

УДК 533.9

УРАВНЕНИЕ ЗАХАРОВА–КУЗНЕЦОВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЫЛЕВЫХ ЗВУКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАПЫЛЕННОЙ МАГНИТОСФЕРЕ САТУРНА

© 2024 г. С. И. Копнин^a, Д. В. Шохрин^b, С. И. Попель^{a,*}

^a Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

^b Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

* e-mail: popel@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 16.08.2023 г.

После доработки 20.09.2023 г.

Принята к публикации 01.10.2023 г.

Представлено описание низкочастотных нелинейных пылевых звуковых волн в запыленной магнитосфере Сатурна, которая содержит электроны двух сортов (“горячие” и “холодные”), подчиняющиеся каппа-распределению, ионы магнитосферы, а также заряженные пылевые частицы. Для соответствующих условий приведен вывод уравнения Захарова–Кузнецова, описывающего нелинейную динамику пылевых звуковых волн в случае низких частот и блинообразной формы волнового пакета вдоль внешнего магнитного поля. Показано, что в условиях магнитосферы Сатурна существуют решения уравнения Захарова–Кузнецова в виде одномерных и трехмерных солитонов. Обсуждаются возможные наблюдения рассматриваемых солитонов в будущих космических миссиях.

Ключевые слова: пылевая плазма, уравнение Захарова–Кузнецова, пылевой звуковой солитон, каппа-распределение, магнитосфера Сатурна

DOI: 10.31857/S0367292124010056 EDN: SKJBCV

1. ВВЕДЕНИЕ

Трудно представить себе заполненную плазмой область Солнечной системы, свободную от пылевых частиц [1]. Нано- и микромасштабные пылевые частицы обнаруживаются в межпланетном космическом пространстве, плазме ионосфер и магнитосфер планет Солнечной системы, планетарных колец, окрестностях космических тел, не имеющих собственной атмосферы, и др.

Важным объектом с точки зрения исследований пылевой плазмы является магнитосфера Сатурна [2, 3]. Параметры плазмы в ней измеряли еще в 1980-х гг. в рамках миссий Voyager 1 и 2 [4]. Существование волн в плазме также было доказано на основе данных, полученных аппаратом Voyager 1 [5]. Теоретические исследования ионно-звуковых волн в магнитосфере Сатурна проводились в работе [6].

Плазма в магнитосфере Сатурна обладает рядом особенностей по сравнению с другими космическими системами, исследования которых в настоящее время проводят весьма активно (для Луны и Марса см., например, работы [7, 8]).

Измерения параметров электронов магнитосферы Сатурна, полученные в рамках миссий Voyager [4, 5] и Cassini [9], показали сосуществование

двух видов (“горячих” и “холодных”) электронов. Оказалось [9], что скорости электронных популяций подчиняются так называемому κ -распределению с независимыми низкими значениями κ .

Важным источником пылевых частиц в магнитосфере Сатурна является Энцелад — один из крупнейших спутников, известный своими ледяными гейзерами (ледяными вулканами, криовулканами). Пылевая плазма в его окрестностях была обнаружена в рамках миссии Cassini [2, 3].

Исследования в рамках этой миссии указали также на возможную причину ее появления — космический аппарат Cassini обнаружил фонтаны частиц пыли и небольших частиц водяного льда (которые также могут трактоваться как пылевые частицы) высотой во многие сотни километров, бьющие из четырех трещин в районе южного полюса Энцелада [10]. Все это указывает на актуальность проблемы исследования нелинейных волновых структур в условиях магнитосферы Сатурна, типичными для которой являются пылевые звуковые волны.

Важным видом нелинейных структур, наблюдавшихся в космосе [11, 12], являются солитоны, а в пылевой плазме — пылевые звуковые солитоны [13]. Для плазмы запыленной магнитосферы Сатурна рассмотрение пылевых звуковых солитонов

проводилось [14] в одномерном случае в ситуации, когда не учитывается анизотропия, связанная, например, с присутствием магнитного поля, что и позволяет использовать одномерные (в пространстве) уравнения.

Далее было разработано [15] двумерное описание нелинейных пылевых звуковых волн в запыленной магнитосфере Сатурна, которая содержит электроны двух сортов (“горячие” и “холодные”), подчиняющиеся каппа-распределению, ионы магнитосферы, а также заряженные пылевые частицы. В рамках данного рассмотрения приведен вывод уравнения Кадомцева–Петвиашвили, описывающего нелинейную динамику почти одномерных волновых структур, в которых локализация вдоль вектора магнитного поля, значительно сильнее, чем в других направлениях, и получены решения в виде пылевых звуковых одномерных солитонов и двумерных N -солитонов.

Вместе с тем в работе [15] рассматривалась ситуация, когда гирочастота пылевых частиц ω_{Bd} настолько мала, что для частот пылевых звуковых волн ω выполнено соотношение $\omega \gg \omega_{Bd}$. В этом случае, с одной стороны, влиянием магнитного поля можно пренебречь, но с другой — существует анизотропия, связанная с вектором магнитного поля, которая может повлиять на структуру нелинейной волны. Если при этом имеется почти одномерный волновой пакет, в котором локализация вдоль вектора магнитного поля значительно сильнее, чем в других направлениях, то, как показано в работе [15], нелинейные волны в запыленной магнитосфере Сатурна описываются уравнением Кадомцева–Петвиашвили.

В настоящей работе рассматривается противоположная ситуация, когда частоты пылевых звуковых волн не превышают ω_{Bd} . В обычной плазме (не содержащей пылевых частиц) в случае низких частот и блинообразной формы волнового пакета вдоль внешнего магнитного поля нелинейные волны описываются хорошо известным уравнением Захарова–Кузнецова (см., например, [16]).

Особенности пылевой плазмы магнитосферы Сатурна по сравнению с обычной плазмой весьма велики и ограничиваются не просто заменой ионов на заряженные пылевые частицы. В частности, электроны плазмы магнитосферы Сатурна двух сортов подчиняются каппа-распределению, а при рассмотрении обычной плазмы используется распределение Больцмана для электронов [16]. Поэтому существенный интерес представляет рассмотрение нелинейных пылевых звуковых волн в ситуации низких частот, не превышающих ω_{Bd} .

