

**СПЕКТРЫ КОЛЕБАНИЙ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ В ЛОВУШКЕ
С ЭФФЕКТИВНЫМ НАРУШЕНИЕМ СИММЕТРИИ
МЕЖЧАСТИЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**© 2023 г. Э. А. Саметов^{a, b, *}, Е. А. Лисин^{a, b}, О. С. Ваулина^{a, b}^a Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия^b Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

*e-mail: sametov@phystech.edu

Поступила в редакцию 01.08.2022 г.

После доработки 05.10.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

Представлены результаты исследования спектральных плотностей случайных процессов в слабо демпфированной системе частиц в ловушке с эффективным нарушением симметрии межчастичного взаимодействия. Такие стационарные системы могут реализовываться, например, для пылевых микрочастиц в газовых разрядах. Предложены аналитические соотношения для спектральной плотности колебаний как идентичных частиц, так и частиц разного сорта в рассматриваемых системах. Полученные соотношения проверены с помощью численного моделирования динамики частиц.

Ключевые слова: пылевая плазма, заряженные частицы

DOI: 10.31857/S0367292122600984, EDN: BHDLR

1. ВВЕДЕНИЕ

Нарушение симметрии “действие—противодействие” в системах различной природы в последнее время стало актуальной темой многочисленных междисциплинарных исследований [1–25]. На мезоскопическом уровне третий закон Ньютона может быть формально нарушен, когда “переносчиком” взаимодействия между частицами является неравновесная среда, которая также косвенно учитывается через эффективные диссипативные силы и энергии частиц. Яркими примерами таких систем являются каталитически активные [9, 11, 14, 26–28] и текучие [2, 29–33] коллоидные суспензии, в которых невзаимность (асимметрия взаимодействия) может возникать за счет диффузиофоретических сил, действующих на янус-частицы [25–27] и частицы в коллоидных смесях [9, 11, 16]; и за счет сил исключенного объема [29–32], действующих на близко расположенные макрочастицы, движущиеся через коллоидную дисперсию. Примеры также включают заряженные микрочастицы в газоразрядной плазме (коллоидной плазме) [1, 6, 7, 24, 34–37], которые могут несимметрично взаимодействовать из-за различных диэлектрических свойств частиц [38]; за счет затенения потоков ионов или нейтрального газа [39–41] на одну частицу другой частицей, отличающейся по размеру [42]; и за

счет кильватерных сил, возникающих при прохождении ионного потока мимо частиц [17, 43–46]. Отметим, что благодаря своим уникальным свойствам изучение коллоидной плазмы представляет особый интерес для решения как фундаментальных, так и прикладных задач [47, 48].

Отличительной особенностью газоразрядной коллоидной плазмы является относительно слабое демпфирование микрочастиц, необходимое для развития колебаний. Другой важной особенностью является формирование электростатических ловушек для отрицательно заряженных пылевых частиц [49, 50]. Удерживающий потенциал формируется в центре газоразрядных камер за счет амбиполярной диффузии электронов и ионов [51], и может вдали от стенок разрядной камеры рассматриваться в параболическом (гармоническом) приближении [52, 53].

Экспериментальный, теоретический и численный анализы тепловых колебаний взаимодействующих пылевых частиц в протяженных и ограниченных ансамблях, формирующихся в газоразрядной плазме, представлены в работах [54–62]. Подробную информацию об особенностях теплового движения заряженных частиц можно получить путем анализа спектральной плотности их смещений и характерных частот колебаний [63, 64]. В отличие от других характеристик системы

информация о спектральной плотности тепловых колебаний частиц позволяет анализировать их температуру, коэффициенты трения и полный спектр частот их собственных колебаний в исследуемых системах. Это, в свою очередь, дает возможность оценить реакцию системы на кратковременные или периодические внешние возмущения, а также позволяет определить характер и тип потенциала взаимодействия между частицами [54–56, 65–67]. Метод, основанный на анализе спектральной плотности случайных процессов, позволил подробно исследовать силы невязимного эффективного взаимодействия между микрочастицами в ВЧ-разряде [17] и разряде постоянного тока [68], однако его применение пока ограничено системами двух частиц.

В настоящее время задача о спектральной плотности колебаний в системе взаимодействующих частиц детально рассмотрена только для отдельных случаев: 1) для двух частиц в ловушке с различным типом межчастичного взаимодействия [17, 69, 70]; 2) для малоразмерных цепочечных структур и квазидвумерных кластеров, состоящих из идентичных частиц с симметричным взаимодействием [71–73]. Ранее для подобных систем (в том числе с несимметричным межчастичным взаимодействием) были получены собственные частоты колебаний и определены условия, при которых колебания устойчивы [74, 75]. В данной работе приводятся результаты исследования спектральных характеристик для разноразмерных броуновских частиц с эффективным нарушением симметрии межчастичного взаимодействия, находящихся в силовом поле ловушки.

