

**ДВУМЕРНОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
В ЗАПЫЛЕННОЙ МАГНИТОСФЕРЕ САТУРНА**© 2023 г. С. И. Копнин^а, Д. В. Шохрин^б, С. И. Попель^{а,*}^а Институт космических исследований РАН, Москва, Россия^б Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*e-mail: popel@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 09.03.2023 г.

После доработки 29.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Представлено двумерное описание нелинейных пылевых звуковых волн в запыленной магнитосфере Сатурна, которая содержит электроны двух сортов (горячие и холодные), подчиняющиеся каппа-распределению, ионы магнитосферы, а также заряженные пылевые частицы. Для условий запыленной магнитосферы Сатурна приведен вывод уравнения Кадомцева–Петвиашвили, описывающего нелинейную динамику почти одномерных волновых структур. Рассмотрена возможность распространения локализованных волновых структур типа пылевых звуковых солитонов. Показано, что в условиях магнитосферы Сатурна существуют решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили в виде одномерных солитонов и двумерных N -солитонов. Обсуждаются возможные наблюдения рассматриваемых солитонов в будущих космических миссиях.

Ключевые слова: пылевая плазма, уравнение Кадомцева–Петвиашвили, пылевые звуковые солитоны, каппа-распределение, магнитосфера Сатурна

DOI: 10.31857/S0367292123600279, EDN: WYHAGS

1. ВВЕДЕНИЕ

Трудно представить себе заполненную плазмой область Солнечной системы, свободную от мелкодисперсных пылевых частиц [1]. Нано- и микромасштабные пылевые частицы обнаруживаются в межпланетном космическом пространстве, в плазме ионосфер и магнитосфер планет Солнечной системы, в планетарных кольцах, в окрестностях космических тел, не имеющих собственной атмосферы, и др. Важным объектом с точки зрения исследований пылевой плазмы является магнитосфера Сатурна [2, 3]. Параметры плазмы в ней измерялись еще в 1980-х годах в рамках миссий Voyager 1 и 2 [4]. Существование волн в плазме магнитосферы Сатурна также было доказано на основе данных, полученных аппаратом Voyager 1 [5]. Теоретические исследования ионно-звуковых волн в магнитосфере Сатурна проводились в [6].

Плазма в магнитосфере Сатурна обладает рядом особенностей по сравнению с другими космическими системами, исследования которых в настоящее время проводятся весьма активно (для Луны и Марса см., например, [7, 8]). Например, измерения параметров электронов магнитосферы Сатурна, полученные в рамках миссий Voyager [4, 5] и Cassini [9], показали сосуществование двух

видов (горячих и холодных) электронов. Оказалось [9], что скорости электронных популяций подчиняются так называемому κ -распределению с независимыми низкими значениями κ .

Важным источником пылевых частиц в магнитосфере Сатурна является Энцелад — один из крупнейших спутников Сатурна, известный своими ледяными гейзерами (ледяными вулканами, криовулканами). Пылевая плазма в окрестностях Энцелада была обнаружена в рамках миссии Cassini [2, 3]. Исследования в рамках этой миссии указали также на возможную причину ее появления — космический аппарат Cassini обнаружил фонтаны частиц пыли и небольших частиц водяного льда (которые также могут трактоваться как пылевые частицы) высотой во многие сотни километров, бьющие из четырех трещин в районе южного полюса Энцелада [10].

Все это указывает на актуальность проблемы исследования нелинейных волновых структур в пылевой плазме для условий, свойственных для магнитосферы Сатурна, типичными для которой являются пылевые звуковые волны. Важным видом нелинейных структур, наблюдавшихся в космосе [11, 12], являются солитоны, а в пылевой плазме — пылевые звуковые солитоны [13]. Для плазмы запыленной магнитосферы Сатурна рас-

смотрение пылевых звуковых солитонов проводилось [14] в одномерном случае в ситуации, когда не учитывается анизотропия, связанная, например, с присутствием магнитного поля, что и позволяет использовать одномерные (в пространстве) уравнения. Вместе с тем, в магнитосфере Сатурна существует анизотропия, связанная с вектором магнитного поля, которая может повлиять на структуру нелинейной волны. Так, например, если имеется почти одномерный волновой пакет, в котором локализация вдоль вектора магнитного поля, значительно сильнее, чем в других направлениях, то необходимо использовать двумерное описание, схожее с тем, которое приводит к хорошо известному уравнению Кадомцева–Петвиашвили для обычной плазмы (см., например, [15]). При этом особенности пылевой плазмы в системе Сатурна по сравнению с обычной плазмой весьма велики и ограничиваются не просто заменой ионов на положительно заряженные пылевые частицы. Кроме того, необходимо учитывать тот факт, что в магнитосфере Сатурна сосуществуют два вида электронов (горячие и холодные), подчиняющиеся двум различным κ -распределениям. Таким образом, вывод уравнения, описывающего в двумерном случае пылевые звуковые солитоны для случая запыленной магнитосферы Сатурна, следует провести с самого начала с учетом особенностей плазмы его магнитосферы. Целью настоящей работы является вывод этого уравнения и рассмотрение некоторых частных его решений для параметров плазмы запыленной магнитосферы Сатурна.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания пылевых звуковых солитонов (см., например, [16–18]) в пылевой плазме магнитосферы Сатурна можно использовать следующую систему уравнений, включающую в себя уравнение непрерывности и уравнение движения (Эйлера) для пылевых частиц и уравнение Пуассона для самосогласованного электростатического потенциала ϕ