Целью настоящей работы является подобное рассмотрение, вывод дифференциального уравнения, описывающего нелинейные пылевые звуковые волны в ситуации низких частот, рассмотрение некоторых частных его решений для параметров плазмы запыленной магнитосферы Сатурна.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Волновые явления, связанные с пылевой звуковой модой, в магнитосфере Сатурна определяются, главным образом, динамикой и процессами зарядки пылевых частиц. С учетом влияния магнитного поля \mathbf{B} (без ограничения общности можно считать, что вектор \mathbf{B} сонаправлен с осью z), уравнения непрерывности и движения (в координатной форме) имеют вид

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial n_d v_{d,x}}{\partial x} + \frac{\partial n_d v_{d,y}}{\partial y} + \frac{\partial n_d v_{d,z}}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_{d,x}}{\partial t} + v_{d,x} \frac{\partial v_{d,x}}{\partial x} + v_{d,y} \frac{\partial v_{d,x}}{\partial y} + \\ & + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,x}}{\partial z} + \frac{q_d}{m_d} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q_d B}{m_d c} v_{d,y}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_{d,y}}{\partial t} + v_{d,x} \frac{\partial v_{d,y}}{\partial x} + v_{d,y} \frac{\partial v_{d,y}}{\partial y} + \\ & + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,y}}{\partial z} + \frac{q_d}{m_d} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{q_d B}{m_d c} v_{d,x}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_{d,z}}{\partial t} + v_{d,x} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial x} + v_{d,y} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial y} + \\ & + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial z} + \frac{q_d}{m_d} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь n_d , m_d , $q_d = eZ_d$ — концентрация, масса и заряд пылевых частиц (Z_d — зарядовое число пылевой частицы); $B = |\mathbf{B}|$, $-e$ — заряд электрона; $v_{d,x}$, $v_{d,y}$, $v_{d,z}$ — компоненты скорости пылевых частиц, φ — самосогласованный электростатический потенциал плазмы, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi e (n_{e,c} + n_{e,h} - n_i - n_d Z_d). \quad (5)$$

Здесь n_i — концентрация ионов, $n_{e,c(e,h)}$ — концентрация “холодных” (“горячих”) электронов.

В магнитосфере Сатурна присутствуют два сорта электронов: “горячие” (с характерными температурами порядка несколько 100 эВ) и “холодные” (с характерными температурами около 10 эВ). Такие электроны удовлетворяют к-распределению по скоростям и соответствуют двум типам распределений (распределениям для “холодных” и “горячих” электронов) [17]:

$$n_{e,c} = n_{e,c0} \left(1 - \frac{1}{\kappa_c - 3/2} \frac{e\varphi}{T_{ec}} \right)^{-\kappa_c + 1/2}, \quad (6)$$

$$n_{e,h} = n_{e,h0} \left(1 - \frac{1}{\kappa_h - 3/2} \frac{e\varphi}{T_{eh}} \right)^{-\kappa_h + 1/2}. \quad (7)$$

Здесь $n_{e,c0(h0)}$ — невозмущенная концентрация “холодных” (“горячих”) электронов, $T_{e,c(eh)}$ — температура “холодных” (“горячих”) электронов, выраженная в энергетических единицах; κ_c и κ_h — параметры для κ -распределений “холодных” и “горячих” электронов соответственно. Отметим, что $\kappa_c, \kappa_h > 3/2$. Ионы подчиняются распределению Больцмана

$$n_i = n_{i0} e^{-e\varphi/T_i}, \quad (8)$$

где T_i — температура ионов, выраженная в энергетических единицах. Здесь и далее индекс 0 соответствует невозмущенным состояниям.

В данной работе не учитываются вариации зарядов пылевых частиц внутри нелинейной пылевой звуковой волновой структуры. Возможность использования такого приближения обусловлена медленностью пылевых звуковых временных масштабов по сравнению с временными масштабами, характеризующими процессы зарядки пылевых частиц (см., например, работу [18]). Тем не менее для нахождения характерного заряда пылевой частицы внутри нелинейной волновой структуры при определении, скажем, формы нелинейной структуры следует провести вычисления зарядового числа, которые, вообще говоря, отличаются от вычислений в обычной пылевой плазме, поскольку в рассматриваемой ситуации электроны удовлетворяют κ -распределениям, тогда как в обычной пылевой плазме на данных временных масштабах электроны — больцмановские. Таким образом, представляется необходимым привести уравнение, характеризующее заряд пылевой частицы.

Можно считать, что на пространственно-временных масштабах, характерных для пылевых звуковых волн, заряд пылевой частицы описывается трансцендентным уравнением

$$I_i(Z_d) = I_{e,c}(Z_d) + I_{e,h}(Z_d), \quad (9)$$

где ионный ток описывается выражением [19]

$$I_i(Z_d) = 4\pi a^2 e n_{i0} \sqrt{\frac{T_i}{2\pi m_i}} \left(1 - \frac{e^2 Z_d}{a T_i} \right), \quad (10)$$

а токи “холодных” (“горячих”) электронов — уравнением

$$I_{e,c(h)}(Z_d) = 2\sqrt{\pi} a^2 e n_{e0,c(h)} \frac{\sqrt{\kappa_{c(h)} - 3/2}}{\kappa_{c(h)} (\kappa_{c(h)} - 1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\kappa_{c(h)} + 1)}{\Gamma(\kappa_{c(h)} - 1/2)} \sqrt{\frac{T_{e,c(h)}}{m_e}} \left(1 - \frac{1}{\kappa_{c(h)} - 3/2} \frac{e^2 Z_d}{a T_{e,c(h)}} \right)^{-\kappa_{c(h)} + 1}, \quad (11)$$

где a — характерный размер пылевых частиц, m_i — масса ионов, $\Gamma(\kappa_{c(h)})$ — гамма-функция.

Следует отметить, что в условиях плазмы магнитосферы Сатурна заряды пылевых частиц оказываются отрицательными (см, например, работы [14, 15]).

В условиях квазинейтральности

$$n_{i0} + Z_d n_{d0} = n_{e0}, \quad (12)$$

где $n_{e0} = n_{e0,c} + n_{e0,h}$ — суммарная концентрация невозмущенных “холодных” и “горячих” электронов. Удобно ввести коэффициент соотношения между концентрациями “холодных” и “горячих” электронов α (отметим, что $0 \leq \alpha \leq 1$), тогда

$$n_{e0,c} = \alpha (n_{i0} + Z_d n_{d0}), \quad (13)$$

$$n_{e0,h} = (1 - \alpha) (n_{i0} + Z_d n_{d0}). \quad (14)$$

В предположении малости параметра $\tilde{\varphi} = e\varphi/T_i$ распределения электронов (6) и (7) принимают вид

$$n_{e,c(h)} = n_{e,c(h)0} \left(1 + a_{1,c(h)} \tilde{\varphi} + a_{2,c(h)} \tilde{\varphi}^2 \right), \quad (15)$$