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ НЕВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

2.1. Основные уравнения

Рассмотрим обобщенную линейную систему с диссипативными силами из N связанных осцилляторов $\xi_i(t)$, управляемых некоторыми процессами $B_i(t)$

$$\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = -v_i \frac{d \xi_i}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{ij} \xi_j + B_i, \quad (1)$$

где v_i – коэффициенты трения, а коэффициенты a_{ij} зависят от физики решаемой задачи. Процессы $B_i(t)$, действующие в системе (1), характеризуются спектральными плотностями

$$S_i(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \langle B_i(t) B_i(t + \tau) \rangle \cos \omega \tau dt \quad (2)$$

и взаимной спектральной плотностью

$$S_{ij}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \langle B_i(t) B_j(t + \tau) \rangle \cos \omega \tau dt. \quad (3)$$

Угловые скобки в уравнениях (2) и (3) обозначают усреднение по времени.

Если система (1) находится под воздействием внешних периодических сил $B_i(t) = H_i \sin(\omega t)$, то в ней будут возникать вынужденные колебания вида $\xi_i(t) = M_i e^{i\omega t}$, где коэффициенты M_i определяются из системы линейных уравнений $\mathbf{AM} = \mathbf{H}$ (см. Приложение).

Полагая $H_k = 1$, а остальные $H_i = 0$ в выражении для M_i можно определить частотную передаточную функцию, связывающую воздействие на k -ю частицу с откликом l -й частицы.

Напомним, что если на вход линейной системы подан стационарный случайный процесс с равным нулю средним значением, то спектральная плотность стационарного случайного процесса на выходе линейной системы равна спектральной плотности случайного процесса на входе системы, умноженной на квадрат модуля частотной передаточной функции этой системы [76]. Если процесс B_i , действующий в системе (1) на i -й осциллятор, является стационарным, случайным с $\langle B_i(t) \rangle = 0$, то спектральная плотность вынужденных колебаний i -го осциллятора может быть представлена в виде:

$$G_i(\omega) = \sum_{j=1}^N |M_i(\omega, H_{l,l \neq j} = 0, H_j = 1)|^2 S_j + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N S_{ij} \{ M_i(\omega, H_{l,l \neq j} = 0, H_j = 1) \times M_i^*(\omega, H_{l,l \neq k} = 0, H_k = 1) + M_i^*(\omega, H_{l,l \neq j} = 0, H_j = 1) \times M_i(\omega, H_{l,l \neq k} = 0, H_k = 1) \}. \quad (4)$$

2.2. Броуновские частицы в ловушке

В случае рассмотрения равновесной системы, состоящей из N взаимодействующих частиц с массами m_i и зарядами q_i в направлении ξ ($\xi \equiv X, Y$ или Z) действуют: внешняя сила со стороны электрического поля $F_{\text{ext},i}^{(\xi)}$, сила межчастичного взаимодействия $F_{ji}^{(\xi)}$, действующая со стороны j -й частицы на i -ю, сила трения с коэффициентами трения v_i и сила Ланжевена $F_{bi}^{(\xi)}$, являющаяся источником стохастической кинетической энергии частиц. В предположении, что смещение ξ_i ча-

стиц, от их положения равновесия под действием случайной силы $F_{bi}^{(\xi)}$ ограничено малыми отклонениями, мы можем получить линеаризацию для сил в выбранном направлении для каждой из степеней свободы

$$F_{ji}^{(\xi)} = \langle F \rangle_{ji}^{(\xi)} + (\xi_i - \xi_j) \left(\frac{\partial F_{ji}^{(\xi)}}{\partial \xi} \right) = \langle F \rangle_{ji}^{(\xi)} + (\xi_i - \xi_j) m_i f_{ji}^{(\xi)}, \quad (5)$$

$$F_{\text{ext}, i}^{(\xi)} = \langle F \rangle_{\text{ext}, i}^{(\xi)} + \xi_i \left(\frac{\partial F_{\text{ext}, i}^{(\xi)}}{\partial \xi} \right) = \langle F \rangle_{\text{ext}, i}^{(\xi)} + \xi_i m_i f_{\text{ext}, i}^{(\xi)}, \quad (6)$$

где $f_{ji}^{(\xi)}$, $f_{\text{ext}, i}^{(\xi)}$ – удельные производные межчастичных и внешних сил.

Таким образом мы можем связать коэффициенты в исходных уравнениях (1) со значениями производных внешних и межчастичных сил:

$$a_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N f_{ji}^{(\xi)} - f_{\text{ext}, i}^{(\xi)}, \quad (7)$$

$$a_{ij, i \neq j} = -f_{ji}^{(\xi)}. \quad (8)$$

Для рассматриваемой системы спектральные плотности $S_i^{(\xi)} = 2\nu_i T_i^{(\xi)} / m_i$, где $T_i^{(\xi)}$ – кинетическая температура частиц, а $S_{ij}^{(\xi)} \equiv 0$, так как процессы $F_{bi}^{(\xi)}$ являются независимыми. В таком случае уравнения (4) приобретает более простой вид

$$G_i^{(\xi)}(\omega) = \sum_{j=1}^N \left| M_i^{(\xi)}(\omega, H_{l, l \neq j} = 0, H_j = 1) \right|^2 \frac{2\nu_j T_j^{(\xi)}}{m_j}. \quad (9)$$

Ранее были получены аналитические выражения для систем, ограниченных пятью для цепочечных структур и для квазидвумерных кластеров семью одинаковыми частицами, взаимодействующими симметрично [71–73]. Выражение же (9) позволяет получить спектральные плотности колебаний частиц, имеющих различные параметры и взаимодействующих в том числе и с нарушением симметрии в системе любой величины, ограничения составляют только возможности вычислительных систем.

