ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ, 2023, том 50, № 3, с. 300–307

ГИДРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

УДК 532.546

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ЗАТОПЛЕННОМ МАССИВЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ДРЕНАМИ[1]

© 2023 г. К. Н. Анахаев[a, b], В. В. Беликов[b], Х. К. Анахаева[c], Н. М. Борисова[b, *]

[a]*Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Нальчик, 360000 КБР Россия*

[b]*Институт водных проблем Российской академии наук, Москва, 119333 Россия*

[c]*Российский университет транспорта, Москва, 127994 Россия*

**e-mail: borisovanm@mail.ru*

Поступила в редакцию 05.03.2022 г.
После доработки 10.12.2022 г.
Принята к публикации 14.12.2022 г.

Известные решения задачи фильтрации в затопленном массиве с вертикальными дренами (дренажными траншеями) с водой представлены чрезвычайно сложными математическими зависимостями в комплексных переменных, что затрудняет их использование при решении прикладных задач. Получено новое приближенно-гидромеханическое решение задачи с использованием годографа скорости и представлением расчетных зависимостей в элементарных функциях, совпадающее для граничных точек с точными данными и практически полностью ($\leqslant 1\%$) согласующееся с результатами точных расчетов В.В. Ведерникова для частных случаев. Впервые аналитически построена картина поля полных скоростей фильтрации в виде семейства изотах для заданного затопленного массива с дренами, показывающая неоднородный характер распределения скоростей в нем при наличии воды в дрене. Представлены также эпюры скоростей фильтрации по граничным линиям (в том числе в сравнении с случаем отсутствия воды в дрене), а также эпюр функций тока и напоров.

Ключевые слова: затопленный массив, вертикальные дрены, гидромеханическое решение, годограф скорости, последовательные конформные отображения, комплексная переменная, эллиптические функции и интегралы, семейство изотах.

DOI: 10.31857/S0321059623030021, **EDN:** DESXPZ

ВВЕДЕНИЕ

В практике водохозяйственного (гидротехнического, мелиоративного, природоохранного) строительства во многих случаях возникает необходимость создания дренирующей системы для затопленных массивов, в том числе в виде вертикальных дренажных траншей (щелей), прорезающих дренируемый массив до водоупора. Такие случаи проявляются (возникают):

при подпорах русел рек и создании водохранилищ с формированием обходного фильтрационного потока, охватывающего значительные площади береговых территорий, в особенности для равнинных рек; указанное приводит к повышению депрессионной поверхности прилегающих территорий со стороны как верхнего бьефа, так и нижнего (поймы реки), что приводит к их затоплению, заболачиванию, а также засолению почв — в результате подъема (в том числе капиллярного) уровня минерализованных грунтовых вод;

при строительстве оросительных систем в степных (засоленных) землях, требующих их рассоления путем предварительного промыва затоплением;

при появлении “вторичного засоления” орошаемых земель из-за чрезмерного завышения норм полива и повышения уровня грунтовых вод;

при проведении осушительных мероприятий болотистых систем;

при создании оросительных рисовых систем с затопленной поверхностью и др.

При рассмотрении указанных расчетных схем требуется определение различных параметров фильтрационного потока (максимальных значений расхода, оптимального междренного расстояния, продвижения фронта рассоления, распределения действующих напоров и скоростей филь-

[1] Работа выполнена в рамках тем Государственного задания ИПМА КБНЦ РАН (122041800015-8) и ИВП РАН (FMWZ-2022-0001).

