на $L = 3.5$, $\lambda = 0$ для следующих параметров функции распределения: $l = 1$, $A_T = 1$, $T = 25$ кэВ, $n_{eqhot} = 0.01n_{eqcold}$, $S = 4.5$, $\omega_p / \omega_c = 5.67$.

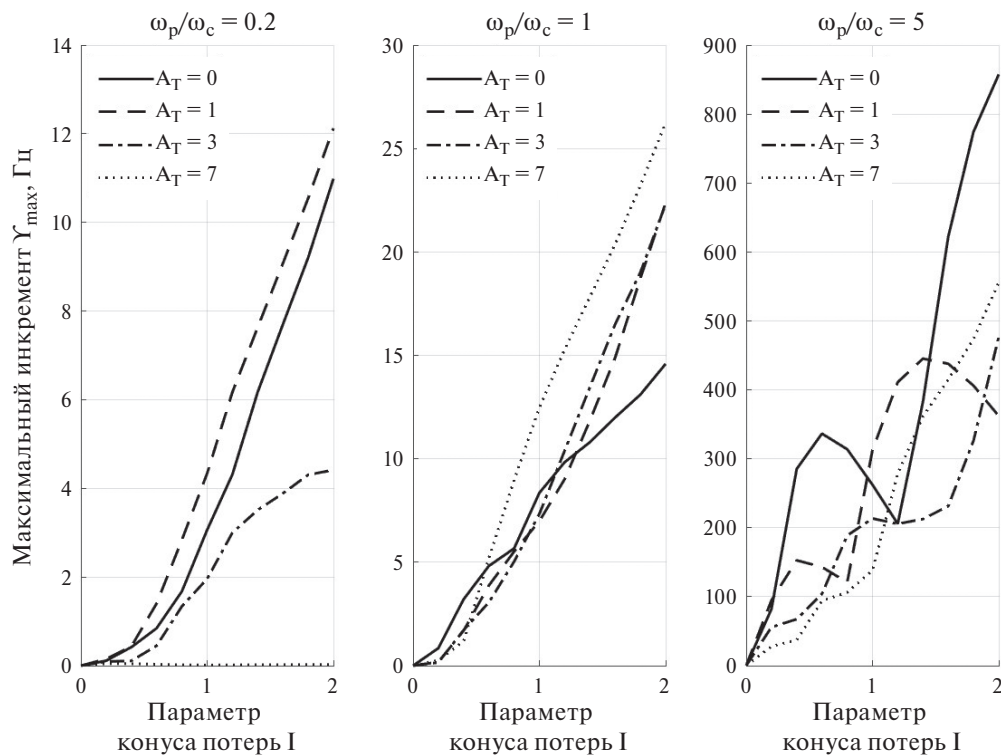


Рис. 6. Зависимость максимального инкремента от параметра конуса потерь l для четырех значений анизотропии A_T и трех значений параметра ω_p / ω_c .

точно больших значениях параметра конуса потерь инкремент растет с ростом анизотропии, а при больших значениях ω_p / ω_c начинаются колебания инкремента при изменении параметра

конуса потерь, и вообще нет однозначной зависимости инкремента от анизотропии при фиксированном l . При отрицательной анизотропии (см. рис. 7), при малых ω_p / ω_c максимальный инкре-