2.3. Две броуновские частицы в ловушке

Для наглядности рассмотрим частное решение для системы (1) для двух осцилляторов

$$G_1(\omega) = \frac{((\omega^2 + a_{22})^2 + \nu_2^2 \omega^2) S_1 + a_{12}^2 S_2}{W}, \quad (10)$$

$$G_2(\omega) = \frac{a_{21}^2 S_1 + ((\omega^2 + a_{11})^2 + \nu_1^2 \omega^2) S_2}{W}, \quad (11)$$

где

$$W = (\omega^2(\nu_1 \nu_2 - \omega^2 - a_{11} - a_{22}) - a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21})^2 + \omega^2(\nu_1 \omega^2 + \nu_2 \omega^2 + \nu_2 a_{11} + \nu_1 a_{22})^2. \quad (12)$$

Для двух взаимодействующих броуновских частиц в ловушке уравнения (10)–(12) с учетом формул (7) и (8) принимают вид

$$G_1^{(\xi)}(\omega) = \frac{((\omega^2 + f_{12}^{(\xi)} - f_{\text{ext}, 2}^{(\xi)})^2 + \nu_2^2 \omega^2) \frac{2\nu_1 T_1^{(\xi)}}{m_1} + f_{21}^{(\xi)2} \frac{2\nu_2 T_2^{(\xi)}}{m_2}}{W^{(\xi)}}, \quad (13)$$

$$G_2^{(\xi)}(\omega) = \frac{f_{12}^{(\xi)2} \frac{2\nu_1 T_1^{(\xi)}}{m_1} + ((\omega^2 + f_{21}^{(\xi)} - f_{\text{ext}, 1}^{(\xi)})^2 + \nu_1^2 \omega^2) \frac{2\nu_2 T_2^{(\xi)}}{m_2}}{W^{(\xi)}}, \quad (14)$$

$$W^{(\xi)} = (\omega^2(\omega^2 - \nu_1 \nu_2 - f_{\text{ext}, 1}^{(\xi)} - f_{\text{ext}, 2}^{(\xi)} + f_{21}^{(\xi)} + f_{12}^{(\xi)}) + f_{\text{ext}, 1}^{(\xi)} f_{\text{ext}, 2}^{(\xi)} - f_{\text{ext}, 1}^{(\xi)} f_{12}^{(\xi)} - f_{\text{ext}, 2}^{(\xi)} f_{21}^{(\xi)})^2 + \omega^2(\nu_1 \omega^2 + \nu_2 \omega^2 + \nu_2(f_{21}^{(\xi)} - f_{\text{ext}, 1}^{(\xi)}) + \nu_1(f_{12}^{(\xi)} - f_{\text{ext}, 2}^{(\xi)}))^2. \quad (15)$$

В случае частиц равных размеров ($\nu_1 = \nu_2$) с нарушенной симметрией эффективного межчастичного взаимодействия уравнения (13)–(15) сводятся к ранее опубликованным в [17, 72]. Для частиц с симметричным взаимодействием полученные

аналитические выражения совпадают с известными формулами для двух связанных осцилляторов [70, 71].

3. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для демонстрации полученных выражений рассмотрим спектральные плотности колебаний частиц для цепочечных структур идентичных частиц ($m_i = m$, $q_i = q$, $\nu_i = \nu$, $T_i^{(\xi)} = T$), взаимодей-

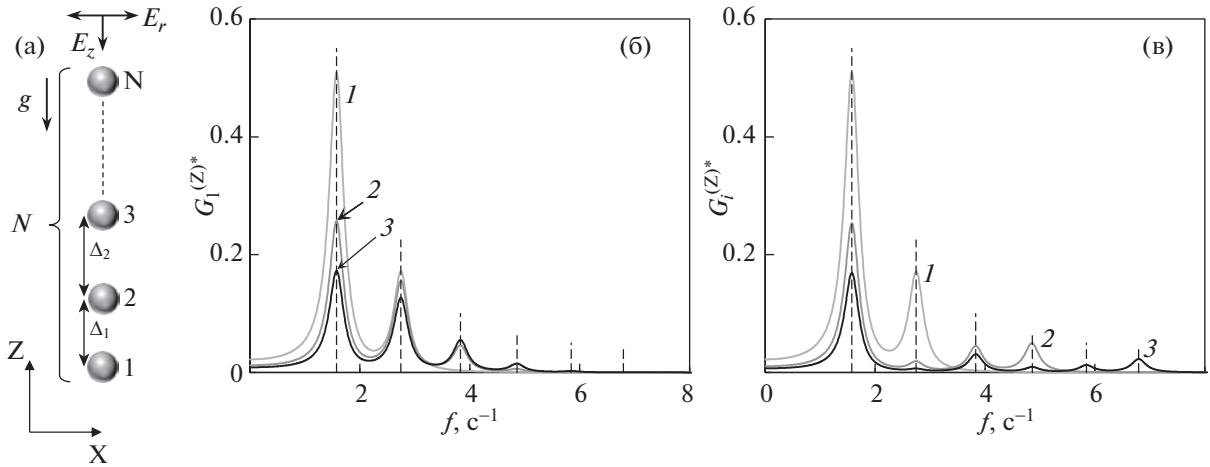


Рис. 1. Конфигурация N взаимодействующих частиц в электрическом поле ловушки с цилиндрической симметрией (а). Спектральные плотности $G_i^{(Z)*}$ систем с $N = 2, 4$ и 6 для крайних ($i = 1$) (б) и центральных частиц ($i = 1, 2$ и 3 соответственно) (в) при $\omega_1^{(Z)} = 10 \text{ c}^{-1}$ и $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$. Здесь $1 - N = 2, 2 - N = 4, 3 - N = 6$. Штриховыми линиями выделены основные частоты.

