

УДК 523–52

АНАЛИЗ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В РАДИАЦИОННОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

© 2024 г. А. В. Колесниченко

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия**e-mail: kolesn@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 23.08.2023 г.

После доработки 14.10.2023 г.

Принята к публикации 22.10.2023 г.

Рассматривается распространение линейных акустических возмущений в бесконечной, однородной, серой излучающей плазме, первоначально находящейся в механическом и радиационном равновесии. Выведено точное управляющее уравнение радиационной акустики в излучающем сером газе с учетом влияния поперечного магнитного поля. Радиационная магнитогидродинамика (МГД) описывается тремя уравнениями гидродинамики и двумя уравнениями момента излучения при широком использовании формализма радиационной термодинамики. С целью более достоверного описания эволюции радиационных магнитно-акустических волн возмущения с рассеянием и затуханием в эти уравнения введены условия радиационно-тепловой диссипации, сила радиационного сопротивления, а также магнитная сила и джоулево тепло. При этом используется приближение Эддингтона, которое позволяет исследовать моды радиационных магнитно-гидродинамических волн в двух асимптотических случаях — оптически тонкого и толстого газа. Выведенное в работе точное управляющее уравнение позволило при использовании эвристического Whitham метода получить набор приближенных управляющих уравнений низшего порядка, каждое из которых является частью достоверного приближения к точному уравнению в определенной области независимой временной переменной. Относительно простая форма подобных уравнений позволила без формального решения полной задачи исследовать физические процессы, происходящие в каждой радиационной магнитно-акустической волне.

Ключевые слова: радиационная МГД, радиационная термодинамика, радиационные магнитно-гидродинамические линейные волны, Whitham метод

DOI: 10.31857/S0320930X24020099, **EDN:** NTNEYC

ВВЕДЕНИЕ

Динамика излучающей намагниченной плазмы представляет интерес для широкого круга волновых астрофизических явлений, в которых взаимодействие вещества и излучения играет важную роль (например, в случае аккреции на компактные астрофизические объекты, при образовании звездных структур, при формировании звездных аккреционных дисков и планет, а также в солнечных атмосфере, фотосфере и хромосфере и тому подобное). Целью данной работы является вывод уравнения радиационной акустики для бесконечной, намагниченной и излучающей плазмы и исследование на его основе локальных условий распространения и затухания малоамплитудных радиационных магнитно-акустических волн в серых излучающих и поглощающих газовых средах. В данной работе мы ограничились исследованием одномерных акустических волновых мод, поскольку линейные решения являются важным

первым шагом в понимании соответствующих нелинейных явлений (см. Cox, Giuli, 1968).

Очевидно, что в случае радиационной акустики имеет место наличие двух совершенно разных математических проблем в зависимости от того, является ли начальное возмущение, от которого возникают распространяющиеся волны, колебанием угловой частоты ω или флуктуацией волнового числа k . Это связано с тем, что управляющее уравнение радиационной акустики или соответствующее дисперсионное соотношение, описывающее поведение линейных волн радиационной МГД, имеют различную форму относительно производной по времени $\partial/\partial t$ и пространственной производной $\partial/\partial x$. Дисперсионное соотношение для комплексной частоты ω всегда имеет пять комплексных корней, и в этом случае волновое число k является вещественным параметром, который необходимо задать. Однако дисперсионное соотношение для квадратичного волнового

числа k^2 всегда дает четыре комплексных корня, при этом ω является действительным параметром. Первый случай давно и основательно изучен многими авторами (см., например, Cogley, Vincenti, 1969; Уизем, 1977; Mihalas, Mihalas, 1983; 1999; Simmons, Mihalas, 2000; Kaneko и др., 2005; Kato, Fukue, 2020). Настоящая работа посвящена исследованию второго случая (т. е. систем с заданной частотой) решения уравнения радиационной акустики для намагниченной и излучающей плазмы, поскольку, как известно, основательного анализа этого случая не существует, хотя он абсолютно необходим для полного понимания фундаментальных свойств линейных волновых явлений в радиационной МГД (см. Johnson и др., 2010).