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \nabla \cdot n_d \mathbf{v}_d = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_d}{\partial t} + (\mathbf{v}_d \cdot \nabla) \mathbf{v}_d + \frac{q_d}{m_d} \nabla \phi = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \phi = 4\pi e (n_{e,c} + n_{e,h} - n_i - n_d Z_d). \quad (3)$$

Здесь n_d – концентрация пылевых частиц, $\mathbf{v}_d = (v_{d,x}, v_{d,y}, v_{d,z})$ – вектор их гидродинамической скорости, m_d и $q_d = Z_d e$ – масса и заряд пылевых частиц соответственно, $-e$ – заряд электрона, n_i – концентрация ионов, $n_{e,c(h)}$ – концентрация хо-

лодных (горячих) электронов. Ионы подчинены распределению Больцмана

$$n_i = n_{i0} e^{-e\phi/T_i}, \quad (4)$$

где T_i – температура ионов, выраженная в энергетических единицах. Здесь и далее индекс 0 соответствует невозмущенным состояниям.

В магнитосфере Сатурна электроны удовлетворяют κ -распределению по скоростям и соответствуют двум типам распределений (распределения для “холодных” и “горячих” электронов) [19]:

$$n_{e,c} = n_{e,c0} \left(1 - \frac{1}{\kappa_c - 3/2} \frac{e\phi}{T_{e,c}} \right)^{-\kappa_c + 1/2}, \quad (5)$$

$$n_{e,h} = n_{e,h0} \left(1 - \frac{1}{\kappa_h - 3/2} \frac{e\phi}{T_{e,h}} \right)^{-\kappa_h + 1/2}. \quad (6)$$

Здесь $n_{e,c(h)}$ – концентрация холодных (горячих) электронов, $T_{e,c(h)}$ – температура холодных (горячих) электронов, выраженная в энергетических единицах, κ_c и κ_h – параметры для κ -распределений соответственно холодных и горячих электронов. Отметим, что $\kappa_c, \kappa_h > 3/2$.

Можно считать, что на пространственно-временных масштабах, характерных для пылевых звуковых волн, заряд пылевых частиц описывается трансцендентным уравнением

$$I_i(Z_d) = I_{e,c}(Z_d) + I_{e,h}(Z_d), \quad (7)$$

где ионный ток описывается выражением [20]

$$I_i(Z_d) = 4\pi a^2 e n_{i0} \sqrt{\frac{T_i}{2\pi m_i}} \left(1 - \frac{e^2 Z_d}{a T_i} \right), \quad (8)$$

а токи холодных (горячих) электронов – уравнениями

$$I_{e,c(h)}(Z_d) = 2\sqrt{\pi} a^2 e n_{e0,c(h)} \frac{\sqrt{\kappa_{c(h)} - 3/2} \Gamma(\kappa_{c(h)} + 1)}{\kappa_{c(h)} (\kappa_{c(h)} - 1) \Gamma(\kappa_{c(h)} - 1/2)} \times \sqrt{\frac{T_{e,c(h)}}{m_e}} \left(1 - \frac{1}{\kappa_{c(h)} - 3/2} \frac{e^2 Z_d}{a T_{e,c(h)}} \right)^{-\kappa_{c(h)} + 1}. \quad (9)$$

Здесь a – характерный размер пылевых частиц, m_i – масса ионов, $\Gamma(\kappa_{c(h)})$ – гамма-функция.

В условиях квазинейтральности выполнено условие

$$n_{i0} + Z_d n_{d0} = n_{e0}, \quad (10)$$

где $n_{e0} = n_{e0,c} + n_{e0,h}$ – суммарная концентрация невозмущенных холодных и горячих электронов. Удобно ввести коэффициент α , характеризующий количественную связь между концентрация-

ми холодных и горячих электронов следующим образом:

$$n_{e0,c} = \alpha(n_{i0} + Z_d n_{d0}), \quad (11)$$

$$n_{e0,h} = (1 - \alpha)(n_{i0} + Z_d n_{d0}). \quad (12)$$

Отметим, что $0 \leq \alpha \leq 1$.

Из уравнений (7)–(9), описывающих зарядку пылевых частиц, можно определить зарядовые числа Z_d и характерные концентрации электронов в условиях, характерных для магнитосферы Сатурна ($n_{i0} = 10 \text{ см}^{-3}$, $T_i = 100 \text{ К}$, $T_{ec} = 10 \text{ эВ}$, $T_{eh} = 700 \text{ эВ}$, $\alpha = 0.5$, $\kappa_c = \kappa_h = 2$). На рис. 1 приведены полученные таким образом зависимости зарядовых чисел пылевых частиц и концентраций электронов от размеров пылевых частиц для различных концентраций пыли.