ствующих с кулоновским потенциалом в линейном электрическом поле $E(r, z)$ цилиндрической ловушки с радиальной составляющей $E_r = \alpha r$ и вертикальной составляющей $E_z = E_0 + \beta z$. Здесь $r \equiv (x^2 + y^2)^{0.5}$ – радиальная координата, z – вертикальная координата по оси Z , параллельной силе тяжести, α и β – величины градиентов электрического поля, а значение E_0 определяется балансом сил, действующих в системе. В соответствии с градиентами поля определяются характерные частоты ловушки $\omega_1^{(X)} \equiv \omega_1^{(Y)} = (\alpha q/m)^{0.5}$ в поперечной плоскости и $\omega_1^{(Z)} = (\beta q/m)^{0.5}$ в продольной. Система частиц является симметричной относительно центра ловушки, поэтому $G_i^{(\xi)} = G_j^{(\xi)}$ для i и j частиц, находящихся на равном удалении от центра, см. рис. 1а.

Рассмотрим представленные на рис. 1б и в спектральные плотности колебаний частиц в поперечной плоскости для цепочечных структур, состоящих из 2, 4 и 6 частиц. Представленные спектральные плотности отнормированы: $G_i^{(\xi)*} = n^{(\xi)} G_i^{(\xi)}$, где $n^{(\xi)} = (\nu \omega_1^{(\xi)})^2 / S$. Как можно увидеть, спектры представляют из себя ярко выраженные пики, их количество соответствует количеству взаимодействующих частиц. Полученные характерные частоты систем соответствуют полученным ранее в работе [72] для подобных цепочечных систем, состоящих из 5 и менее частиц.

Однако с ростом отношения ν/ω_1 наблюдается слияние отдельных максимумов в единый “горб”, см. рис. 2. Дальнейшее увеличение приводит к вырождению спектра в максимум в нуле при ха-

рактерных $\nu/\omega_1 > 1$. Таким образом рост величины трения затрудняет анализ спектральных характеристик систем. Следует также отметить, что при $\nu/\omega_1 \ll 1$ пики спектральных плотностей хорошо соответствуют аналитическим значениям [72], но при увеличении отношения пики смещаются в сторону более низких частот [63], что хорошо видно на рис. 2б.

Полученные результаты были проверены с помощью численного моделирования. Моделирование стохастических процессов выполнялось методом Ланжевена. Техника моделирования подробно описана в работах [49, 50, 77]. Шаг интегрирования составлял от $\Delta t = (20 \max[\omega_1^{(\xi)}; \nu])^{-1}$ до $(40 \max[\omega_1^{(\xi)}; \nu])^{-1}$ в зависимости от начальных условий задачи. Время расчетов после установления равновесия в моделируемых системах варьировалось от $\sim 10^3 / \min[\omega_1^{(\xi)}; \nu]$ до $\sim 10^4 / \min[\omega_1^{(\xi)}; \nu]$. Значение отношения ν/ω_1 варьировалось от 0.005 до 5. Моделирование выполнялось для систем с числом частиц до восьми с кулоновским взаимодействием, находящихся в электростатической ловушке с параметром α/β от 4 до 36. При этом наблюдалась вертикальная конфигурация частиц, см. рис. 1а. Во всех рассмотренных случаях моделируемые системы являлись устойчивыми. Функции распределения частиц по скоростям соответствовали распределению Максвелла.

Вычисления спектральной плотности проводились на основе численных расчетов смещений $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ при помощи процедуры “Fast Fourier transform” в пакете прикладных программ