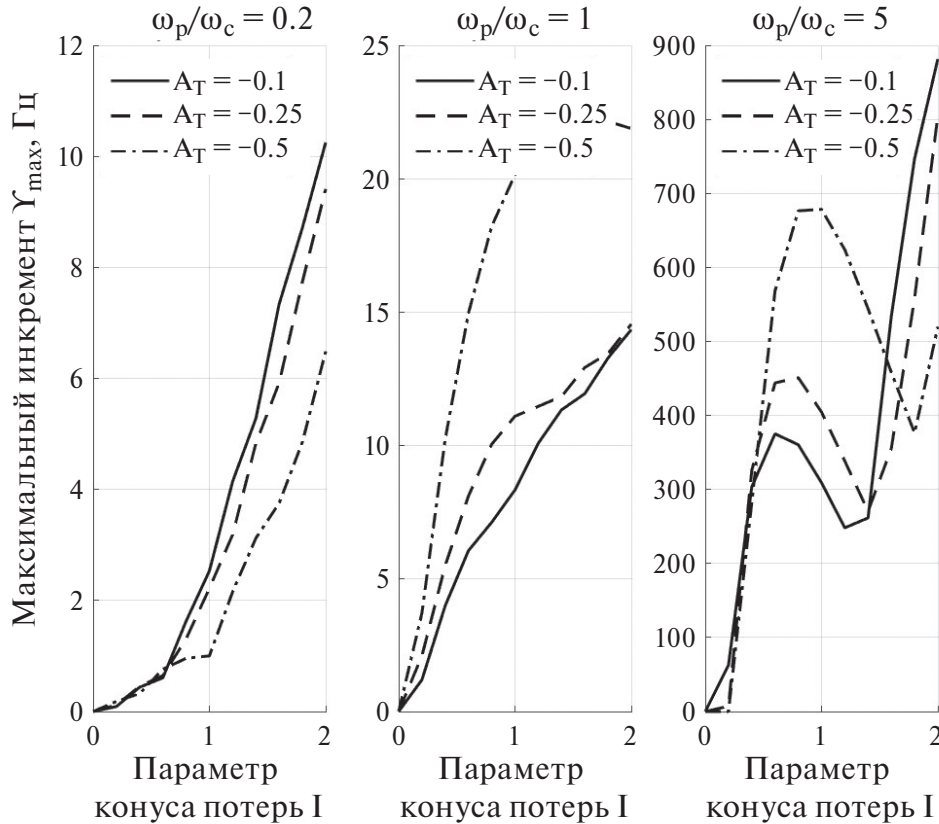


Рис. 7. Зависимость максимального инкремента от параметра конуса потерь l для трех отрицательных значений анизотропии A_T и трех значений параметра ω_p / ω_c .

мент при фиксированном l падает с ростом модуля анизотропии $|A_T|$, при $\omega_p / \omega_c = 1$ эта зависимость меняется на противоположную, а при больших значениях ω_p / ω_c , так же как и в случае положительной анизотропии, возникают колебания в зависимости максимального инкремента от параметра конуса потерь l , и однозначная зависимость инкремента от анизотропии при фиксированном l исчезает.

На рис. 8 показана зависимость максимального инкремента МН-волны от анизотропии распределения A_T для трех значений параметра ω_p / ω_c . Расчет выполнен для L -оболочки $L = 3$ и широты $\lambda = 0$. В расчете использованы следующие параметры функции распределения: $T = 25$ кэВ, $k = 2$, $l = 1$. Для того, чтобы понять немонотонную зависимость максимального инкремента от анизотропии распределения A_T обратимся к формуле (18), определяющей вклад в инкремент от n -го циклотронного резонанса для рассматриваемого каппа-распределения с конусом потерь. Из нее следует, что знакопеременным является выражение в фигурных скобках, причем первый его член всегда отрицателен, а инкремент появ-

ляется только тогда, когда выражение в квадратных скобках оказывается положительным. Как видно из самого выражения, с ростом анизотропии A_T первый член в квадратных скобках уменьшается, а второй увеличивается. Игра этих факторов и ведет к немонотонной зависимости максимального инкремента от анизотропии.

Не очевидной также оказывается зависимость инкремента от L -оболочки при фиксированной широте, в частности, на экваторе, и зависимость инкремента от широты на заданной L -оболочке при фиксированных параметрах функции распределения горячих частиц. Эти зависимости показаны на рис. 9, 10. Нетрудно видеть, что в обоих случаях максимумы инкремента отвечают случаю, когда частота возбуждаемой волны близка к гармонике локальной гирочастоты: $f \simeq n f_c$. В этом случае резонансный импульс, соответствующий n -му циклотронному резонансу, имеет минимальное по абсолютной величине значение. Как показывает анализ парциальных вкладов в инкремент различных циклотронных резонансов, в этом случае вклад n -го циклотронного резонанса оказывается доминирующим, в то время