В предположении малости параметра $\tilde{\phi} = e\varphi/T_i$ распределения электронов (5) и (6) принимают вид

$$n_{e,c(h)} = n_{e,c(h)0} \left(1 + a_{1,c(h)} \tilde{\phi} + a_{2,c(h)} \tilde{\phi}^2 \right), \quad (13)$$

где

$$a_{1,c(h)} = \frac{\kappa_{c(h)} - 1/2}{\kappa_{c(h)} - 3/2} \frac{T_i}{T_{e,c(h)}}, \quad (14)$$

$$a_{2,c(h)} = \frac{(\kappa_{c(h)} - 1/2)(\kappa_{c(h)} + 1/2)}{2(\kappa_{c(h)} - 3/2)^2} \left(\frac{T_i}{T_{e,c(h)}} \right)^2.$$

При этом распределение ионов (4) принимает вид

$$n_i = n_{i0} \left(1 - \tilde{\phi} + \tilde{\phi}^2/2 \right). \quad (15)$$

Из выражений (13)–(15) видно, что систему уравнений (1)–(3) удобно представить в следующих безразмерных переменных (отметим, что, поскольку заряды пылевых частиц для параметров магнитосферы Сатурна оказываются отрицательными, в последующих обозначениях следует использовать модуль заряда $|Z_d|$):

$$t \rightarrow \omega_{pd}^{-1} \tilde{t}, \quad (16)$$

$$(x, y, z) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \lambda_D, \quad (17)$$

$$(v_{d,x}, v_{d,y}, v_{d,z}) \rightarrow (\tilde{v}_{d,x}, \tilde{v}_{d,y}, \tilde{v}_{d,z}) C_{Sd}, \quad (18)$$

$$\varphi \rightarrow T_e \tilde{\phi} / e, \quad (19)$$

$$n_d \rightarrow \tilde{n}_d n' / |Z_d|, \quad (20)$$

где $\omega_{pd} = \sqrt{4\pi n' |Z_d| e^2 / m_d}$ – пылевая плазменная частота, $\lambda_D = \sqrt{T_i / 4\pi n' e^2}$ – дебаевский радиус, $C_{Sd} = \omega_{pd} \lambda_D$ – скорость пылевого звука. Кроме того,

$$n' = n_{e,c0} a_{1,c} + n_{e,h0} a_{1,h} + n_{i0}. \quad (21)$$

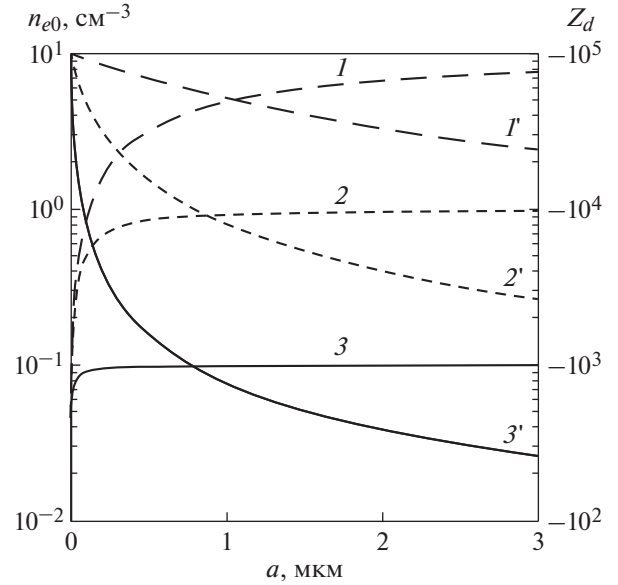


Рис. 1. Зависимости от размеров пылевых частиц зарядовых чисел пылевых частиц Z_d для различных концентраций пыли ($n_{d0} = 10^{-4} \text{ см}^{-3}$ – кривая 1, 10^{-3} см^{-3} – кривая 2 и 10^{-2} см^{-3} – кривая 3), а также зависимости концентраций электронов n_{e0} (включая как холодные, так и горячие частицы) для различных концентраций пыли ($n_{d0} = 10^{-4} \text{ см}^{-3}$ – кривая 1', 10^{-3} см^{-3} – кривая 2', 10^{-2} см^{-3} – кривая 3').