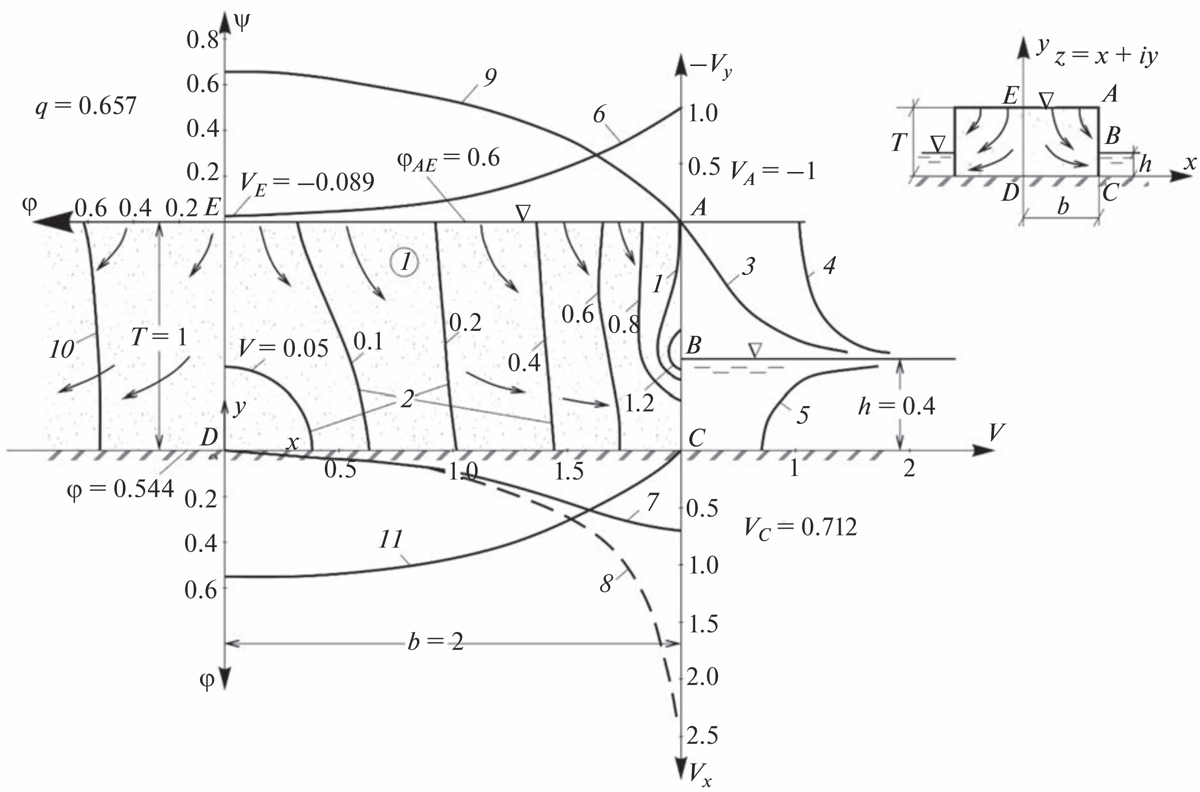

Рис. 1. Схема затопленного массива с вертикальными дренажными траншеями (правая половина): *1* – область фильтрации $ABCDE$; *2* – линии равных полных скоростей фильтрации V (изотах); *3* и *4* – значения скоростей V_x и V на AB; *5* и *6* – значения скоростей $V = V_x$ и $V = V_y$ соответственно на BC и AE; *7* и *8* – значения скоростей $V = V_x$ на участке DC соответственно при наличии ($h = 0.4$) и отсутствии ($h = 0$) воды в дрене; *9* – значения функции тока $\psi_{AE} = \psi(x)$ на AE; *10* и *11* – напорные функции $\varphi_{ED} = \varphi(y)$ и $\varphi_{DC} = \varphi(x)$ соответственно на ED и DC.

трации в заданных точках и др.) в зависимости от заданных граничных условий.

На рис. 1 представлена классическая задача фильтрации без свободной (депрессионной) поверхности в затопленном (с весьма малым, исчезающим уровнем воды) массиве конечной мощности T над водоупором, ограниченном рядом вертикальных дренажных траншей, в котором $z = x + iy$ – комплексная область фильтрации с координатами x и y, $2b$ – заданное конечное расстояние между дренами, h – глубина воды в дренах над водоупором.

Решение указанной задачи основано на теории функции комплексного переменного с использованием метода последовательных конформных отображений, что является одним из мощных методов решения задач фильтрации (напорной, безнапорной, свободной), получивший широкое распространение с 1920-х гг. в отечественной и зарубежной литературе. Основы метода заложены в классических работах Н.Е. Жуковского, Н.Н. Павловского, Б.Б. Девисона, Г. Гамеля и Е. Гюнтера, М. Маскета, В.В. Ведерникова, П.Я. Полубариновой-Кочиной и др. И в настоящее время указанный метод решения потенциальных задач с использованием последовательных конформных отображений продолжает развиваться для задач не только фильтрации, но и других (гидродинамических, гидравлических, импульсных, струйных, тепловых, электрических) процессов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В представленной задаче в связи с симметричностью области фильтрации (рис. 1) рассматривается только правая ее половина $ABCDE$ со следующими граничными условиями:

участок AE – зона питания массива с полным действующим напором (потенциалом) $\varphi_{AE} = T - h$, в котором горизонтальная скорость фильтрации $V_x = 0$, а вертикальная скорость снижается от $V_y = -1$ в точке A до $V_y = V_E$ в точке E – середине поверхности осушаемого массива;

участок AB (вертикальная грань дрены) – зона высачивания фильтрационного потока, в которой вертикальная скорость фильтрации V_y имеет постоянное значение $V_y = -1$ (при коэффициенте фильтрации $k = 1$ усл. ед.), а горизонтальная скорость V_x возрастает от $V_x = 0$ в точке A до $V_x \to \infty$ в "фокусной" точке B – на урезе воды дрены. При этом величина полной скорости фильтрации V и ее направление β_0 (соответственно, изменяющееся от вертикального до горизонтального) находятся по формулам:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad \beta_0 = \operatorname{arctg}\frac{V_x}{V_y}. \tag{1}$$