В отличие от классической (недиссипативной) акустической теории, в которой анализ простых волн традиционно проводится с получением инвариантов Римана и характеристических кривых одномерной системы уравнений (см., например, Курант, Фридрихс, 1950; Уизем, 1977; Buchler, 1979; Ландау, Лифшиц, 1986; Balsara, 1998; 1999; Куликовский, Свешникова, 1998), в данной работе для анализа неравновесных волновых явлений в серой излучающей среде использован феноменологический подход, разработанный Whitham (1959). Этот подход основан на физической идее, что в одномерном волновом движении форма волны представляется почти инвариантной, если следовать за ней с ее собственной скоростью распространения. Математическим следствием этой идеи является то, что появляется возможность заменить точное дифференциальное управляющее уравнение радиационной акустики набором управляющих уравнений низшего порядка, которые во многих случаях могут быть решены аналитически. Решения уравнений низшего порядка представляют собой часть общего решения. Whitham подход носит эвристический характер и не исходит из математически строгой аргументации. Вместе с тем, этот метод является эффективным способом исследования распространения линейных волн в гиперболической гидродинамике, когда в точных управляющих уравнениях, описывающих динамику простых волн, появляется более одной скорости (Lick, 1964; Moore, 1966; Cogley, Vincenti, 1969). Сравнение с результатами предшествующих работ, которые были получены с помощью традиционных подходов, устанавливает обоснованность, точность и полезность приближенного метода Whitham.

В настоящей работе использование этого метода демонстрируется на примере рассмотрения эволюции одномерных гармонических волн, обусловленных синусоидальным движением и распространяющихся в излучающей и рассеивающей

среде. Подход Whitham значительно упрощает математику для этой задачи по сравнению с аналогичными результатами, полученными в исследованиях, выполненных традиционными методами (в том числе и численными (Jiang и др., 2012)). Реализованный в работе анализ показал, что модифицированная радиационная магнитно-акустическая система описывает обычные звуковые волны, сдвиговые волны и энтропийную волну, знакомые по уравнениям Эйлера. Однако важным отличием от классического подхода является то, что эти волны вносят существенный вклад в радиационные части полной системы уравнений таким образом, что магнитная гидродинамика излучающей среды допускает новые, малоизученные в литературе простые волны.

Выполненное в работе исследование распространения волновых мод на основе гиперболических частей уравнений радиационной МГД (для случая поперечного магнитного поля) показало, что излучающая плазма допускает помимо индуцированных излучением акустических волн (адиабатической, изотермической, изоэнтропической и радиационно-акустической), основательно исследованных, например, в работе (Kaneko и др., 2005), также и другие модифицированные магнитным полем новые волны: магнитно-адиабатическую, магнитно-изотермическую, магнитно-изоэнтропическую и радиационную магнитно-акустическую волны с затуханием от непрозрачности и с затуханием при охлаждении соответственно. Эти и некоторые другие волновые моды возникают вследствие того, что в изучаемую акустическую систему дифференциальных уравнений исходно включены условия радиационно-тепловой и джоулевой диссипации, а также магнитная сила и сила радиационного сопротивления. Для новых волновых мод получены аналитические решения, позволяющие лучше понять их физическую природу.

Таким образом, важнейшими результатами данной работы являются: вывод точного определяющего уравнения магнитно-радиационной акустики, получение соответствующего ему дисперсионного соотношения, а также приближенное решение управляющих уравнений низкого порядка с использованием эвристического метода Whitham. Найденные для этих уравнений демпфирующие члены (мнимые части решений) определяют характерные частоты для исследуемых волновых мод. Установлены характеристические частоты перехода между соседними двумя волновыми модами в различных условиях. Эти частоты, вместе с управляющими уравнениями и их аналитическими решениями, предоставляют дополнительные математические инструменты для численного исследования поведения

магнитно-радиационных волн в различных физических условиях (см. Lowrie, More, 2001; Jiang и др., 2012).

Таким образом, проведенное в работе исследование иллюстрирует уникальные возможности эвристического подхода Whitham, который позволяет не только качественно понять волновые явления, но и аналитически решать конкретные задачи.

БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ РАДИАЦИОННОЙ МГД И НЕКОТОРЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Уравнения радиационной магнитной гидродинамики используются для моделирования проводящих жидкостей, для которых плазма и излучение сильно связаны между собой. Уравнения нерелятивистской гидромеханики для проводящей жидкости в магнитном поле модифицируются за счет включения в уравнение движения магнитной силы $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ и в уравнение энтропии теплового члена Джоуля $\mathbf{j}^2 / \sigma$ ($\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, σ — электропроводность). Таким образом, гидродинамические уравнения радиационной МГД первого порядка по $\mathbf{v}/c$ (при отсутствии некоторых диссипативных эффектов) вместе с уравнениями Максвелла и законом Ома имеют вид (см. Hsieh, Spiegel, 1976; Бисноватый-Коган, Блинников, 1978; Buchler, 1979; Kaneko и др., 1984; Mihalas, Mihalas, 1983; Jiang и др., 2012):

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla P_g = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{\kappa_F \rho}{c} \mathbf{F}_r, \quad (2)$$

$$\rho T_g \frac{Ds_g}{Dt} = \left[\frac{DE_g}{Dt} + \gamma E_g \nabla \cdot \mathbf{v} \right] = 4\pi \kappa_J \rho (\mathbf{J} - \mathbf{S}) + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (5)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6)$$

Здесь $D(\cdot)/Dt := \partial(\cdot)/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$; $\rho(\mathbf{r}, t)$ — массовая плотность; $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — скорость жидкости; $P_g(\mathbf{r}, t) := (R/\bar{\mu})\rho T_g$ — давление газа (плазмы); $T_g(\mathbf{r}, t)$ — температура газа; R — газовая постоянная; $\bar{\mu}$ — средний молекулярный вес газа; $E_g(\mathbf{r}, t) := P_g/(\gamma - 1) = \rho C_{gV} T_g$ — плотность внутренней энергии газа (на единицу объема);

$C_{gV} := (R/\bar{\mu})(\gamma - 1)^{-1}$ — удельная (на единицу массы) теплоемкость газа при постоянном объеме; $\gamma = C_{gP}/C_{gV}$ — показатель адиабаты в газе; $s_g(\mathbf{r}, t) := (\gamma - 1)^{-1} (R/\bar{\mu}) \ln(P_g/\rho^\gamma) + \text{const}$ — удельная энтропия газа; $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — электрическое поле; μ — электрическая проницаемость вакуума; ε — диэлектрическая проницаемость намагниченной плазмы; $\mathbf{F}_r(\mathbf{r}, t)$ — частотно-интегрированный поток энергии излучения; $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ — интегральная интенсивность и интегральная функция источника излучения соответственно.

При описании нерелятивистской движущейся намагниченной среды ток смещения $\varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ следовало бы опустить. Однако тогда скорость света $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ будет бесконечной, а чисто электромагнитное волновое движение будет представлять собой диффузионное явление. Поскольку в дальнейшем учитываются многие другие диффузионные эффекты, то по этой причине удобно сохранить ток смещения и рассматривать этот эффект как вырожденное электромагнитное волновое движение. В конечном итоге можно будет принять, что $\varepsilon = 0$, $c = \infty$.

Фигурирующие в уравнениях (2) и (3) коэффициенты поглощения состоят из двух частей, обусловленных истинным излучением и рассеянием: $\kappa_F(\mathbf{r}, t) = \alpha_F + \hat{\sigma}$ и $\kappa_J(\mathbf{r}, t) = \alpha_J + \hat{\sigma}$, где α_F и α_J — средний коэффициент поглощения потока излучения и средний коэффициент поглощения интенсивности истинного излучения соответственно, а $\hat{\sigma}$ — коэффициент поглощения за счет рассеяния Томсона (в частности, электронов, рассеяние которых определяет доминирующую непрозрачность в астрофизических задачах). Следуя (Kaneko и др., 1977), введем далее следующие соотношения:

$$\theta := \alpha_J / \kappa_F, \quad (7)$$

тогда

$$4\pi \kappa_J (\mathbf{J} - \mathbf{S}) = 4\pi \kappa_F \theta (\mathbf{J} - \mathbf{B}), \quad (8)$$

где $\mathbf{B}$ — функция источника, обусловленная истинным излучением; в случае локального термодинамического равновесия (ЛТР) функция $\mathbf{B}$ является функцией Планка.