Таким образом, система уравнений (1)–(3) с учетом (13)–(20) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{n}_d}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{n}_d \tilde{\mathbf{v}}_d = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_d}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}_d \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}}_d - \tilde{\nabla} \tilde{\phi} = 0, \quad (23)$$

$$\Delta \tilde{\phi} = \frac{n_{e,c0} + n_{e,h0} - n_{i0}}{n'} + \tilde{n}_d + \tilde{\phi} + \frac{n''}{n'} \tilde{\phi}^2, \quad (24)$$

где

$$n'' = n_{e,c0} a_{2,c} + n_{e,h0} a_{2,h} - n_{i0} / 2. \quad (25)$$

Систему уравнений (22)–(24) можно использовать для описания пылевых звуковых солитонов в условиях магнитосферы Сатурна. В линейном приближении концентрацию пылевых частиц можно представить в следующем виде:

$$\tilde{n}_d = n_0 + \delta \tilde{n}_d, \quad (26)$$

где $\delta \tilde{n}_d$ – безразмерная величина возмущения концентрации пылевых частиц, вызванного изменениями потенциала $\tilde{\phi}$, а безразмерная невозмущенная концентрация пылевых частиц имеет вид

$$n_0 = |Z_d| \frac{n_{d0}}{n'}. \quad (27)$$

Из системы (22)–(24) следует хорошо известный закон дисперсии для пылевых звуковых волн в безразмерном виде (ср., например, [21, 22])

$$\tilde{\omega}(\tilde{\mathbf{k}}) = \frac{\sqrt{n_0} |\tilde{\mathbf{k}}|}{\sqrt{1 + |\tilde{\mathbf{k}}|^2}}, \quad (28)$$

где $\tilde{\omega}(\tilde{\mathbf{k}})$, $\tilde{\mathbf{k}}$ – безразмерные частота и волновой вектор пылевой звуковой волны. В размерном виде этот закон дисперсии принимает вид

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{C_{SD} |\mathbf{k}|}{\sqrt{1 + |\mathbf{k}|^2 \lambda_D^2}}, \quad (29)$$

где характерная скорость пылевого звука

$$C_{SD} = \sqrt{|Z_d| \frac{n_{d0}}{n'} C_{sd}}. \quad (30)$$

Для почти одномерного волнового пакета, в котором локализация вдоль одной из осей значительно сильнее, чем в других направлениях, (т.е. для случая, когда $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}$ и $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$), а также, когда $|\mathbf{k}|^2 \lambda_D^2 \ll 1$, закон дисперсии (24) принимает вид

$$\omega(\mathbf{k}) = C_{SD} |\mathbf{k}_{\parallel}| \left(1 - \frac{|\mathbf{k}_{\parallel}|^2 \lambda_D^2}{2} + \frac{\mathbf{k}_{\perp}^2}{2\mathbf{k}_{\parallel}^2} \right). \quad (31)$$

Без ограничения общности полагаем, что \mathbf{k}_{\parallel} направлена вдоль оси x , тогда уравнение в координатном пространстве, соответствующее закону дисперсии (31), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_{SD} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{C_{SD} \lambda_D^2}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right) = -\frac{C_{SD}}{2} \nabla_{\perp}^2 \Phi, \quad (32)$$

где $\Phi = e\phi/T_i$.

Линейное уравнение (32), описывающее распространение пылевых звуковых волн в запыленной магнитосфере Сатурна, по форме совпадает с аналогичным линейным уравнением, полученным (см., например, [15]) для ионно-звуковых волн в обычной плазме, когда электроны удовлетворяют бoльцмановскому распределению. Учет более высоких порядков малости в системе уравнений (22)–(24) приводит к нелинейному уравнению, для вывода которого можно воспользоваться стандартным методом разложения по малому параметру ϵ [23, 24]. Используя метод асимптотического представления на основе классического анализа размерностей, новые переменные можно представить в следующем виде:

$$\tau = \epsilon^{3/2} \tilde{t}, \quad (33)$$

$$\xi = \epsilon^{1/2} (\tilde{x} - \lambda \tilde{t}), \quad (34)$$

$$\eta = \epsilon \tilde{y}. \quad (35)$$

При этом разложения по малому параметру ϵ принимают вид

$$\tilde{n}_d = n_0 + \epsilon \tilde{n}_1 + \epsilon^2 \tilde{n}_2, \quad (36)$$

$$\tilde{v}_{d,x} = \epsilon \tilde{v}_{1,d,x} + \epsilon^2 \tilde{v}_{2,d,x}, \quad (37)$$

$$\tilde{v}_{d,y} = \epsilon^{3/2} \tilde{v}_{1,d,y} + \epsilon^{5/2} \tilde{v}_{2,d,y}, \quad (38)$$

$$\tilde{\phi} = \epsilon \tilde{\phi}_1 + \epsilon^2 \tilde{\phi}_2. \quad (39)$$

Полученное таким образом нелинейное уравнение для пылевых звуковых возмущений является хорошо известным уравнением Кадомцева–Петвиашвили с отрицательной дисперсией

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \tau} - \frac{3 + 2\lambda^2 (n''/n')}{2\lambda^2} \lambda \tilde{\phi}_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \xi} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^3 \tilde{\phi}_1}{\partial \xi^3} \right) = \\ = -\frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

В размерном виде уравнение (35) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{3 + 2n_0 (n''/n')}{2n_0} C_{SD} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{C_{SD} \lambda_D^2}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x'^3} \right) = \\ = -\frac{C_{SD}}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

где (для приведения уравнения Кадомцева–Петвиашвили к каноническому виду) произведена замена $\tilde{\phi}_1 = -\phi$. Отметим, что в результате перехода в подвижную систему отсчета, что выражается заменой переменных (34), система координат (x', y', z') движется относительно системы координат (x, y, z) со скоростью C_{SD} .

3. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Уравнение (41) имеет одномерное устойчивое (см., например, [15]) решение в виде распространяющихся вдоль оси x' солитонов

$$\phi = \phi_0 \operatorname{ch}^{-2} \left(\sqrt{\frac{u}{2C_{SD}}} \frac{x' - u't}{\lambda_D} \right), \quad (42)$$

где

$$\phi_0 = \frac{6n_0}{3 + 2n_0 (n''/n')} \frac{u'}{C_{SD}}. \quad (43)$$

Отметим, что скорость солитона в системе координат (x', y', z') равна u' , а в системе координат (x, y, z) – $u = C_{SD} + u'$. Такой солитон устойчив в двумерном пространстве, поскольку знак перед членом в правой части отрицательный (см., например [15]).

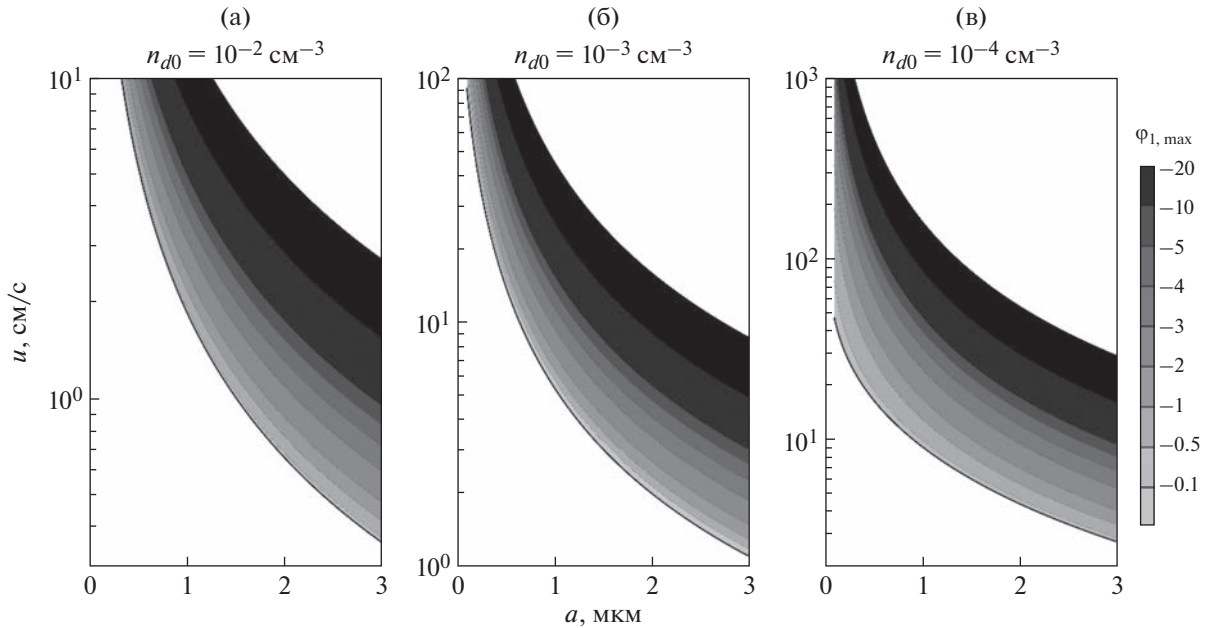


Рис. 2. Амплитуды одномерных солитонов в зависимости от скоростей их распространения и размеров пылевых частиц для различных концентраций пылевых частиц: $n_{d0} = 10^{-2} \text{ cm}^{-3}$ (а), 10^{-3} cm^{-3} (б) и 10^{-4} cm^{-3} (в). Все вычисления проводились для параметров, приведенных на рис. 1, а также для $n_{i0} = 10 \text{ cm}^{-3}$, $T_i = 100 \text{ K}$, $T_{ec} = 10 \text{ эВ}$, $T_{eh} = 700 \text{ эВ}$, $\alpha = 0.5$, $\kappa_c = \kappa_h = 2$.

Поскольку $\tilde{\phi}_1 = -\phi$, амплитуда таких одномерных солитонов имеет вид

$$\Phi_{1, \max} = -\frac{6n_0}{3 + 2n_0(n''/n')} \frac{u'}{C_{SD}}. \quad (44)$$

Здесь и на приведенных ниже графиках (рис. 2) знак “~” над безразмерной амплитудой $\tilde{\phi}_{1, \max}$ не приводится.