Величина же напорной функции линейно снижается от полного напора $\varphi = \varphi_{AE}$ в точке A до нулевого значения $\varphi = 0$ в точке B;

участок BC – зона подпора (выхода фильтрационного потока по нормали в дрену) с нулевым значением напора $\varphi = 0$, где вертикальная скорость фильтрации $V_y = 0$, а горизонтальная скорость возрастает от $V_x = V_C$ в точке C (в месте сопряжения дрены с водоупором) до $V_x \to \infty$ в точке B на урезе воды в дрене;

участок AE – зона питания массива с полным действующим напором (потенциалом) $\varphi_{AE} = T - h$, где $V_x = 0$, а вертикальная скорость снижается от $V_y = -1$ в точке A до $V_y = V_E$ в точке E – середине поверхности осушаемого массива;

участок ED – осевая линия массива, где $V_x = 0$, вертикальная скорость снижается от $V_y = V_E$ до нуля, а напорная функция – от полного напора φ_{AE} до $\varphi = \varphi_D$;

участок DC – линия подошвы массива, где $V_y = 0$, при этом горизонтальная скорость возрастает от нуля до $V_x = V_C$, а напорная функция снижается от $\varphi = \varphi_D$ до нуля.

Указанная задача для случая отсутствия воды в дрене ($h = 0$) была решена разными методами Дж. Донатом (J. Donat) и В.В. Ведерниковым соответственно разложением в ряды Фурье напорной функции в уравнении Лапласа [15] и представлением области течения в виде годографа скорости с использованием эллиптических функций Якоби [5].

В наиболее полном виде с учетом наличия воды в дрене ($h \geq 0$) гидромеханическое решение данной задачи с определением сопряженной комплексной скорости $\bar{V} = V_x - iV_y$ получено Ф.Б. Нельсон-Скорняковым [10]:

$$\bar{V} = V_x - iV_y = \\ = k\frac{2}{\pi}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\beta}+\lambda\right)\left[\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}z\right)+\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}z\right)\right]}{(1+\lambda)\left[\frac{1}{\beta}\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}z\right)+\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}z\right)\right]}}, \tag{2}$$

оно может быть представлена в более развернутом виде в зависимости от значений координат x, y (при $k = 1$) [6, 8–10, 12]:

$$\bar{V} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\beta}+\lambda\right)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)}\left[\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)+\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)\right]-\\&-i\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)\operatorname{tn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)\frac{1}{\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)}\left[\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)+\lambda^2\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)\right]\end{aligned}\right\}}{(1+\lambda)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)}\left[\frac{1}{\beta}\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)+\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)\right]-\\&-i\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)\operatorname{tn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)\frac{1}{\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)}\left[\frac{1}{\beta}\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{b}y,\lambda'\right)+\lambda^2\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{b}x,\lambda\right)\right]\end{aligned}\right\}}}. \tag{3}$$

В формулу (3) входят обозначения: sn, cn и dn – эллиптические синус-, косинус- и дельта-функции Якоби [4, 6, 9, 10, 12]; tn – эллиптическая тангенс-функция [6]; K – полный эллиптический интеграл 1-го рода; λ – модуль эллиптических функций и интегралов и параметр β определяются подбором с использованием табличных значений из выражений [8, 10]:

$$\frac{K}{K'} = \frac{b}{2T}, \quad \beta = \frac{1}{\operatorname{dn}\left[\frac{2(T-h)}{b}K,\lambda'\right]}, \tag{4}$$

K' – полный эллиптический интеграл 1-го рода при дополнительном модуле, равном $\lambda' = (1 - \lambda^2)^{0.5}$.

Как видно из изложенного, использование зависимости (3) для решения прикладных задач связано с чрезвычайно трудоемкими и сложными математическими вычислениями эллиптических функций, с необходимостью определения при этом отдельных параметров методом подбора из значений эллиптических дельта-функции и интегралов, предварительно полученных путем нелинейного перекрестного интерполирования по двум переменным табличных данных, – в особенности, для специалистов прикладного, инженерного профиля. Этот процесс еще более усложняется с учетом необходимости предшествующего извлечения корня из подкоренного дробного выражения – отношения комплексных эллиптических выражений (с разделением на действительную и мнимую части) – и определения ее значения в обратном гиперболическом косинусе. На аналогичные математические трудности, возникающие при гидромеханическом рассмотрении задачи напорной фильтрации под плоским флютбетом и водоупором, указывал также Н.Н. Павловский [11]. Использование для этого результатов численных решений, дающих только дискретные значения специальных функций и интегралов (в "цифрах") для каких-то отдельных точек и фрагментов задачи, не позволяет получить общее аналитическое решение в элементарных функциях для всей области задачи и ограничены в возможностях выявления причинно-следственных связей (в виде аналитических формул) исходных факторов и в оценке их влияния на итоговые результаты. В связи с этим ниже изложено новое прямое приближенно-гидромеханическое решение указанной задачи с представлением итоговых результатов в элементарных функциях.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для получения аналитической взаимосвязи между комплексными областями физического течения $z = x + iy$ (рис. 2а) и годографа скорости $V = V_x + iV_y$, имеющей вид правой горизонтальной полуполосы (рис. 2ж), методом последовательных конформных отображений переводим их на единую связующую комплексную полуплоскость $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ (рис. 2е). Область годографа $V = V_x + iV_y$ отображаем на полуплоскость $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ через промежуточную комплексную область $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ (рис. 2з) функциями [5, 7, 10]:

$$\varepsilon = \pi(V + i), \quad \gamma = \mathrm{ch}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{5}$$

Как известно, непосредственное точное отображение на верхнюю полуплоскость области течения (прямоугольника) по формуле Щварца–Кристоффеля может быть осуществлено только эллиптическим синусом Якоби и дальнейшие преобразования при решении задачи приводят к сложнейшим аналитическим зависимостям (2), (3) с "неберущимися" функциями и интегралами, практически непригодными для аналитических расчетов прикладных инженерных задач. В связи с изложенным конформное отображение области течения $z = x + iy$ (осушаемого массива) – прямоугольника с основанием b и высотой T – на связующую полуплоскость $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ проводим для двух случаев – "удлиненного" (при $b/T \le 1$) и "уширенного" (при $b/T > 1$) массивов, результаты отображения которых практически полностью ($\ll 1\%$) совпадают с аналогичными данными известного конформного отображения эллиптическим синусом Якоби [1–3, 13, 14].

Для "удлиненного" массива при отображении области $z = x + iy$ на $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ используем промежуточные комплексные области: $t = t_1 + it_2$, $\varsigma = \xi + i\eta$, $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, $S = S_1 + iS_2$ (рис. 2б–2д) – с отображающими функциями:

$$\begin{gathered}
t = z - \frac{b}{2}, \quad \varsigma = \frac{2}{\lambda R}\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{b}\right)}{1 + \sin^2\left(\frac{\pi t}{b}\right)R^{-2}}, \\
\theta = \varsigma - \xi_B, \quad S = \frac{1}{\theta}, \quad \gamma = \frac{S - S_D}{S_A - S_D}, \\
R = \mathrm{ch}\left(\frac{\pi T}{b}\right), \quad \lambda = \frac{2R}{1 + R^2}, \\
S_A = \frac{\lambda}{1 - \lambda\xi_B}, \quad S_D = \frac{-1}{1 + \xi_B}, \\
\xi_B = \frac{2}{\lambda R}\frac{\sin\left(\frac{\pi h}{b}\right)}{1 + \sin^2\left(\frac{\pi h}{b}\right)R^{-2}}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Для "уширенного" массива при отображении области $t = t_1 + it_2$ на $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ используем промежуточные комплексные области: $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$, $J = J_1 + iJ_2$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ (рис. 3а–3г) – с отображающими функциями:

$$\begin{gathered}
\sigma = \frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{T}\left(t + \frac{b}{2}\right), \quad J = \frac{2}{mr}\frac{\sin\left(\frac{\pi\sigma}{b}\right)}{1 + \sin^2\left(\frac{\pi\sigma}{b}\right)r^{-2}}, \\
\tau = J - J_B, \quad \nu = \frac{1}{\tau}, \quad \gamma = \frac{\nu - \nu_D}{\nu_A - \nu_D}, \\
r = \mathrm{ch}\left(\frac{\pi b}{T}\right), \quad m = \frac{2r}{1 + r^2}, \\
\nu_\mathrm{A} = \frac{-m}{1 + mJ_B}, \quad \nu_D = \frac{1}{1 - J_B},
\end{gathered} \tag{7}$$

J_B – значение точки B в области $J = J_1 + iJ_2$ (вычисляется по формуле (10)).