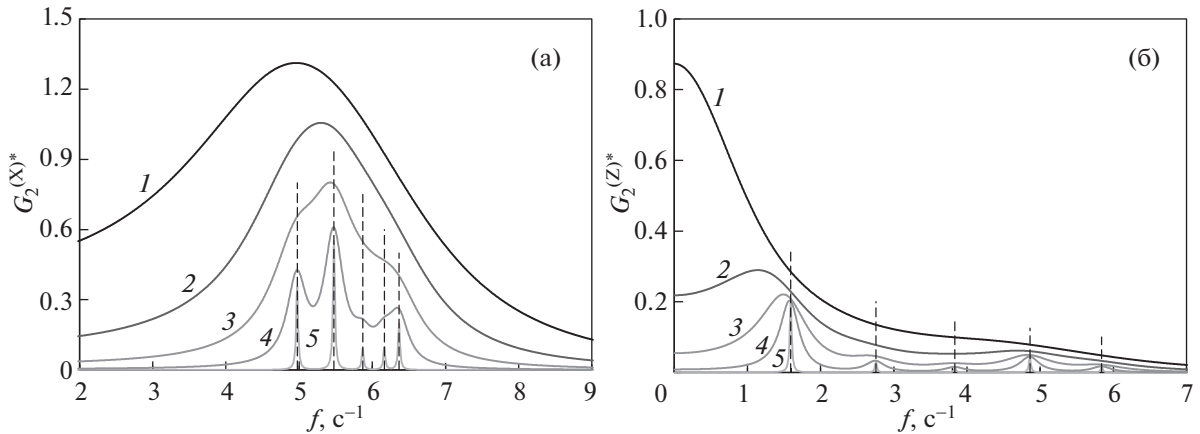


Рис. 2. Спектральные плотности $G_2^{(\xi)*}$ системы пяти частиц при $\alpha/\beta = 16$, $\omega_t^{(X)} = 40 \text{ c}^{-1}$, $\omega_t^{(Z)} = 10 \text{ c}^{-1}$, ν от 0.2 до 20 c^{-1} и $\xi = X$ (а) или $\xi = Z$ (б). Здесь 1 – $\nu/\omega_t^{(X)} = 0.005$, $\nu/\omega_t^{(Z)} = 0.02$; 2 – $\nu/\omega_t^{(X)} = 0.05$, $\nu/\omega_t^{(Z)} = 0.2$; 3 – $\nu/\omega_t^{(X)} = 0.125$, $\nu/\omega_t^{(Z)} = 0.5$; 4 – $\nu/\omega_t^{(X)} = 0.25$, $\nu/\omega_t^{(Z)} = 1$; 5 – $\nu/\omega_t^{(X)} = 0.5$, $\nu/\omega_t^{(Z)} = 2$. Штриховыми линиями выделены основные частоты.

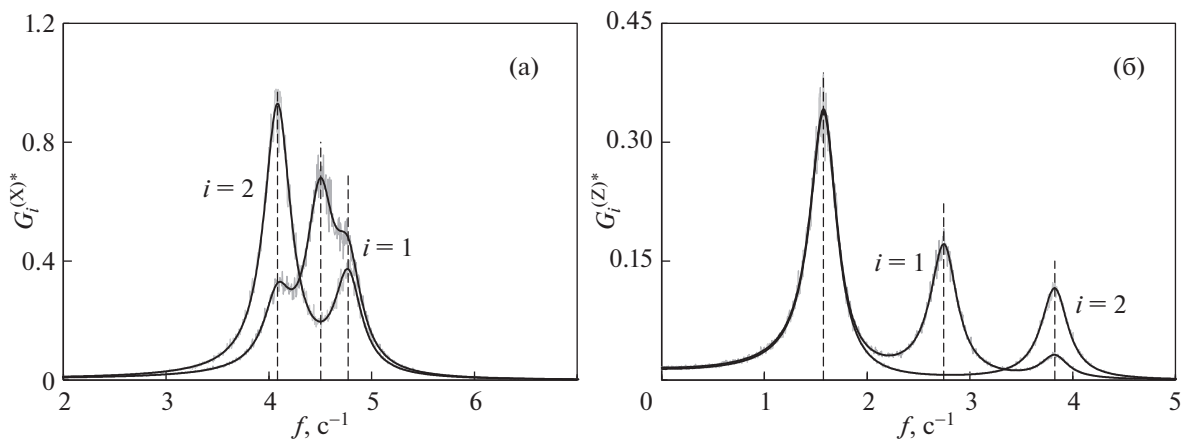


Рис. 3. Спектральные плотности $G_i^{(\xi)*}$ для системы трех частиц при $\alpha/\beta = 9$, $\omega_t^{(X)} = 30 \text{ c}^{-1}$, $\omega_t^{(Z)} = 10 \text{ c}^{-1}$, $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$ и $\xi = X$ (а) или $\xi = Z$ (б) для крайней ($i = 1$) и центральной частицы ($i = 2$). Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми – результаты численного моделирования, штриховыми – основные частоты.

МАТЛАВ. Численные исследования показали хорошее соответствие между результатами моделирования и предлагаемыми аналитическими соотношениями. На рис. 3 представлен пример полученных результатов для системы трех частиц, для сравнения на одном рисунке приведены спектральные плотности колебаний первой и второй частицы отдельно по осям. Как видно, в отличие от спектров в поперечной плоскости, где амплитуды колебаний по характерным частотам сильно отличаются у разных частиц, в колебаниях в продольном направлении присутствует доминирующий пик на наименьшей характерной частоте.