На рис. 2 изображены безразмерные амплитуды одномерных солитонов $\Phi_{1, \max}$ в зависимости от скоростей их распространения, а также от размеров пылевых частиц для различных концентраций пылевых частиц. Все вычисления проводились для параметров, приведенных на рис. 1, а также $n_{i0} = 10 \text{ cm}^{-3}$, $T_i = 100 \text{ K}$, $T_{ec} = 10 \text{ эВ}$, $T_{eh} = 700 \text{ эВ}$, $\alpha = 0.5$, $\kappa_c = \kappa_h = 2$. Следует отметить, что поскольку при выводе уравнения Кадомцева–Петвиашвили (41) было использовано разложение потенциала $\tilde{\phi} = \varepsilon \tilde{\phi}_1 + \varepsilon^2 \tilde{\phi}_2$ по малому параметру ε , то величины амплитуд солитонов $\Phi_{1, \max}$ имеют конечные значения. Обратим внимание на то, что, в случае магнитосферы Сатурна, когда электроны удовлетворяют к-распределению по скоростям, как и в других природных ситуациях (см., например, [16–18]), характеризующихся другими распределениями электронов, знак амплитуды солитона определяется знаком заряда пылевых частиц.

Хорошо известно [15], что в двумерном пространстве уравнение (41) имеет решения в виде групп N-солитонов. Такие решения удобнее всего искать с помощью метода Хироты [25]. Так, например, для двумерных 2-солитонов можно проверить непосредственной подстановкой, что решением уравнения (41) является функция вида

$$\phi = A \frac{\partial^2 \ln(f(x', y', t'))}{\partial x'^2}, \quad (45)$$

где

$$f(x', y', t') = 1 + e^{\theta_1(x', y', t')} + e^{\theta_2(x', y', t')} + \alpha \cdot e^{\theta_1(x', y', t') + \theta_2(x', y', t')}, \quad (46)$$

$$\theta_1(x', y', t') = \omega_1 t' + k_{x,1} x' + k_{y,1} y' + \delta_1, \quad (47)$$

$$\theta_2(x', y', t') = \omega_2 t' + k_{x,2} x' + k_{y,2} y' + \delta_2. \quad (48)$$

Здесь $\omega_{1(2)}$, $k_{x,1(2)}$, $k_{y,1(2)}$, $\delta_{1(2)}$ – некоторые константы. Следует отметить, что выражение (45) с учетом (46)–(48) является решением уравнения (41) когда справедливы следующие соотношения:

$$A = 12, \quad (49)$$

$$\omega_{1(2)} = -\frac{k_{x,1(2)}^4 x_0^4 - \sigma^2 k_{y,1(2)}^2 y_0^2}{k_{x,1(2)} x_0 t_0}, \quad (50)$$

$$\alpha = \frac{(k_{x,1}\omega_2 + k_{x,2}\omega_1)x_0t_0 + x_0^4 \left[4k_{x,1}k_{x,2}(k_{x,1}^2 + k_{x,2}^2) - 6k_{x,1}^2k_{x,2}^2 \right] - 2\sigma^2 y_0^2 k_{y,1}k_{y,2}}{(k_{x,1}\omega_2 + k_{x,2}\omega_1)x_0t_0 + x_0^4 \left[4k_{x,1}k_{x,2}(k_{x,1}^2 + k_{x,2}^2) + 6k_{x,1}^2k_{x,2}^2 \right] - 2\sigma^2 y_0^2 k_{y,1}k_{y,2}}, \quad (51)$$

где $\sigma^2 = -1$, и

$$x_0 = \lambda_D \sqrt{\frac{n_0}{3 + 2n_0(n''/n')}} \quad (52)$$

$$y_0 = \lambda_D \frac{n_0}{3 + 2n_0(n''/n')},$$

$$t_0 = \frac{\lambda_D}{C_{SD}} \left(\frac{n_0}{3 + 2n_0(n''/n')} \right)^{3/2}. \quad (53)$$

При этом константы $\delta_{1(2)}$ фактически определяют начальное положение максимума 2-солитона и могут иметь любые действительные значения.

Для иллюстрации характерной формы двумерных 2-солитонов на рис. 3 приведены решения вида (45) (с учетом (46)–(53)) для характерных параметров плазмы магнитосферы Сатурна ($n_{i0} = 10 \text{ см}^{-3}$, $T_i = 100 \text{ К}$, $T_{ec} = 10 \text{ эВ}$, $T_{eh} = 700 \text{ эВ}$, $\alpha = 0.5$, $\kappa_c = \kappa_h = 2$) и различных концентраций пылевых частиц ($n_{d0} = 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ и 10^{-4} см^{-3}). Вы-