где

$$a_{1,c(h)} = \frac{\kappa_{c(h)} - 1/2}{\kappa_{c(h)} - 3/2} \frac{T_i}{T_{e,c(h)}}, \quad (16)$$

$$a_{2,c(h)} = \frac{(\kappa_{c(h)} - 1/2)(\kappa_{c(h)} + 1/2)}{2(\kappa_{c(h)} - 3/2)^2} \left(\frac{T_i}{T_{e,c(h)}} \right)^2. \quad (17)$$

При этом распределение ионов (8) принимает вид

$$n_i = n_{i0} \left(1 - \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}^2/2 \right). \quad (18)$$

Систему уравнений (1)–(5) удобно представить в следующих безразмерных переменных (отметим, что поскольку заряд пылевых частиц для параметров магнитосферы Сатурна оказывается отрицательным, в последующих обозначениях следует использовать модуль зарядового числа: $|Z_d|$):

$$t \rightarrow \omega_{pd}^{-1} \tilde{t}, \quad (19)$$

$$(x, y, z) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \lambda_D, \quad (20)$$

$$(v_{d,x}, v_{d,y}, v_{d,z}) \rightarrow (\tilde{v}_{d,x}, \tilde{v}_{d,y}, \tilde{v}_{d,z}) C_{Sd}, \quad (21)$$

$$\varphi \rightarrow T_i \tilde{\varphi}/e, \quad (22)$$

$$n_d \rightarrow \tilde{n}_d n' / |Z_d|, \quad (23)$$

где $\omega_{pd} = \sqrt{4\pi n' |Z_d| e^2 / m_d}$ — пылевая плазменная частота, $\lambda_D = \sqrt{T_i / 4\pi n' e^2}$ — дебаевский радиус ионов, $C_{SD} = \omega_{pd} \lambda_D$, а также

$$n' = n_{e,c0} a_{1,c} + n_{e,h0} a_{1,h} + n_{i0}. \quad (24)$$

Таким образом, система уравнений (1)–(5) в безразмерном виде (19)–(24) с учетом разложения (15)–(18) по малому параметру $\tilde{\varphi} \ll 1$ с точностью до $o(\tilde{\varphi}^3)$ имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{n}_d}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{n}_d \tilde{v}_{d,x}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{n}_d \tilde{v}_{d,y}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{n}_d \tilde{v}_{d,z}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_{d,x}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_{d,x} \frac{\partial \tilde{v}_{d,x}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_{d,y} \frac{\partial \tilde{v}_{d,x}}{\partial \tilde{y}} + \\ + \tilde{v}_{d,z} \frac{\partial \tilde{v}_{d,x}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} = -\omega_B \tilde{v}_{d,y}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_{d,y}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_{d,x} \frac{\partial \tilde{v}_{d,y}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_{d,y} \frac{\partial \tilde{v}_{d,y}}{\partial \tilde{y}} + \\ + \tilde{v}_{d,z} \frac{\partial \tilde{v}_{d,y}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} = \omega_B \tilde{v}_{d,x}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_{d,z}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_{d,x} \frac{\partial \tilde{v}_{d,z}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_{d,y} \frac{\partial \tilde{v}_{d,z}}{\partial \tilde{y}} + \\ + \tilde{v}_{d,z} \frac{\partial \tilde{v}_{d,z}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}^2} = \frac{n_{e,c0} + n_{e,h0} - n_{i0}}{n'} + \tilde{n}_d + \tilde{\varphi} + \tilde{n} \tilde{\varphi}^2, \quad (29)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{n} = n'' / n', \quad (30)$$

$$n'' = n_{e,c0} a_{2,c} + n_{e,h0} a_{2,h} - n_{i0} / 2, \quad (31)$$

$$\omega_B = \omega_{Bd} / \omega_{pd}. \quad (32)$$

Здесь $\omega_{Bd} = (q_d B) / (m_d c)$ — пылевая ларморовская частота.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В линейном приближении концентрацию пылевых частиц можно представить в следующем виде:

$$\tilde{n}_d = n_0 + \delta \tilde{n}_d, \quad (33)$$

где $\delta \tilde{n}_d$ — безразмерная величина возмущения концентрации пылевых частиц, вызванного изменениями потенциала $\tilde{\varphi}$, а безразмерная невозмущенная концентрация пылевых частиц имеет вид

$$n_0 = |Z_d| \frac{n_{d0}}{n'}. \quad (34)$$

С учетом квазинейтральности (12) уравнение Пуассона (29) в безразмерном виде (в предположении $\tilde{\varphi} \ll 1$) с точностью до $o(\tilde{\varphi}^3)$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}^2} = \tilde{\varphi} + n \tilde{\varphi}^2 + \delta \tilde{n}_d. \quad (35)$$

В условиях распространения гармонических волн

$$\delta \tilde{n}_d \propto \exp(-i\omega t + i \mathbf{k} \mathbf{r}), \quad (36)$$

$$\tilde{\varphi} \propto \exp(-i\omega t + i \mathbf{k} \mathbf{r}) \quad (37)$$

из системы уравнений (25)–(28) и линеаризованного уравнения (35) следует выражение, описывающее эволюцию безразмерного потенциала $\tilde{\varphi}$:

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} + \omega_B^2 \right) \left[(1 - \tilde{\Delta}) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} - n_0 \tilde{\Delta} \right] + n_0 \tilde{\Delta}_\perp \omega_B^2 \right\} \tilde{\varphi} = 0. \quad (38)$$

Здесь оператор Лапласа представлен в безразмерном виде $\tilde{\Delta} = \partial^2 / \partial \tilde{x}^2 + \partial^2 / \partial \tilde{y}^2 + \partial^2 / \partial \tilde{z}^2$, а также $\tilde{\Delta}_\perp = \partial^2 / \partial \tilde{x}^2 + \partial^2 / \partial \tilde{y}^2$.

Уравнение (38) позволяет получить хорошо известный закон дисперсии (в безразмерном виде) (см., например, [16]):

$$\mathbf{k}^2 + 1 = \frac{n_0 \mathbf{k}_\parallel^2}{\omega^2} + \frac{n_0 \mathbf{k}_\perp^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \quad (39)$$

где \mathbf{k}_\parallel и \mathbf{k}_\perp — составляющие волнового вектора \mathbf{k} вдоль и поперек магнитного поля соответственно.