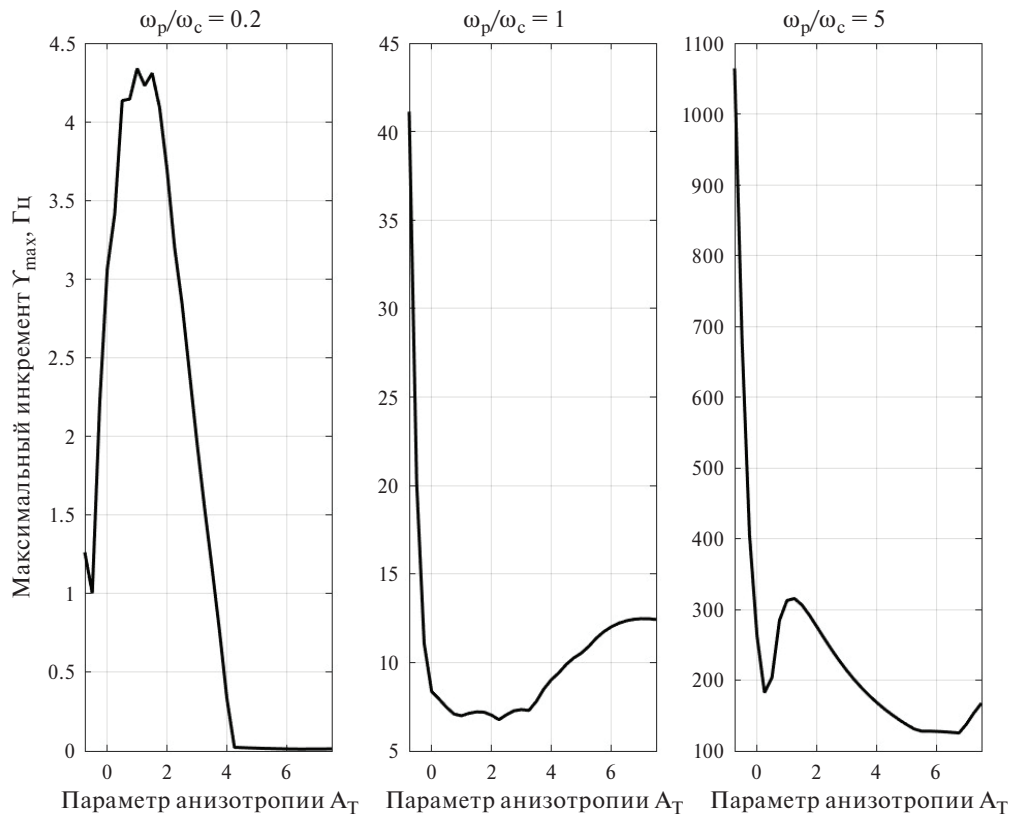


Рис. 8. Зависимость максимального инкремента от анизотропии A_T для трех значений параметра ω_p / ω_c .

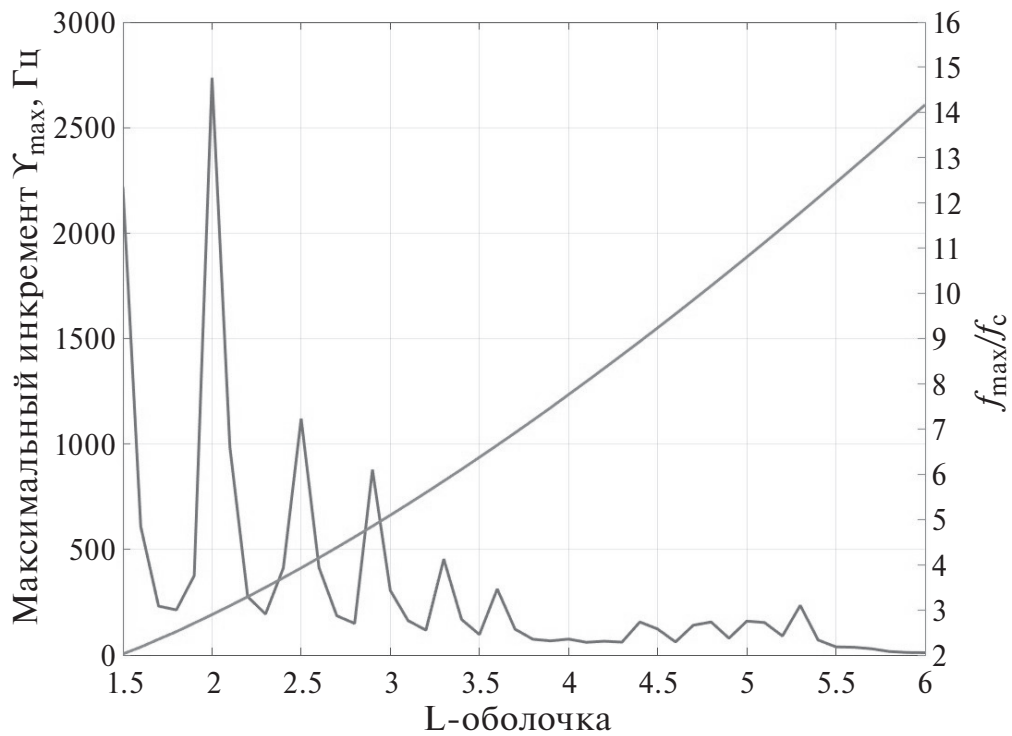


Рис. 9. Зависимость максимального инкремента на экваторе (левая шкала) и отношения частоты максимума инкремента к локальной гирочастоте (правая шкала) от L -оболочки для следующих параметров функции распределения: $l = 1$, $A_T = 1$, $n_{eq\ hot} = 0.01 n_{eq\ cold}$, $S = 5$, $T = 25$ кэВ.