Аналогично были проверены аналитические выражения на системах с несимметричным взаимодействием, когда наблюдается формальное невыполнение третьего закона Ньютона $\mathbf{F}_{ij} \neq -\mathbf{F}_{ji}$, то есть при $a_{ij, i \neq j} \neq a_{ji}$ или $f_{ij, i \neq j}^{(\xi)} \neq f_{ji}^{(\xi)}$. При моделировании данный эффект закладывался с помощью виртуальной заряженной частицы, жестко привязанной к каждой реальной частице и воздействующей только на соседние реальные частицы, в то время как они не влияют на виртуальные частицы, см. рис. 4а. Таким образом симулируется ионный фокус – популярная модель ионного следа, в которой облако сфокусированных ионов

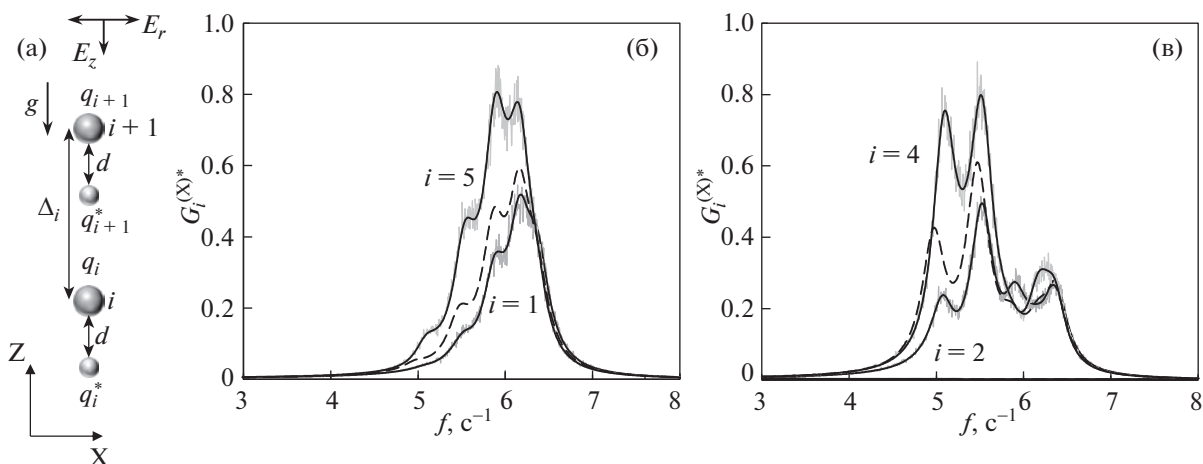


Рис. 4. Иллюстрация процедуры моделирования вертикальной цепочки частиц с ионными фокусами в электрическом поле ловушки (а). Спектральные плотности $G_i^{(X)*}$ системы пяти частиц при $\alpha/\beta = 16$, $\omega_t^{(X)} = 40 \text{ c}^{-1}$, $\omega_t^{(Z)} = 10 \text{ c}^{-1}$, $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$ для крайних ($i = 1$ и 5) (б) и частиц с $i = 2$ и 4 (в). Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми – результаты численного моделирования, штриховыми – аналитические решения в случае симметричного взаимодействия.

рассматривается как точечный заряд [1, 6, 36, 78]. Данное явление проявляется в реальных экспериментах с пылевой плазмой, когда сильное электрическое поле вблизи электрода приводит к дрейфу ионов [51] и частицы микронных размеров оказываются в плазме с ионным потоком. Вследствие высокой подвижности электронов частицы приобретают значительный отрицательный заряд (10^3 – 10^4 элементарных зарядов) и создают за собой возмущенную область (кильватерный ионный след) [44, 45].

Пример полученных спектральных плотностей в случае системы пяти частиц, взаимодействующих с нарушением симметрии, представлен на рис. 4б и в. При моделировании ионный фокус находился на расстоянии $d \approx 0.3\Delta$ (Δ – среднее расстояние между частицами) по оси Z и имел положительный заряд $q^* = |0.1q|$. При данных параметрах наблюдался параметр невзаимности [6, 79] $R = |\mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_{ji}|/|\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}| \approx 0.085$ при взаимодействии ближайших соседей ($j = i \pm 1$). Для сравнения на рисунках представлены аналитические выражения в случае взаимного потенциала. Заметно сильное различие в характерных частотах колебаний частиц при симметричном и асимметричном взаимодействии, а также в амплитудах у симметрично расположенных относительно центра частиц (первая и пятая, вторая и четвертая), что демонстрирует значительное влияние нарушения симметрии взаимодействия на форму спектров.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено аналитическое и численное исследование спектральных характеристик теплового движения в слабо демпфированной системе частиц в ловушке с эффективным нарушением симметрии межчастичного взаимодействия. Получены аналитические соотношения для спектральной плотности смещений частиц в таких системах. Моделирование выполнялось в широком диапазоне рабочих параметров.

Результаты настоящей работы применимы для систем, состоящих из разносортных частиц, имеющих различные размеры, заряды и кинетические температуры, и с любым типом парного межчастичного взаимодействия. Полученные результаты могут быть полезны для разработки новых методов диагностики физических свойств коллоидной плазмы, например, для экспериментального анализа сил взаимодействия между пылевыми частицами и определения коэффициентов трения и температур тепловых источников в неоднородной среде.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-12-00354).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты M_i в вынужденных колебаниях вида $\xi_i(t) = M_i e^{i\omega t}$, задаваемых уравнениями (1), определяются из системы линейных уравнений $\mathbf{AM} = \mathbf{H}$:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + i\omega\nu_1 - a_{11} & -a_{12} & \vdots & -a_{1N} \\ -a_{21} & -\omega^2 + i\omega\nu_2 - a_{22} & \vdots & -a_{2N} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & \vdots & -\omega^2 + i\omega\nu_N - a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_N \end{pmatrix}. \quad (\text{П1})$$