Радиационная гидродинамика описывается двумя проинтегрированными по частоте уравнениями момента излучения (нулевого и первого порядков) вместе с соответствующей схемой замыкания Эдингтона для тензора радиационного давления. Эти уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho T_r \frac{Ds_r}{Dt} &= \frac{D E_r}{Dt} + (1 + f) E_r \nabla \cdot \mathbf{v} = \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{F} - \hat{\mathbf{P}}_r : \nabla \cdot \mathbf{v} - 4\pi \kappa_J \rho (\mathbf{J} - \mathbf{S}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{D\mathbf{F}_{rr}}{Dt} + \mathbf{F}_r \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_r \cdot \nabla \mathbf{v} + c^2 \nabla P_r + c^2 \nabla \cdot \hat{\mathbf{P}}_r = -\kappa_F \rho \mathbf{F}_r. \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{P}_r := \hat{\mathbf{P}}_r + P_r \mathbf{I}$ — интегральный тензор анизотропного радиационного давления; $\hat{\mathbf{P}}_r(\mathbf{r}, t)$ — бесследный тензор радиационного давления; $P_r(\mathbf{r}, t) = f E_r$ — скалярное радиационное давление; f — фактор Эддингтона, равный $1/3$ для оптически толстой среды, и $f = 1$ для оптически тонкой среды; $\mathbf{I}$ — трехмерный единичный тензор. В данной работе использовано приближение Эддингтона, при котором $\hat{\mathbf{P}}_r := f E_r \mathbf{I}$ и эффектом фотонной вязкости можно пренебречь (Agol, Krolik, 1998).

Фигурирующие в уравнениях (9) и (10) интегрированные плотность энергии излучения E_r , поток $\mathbf{F}_r$ и тензор давления излучения $\mathbf{P}_r$ определяются через угловые моменты от удельной спектральной интенсивности излучения $I_v(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ следующими соотношениями:

$$E_r = \frac{4\pi}{c} J := \frac{1}{c} \int_0^\infty dv \oint d\Omega I_v, \quad \mathbf{F}_r := \int_0^\infty dv \oint d\Omega I_v \mathbf{n},$$

$$\mathbf{P}_r := \frac{1}{c} \int_0^\infty dv \oint d\Omega I_v \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad (11)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения излучения, которому соответствует элемент телесного угла $d\Omega$.

В случае ЛТР, когда излучение в каждой точке среды находится в равновесии с веществом при температуре $T_r = T_g = T(\mathbf{r}, t)$, равновесная интенсивность излучения I_v^{eq} описывается изотропной (не зависящей от направления $\mathbf{n}$) термодинамической формулой Планка

$$I_v^{eq}(\mathbf{r}, t) = B_v(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (12)$$

С учетом равенств $\oint d\Omega = 4\pi$, $\oint \mathbf{n} d\Omega = 0$, $\oint \mathbf{n} \mathbf{n} d\Omega = \frac{4}{3}\pi \mathbf{I}$, можно получить в этом случае следующее представление для интегральных характеристик поля черного излучения:

$$E_r^{eq}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} B(T) = aT^4, \quad \mathbf{F}_r^{eq}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$P_r^{eq}(\mathbf{r}, t) = f \frac{4\pi}{c} B(T) = faT^4, \quad (13)$$

где $B(T) := acT^4/4\pi$ — интегрированная по всем частотам ν функция Планка;

$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^2} = 7,565 \times 10^{-15} \text{ г/см}^2 \text{ с}^2 \text{ град}^4$ — постоянная давления излучения.

При этом интегральные равновесные функция источника и интенсивность излучения соответственно равны: $S^{eq}(\mathbf{r}, t) = B$ и $J^{eq}(\mathbf{r}, t) = B$. При использовании этих равновесных функций “источниковый” член

$$4\pi \kappa_J (J - S) = 4\pi \kappa_F \theta (J - B)$$

в уравнениях (3) и (9) исчезает. Кроме этого, в случае ЛТР удельные энтропия излучения $s_r(\mathbf{r}, t)$ и теплоемкость при постоянном объеме $C_{rV}(\mathbf{r}, t)$ определяются выражениями (Ландау, Лифшиц, 1986):