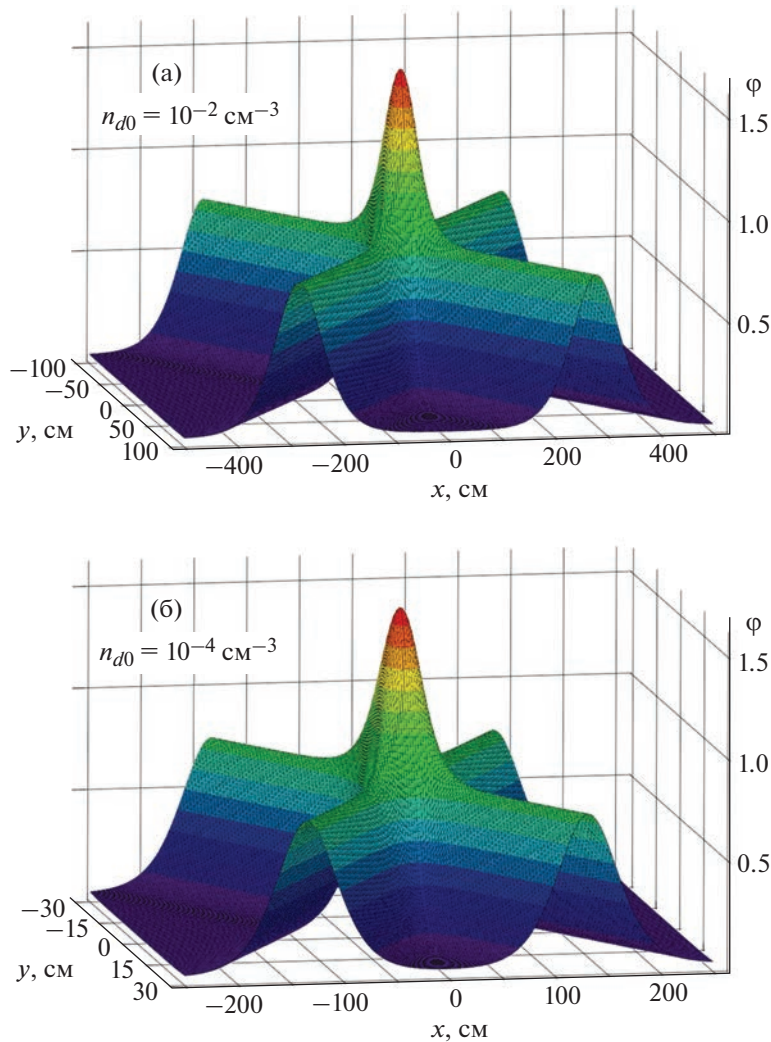


Рис. 3. Двумерные 2-солитоны при $k_{x,1} = k_{x,2} = (2x_0)^{-1}$, $k_{y,1} = -k_{y,2} = (y_0)^{-1}$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$, которые могут существовать в условиях плазмы магнитосферы Сатурна с характерными параметрами: $n_{i0} = 10 \text{ см}^{-3}$, $T_i = 100 \text{ К}$, $T_{ec} = 10 \text{ эВ}$, $T_{eh} = 700 \text{ эВ}$, $\alpha = 0.5$, $\kappa_c = \kappa_h = 2$, и различными концентрациями пылевых частиц $n_{d0} = 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ (а) и 10^{-4} см^{-3} (б).

числения проводились для $k_{x,1} = k_{x,2} = (2x_0)^{-1}$,
 $k_{y,1} = -k_{y,2} = (y_0)^{-1}$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

Обратим внимание, что скорость таких солитонов определяется выражениями

$$\dot{x} = \frac{x_0}{t_0} \frac{(k_{x,1}^4 k_{x,2} k_{y,2} - k_{x,2}^4 k_{x,1} k_{y,1}) x_0^5 y_0 + \sigma^2 (k_{y,2}^2 k_{x,1} k_{y,1} - k_{y,1}^2 k_{x,2} k_{y,2}) x_0 y_0^3}{x_0^3 y_0 k_{x,1} k_{x,2} (k_{x,1} k_{y,2} - k_{x,2} k_{y,1})}, \quad (54)$$

$$\dot{y} = \frac{y_0}{t_0} \frac{(k_{x,1}^4 k_{x,2}^2 - k_{x,2}^4 k_{x,1}^2) x_0^6 + \sigma^2 (k_{y,2}^2 k_{x,1}^2 - k_{y,1}^2 k_{x,2}^2) x_0^2 y_0^2}{x_0^3 y_0 k_{x,1} k_{x,2} (k_{x,2} k_{y,1} - k_{x,1} k_{y,2})}. \quad (55)$$

Следует отметить, что при $k_{x,1} = k_{x,2} = (2x_0)^{-1}$,
 $k_{y,1} = -k_{y,2} = (y_0)^{-1}$ двумерный 2-солитон распро-
 страняется вдоль оси OX со скоростью

$$u' = 4C_{SD} \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \frac{3 + 2n_0 (n''/n')}{n_0}. \quad (56)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен вывод двумерного нелинейного уравнения Кадомцева–Петвиашвили с отрицательной дисперсией, описывающего динамику нелинейных волновых структур в запыленной плазме магнитосферы Сатурна, которая включает в себя электроны двух сортов (горячие и холодные), ионы магнитосферы, а также заряженные пылевые частицы. Показано, что в условиях магнитосферы Сатурна существуют решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили в виде одномерных солитонов и двумерных N-солитонов. Получены зависимости амплитуд одномерных солитонов от скоростей их распространения и размеров пылевых частиц для различных концентраций пылевых частиц, а также солитонные решения в виде двумерных 2-солитонов для различных концентраций пылевых частиц в запыленной плазме магнитосферы Сатурна.