Для решения данной системы можно воспользоваться методом Крамера [80]

$$D = \det \begin{pmatrix} -\omega^2 + i\omega\nu_1 - a_{11} & -a_{12} & \vdots & -a_{1N} \\ -a_{21} & -\omega^2 + i\omega\nu_2 - a_{22} & \vdots & -a_{2N} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & \vdots & -\omega^2 + i\omega\nu_N - a_{NN} \end{pmatrix}, \quad (\text{П2})$$

$$M_i = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} -\omega^2 + i\omega\nu_1 - a_{11} & \vdots & -a_{1(i-1)} & H_1 & \vdots & -a_{1N} \\ -a_{21} & \vdots & -a_{2(i-1)} & H_2 & \vdots & -a_{2N} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_{N1} & \vdots & -a_{N(i-1)} & H_N & \vdots & -\omega^2 + i\omega\nu_N - a_{NN} \end{pmatrix}. \quad (\text{П3})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Schweigert V.A., Schweigert I.V., Melzer A., Homann A., Piel A. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 5345.
- Hayashi K., Sasa S. // J. Phys. Condens. Matter. 2006. V. 18. P. 2825.
- Kronzucker H.J., Szczerba M.W., Schulze L.M., Britto D.T. // J. Exp. Bot. 2008. V. 59. P. 2793.
- Fleury R., Sounas D.L., Sieck C.F., Haberman M.R., Alù A. // Science. 2014. V. 343. P. 516.
- Sukhov S., Shalin A., Haefner D., Dogariu A. // Opt. Express. 2015. V. 23. P. 247.
- Ivlev A.V., Bartnick J., Heinen M., Du C.-R., Nosenko V., Löwen H. // Phys. Rev. X. 2015. V. 5. P. 011035.
- Ваулина О.С., Лусина И.И., Лусин Е.А. // ЖЭТФ. 2015. Т. 148. С. 819.
- Metelmann A., Clerk A.A. // Phys. Rev. X. 2015. V. 5. P. 02102.
- Bartnick J., Heinen M., Ivlev A.V., Löwen H.J. // J. Phys. Condens. Matter. 2015. V. 28. P. 025102.
- Coulais C., Sounas D., Alu A. // Nature. 2017. V. 542. P. 461.
- Kryuchkov N.P., Ivlev A.V., Yurchenko S.O. // Soft Matter. 2018. V. 14. P. 9720.
- Caloz C., Alu A., Tretyakov S., Sounas D., Achouri K., Deck-Léger Z.L. // Phys. Rev. Appl. 2018. V. 10. P. 047001.
- Lavergne F.A., Wendehenne H., Bäuerle T., Bechinger C. // Science. 2019. V. 364. P. 70.
- Saha S., Ramaswamy S., Golestanian R. // New J. Phys. 2019. V. 21. P. 063006.
- Brandenbourger M., Locsin X., Lerner E., Coulais C. // Nat. Commun. 2019. V. 10. P. 1.
- Agudo-Canalejo J., Golestanian R. // Phys. Rev. Lett. 2019. V. 123. P. 018101.
- Lisin E.A., Petrov O.F., Sametov E.A., Vaulina O.S., Statsenko K.B., Vasiliev M.M., Carmona-Reyes J., Hyde T.W. // Sci. Rep. 2020. V. 10. P. 1.
- Loos S.A., Klapp S.H. // New J. Phys. 2020. V. 22. P. 123051.
- Nassar H., Yousefzadeh B., Fleury R., Ruzzene M., Alù A., Daraio C., Norris A.N., Huang G., Haberman M.R. // Nat. Rev. Mater. 2020. V. 5. P. 667.
- You Z., Baskaran A., Marchetti M.C. // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 20ropean 20. V. 117. P. 19767.
- Saha S., Agudo-Canalejo J., Golestanian R. // Phys. Rev. X. 2020. V. 10. P. 041009.
- Jiménez-Ángeles F., Harmon K.J., Nguyen T.D., Fenter P., De La Cruz M.O. // Phys. Rev. Res. 2020. V. 2. P. 043244.
- Kryuchkov N.P., Mistryukova L.A., Sapelkin A.V., Yurchenko S.O. // Phys. Rev. E. 2020. V. 101. P. 063205.
- Nikolaev V.S., Timofeev A.V. // Phys. Plasmas. 2021. V. 28. P. 033704.
- Fruchart M., Hanai R., Littlewood P.B., Vitelli V. // Nature. 2021. V. 592. P. 363.
- Sabass B., Seifert U. // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. P. 218103.
- Soto R., Golestanian R. // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 112. P. 068301.
- Mallory S.A., Alarcon F., Cacciuto A., Valeriani C. // New J. Phys. 2017. V. 19. P. 125014.
- Dzubiella J., Löwen H., Likos C.N. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 248301.
- Khair A.S., Brady J.F. // Proc. R. Soc. A. 2007. V. 463. P. 223.
- Mejía-Monasterio C., Oshanin G. // Soft Matter. 2011. V. 7. P. 993.
- Sriram I., Furst E.M. // Soft Matter. 2012. V. 8. P. 3335.
- Steffenoni S., Kroy K., Falasco G. // Phys. Rev. E. 2016. V. 94. P. 062139.