Например, для длин волн, значительно превосходящих ларморовский радиус, при малых углах между направлением распространения волны и магнитным полем закон дисперсии (39) принимает вид [16]

$$\omega(\mathbf{k}) = n_0 |\mathbf{k}_\parallel| \left[1 - \frac{|\mathbf{k}_\parallel|^2}{2} - \frac{(\omega_B^2 + n_0) |\mathbf{k}_\perp|^2}{\omega_B^2} \right] \quad (40)$$

или в размерном виде:

$$\omega(\mathbf{k}) = C_{SD} n_0 |\mathbf{k}_\parallel| \left[1 - \frac{|\mathbf{k}_\parallel|^2}{2} \lambda_D^2 \left(1 + \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2 |\mathbf{k}_\perp|^2}{\omega_{Bd}^2 |\mathbf{k}_\parallel|^2} \right) \right], \quad (41)$$

где характерная скорость пылевого звука

$$C_{SD} = \sqrt{|Z_d| \frac{n_{d0}}{n'}} C_{SD}.$$

Поскольку вектор \mathbf{k}_\parallel сонаправлен с \mathbf{B} , а значит, параллелен оси z , уравнение в координатном

пространстве, соответствующее закону дисперсии (41), имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + C_{SD} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} + \frac{C_{SD} \lambda_{De}^2}{2} \frac{\partial^3 \tilde{\varphi}}{\partial z^3} + \frac{C_{SD} \lambda_{De}^2}{2} \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{\varphi} = 0. \quad (42)$$

4. УРАВНЕНИЕ ЗАХАРОВА–КУЗНЕЦОВА

Уравнение (42) является уравнением линейного типа. Оно по форме совпадает с аналогичным уравнением для ионно-звуковых волн, полученном в работе [16] для случая обычной плазмы, когда электроны подчиняются бальцмановскому распределению. Учет более высоких порядков малости в системе уравнений (25)–(29) приводит к нелинейному уравнению.

Для его вывода можно воспользоваться стандартным методом разложения по малому параметру ε [20, 21]. Используя метод асимптотического представления на основе классического анализа размерностей, новые переменные можно представить в следующем виде:

$$\tau = \varepsilon^{3/2} t, \quad (43)$$

$$\xi = \varepsilon^{1/2} x, \quad (44)$$

$$\eta = \varepsilon^{1/2} y, \quad (45)$$

$$\zeta = \varepsilon^{1/2} z - M \varepsilon^{1/2} t. \quad (46)$$

При этом разложения по малому параметру ε принимают вид

$$n_d = n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2, \quad (47)$$

$$v_{d,x} = \varepsilon^{3/2} v_{1,d,x} + \varepsilon^2 v_{2,d,x}, \quad (48)$$

$$v_{d,y} = \varepsilon^{3/2} v_{1,d,y} + \varepsilon^2 v_{2,d,y}, \quad (49)$$

$$v_{d,z} = \varepsilon v_{1,d,z} + \varepsilon^2 v_{2,d,z}, \quad (50)$$

$$\varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2. \quad (51)$$

Полученное таким образом нелинейное уравнение для пылевых звуковых возмущений в плазме магнитосферы Сатурна с учетом влияния магнитного поля для длин волн, значительно превосходящих ларморовский радиус, при малых углах между направлением распространения волны и магнитным полем имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} - C_{SD} \frac{2n_0 n + 3}{2n_0} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} + \frac{C_{SD} \lambda_D^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \zeta^3} + \frac{C_{SD} \lambda_D^2}{2} \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \varphi_1 = 0. \quad (52)$$

Подробности вывода нелинейного уравнения (52) приведены в приложении 1.

Уравнение (52) можно переписать в канонической форме, для этого необходимо заменить φ_1 на $-\varphi_1$:

$$\varphi_1 \rightarrow -\varphi_1. \quad (53)$$

В случае замены (53) уравнение (52) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + C_{SD} \frac{2n_0 n + 3}{2n_0} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} + \frac{C_{SD} \lambda_D^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \zeta^3} + \frac{C_{SD} \lambda_D^2}{2} \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \varphi_1 = 0. \quad (54)$$

Полученное таким образом уравнение (54) является уравнением Захарова–Кузнецова (см., например, работу [16]), полученное для ионно-звуковых волн в обычной плазме, не содержащей пылевых частиц.

5. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Решение уравнения Захарова–Кузнецова (54) ищем в виде распространяющихся пылевых звуковых волн с характерными пространственными размерами, значительно превосходящими дебаевский радиус λ_D . Перейдем для этого в систему отсчета, в которой ось ζ' ориентирована в направлении распространения волнового пакета. Вводя угол ϑ между направлением ζ' и магнитным полем \mathbf{B} , развернем систему координат согласно замене:

$$\xi' = \xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \quad (55)$$

$$\eta' = \eta, \quad (56)$$

$$\zeta' = \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta. \quad (57)$$

В новой системе координат уравнение (54) принимает вид (ср. с работой [22])

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + \gamma_1 \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta'} + \gamma_2 \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi'} + \gamma_3 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \zeta'^3} + \gamma_4 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \xi'^3} + \gamma_5 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \xi' \partial \zeta'^2} + \gamma_6 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \zeta' \partial \xi'^2} + \gamma_7 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \zeta' \partial \eta'^2} + \gamma_8 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \xi' \partial \eta'^2} = 0, \quad (58)$$