Отметим, что рассмотрение проведено для ситуации, когда фотоэффект при зарядке пылевых частиц в магнитосфере Сатурна несущественен, т.е. пылевые частицы из-за большей подвижности электронов приобретают отрицательные заряды. Хотя расстояние от Сатурна до Солнца весьма велико (около 10 а.е.) возможны ситуации, когда взаимодействие солнечного излучения с пылевыми частицами приводит вследствие фотоэффекта к положительной зарядке пылевых частиц. В этом случае также оказывается возможным вывести уравнение Кадомцева–Петвиашвили с отрицательной дисперсией, которое имеет солитонные решения, схожие с теми, которые получаются для случая отрицательных зарядов пылевых частиц, но имеющие противоположный знак электростатического потенциала по сравнению с ними.

Что касается возможных наблюдений рассмотренных солитонов в будущих космических миссиях, несмотря на их малые (но конечные) амплитуды, такие наблюдения в магнитосфере Сатурна, по-видимому, возможны, на что указывают наблюдения нижегибридных солитонов в магнитосфере Земли в эксперименте “Фрея” [12]. Для проведения подобных наблюдений будущими космическими аппаратами, направленными к Сатурну, необходима аппаратура, аналогичная размещенной на космическом аппарате “Фрея”, позволяющая с высокой точностью измерять электрические поля в космическом пространстве.

Работа выполнена по теме “Плазма” Института космических исследований Российской академии наук. Двое из авторов (Д.В. Шохрин и С.И. Попель) выражают благодарность Фонду развития теоретической физики и математики “БАЗИС”, частично поддержавшему грантом выполнение данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попель С.И. // Природа. 2015. № 9. С. 48.
2. Wahlund J.-E., André M., Eriksson A.I.E., Lundberg M., Morooka M.W., Shafiq M., Averkamp T.F., Gurnett D.A., Hospodarsky G.B., Kurth W.S., Jacobsen K.S., Pedersen A., Farrell W., Ratynskaia S., Piskunov N. // Planet. Space Sci. 2009. V. 57. P. 1795.
3. Yaroshenko V.V., Ratynskaia S., Olson J., Brenning N., Wahlund J.-E., Morooka M., Kurth W.S., Gurnett D.A., Morfill G.E. // Planet. Space Sci. 2009. V. 57. P. 1807.
4. Sittler, Jr. E.C., Ogilvie K.W., Scudde J.D. // J. Geophys. Res. 1983. V. 88. P. 8847.
5. Barbosa D.D., Kurth W.S. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98. P. 9351.
6. Koen E.J., Collier A.B., Maharaj S.K., Hellberg M.A. // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 072122.
7. Popel S.I., Zelenyi L.M., Golub' A.P., Dubinskii A. Yu. // Planet. Space Sci. 2018. V. 156. P. 71.
8. Голубь А.П., Попель С.И. // Письма ЖЭТФ. 2021. Т. 113. С. 440.
9. Schippers P., Blanc M., Andre N., Dandouras I., Lewis G.R., Gilbert L.K., Persoon A.M., Krupp N., Gurnett D.A., Coates A.J., Krimigis S.M., Young D.T.,

- Dougherty M.K.* // J. Geophys. Res. 2008. V. 113. P. A07208.
10. *Yeager A.* // Nature. 2008.
<https://doi.org/10.1038/news.2008.1254>
11. *Pécseli H.L., Lybekk B., Trulsen J., Eriksson A.* // Plasma Phys. Controlled Fusion. 1997. V. 39. P. A227.
12. *Попель С.И.* // Физика плазмы. 2001. Т. 27. С. 475.
13. *Копнин С.И., Косарев И.Н., Попель С.И., Ю М.* // Физика плазмы. 2005. Т. 31. С. 224.
14. *Копнин С.И., Шохрин Д.В., Попель С.И.* // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 163.
15. *Петвиашвили В.И., Похотелов О.А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989.
16. *Копнин С.И., Попель С.И.* // Письма ЖТФ. 2019. Т. 45. С. 26.
17. *Копнин С.И., Морозова Т.И., Попель С.И.* // Физика плазмы. 2019. Т. 45. С. 831.
18. *Копнин С.И., Попель С.И.* // Письма ЖТФ. 2021. Т. 47. С. 29.
19. *Banerjee G., Maitra S.* // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. P. 043708.
20. *Rubab N., Murtaza G.* // Physica Scripta. 2006. V. 73. P. 178.
21. *Кассем А.И., Копнин С.И., Попель С.И., Зеленый Л.М.* // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 345.
22. *Кассем А.И., Копнин С.И., Попель С.И., Зеленый Л.М.* // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 871.
23. *Belashov V.Yu., Vladimirov S.V.* Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory. Simulation. Applications. Berlin: Springer, 2005. 292 p.
24. *Белашов В.Ю.* // Геомагнетизм и аэрономия. 2017. Т. 57. С. 1.
25. *Абловиц М.Ж., Сегур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Наука, 1987.