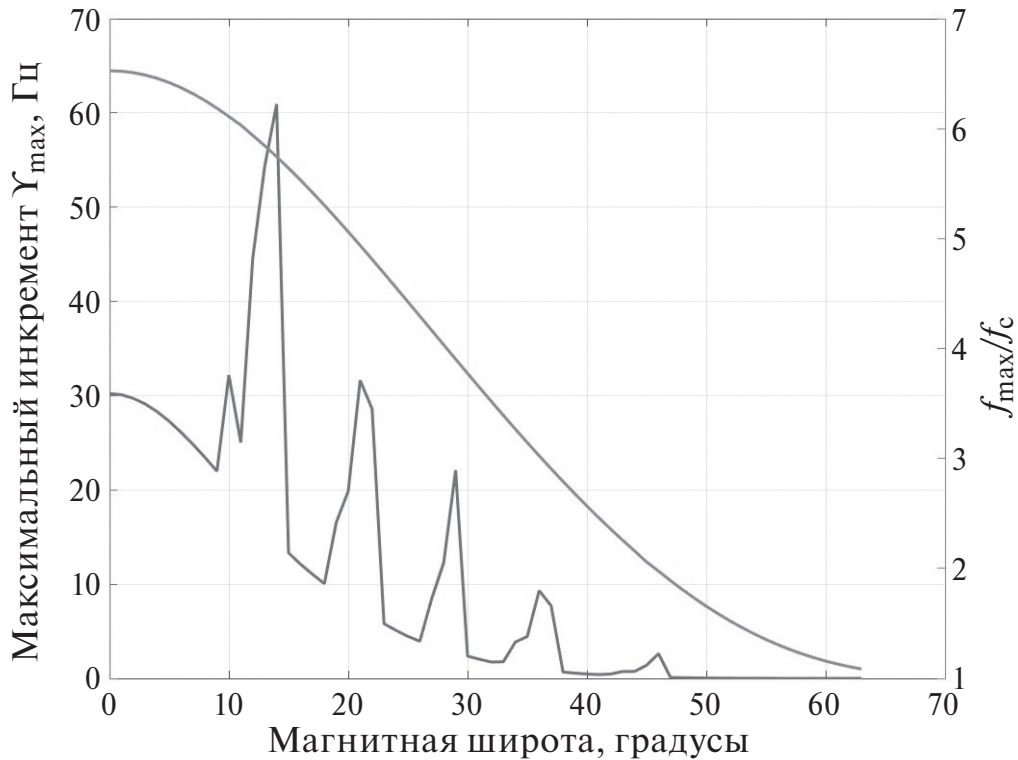


Рис. 10. Зависимость максимального инкремента (левая шкала) и отношения частоты максимума инкремента к локальной гирочастоте (правая шкала) от широты на $L = 5$ для следующих параметров функции распределения: $l = 1$, $A_T = 1$, $n_{eq\ hot} = 0.01 n_{eq\ cold}$, $S = 3$, $T = 25$ кэВ.

как для промежуточных частот доминирующего резонанса нет, и вклады от различных резонансов, имея разные знаки, в значительной мере компенсируют друг друга. Так, максимумы инкремента на $L \simeq 2, 2.5, 2.8$ и так далее (см. рис. 9) связаны с резонансами $n = 3, 4, 5$ и так далее, а максимумы на $\lambda \simeq 14, 22, 28^\circ$ и так далее (см. рис. 10) связаны с резонансами $n = 6, 5, 4$ и так далее. Следует подчеркнуть, что непосредственное следствие обнаруженного поведения инкремента заключается не в возможности наблюдения на спутнике “полосатого” спектра излучений на гармониках гирочастоты электронов, а в наблюдении интенсивного излучения на частоте, близкой к плазменной, при прохождении спутником области, где $f_p \simeq n f_c$, поскольку при $f_p / f_c > 3$ частоты МН-волн близки к f_p .

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Медленные необыкновенные волны играют важную роль в динамике частиц плазмосферы Земли. Кроме того, рассеиваясь на мелкомасштабных неоднородностях плотности, эти волны могут возбуждать обыкновенную моду, прямая

генерация которой неэффективна из-за ее малого показателя преломления. В работе выполнено детальное исследование генерации МН-волн в предположении, что энергичные электроны описываются κ -распределением с конусом потерь. Приведен вывод выражения для линейного инкремента МН-волн с учетом релятивистских эффектов и неоднородности плазмы и внешнего магнитного поля на основе закона сохранения энергии в системе волна — кинетическая энергия резонансных частиц, где энергия волны включает энергию электромагнитного поля и колебательную энергию нерезонансных частиц. Показано, что максимум инкремента достигается вблизи экватора, на частотах и при углах волновой нормали, близких к резонансным значениям, в частности, вблизи верхней гибридной частоты и для углов волновой нормали, близких 90° . Обнаружено, что зависимость инкремента от относительной частоты f / f_c имеет не монотонный, а квазипериодический характер, причем максимумы инкремента достигаются вблизи гармоник гирочастоты $f \simeq n f_c$. Это связано с тем, что в этом случае резонансный импульс, соответствующий

n -му циклотронному резонансу, имеет минимальное по абсолютной величине значение, и вклад в инкремент от этого резонанса доминирует над вкладами от других циклотронных резонансов. Действительно, k -распределение спадает с ростом продольного импульса,