где

$$\gamma_1 = C_{SD} \frac{2n_0 n + 3}{2n_0} \cos \vartheta, \quad (59)$$

$$\gamma_2 = -C_{SD} \frac{2n_0 n + 3}{2n_0} \sin \vartheta, \quad (60)$$

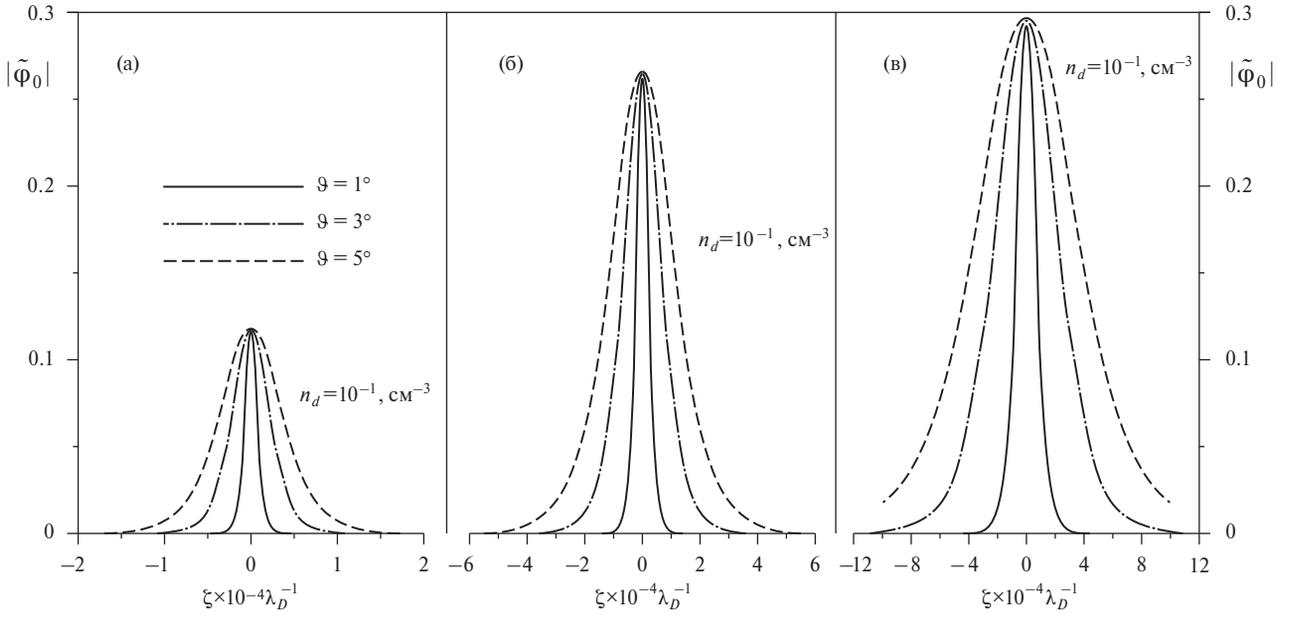


Рис. 1. Характерный вид одномерных солитонов, распространяющихся под углом ϑ к магнитному полю: $\vartheta = 1^\circ$ — сплошная кривая, $\vartheta = 3^\circ$ — штрихпунктирная кривая, $\vartheta = 5^\circ$ — штриховая кривая. Графики построены для трех случаев возможных концентраций пылевых частиц: $n_{d0} = 10^{-4} \text{ см}^{-3}$ (а), $n_{d0} = 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ (б), $n_{d0} = 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ (в).

$$\gamma_3 = \frac{C_{SD}\lambda_D^2}{2} \cos^3 \vartheta + \frac{C_{SD}\lambda_D^2}{2} \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta, \quad (61)$$

$$\gamma_4 = -\frac{C_{SD}\lambda_D^2}{2} \sin^3 \vartheta - \frac{C_{SD}\lambda_D^2}{2} \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta, \quad (62)$$

$$\gamma_5 = -\frac{3C_{SD}\lambda_D^2}{2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + \frac{C_{SD}\lambda_D^2}{2} \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} (2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta), \quad (63)$$

$$\gamma_6 = \frac{3C_{SD}\lambda_D^2}{2} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta - \frac{C_{SD}\lambda_D^2}{2} \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} (2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta - \cos^3 \vartheta), \quad (64)$$

$$\gamma_7 = \frac{C_{SD}\lambda_D^2}{2} \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} \cos \vartheta, \quad (65)$$

$$\gamma_8 = -\frac{C_{SD}\lambda_D^2}{2} \frac{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} \sin \vartheta. \quad (66)$$

Уравнение (58) имеет решение в виде одномерных солитонов, распространяющихся вдоль оси ζ' со скоростью u_0 :

$$\Phi_{Sol} = \frac{3u_0/\gamma_1}{\text{ch}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_0}{\gamma_3}} (\zeta' - u_0 \tau) \right]}. \quad (67)$$

На рис. 1 представлены семейства таких солитонов, построенных для различных параметров, характерных для плазмы магнитосферы Сатурна. При вычислениях использовались следующие значения: $n_{i0} = 10 \text{ см}^{-3}$, $T_i = 100 \text{ К}$, $T_{ec} = 10 \text{ эВ}$, $T_{eh} = 700 \text{ эВ}$, $\alpha = 0,5$; $\kappa_c = \kappa_h = 2$, $u_0 = 0.1 C_{SD}$, $a = 1 \text{ мкм}$, $n_{d0} = 10^{-4} \text{ см}^{-3}$ (рис. 1а), $n_{d0} = 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ (рис. 1б), $n_{d0} = 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ (рис. 1в), $B = 0.18 \text{ Гс}$ [23]. Характерные значения пылевых плазменных и пылевых ларморовских частот при этом равны: для случая а — $\omega_{pd} = 0.4 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{Bd} = 3.4 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$; для случая б — $\omega_{pd} = 0.24 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{Bd} = 6.3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$; для случая в — $\omega_{pd} = 0.082 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{Bd} = 6.8 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$.

Из приведенных графиков видно, что характерная ширина солитонов составляет от нескольких тысяч до нескольких десятков тысяч дебаевских радиусов, и чем больше угол ϑ , тем больше пространственный размер солитона.

Следует отметить, что в силу замены (53) изначальные амплитуды всех солитонов оказываются отрицательными, что не противоречит (см., например, работу [24]) ранее полученным результатам о корреляции знаков пылевых частиц и амплитуды пылевых звуковых солитонов.

На рис. 2 приведены модули амплитуд $|\tilde{\Phi}_0|$ солитонных решений (67) в зависимости от характерных

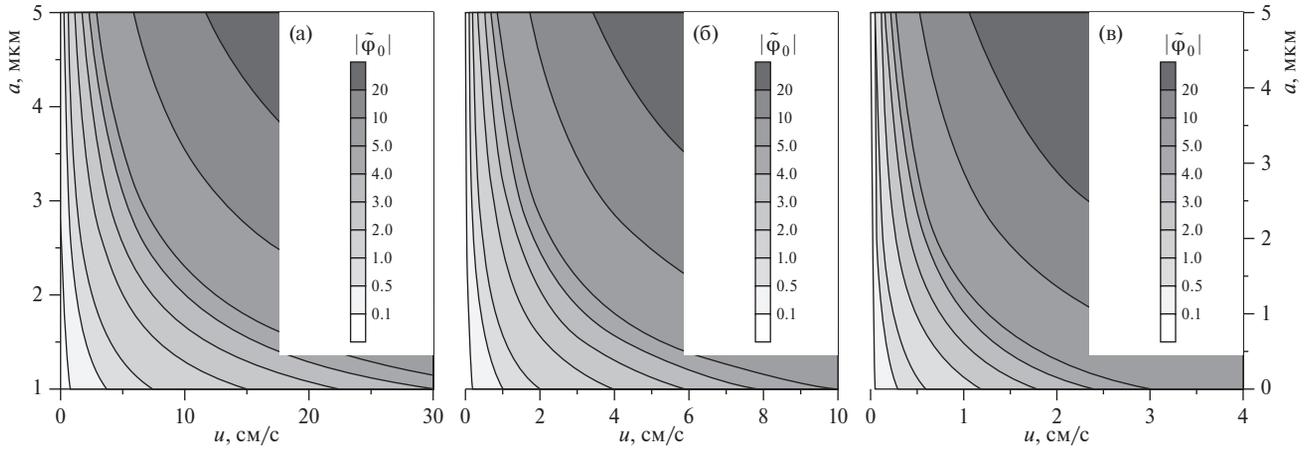


Рис. 2. Модули амплитуд $|\tilde{\varphi}_0|$ солитонных решений (67) в зависимости от характерных средних размеров пылевых частиц a и скорости распространения солитона u при $\vartheta = 5^\circ$ для $n_{d0} = 10^{-4} \text{ см}^{-3}$ (а), $n_{d0} = 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ (б), $n_{d0} = 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ (в).