34. *Morfill G.E., Ivlev A.V.* // Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. P. 1353.
35. *Ivlev A.V., Kompaneets R.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 95. P. 053202.
36. *Lisina I.I., Vaulina O.S.* // European Phys. Lett. 2013. V. 103. P. 55002.
37. *Bartnick J., Kaiser A., Löwen H., Ivlev A.V.* // J. Chem. Phys. 2016. V. 144. P. 224901.
38. *Филиппов А.В., Дербенев И.Н.* // ЖЭТФ. 2016. Т. 150. С. 1262.
39. *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 1996. Т. 22. С. 648.
40. *Khodataev Y.K., Morfill G.E., Tsyтович V.N.* // J. Plasma Phys. 2001. V. 65. P. 257.
41. *Khrapak S.A., Ivlev A.V., Morfill G.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 046403.
42. *Usachev A.D., Zobnin A.V., Petrov O.F., Fortov V.E., Annaratone B.M., Thoma M.H., Höfner H., Kretschmer M., Fink M., Morfill G.E.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. P. 045001.
43. *Melzer A., Schweigert V.A., Piel A.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 3194.
44. *Hutchinson I.H.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. P. 066409.
45. *Kompaneets R., Morfill G.E., Ivlev A.V.* // Phys. Rev. E. 2016. V. 93. P. 063201.
46. *Sukhinin G.I., Fedoseev A.V., Salnikov M.V., Rostom A., Vasiliev M.M., Petrov O.F.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 95. P. 063207.
47. *Фортвов В.Е., Храпак А.Г., Храпак Р.А., Молотков В.И., Петров О.Ф.* // УФН. 2004. Т. 174. С. 495.
48. *Fortov V.E., Ivlev A.V., Khrapak S.A., Khrapak A.G., Morfill G.E.* // Phys. Rep. 2005. V. 421. P. 1–103.
49. *Ваулина О.С., Петров О.Ф., Фортвов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А.* Пылевая плазма: эксперимент и теория. Москва: Физматлит, 2009.
50. *Fortov V.E., Morfill G.E.* Complex and Dusty Plasmas. CRC Press, 2010.
51. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1992.
52. *Koporka U., Morfill G.E., Ratke L.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 891.
53. *Ваулина О.С., Лисин Е.А., Гавриков А.В., Петров О.Ф., Фортвов В.Е.* // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. С. 751.
54. *Ваулина О.С., Адамович К.Г.* // ЖЭТФ. 2008. Т. 133. С. 1091.
55. *Ваулина О.С., Адамович К.Г., Петров О.Ф., Фортвов В.Е.* // ЖЭТФ. 2008. Т. 134. С. 367.
56. *Lisin E.A., Timirkhanov R.A., Vaulina O.S., Petrov O.F., Fortov V.E.* // New J. Phys. 2013. V. 15. P. 053004.
57. *Vaulina O.S., Lisin E.A.* // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. P. 113702.
58. *Фортвов В.Е., Петров О.Ф., Ваулина О.С., Косс К.Г.* // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 97. С. 366.
59. *Hebner G.A., Riley M.E., Greenberg K.E.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 046407.
60. *Vaulina O.S., Dranzhevski I.E.* // Phys. Scr. 2006. V. 73. P. 577.
61. *Ваулина О.С., Лисин Е.А., Саметов Э.А.* // ЖЭТФ. 2017. Т. 152. С. 1144.
62. *Sametov E.A., Timirkhanov R.A., Vaulina O.S.* // Phys. Plasmas. 2017. V. 24. P. 123504.
63. *Ваулина О.С., Саметов Э.А.* // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. С. 407.
64. *Vaulina O.S., Lisin E.A., Sametov E.A., Timirkhanov R.A.* // Plasma Fusion Res. 2018. V. 13. P. 1406125.
65. *Лисин Е.А., Ваулина О.С.* // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. С. 1077.
66. *Лисин Е.А., Ваулина О.С., Петров О.Ф.* // ЖЭТФ. 2017. Т. 151. С. 791.
67. *Lisina I.I., Lisin E.A., Vaulina O.S., Petrov O.F.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 95. P. 013202.
68. *Lisin E.A., Kononov E.A., Sametov E.A., Vasiliev M.M., Petrov O.F.* // Molecules. 2021. V. 26. P. 7535.
69. *Саметов Э.А., Лисин Е.А., Ваулина О.С.* // Вестник ОИВТ. 2019. Т. 2. С. 33.
70. *Саметов Э.А., Лисин Е.А., Ваулина О.С.* // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. С. 552.
71. *Ваулина О.С.* // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 368.
72. *Ваулина О.С., Саметов Э.А., Лисин Е.А.* // ЖЭТФ. 2020. Т. 158. С. 399.
73. *Ваулина О.С., Саметов Э.А., Лисин Е.А., Лисина И.И.* // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 1125.
74. *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 213.
75. *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 2021. Т. 47. С. 391.
76. *Воронов А.А.* Теория автоматического управления. Ч. 2. М.: Высшая школа, 1986.
77. *Ivlev A., Morfill G., Lowen H., Royall C.P.* Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2012.
78. *Melzer A., Schweigert V.A., Schweigert I.V., Homann A., Peters S., Piel A.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. R46.
79. *Lisin E.A., Vaulina O.S., Petrov O.F.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 013702.
80. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 2005.