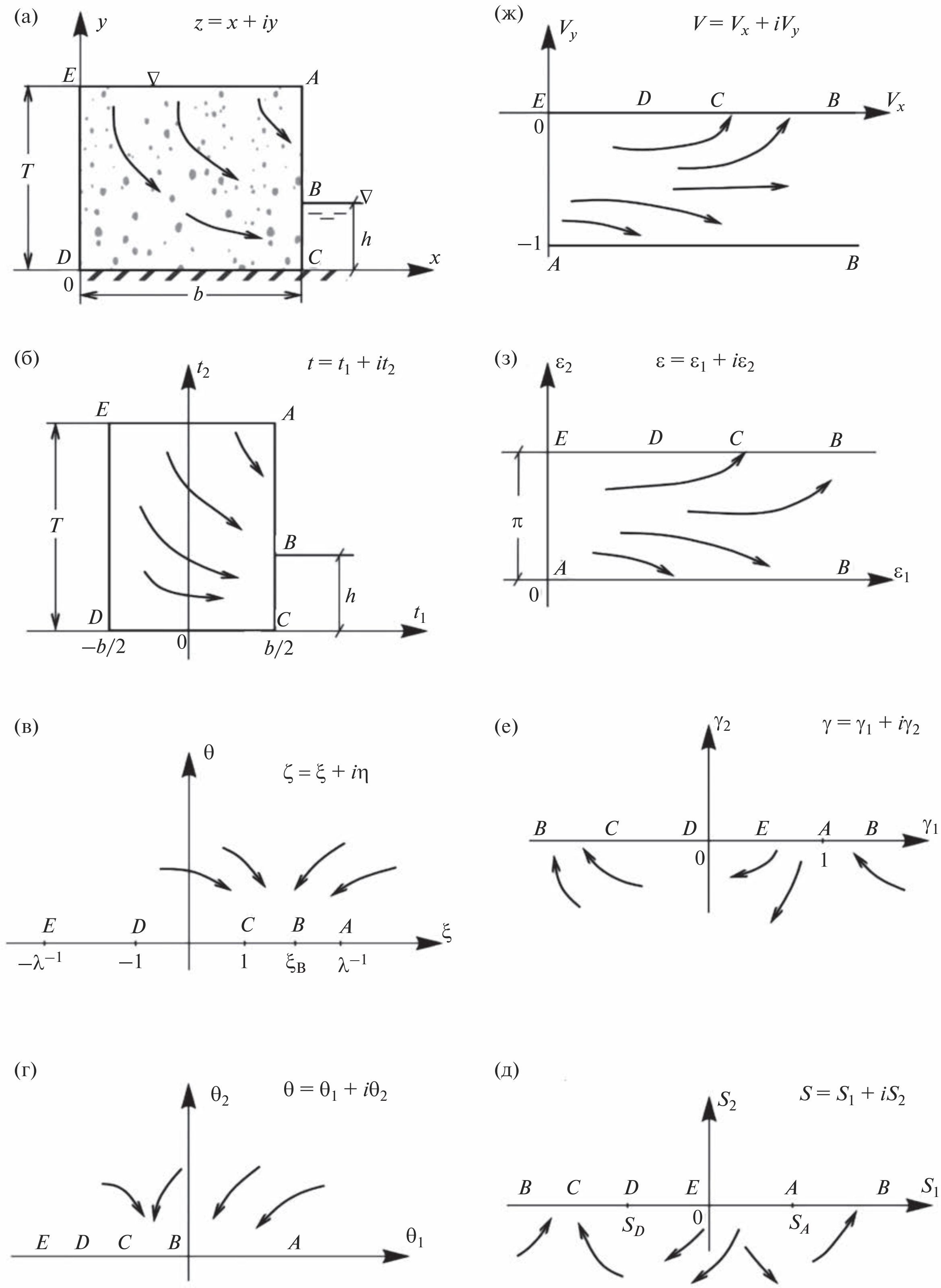

Рис. 2. Схема последовательных конформных отображений областей течения $z = x + iy$ и годографа скорости $V = V_x + iV_y$ на связующую полуплоскость $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ для "удлиненного" затопленного массива.