так что с уменьшением импульса число резонансных частиц возрастает. Достаточно неожиданной является также обнаруженная и объясненная немонотонная зависимость максимального инкремента МН-волны от анизотропии распределения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИНКРЕМЕНТА

Движение релятивистских электронов в поле квази-электростатической МН (или, что то же, верхнегибридной) волны изучалось ранее для исследования перехода движения в стохастический режим при достаточно больших амплитудах волны [28], а также для анализа питч-углового рассеяния и высыпания релятивистских частиц при их взаимодействии с узкополосными верхнегибридными волнами [29]. В этих работах, однако, не рассматривалось обратное влияние частиц на волну, приводящее к ее затуханию или усилению. Ниже, опираясь на работу [29], мы приведем вывод выражения для линейного инкремента квазиэлектростатической МН-волны с учетом неоднородности плазмы и внешнего магнитного поля, а также релятивизма частиц.

Линейный инкремент волны определяется выражением

$$\gamma_L = -\frac{\langle j_{L\text{res}} \cdot \mathcal{E} \rangle}{2U}, \quad (\text{П1})$$

где $j_{L\text{res}}$ — ток резонансных частиц в линейном приближении, U — плотность энергии волны, определенная выше, и $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по периоду волны. Для вычисления $j_{L\text{res}}$ следует найти линейное возмущение функции распределения резонансных частиц, для чего надо решить в линейном приближении уравнения движения для этих частиц в поле волны и внешнем магнитном поле. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{P}{m\gamma}, \quad \frac{dP}{dt} = -e E - \frac{e}{mc\gamma} [P \times B_0]. \quad (\text{П2})$$

Электрическое поле квазиэлектростатической волны в неоднородной плазме может быть представлено в виде

$$E = -\nabla\Phi, \quad \Phi = \frac{E_0}{k} \sin\left(\int k_{\parallel}(z')dz' + k_{\perp}x - \omega t\right), \quad (\text{П3})$$

где Φ — скалярный потенциал электрического поля. Так же как и $k_{\parallel}$, величина $k_{\perp}$ является

функцией координаты z , направленной вдоль внешнего магнитного поля B_0 . Уравнения движения (П2) могут быть записаны в гамильтоновой форме в канонических переменных $(P_{\parallel}, z)$, (M, φ) с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{P_{\parallel}^2 + 2Mm\omega_c}{m^2c^2}} - \\ &- \frac{eE_0}{k} \sin\left(\int k_{\parallel}(z')dz' + \rho \sin\varphi - \omega t\right) \\ &\equiv mc^2 \sqrt{1 + \frac{P_{\parallel}^2 + 2Mm\omega_c}{m^2c^2}} - \frac{eE_0}{k} \cdot \\ &\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\rho) \sin\left(\int k_{\parallel}(z')dz' + n\varphi - \omega t\right), \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

где $\rho = k_{\perp}(2M/m\omega_c)^{1/2}$, φ — gyroфаза частицы. В дальнейшем будем обозначать через ζ полную фазу волны

$$\begin{aligned} \zeta &= \int k_{\parallel}(z')dz' + k_{\perp}x - \omega t \equiv \\ &\equiv \int k_{\parallel}(z')dz' + \rho \sin\varphi - \omega t. \end{aligned} \quad (\text{П5})$$

Сумма по n в (П4) отвечает суммированию по всем циклотронным резонансам. Равенство нулю производной фазы n -го члена вдоль невозмущенной траектории частицы дает резонансные условия для n -го циклотронного резонанса (11). Обратим внимание, что стоящий в гамильтониане квадратный корень есть не что иное, как релятивистский γ -фактор, выраженный через канонические переменные.

Перепишем выражение (П1) в виде

$$\begin{aligned} \gamma_L &= -\frac{eE_0}{2kU} \frac{1}{2\pi} \int d\zeta \int dP_{\parallel} P dP d\varphi df_L \cdot \\ &\cdot \cos\zeta \left(\frac{k_{\perp}P_{\perp}}{m\gamma} \cos\varphi + \frac{k_{\parallel}P_{\parallel}}{m\gamma} \right), \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

где в явном виде введено усреднение по фазе волны ζ . В (П6) величину $P_{\perp}$ следует считать функцией $P, P_{\parallel}$, а именно, $P_{\perp} = \sqrt{P^2 - P_{\parallel}^2}$. Интегрирование по $dP_{\parallel}dP$ проводится по части плоскости $(P, P_{\parallel})$, ограниченной линиями $P_{\parallel} = \pm P$. Входящая в (П6) величина $\delta f_L \delta f_L$ есть отклонение функции распределения от невозмущенной.