размеров пылевых частиц a и скорости распространения солитона u при $\vartheta = 5^\circ$ для $n_{d0} = 10^{-4} \text{ см}^{-3}$ (рис. 2а), $n_{d0} = 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ (рис. 2б), $n_{d0} = 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ (рис. 2в).

Уравнение (54) допускает трехмерное сферически симметричное решение, распространяющееся с некоторой скоростью u вдоль направления магнитного поля. Для нахождения такого решения нужно провести следующую замену:

$$\phi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}) = \frac{C_{SD}}{u} \frac{2n_0 n + 3}{4n_0} \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad (68)$$

$$\tilde{\zeta} = \sqrt{\frac{2u}{C_{SD}}} \frac{\zeta - u\tau}{\lambda_D}, \quad (69)$$

$$\tilde{\xi} = \sqrt{\frac{2u}{C_{SD}}} \frac{\omega_{Bd}^2}{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2} \frac{\xi}{\lambda_D}, \quad (70)$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{2u}{C_{SD}}} \frac{\omega_{Bd}^2}{n_0 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2} \frac{\eta}{\lambda_D}. \quad (71)$$

В новых переменных уравнение Захарова–Кузнецова (54) принимает вид [16]

$$\tilde{\Delta}\phi = \phi - \phi^2. \quad (72)$$

Это уравнение допускает численное решение в виде сферически симметричного солитона. Такое решение приведено на рис. 3 для трех ситуаций, соответствующих различным значениям концентрации пыли: $n_{d0} = 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ (рис. 3а), $n_{d0} = 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ (рис. 3б), $n_{d0} = 10^{-4} \text{ см}^{-3}$ (рис. 3в).

Во всех случаях скорость распространения солитона $u = 0.1 C_{SD}$. Графики построены в координатах $(\rho_\perp = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \zeta)$. Из численного решения видно, что такой солитон имеет блиноподобную форму,

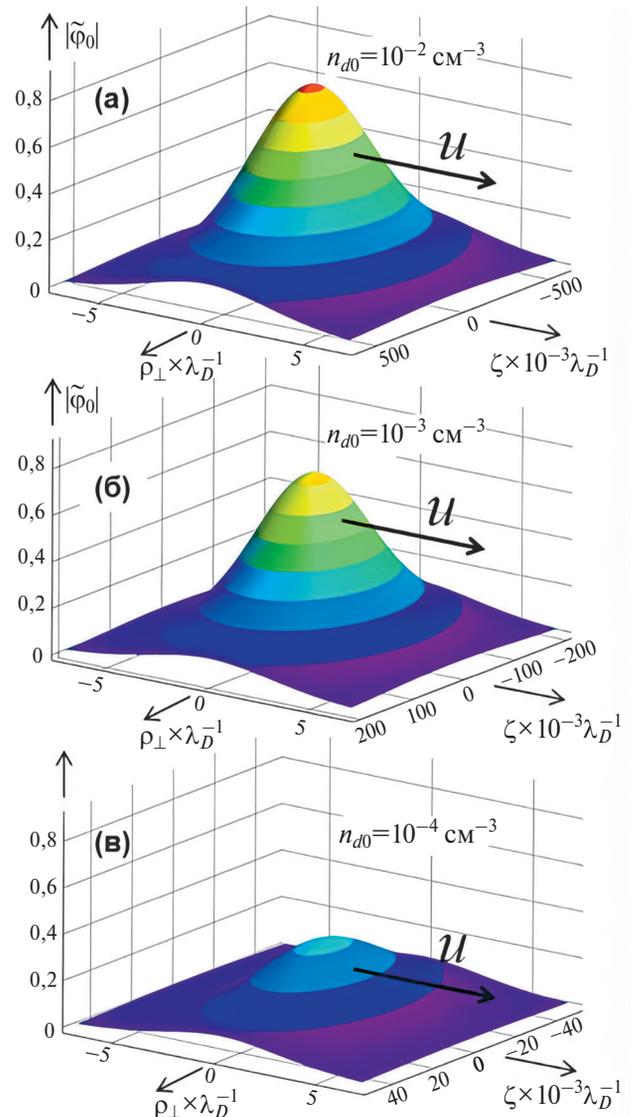


Рис. 3. Трехмерный солитон для случаев: $n_{d0} = 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ (а), $n_{d0} = 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ (б), $n_{d0} = 10^{-4} \text{ см}^{-3}$ (в).

т.е. форму эллипсоида, сильно сжатого в направлении распространения: характерный продольный масштаб солитона составляет около 10 дебаевских радиусов, в то время как характерный поперечный размер волны может достигать от нескольких десятков до нескольких сотен тысяч дебаевских радиусов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, для условий пылевой плазмы в магнитосфере Сатурна, состоящей из ионов, удовлетворяющих закону распределения Больцмана, двух сортов электронов: “холодных” и “горячих”, подчиняющихся κ -распределению, а также заряженных пылевых частиц рассмотрена ситуация низких частот, не превышающих пылевой ларморовской частоты.

В данной ситуации получено нелинейное уравнение Захарова–Кузнецова для пылевых звуковых возмущений, что отличает ее от ситуации [14, 15], когда гирочастота пылевых частиц настолько мала, что частоты пылевых звуковых волн ее существенно превосходят, и, например, в двумерном случае нелинейные пылевые звуковые возмущения описываются уравнением Кадомцева–Петвиашвили.

Рассмотренная ситуация отличается также от ситуации нелинейных пылевых звуковых волн в пылевой плазме в экзосфере Луны [22], когда роль захваченных волной частиц велика и нелинейность в уравнении Захарова–Кузнецова носит неаналитический характер.

В рассматриваемой ситуации магнитосферы Сатурна роль κ -распределений, характеризующих электроны, не столь велика, и поэтому получившееся нелинейное уравнение оказывается классическим уравнением Захарова–Кузнецова.

В нашей работе найдены частные решения уравнения Захарова–Кузнецова в одномерном и трехмерном сферически симметричном случаях. Показано, что характерный пространственный размер солитонов сильно зависит от направления распространения солитонов по отношению к направлению магнитного поля.