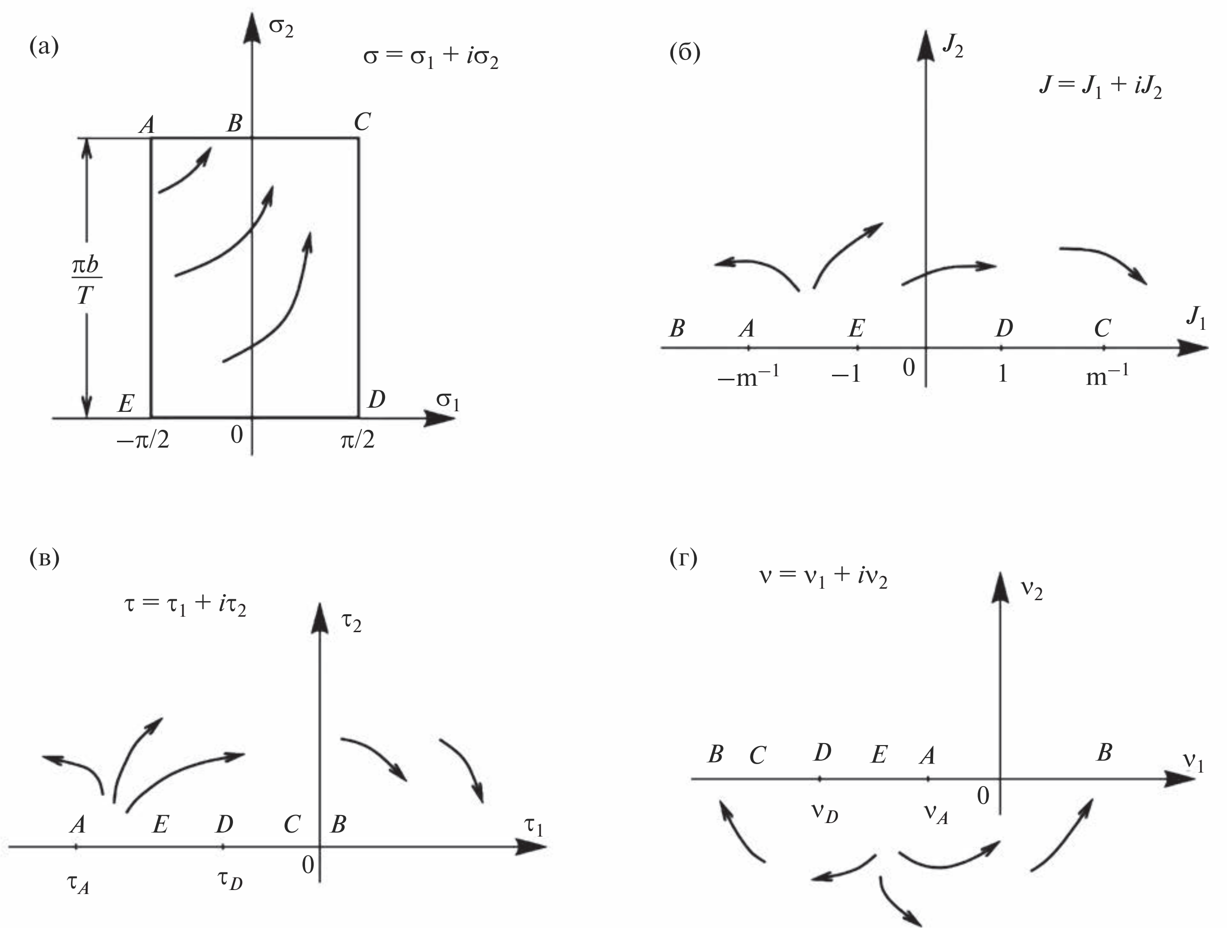

Рис. 3. Схема конформных отображений комплексной области $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ на связующую полуплоскость $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ для "уширенного" затопленного массива.

На основе результатов изложенных конформных отображений и последующих преобразований, разделяя действительную и мнимую части итоговых аналитических выражений, окончательно получим значения комплексной скорости фильтрации V_x и V_y для области фильтрации осушаемого массива при заданных значениях x и y.

Для случая "удлиненного" массива ($b/T \le 1$) значения комплексной скорости V_x и V_y определяются по зависимостям:

$$V_x = k\frac{1}{\pi}\operatorname{arch}\frac{M}{2},\quad V_y = k\frac{1}{\pi}\arccos\frac{2\gamma_1}{M},$$
$$M = \sqrt{(1+N_1)^2 + N_2^2} + \sqrt{(1-N_1)^2 + N_2^2}, \tag{8}$$
$$N_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}+\gamma_1}{2}},\quad N_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}-\gamma_1}{2}},$$

(при $N_2 = 0$ значение $M = 2$ для $N_1 \le 1$ и $M = 2N_1$ для $N_1 > 1$), в которых

$$\gamma_1 = \frac{S_1 - S_D}{S_A - S_D},\quad \gamma_2 = \frac{S_2}{S_A - S_D},$$
$$S_1 = \frac{\theta_1}{\theta_1^2+\theta_2^2},\quad S_2 = \frac{-\theta_2}{\theta_1^2+\theta_2^2},\quad \theta_1 = \xi - \xi_B,\quad \theta_2 = \eta,$$
$$\xi = \frac{2}{\lambda R}\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{A_2^2 + B_2^2},\quad \eta = \frac{2}{\lambda R}\frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_2^2 + B_2^2},$$
$$A_2 = 1 + \frac{A_1^2 - B_1^2}{R^2},\quad B_2 = \frac{2A_1B_1}{R^2}, \tag{9}$$
$$A_1 = \sin\left(\frac{\pi t_1}{b}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi t_2}{b}\right),\quad B_1 = \cos\left(\frac{\pi t_1}{b}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi t_2}{b}\right),$$
$$t_1 = \pi\left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2}\right),\quad t_2 = \frac{\pi}{b}y,$$
$$0 \le x \le b,\quad 0 \le y \le T.$$