При вычислении линейного инкремента мы должны считать амплитуду волны достаточно малой, так что выполняется приближение изолированных резонансов (см., например, [29]). В этом приближении для частиц, взаимодействующих с волной на n -м циклотронном резонансе, в гамильтониане можно оставить одно медленно изменяющееся слагаемое, пропорциональное $J_n(\rho) \sin\left(\int k_{\parallel}(z')dz' + n\phi - \omega t\right)$. Поскольку для резонансных частиц $dH/dt \simeq d(mc^2\gamma)/dt$, а время t и гирофаза ϕ входят теперь в гамильтониан только в виде комбинации $n\phi - \omega t$, то величина

$$mc^2\gamma n - M\omega = \text{const}$$

оказывается интегралом движения, из которого, в частности, следует

$$dM = \frac{nP}{m\gamma\omega} dP. \quad (\text{П7})$$

В приближении изолированных резонансов уравнение для магнитного момента M имеет вид

$$\frac{dM}{dt} \equiv -\frac{\partial H_n}{\partial \phi} = \frac{eE_0 n}{k} J_n(\rho) \cos \xi_n, \quad (\text{П8})$$

$$\xi_n = \int k_{\parallel}(z')dz' + n\phi - \omega t,$$

откуда также следует (см. (П7))

$$\frac{dP}{dt} = \frac{eE_0 m \omega \gamma}{Pk} J_n(\rho) \cos \xi_n. \quad (\text{П9})$$

Рассмотрим вклад в инкремент от частиц, взаимодействующих с волной на n -м циклотронном резонансе. В этом случае зависимость функции распределения от фазы входит только через ξ_n . Переходя в (П6) от интегрирования по $d\zeta d\phi$ к интегрированию по $d\xi_n d\phi$, получим

$$\gamma_{Ln} = -\frac{eE_0}{2kU} \int P dP dP_{\parallel} d\xi_n \delta f_n d\phi \frac{1}{2\pi} \int d\phi \cos[\xi_n - (n\phi - \rho \sin \phi)] \left[\frac{k_{\perp} P_{\perp}}{m\gamma} \cos \phi + \frac{k_{\parallel} P_{\parallel}}{m\gamma} \right]. \quad (\text{П10})$$

Выполняя интегрирование по $d\phi$ и учитывая резонансные условия (11), будем иметь

$$\gamma_{Ln} = -\frac{eE_0 \omega}{2kU} \int P dP dP_{\parallel} d\xi_n \delta f_n J_n(\rho) \cos \xi_n. \quad (\text{П11})$$

Перейдем теперь к вычислению возмущения функции распределения δf_n . Считая, что невозмущенная функция распределения зависит от переменных M и P , изменения которых определяются уравнениями (П8), (П9) и связаны соотношением (П7), для вычисления линейного инкремента нам достаточно решить уравнение для P в линейном приближении. Линейное приближение означает подстановку в правую часть уравнения (П9) невозмущенной траектории $\xi_n(t)$, т. е. траектории в отсутствие поля волны. Система уравнений, определяющая невозмущенную траекторию $\xi_n(t)$, которая следует из (П4) при $E_0 = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{P_{\parallel}}{m\gamma}, \quad \frac{dP_{\parallel}}{dt} = -\frac{M}{\gamma} \frac{d\omega_c}{dz}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\omega_c}{\gamma}, \quad \frac{dM}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (\text{П12})$$

откуда получаем следующее уравнение для фазы ξ_n :

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{k_{\parallel}}{m\gamma} (P_{\parallel} - P_m) \equiv u_n, \quad (\text{П13})$$

где P_m определено в (11). Для резонансных частиц выражение $(P_{\parallel} - P_m)$, а с ним и все выражение $d\xi_n/dt$ является малой величиной. Подчеркнем, что величина P_m , которая представляет собой резонансное значение продольного импульса, является функцией P, n, z . Получим теперь уравнение вдоль невозмущенной траектории частицы для величины $d\xi_n/dt$, которую мы обозначили через u_n . Для этого продифференцируем правую часть уравнения (П13), используя уравнения (П12). При этом величину $k_{\parallel}/m\gamma$ мы можем считать постоянной, поскольку $(P_{\parallel} - P_m)$ уже является малой величиной. Тогда для u_n получим

$$\frac{du_n}{dt} = -a_n, \quad a_n = \frac{k_{\parallel}}{m\gamma^2} \left(M \frac{d\omega_c}{dz} + \frac{1}{2m} \frac{\partial P_m^2}{\partial z} \right). \quad (\text{П14})$$

Мы видим, что в пренебрежении полем волны величина u_n изменяется из-за неоднородности среды, и это изменение определяется параметром неоднородности a_n (П14). Поскольку неоднородность среды — плазмы и внешнего магнитного поля — быстро выводят частицу из резонанса, то при решении уравнений движения в резонансной области величину a_n можно считать постоянной. Кроме того, будем для определенности считать,

что $a_n > 0$ (с понятной модификацией последующих вычислений на случай $a_n < 0$.)