В случае одномерных солитонов чем больше угол ϑ , тем больше характерная ширина солитона. В случае трехмерного солитона, распространяющегося вдоль магнитного поля, характерный поперечный размер сильно (в тысячи, а иногда и в сотни тысяч раз) превосходит его продольный размер.

Что касается возможных наблюдений рассмотренных солитонов в будущих космических миссиях, несмотря на их малые (но конечные) амплитуды,

такие наблюдения в магнитосфере Сатурна, по-видимому, возможны, на что указывают наблюдения нижнегибридных солитонов в магнитосфере Земли в эксперименте “Фрея” [12].

Для проведения подобных наблюдений будущими космическими аппаратами, направленными к Сатурну, необходима аппаратура, аналогичная размещенной на космическом аппарате “Фрея”, позволяющая с высокой точностью измерять электрические поля в космическом пространстве.

Данная работа была частично поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “Базис”.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Подробности вывода нелинейного уравнения (52)

Вывод нелинейного уравнения (52) для пылевых звуковых возмущений удобно провести в безразмерных переменных. При этом выражения для новых переменных (43)–(46), а также разложения (47)–(51) в безразмерном виде имеют по форме такой же вид, как и в размерном случае:

$$\tilde{\tau} = \varepsilon^{3/2} \tilde{t}, \quad (\text{П.1})$$

$$\tilde{\xi} = \varepsilon^{1/2} \tilde{x}, \quad (\text{П.2})$$

$$\tilde{\eta} = \varepsilon^{1/2} \tilde{y}, \quad (\text{П.3})$$

$$\tilde{\zeta} = \varepsilon^{1/2} \tilde{z} - \tilde{M} \varepsilon^{1/2} \tilde{t}. \quad (\text{П.4})$$

При этом разложения по малому параметру ε принимают вид

$$\tilde{n}_d = n_0 + \varepsilon \tilde{n}_1 + \varepsilon^2 \tilde{n}_2, \quad (\text{П.5})$$

$$\tilde{v}_{d,x} = \varepsilon^{3/2} \tilde{v}_{1d,x} + \varepsilon^2 \tilde{v}_{2d,x}, \quad (\text{П.6})$$

$$\tilde{v}_{d,y} = \varepsilon^{3/2} \tilde{v}_{1d,y} + \varepsilon^2 \tilde{v}_{2d,y}, \quad (\text{П.7})$$

$$\tilde{v}_{d,z} = \varepsilon \tilde{v}_{1d,z} + \varepsilon^2 \tilde{v}_{2d,z}, \quad (\text{П.8})$$

$$\tilde{\phi} = \varepsilon \tilde{\phi}_1 + \varepsilon^2 \tilde{\phi}_2. \quad (\text{П.9})$$

Подставляя новые переменные (П.1)–(П.4), а также разложения (П.5)–(П.9) в (25)–(28) и (35), получаем следующие соотношения (здесь и далее для того, чтобы не загромождать приведенные выражения, знак “тильда” опускаем, имея в виду, что все переменные приведены в безразмерном виде; знак “тильда” оставляем только перед безразмерными коэффициентами $\tilde{\omega}_B$ и \tilde{n}).

Уравнение непрерывности:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{5/2} \frac{\partial n_1}{\partial \tau} - M \varepsilon^{3/2} \frac{\partial n_1}{\partial \zeta} + \varepsilon^{7/2} \frac{\partial n_2}{\partial \tau} - M \varepsilon^{5/2} \frac{\partial n_2}{\partial \zeta} + \\ & + \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2) (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x}) + \\ & + \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} (n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2) (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y}) + \\ & + \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2) (\varepsilon v_{1d,z} + \varepsilon^2 v_{2d,z}) = 0, \quad (\text{П.10}) \end{aligned}$$

откуда, объединяя слагаемые при соответствующих степенях относительно малого параметра ε , имеем

$$\varepsilon^{3/2} : M \frac{\partial n_1}{\partial \zeta} = n_0 \frac{\partial v_{1d,z}}{\partial \zeta}, \quad (\text{П.11})$$

$$\varepsilon^2 : n_0 \left(\frac{\partial v_{1d,x}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{1d,y}}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (\text{П.12})$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{5/2} : \frac{\partial v_{1d,x}}{\partial \tau} - M \frac{\partial n_2}{\partial \zeta} + n_0 \times \\ & \times \left(\frac{\partial v_{2d,x}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{2d,y}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{2d,z}}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial (n_1 v_{1d,z})}{\partial \zeta} = 0. \quad (\text{П.13}) \end{aligned}$$

Уравнение движения (проекция вдоль оси ξ):

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{3/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x})}{\partial \tau} - \\ & - M \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x})}{\partial \zeta} + \\ & + (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x})}{\partial \xi} + \\ & + (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x})}{\partial \eta} + \\ & + (\varepsilon v_{1d,z} + \varepsilon^2 v_{2d,z}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x})}{\partial \zeta} - \\ & - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2)}{\partial \xi} - \tilde{\omega}_B (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y}) = 0, \quad (\text{П.14}) \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\varepsilon^{3/2} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \tilde{\omega}_B v_{1d,y} = 0, \quad (\text{П.15})$$

$$\varepsilon^2 : M \frac{\partial v_{1d,x}}{\partial \zeta} + \tilde{\omega}_B v_{2d,y} = 0, \quad (\text{П.16})$$

$$\varepsilon^{5/2} : M \frac{\partial v_{2d,x}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = 0. \quad (\text{П.17})$$

Уравнение движения (проекция вдоль оси η):

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{3/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y})}{\partial \tau} - \\ & - M \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y})}{\partial \zeta} + \\ & + (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y})}{\partial \xi} + \\ & + (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y})}{\partial \eta} + \\ & + (\varepsilon v_{1d,z} + \varepsilon^2 v_{2d,z}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y})}{\partial \zeta} - \\ & - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2)}{\partial \eta} + \tilde{\omega}_B (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x}) = 0, \quad (\text{П.18}) \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\varepsilon^{3/2} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} - \tilde{\omega}_B v_{1d,x} = 0, \quad (\text{П.19})$$

$$\varepsilon^2 : -M \frac{\partial v_{1d,y}}{\partial \zeta} + \tilde{\omega}_B v_{2d,x} = 0, \quad (\text{П.20})$$

$$\varepsilon^{5/2} : M \frac{\partial v_{2d,y}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} = 0. \quad (\text{П.21})$$

Уравнение движения (проекция вдоль оси ζ):