Для случая "уширенного" массива ($b/T > 1$) величины скоростей V_x и V_y также находятся по зависимостям (8) при подстановке только в них значений γ_1 и γ_2, равных:

$$\gamma_1 = \frac{\nu_1 - \nu_D}{\nu_A - \nu_D}, \quad \gamma_2 = \frac{\nu_2}{\nu_A - \nu_D},$$
$$\nu_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1^2 + \tau_2^2}, \quad \nu_2 = \frac{-\tau_2}{\tau_1^2 + \tau_2^2},$$
$$\tau_1 = J_1 - J_B, \quad J_2 = \tau_2, \quad J_B = \frac{2}{mr}\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$
$$a_2 = 1 + \frac{a_1^2 - b_1^2}{r^2}, \quad b_2 = \frac{2a_1 b_1}{r^2},$$
$$a_1 = \cos\left(\frac{\pi h}{T}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi b}{T}\right), \quad b_1 = \sin\left(\frac{\pi h}{T}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi b}{T}\right), \tag{10}$$
$$J_1 = \frac{2}{mr}\frac{c_1 c_2 + d_1 d_2}{c_2^2 + d_2^2}, \quad J_2 = \frac{2}{mr}\frac{c_2 d_1 - c_1 d_2}{c_2^2 + d_2^2},$$
$$c_2 = 1 + \frac{c_1^2 - d_1^2}{r^2}, \quad d_2 = \frac{2c_1 d_1}{r^2},$$
$$c_1 = \sin\sigma_1\,\mathrm{ch}\,\sigma_2, \quad d_1 = \cos\sigma_1\,\mathrm{sh}\,\sigma_2,$$
$$\sigma_1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{t_2}{T}\right), \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{T}\left(t_1 + \frac{b}{2}\right),$$
$$t_1 = \pi\left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2}\right), \quad t_2 = \frac{\pi}{b}y, \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le T.$$

Полученные аналитические (элементарные) формулы (8)–(10) позволяют непосредственно определять значения комплексной скорости фильтрации в любой точке области фильтрации прямым подсчетом в зависимости от граничных условий исходного затопленного массива (полуширины основания b, высоты T, глубины воды в канаве h) и заданных значений координат x и y, что дает возможность и нахождения всех других необходимых параметров фильтрации.

При этом величина полной скорости фильтрации V находится по формуле (1).

РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

Для точек контура области фильтрации (рис. 1): $A(b;\ T)$, $B(b;\ h)$, $D(0;\ 0)$ – значения скоростей фильтрации по предлагаемому решению (при наличии и отсутствии уровня воды в дрене h) – полностью совпадают с точными, в частности для случая $h > 0$ [10]: A ($V_x = 0$, $V_y = -1$); B ($V_x = \infty$, $V_y = -1$); D ($V_x = 0$, $V_y = 0$).

При наличии воды в дрене ($h > 0$) значения скоростей фильтрации в нижней (наиболее суффозионно-опасной) точке выхода фильтрационного потока в дрену V_C (в точке C) и в середине поверхности осушаемого массива V_E (в точке E) определяются из зависимостей (8)–(10) соответственно при $x = b$; $y = 0$ и $x = 0$; $y = T$ в виде:

для "удлиненного" массива (при $b/T \le 1$)

$$V_C = V_x = k\frac{2}{\pi}\mathrm{arch}\sqrt{\frac{(1-\lambda)(\xi_B + 1)}{(1+\lambda)(\xi_B - 1)}}, \tag{11}$$

$$V_E = V_y = k\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{(1-\lambda)(1-\lambda\xi_B)}{(1+\lambda)(1+\lambda\xi_B)}}, \tag{12}$$

для "уширенного" массива (при $b/T > 1$)

$$V_C = V_x = k\frac{2}{\pi}\mathrm{arch}\sqrt{\frac{2m(1-J_B)}{(1+m)(1-mJ_B)}}, \tag{13}$$

$$V_E = V_y = k\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{2(1+mJ_B)}{(1+m)(1+J_B)}}, \tag{14}$$

в которых величины λ, ξ_B, m, J_B приведены в (6), (7) и (10).

Для случая отсутствия воды в дрене ($h = 0$) формулы для определения скорости фильтрации $V_E = V_y$ еще более упрощаются:

$$V_E = k\frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) - 1 = k\frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{R-1}{R+1}\right)^2 - 1 \quad \left(\text{при } \frac{b}{T} \le 1\right), \tag{15}$$

$$V_E = k\frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{2\sqrt{m}}{1+m}\right) - 1 \quad \left(\text{при } \frac{b}{T} > 1\right). \tag{16}$$

ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДА

Сравнение (для частных случаев) точных значений скорости фильтрации $V_E = V_y$, по решению В.В. Ведерников [5], в срединной точке поверхности осушаемого массива $E(0;\ T)$ для разных соотношений b/T (0.5, 1, 2, 3, 5), равных 0.891, 0.500, 0.110, 0.023, 0.00099, с данными подсчетов по предлагаемым формулам (15), (16) – 0.8902, 0.5004, 0.1098, 0.0229, 0.00099, – показало практически полное совпадение результатов ($\ll 1\%$).