Уравнения (П13), (П14) имеют очевидное решение (опуская для краткости индекс n)

$$u = u_0 - at, \quad \xi = \xi_0 + u_0 t - \frac{at^2}{2}. \quad (\text{П15})$$

Подставляя выражение для ξ (П15) в уравнение (П9) и выполняя интегрирование по времени, получим

$$\begin{aligned} P - P_0 &= \frac{eE_0 m \omega \gamma}{Pk} J_n(\rho_r) \int_{t_0}^t \cos\left(\xi_0 + u_0 t' - \frac{at'^2}{2}\right) \times \\ &\times dt' = \frac{eE_0 m \omega \gamma}{Pk} J_n(\rho_r) \times \\ &\times \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left\{ \cos\left(\frac{u^2}{2a} + \xi\right) \left[C\left(\frac{u_0}{\sqrt{2a}}\right) - C\left(\frac{u}{\sqrt{2a}}\right) \right] + \right. \\ &\left. + \sin\left(\frac{u^2}{2a} + \xi\right) \left[S\left(\frac{u_0}{\sqrt{2a}}\right) - S\left(\frac{u}{\sqrt{2a}}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П16})$$

где C, S — косинус и синус интегралы Френеля соответственно [30] и учтены соотношения

$$u_0 - at = u, \quad \frac{u_0^2}{2a} + \xi_0 = \frac{u^2}{2a} + \xi.$$

Используя теорему Лиувилля, а также соотношение (П7), мы можем записать величину δf_n в виде

$$\delta f_n = - \left(\frac{\partial f_0}{\partial P} + \frac{nP}{m\gamma\omega} \frac{\partial f_0}{\partial M} \right) (P - P_0), \quad (\text{П17})$$

где $P - P_0$ дается выражением (П16). Подставляя (П17) в (П11) и переходя от интегрирования по $dP_{\parallel}$ к интегрированию по du , получим

$$\gamma_{Ln} = \frac{eE_0 m \omega}{2kk_{\parallel} U} \int P dP \gamma du d\xi_n \left(\frac{\partial f_0}{\partial P} + \frac{nP}{m\gamma\omega} \frac{\partial f_0}{\partial M} \right) \cdot (P - P_0) J_n(\rho) \cos \xi_n. \quad (\text{П18})$$

Основной вклад в интеграл по du дает резонансная область значений u вблизи нуля, которым, при $a > 0$, отвечают $u_0 \gg \sqrt{a}$. Это дает возможность заменить величину ρ в аргументе функции Бесселя $J_n(\rho)$ на резонансное значение ρ_r , а для интегралов Френеля от аргумента $u_0 / \sqrt{2a}$ использовать асимптотические значения $C(u_0 / \sqrt{2a}) = S(u_0 / \sqrt{2a}) \rightarrow 1/2$. Что касается вклада в интеграл по du от членов, пропорциональных интегралам Френеля от аргумента $u / \sqrt{2a}$, то они не дают вклада в силу нечетности интегралов Френеля. С учетом сделанных замечаний, дальнейшие вычисления сводятся к эле-