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{3/2} \frac{\partial (\varepsilon v_{1d,z} + \varepsilon^2 v_{2d,z})}{\partial \tau} - M \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon v_{1d,z} + \varepsilon^2 v_{2d,z})}{\partial \zeta} + \\ & + (\varepsilon^{3/2} v_{1d,x} + \varepsilon^2 v_{2d,x}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon v_{1d,z} + \varepsilon^2 v_{2d,z})}{\partial \xi} + \\ & + (\varepsilon^{3/2} v_{1d,y} + \varepsilon^2 v_{2d,y}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon v_{1d,z} + \varepsilon^2 v_{2d,z})}{\partial \eta} + \\ & + (\varepsilon v_{1d,z} + \varepsilon^2 v_{2d,z}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon v_{1d,z} + \varepsilon^2 v_{2d,z})}{\partial \zeta} - \\ & - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial (\varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2)}{\partial \zeta} = 0, \quad (\text{П.22}) \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\varepsilon^{3/2} : M \frac{\partial v_{1d,z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} = 0, \quad (\text{П.23})$$

$$\varepsilon^{5/2} : \frac{\partial v_{1d,z}}{\partial \tau} - M \frac{\partial v_{2d,z}}{\partial \zeta} + v_{1d,z} \frac{\partial v_{1d,z}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} = 0. \quad (\text{П.24})$$

5. Уравнение Пуассона:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) (\varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2) =$$

$$= \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \tilde{n} (\varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2)^2 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2, \quad (\text{П.25})$$

отсюда получаем

$$\varepsilon: n_1 + \varphi_1 = 0, \quad (\text{П.26})$$

$$\varepsilon^2: \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \varphi_1 = \varphi_2 + \tilde{n} \varphi_1^2 + n_2. \quad (\text{П.27})$$

Разрешая систему уравнений (П.11)–(П.13), (П.15)–(П.17), (П.19)–(П.21), (П.23), (П.24), (П.26) и (П.27) относительно φ_1 и переходя вновь к размерному виду, приходим к уравнению (52). В частности, для выполнения одновременного равенства (П.11), (П.23) и (П.26), необходимо, чтобы $M^2 = n_0$, что в размерном виде означает равенство величины M скорости пылевого звука (см. выражение (42)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попель С.И. // Природа. 2015. № 9. С. 48.
2. Wahlund J.-E., André M., Eriksson A.I.E., Lundberg M., Morooka M.W., Shafiq M., Averkamp T.F., Gurnett D.A., Hospodarsky G.B., Kurth W.S., Jacobsen K.S., Pedersen A., Farrell W., Ratynskaia S., Piskunov N. // Planetary Space Sci. 2009. V. 57. P. 1795.
3. Yaroshenko V.V., Ratynskaia S., Olson J., Brenning N., Wahlund J.-E., Morooka M., Kurth W.S., Gurnett D.A., Morfill G.E. // Planetary Space Sci. 2009. V. 57. P. 1807.
4. Sittler Jr. E.C., Ogilvie K.W., Scudde J.D. // J. Geophys. Res. 1983. V. 88. P. 8847.
5. Barbosa D.D., Kurth W.S. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98. P. 9351.
6. Koen E.J., Collier A.B., Maharaj S.K., Hellberg M.A. // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 072122.
7. Popel S.I., Zelenyi L.M., Golub' A.P., Dubinskii A.Yu. // Planetary Space Sci. 2018. V. 156. P. 71.
8. Голубь А.П., Попель С.И. // Письма ЖЭТФ. 2021. Т. 113. С. 440.
9. Schippers P., Blanc M., Andre N., Dandouras I., Lewis G.R., Gilbert L.K., Persoon A.M., Krupp N., Gurnett D.A., Coates A.J., Krimigis S.M., Young D.T., Dougherty M.K. // J. Geophys. Res. 2008. V. 113. P. A07208.
10. Yeager A. // Nature. 2008. DOI: 10.1038/news.2008.1254.
11. Pécseli H.L., Lybekk B., Trulsen J., Eriksson A. // Plasma Phys. Controlled Fusion. 1997. V. 39. P. A227.
12. Попель С.И. // Физика плазмы. 2001. Т. 27. С. 475.
13. Копнин С.И., Косарев И.Н., Попель С.И. // Физика плазмы. 2005. Т. 31. С. 224.
14. Копнин С.И., Шохрин Д.В., Попель С.И. // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 163.
15. Копнин С.И., Шохрин Д.В., Попель С.И. // Физика плазмы. 2023. Т. 49. С. 582.
16. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989.
17. Banerjee G., Maitra S. // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. P. 043708.
18. Popel S.I., Kopnin S.I., Kosarev I.N., Yu M.Y. // Adv. Space Res. 2006. V. 37. P. 414.
19. Rubab N., Murtaza G. // Physica Scripta. 2006. V. 73. P. 178.
20. Зейтунян Р.Х. // УФН. 1995. Т. 165. С. 1403.
21. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: URSS, 2021. С. 180.
22. Кассем А.И., Копнин С.И., Попель С.И., Зеленый Л.М. // Физика плазмы. 2022. Т. 48. P. 871.
23. Sulaiman A.H., Kurth W.S., Hospodarsky G.B., Averkamp T.F., Ye S.-Y., Menietti J.D., Farrell W.M., Gurnett D.A., Persoon A.M., Dougherty M.K., Hunt G.J. // Geophys. Res. Lett. 2018. V. 45. P. 7347.
24. Kopnin S.I., Kosarev I.N., Popel S.I., Yu M.Y. // Planetary Space Sci. 2004. V. 52. P. 1187.

ZAKHAROV–KUZNETSOV EQUATION FOR DESCRIBING LOW-FREQUENCY NONLINEAR DUST ACOUSTIC PERTURBATIONS IN SATURN'S DUSTY MAGNETOSPHERE

S. I. Kopnin^a, D. V. Shokhrin^b, S. I. Popel^{a,*}

^a Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997, Russia

^b National Research University "Higher School of Economics," Moscow, 101000, Russia

* e-mail: popel@iki.rssi.ru

A description is given of low-frequency nonlinear dust acoustic waves in Saturn's dusty magnetosphere, which contains electrons of two types (hot and cold) obeying the kappa distribution, magnetospheric ions, and charged dust particles. For the corresponding conditions, the derivation of the Zakharov–Kuznetsov equation is given, which describes the nonlinear dynamics of dust acoustic waves in the case of low frequencies and a pancake-shaped wave packet along an external magnetic field. It is shown that under the conditions of Saturn's magnetosphere there exist solutions of the Zakharov–Kuznetsov equation in the form of one-dimensional and three-dimensional solitons. Possible observations of the considered solitons in future space missions are discussed.

Keywords: dust plasma, Zakharov–Kuznetsov equation, dust sound soliton, kappa distribution, magnetosphere, Saturn