На рис. 1 приведено впервые аналитически построенное поле полных скоростей фильтрации V в виде семейства изотах – линий равных скоростей фильтрации в затопленном массиве с вертикальными дренами (при $b = 2$; $T = 1$; $h = 0.4$), из которого видно, насколько неоднородный характер имеет распределение скоростей и насколько значительно влияет на это наличие воды в дрене. Представлены также эпюры скоростей фильтрации по граничным линиям: AB (V_x, V – кривые *3*, *4*); BC ($V = V_x$ – кривая *5*); AE ($V = V_y$ – кривая *6*); DC ($V = V_x$ – кривая *7*), причем для участка DC представлена также для сравнения эпюра скоростей для случая отсутствия воды в канаве: $h = 0$ – кривая *8*.

В рамках примера расчета рассматриваемого осушаемого массива для линии AE с максимальным значением напорной функции $\varphi_{AE} = T - h = 0.6$ на основе дифференциальной зависимости $V_y = d\psi/dx$ получено интегральное выражение для функции тока (расходов) $\psi_{AE} = \psi(x)$ (кривая *9*) в виде:

$$\psi_{AE} = -0.03028(b-x)^4 + 0.22857(b-x)^3 - \\ - 0.6717(b-x)^2 + (b-x),$$

по которому определена максимальная величина расхода фильтрации через половину (правую) осушаемого массива, равная $q = 0.6573$.

Аналогичным образом с использованием дифференциальных зависимостей $V_y = d\varphi/dy$ и $V_x = d\varphi/dx$ построены также эпюры напорных функций $\varphi_{ED} = \varphi(y)$ и $\varphi_{DC} = \varphi(x)$ соответственно по линиям ED и DC (кривые *10*, *11*).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известные аналитические решения задачи фильтрации для затопленного массива с вертикальными дренами (дренажными траншеями) с водой представлены чрезвычайно сложными математическими зависимостями в комплексных переменных, что затрудняет их использование при решении прикладных задач. Получено новое приближенно-гидромеханическое решение задачи с использованием годографа скорости и представлением расчетных зависимостей в элементарных функциях, совпадающее для граничных точек с точными данными и практически полностью ($\leqslant 1\%$) согласующееся с результатами точных подсчетов В.В. Ведерникова для частных случаев. Впервые аналитически построено поле полных скоростей фильтрации в виде семейства изотах — линий равных скоростей фильтрации — для заданного затопленного массива с вертикальными дренажными траншеями, показывающее неоднородный характер распределения скоростей в нем с учетом наличия воды в дрене. Представлены также эпюры скоростей фильтрации по граничным линиям (в том числе в сравнении со случаем отсутствия воды в дрене), а также эпюры функции тока и напорной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анахаев К.Н.* Об определении эллиптических функции Якоби // Вестн. РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. 2009. № 2. С. 90–95.
2. *Анахаев К.Н.* О расчете потенциальных потоков // ДАН. 2005. Т. 401. № 3. С. 337–341.
3. *Анахаев К.Н.* Строгое решение задачи свободной фильтрации из водотоков полуобратным методом // Прикладна гідромеханіка. Киев. 2008. Т. 10(82). № 1. С. 80–85.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1980. 975 с.
5. *Ведерников В.В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 248 с.
6. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
7. *Лаврик В.И., Савенков В.Н.* Справочник по конформным отображениям. Киев: Наук. думка, 1970. 252 с.
8. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические интегралы // Справочник по специальным функциям / Под ред. *М. Абрамовица, И. Стиган*. М.: Наука, 1979. С. 401–441.
9. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические функции Якоби тэта-функции // Справочник по специальным функциям / Под ред. *М. Абрамовица, И. Стиган*. М.: Наука, 1979. С. 380–440.
10. *Нельсон-Скорняков Ф.Б.* Фильтрация в однородной среде. М.: Советская наука, 1949. 568 с.
11. *Павловский Н.Н.* Собрание сочинений. Т. 2. Движение грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 771 с.
12. *Фильчаков П.Ф.* Справочник по высшей математике. Киев.: Наук. думка, 1973. 743 с.
13. *Anakhaev K.N.* A Contribution to Calculation of the Mathematical Pendulum // Doklady Physics. 2014. V. 59. № 11. P. 528–533.
14. *Anakhaev K.N.* Calculation of free seepage from watercourses with curvilinear profiles // Water Resour. 2007. V. 34. № 3. P. 295–300.
15. *Donat J.* Die Wirkung der Dranungen // Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1936. H. 31. S. 73–77. P. 90–94.