ментарному интегрированию по $d\xi du$, и после восстановления суммирования по всем циклотронным резонансам дают выражение (П12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трахтенгерц В.Ю., Райкрофт М.Дж Свистовые и альфеновские циклотронные мазеры в космосе. М.: Физматлит, 2011.
2. Albert J. M., Artemyev A.V., Li W., Gan L., Ma Q. // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2021. V. 126. P. e2021JA029216. Doi: 10.1029/2021JA029216.
3. Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Стенанов К.Н. Электродинамика плазмы / Ред. Ахиезер А.И. М.: Наука, 1974.
4. Trakhtengerts V.Y., Rycroft M.J. // J. Atmospheric Solar-Terrestrial Phys. 2000. V. 62. P. 1719. Doi: 10.1016/S1364-6826(00)00122-X.
5. Horne R.B., Thorne R.M., Glauert S.A., Albert J.M., Meredith N.P., Anderson R.R. // J. Geophys. Res. 2005. V. 110. P. A03225. doi: 10.1029/2004JA010811.
6. Shklyar D. R., Matsumoto H. // Surveys in Geophys. 2009. V. 30. P. 55. doi: 10.1007/s10712-009-9061-7.
7. Nunn D., Omura Y. // J. Geophys. Res. Space Phys. 2015. V. 120. P. 2890. doi: 10.1002/2014JA020898.
8. Artemyev A.V., Neishtadt A.I., Angelopoulos V. // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2022. V. 127. P. e2022JA030265. doi: 10.1029/2022JA030265.
9. Демехов А.Г. // Известия ВУЗов: Радиофизика. 1987. Т. 30(6). С. 734.
10. LaBelle J., Treumann R.A. // Space Sci. Rev. 2002. V. 101. P. 295. doi: 10.1023/A:1020850022070.
11. Rönmark K. // Space Sci. Rev. 1990. V. 54. P. 1.
12. Kurth W.S., Graven J.D., Frank L.A., Gurnett D.A. // J. Geophys. Res. 1979. V. 84(A8). P. 4145. doi: 10.1029/JA084iA08p04145.
13. Oya H., Iizima M., Morioka A. // Geophys. Res. Lett. 1991. V. 18. P. 329.
14. Xiao F.L., Zhang S., Su Z.P., He Z.G., Tang L.J. // Geophys. Res. Lett. 2012. V. 39. P. L03103.
15. Kurth W. S., De Pascuale S., Faden J. B., Kletzing C. A., Hospodarsky G. B., Thaller S., Wygant J. R. // J. Geophys. Res. Space Phys. 2015. V. 120. P. 904. doi: 10.1002/2014JA020857.
16. Nishimura Y., Ono T., Iizima M., Shinbori A., Kumamoto A. // Earth Planets Space. 2007. V. 59. P. 1027.
17. Menietti J.D., Yoon P.H., Pisa D., Averkamp T.F., Sulaiman A.H., Kurth W.S., Santolik O., Arridge C. S. // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2019. V. 124(7). P. 5709.

- doi: 10.1029/2019JA026855.
18. Zheleznyakov V.V., Zlotnik E.Y. // Solar Phys. 1975. V. 43. P. 431.
 19. Zheleznyakov V.V., Zlotnik E.Y. // Solar Phys. 1975. V. 44. P. 447.
 20. Zheleznyakov V.V., Zlotnik E.Y. // Solar Phys. 1975. V. 44. P. 461.
doi: 10.1007/BF00153225.
 21. Zlotnik E.Y. // Solar Phys. 2013. V. 284. P. 579.
doi: 10.1007/s11207-012-0151-1.
 22. Benáček J., Karlický M. // Astronomy Astrophys. 2017. V. 611. A60. P. 1.
 23. Dory R. A., Guest G. E., Harris E. G. // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 14(5). P. 131.
doi: 10.1103/PhysRevLett.14.131.
 24. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
 25. Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. Вып. 3 / Ред. М.А. Леонтович. М.: Госатомиздат, 1963.
 26. Shklyar D.R., Artekha N.S. // Fundamental Plasma Phys. 2024. V. 10. P. 100053.
doi: 10.1016/j.fpp.2024.100053.
 27. Summers D., Thorne R. // J. Plasma Phys. 1995. V. 53(3). P. 293.
 28. Шкляр Д.Р. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 2272.
 29. Shklyar D.R., Kliem B. // J. Geophys. Res. 2006. V.111. P. A06204.
doi: 10.1029/2005JA011345.
 30. Градштейн И.С., Рыжик Д.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

GENERATION OF QUASI-ELECTROSTATIC SLOW EXTRAORDINARY WAVES BY KAPPA DISTRIBUTION WITH A LOSS CONE

D. R. Shklyar^{a, *} and N. S. Artekha^{a, b, **}

^aSpace Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia

^bSE University, Moscow, 101000 Russia

*e-mail: david@iki.rssi.ru

**e-mail: natalya.artekha@mail.ru

A detailed study of the generation of slow extraordinary (SE) waves in the Earth's magnetosphere has been carried out. Assuming that energetic electrons are distributed in accordance with the function with a loss cone, the instability growth rate of SE waves is calculated and its dependence on both the parameters of the hot particle distribution function and the cold particle density, characterized by the ratio of the electron plasma frequency to the electron cyclotron frequency, is studied. This ratio is one of the key parameters of the problem. For various values, the dependences of the instability growth rate on the parameter of the distribution function, the loss cone parameter, and the temperature of the distribution and its anisotropy are obtained. A nonmonotonic, quasi-periodic dependence of the growth rate on the ratio of the frequency to the electron gyrofrequency, which manifests itself in the dependence of the equatorial growth rate on the shell or the dependence of the growth rate on the latitude on a fixed-shell, is revealed and explained.

Keywords: slow extraordinary waves, kappa distribution, loss cone, double plasma resonance, wave growth rate