$$s_r(\mathbf{r}, t) := (4/3)aT^3/\rho + \text{const},$$

$$C_{rV}(\mathbf{r}, t) := 4aT^3/\rho. \quad (14)$$

ОДНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗЛУЧАЮЩЕМ ГАЗЕ

Далее в этой работе рассматриваются только малоамплитудные плоские волны, связанные с коротковолновыми термодинамическими возмущениями, первоначально приложенными к равновесному состоянию бесконечной, намагниченной, излучающей и рассеивающей серой среды. Рассматриваемая в работе среда представляет собой полностью ионизованную водородную плазму, в которой свободные и несвязанные переходы учитываются как непрозрачность, обусловленная истинным излучением. Пусть распространение волн происходит вдоль оси x . С целью упрощения задачи ограничимся в дальнейшем рассмотрением поперечного электромагнитного поля: $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ и $\mathbf{j} = \sigma(0, E - vB, 0)$. Для исследования проблемы эволюции во времени начальных мелкомасштабных возмущений удобно линеаризовать исходную систему уравнений радиационной МГД (1)–(6) и (9), (10). С этой целью представим структурные параметры излучающей гидродинамической среды в виде сумм невозмущенных величин v_0 , ρ_0 , $P_{g0} = \text{const}$, $F_{r0} = 0$, B_0 и возмущенных значений $v_1(x, t)$, $\rho_1(x, t)$, $P_{g1}(x, t)$, $F_{r1}(x, t)$, $B_1(x, t)$, $E_1(x, t)$ этих величин. Для равновесного состояния электромагнитного поля принимается равенство $E_0 - v_0 B_0 = 0$ (в последующем подстрочный индекс “0” у невозмущенных величин для простоты формул будем опускать).

Невозмущенные параметры описывают механически равновесную систему, находящуюся в состоянии ЛТР, а величины, описывающие возмущения структурных параметров равновесной среды, являются малыми пульсациями этих параметров (такими, что в линеаризованных уравнениях можно пренебречь членами порядка выше

первого для этих величин и их производных), слабо нарушающих невозмущенное состояние. Относительно равновесного излучения будем далее предполагать однородное и изотропное поле излучения, а ЛТР в возмущенном потоке плазмы может быть адекватно описано спектром излучения черного тела при температуре T . Далее для простоты предполагается, что осредненное по частоте значение коэффициента непрозрачности является постоянным ($\kappa_F = \text{const}$), что позволяет исключить из рассмотрения радиационно-гидродинамические неустойчивости, такие как странные режимы и механизмы связанных неустойчивостей, которые зависят от изменения коэффициента непрозрачности (Glatzel, 1994).

С учетом всех сделанных упрощающих предположений дифференциальные уравнения (1)–(6), (9) и (10), при выполнении всех необходимых разложений и при удержании членов только порядка $1/c$ и первого порядка относительно малоамплитудных возмущений, принимают следующий линеаризованный вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{g1}}{\partial x} + \frac{B}{\mu \rho} \frac{\partial B_1}{\partial x} + \varepsilon \frac{B}{\rho} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{\kappa_F}{c} F_{r1}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial P_{g1}}{\partial t} + v \frac{\partial P_{g1}}{\partial x} + \gamma P_g \frac{\partial v_1}{\partial x} = 4\pi(\gamma - 1) \kappa_F \theta \rho (J_1 - S_1), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial t} + v \frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial F_{r1}}{\partial x} + (1 + f) J \frac{\partial v_1}{\partial x} = \\ = -\kappa_F \theta \rho (J_1 - S_1), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial F_{r1}}{\partial t} + v \frac{\partial F_{r1}}{\partial x} + \omega_F F_{r1} + c f \frac{\partial J_1}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial x} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\partial B_1}{\partial x} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} (E_1 - v B_1 - B v_1). \quad (21)$$

Здесь

$$S^{eq} = B = \frac{ac}{4\pi} T^4,$$

$$S_1 = 4S^{eq} \left(\frac{P_{g1}}{P_g} - \frac{\rho_1}{\rho} \right) = \frac{3c}{\pi} \frac{1-\beta}{\beta} (P_{g1} - c_T^2 \rho_1) \quad (22)$$

— функция источника и ее возмущение, обусловленная истинным излучением;

$$\omega_F(x, t) := \kappa_F \rho c \quad (23)$$

— частота, характеризующая затухание потока энергии излучения.

Заметим, что частота ω_F связана со средним свободным пробегом фотона l_p , или средним сво-

бодным временем пробега фотона t_p . Здесь величина $t_p = l_p / c = 1 / \omega_F$ — это шкала времени, характеризующая ослабление потока энергии излучения за счет непрозрачности, а величина $t_E = 1 / \theta \omega_F$ — это шкала времени, характеризующая ослабление плотности энергии излучения истинной эмиссией при нагревании.

С учетом соотношений (22) и (23) и дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(x, t) &:= \partial/\partial t + v \partial/\partial x, \quad \hat{k}(x, t) := \partial/\partial x, \\ \hat{\omega}_0(t) &:= \partial/\partial t, \end{aligned} \quad (24)$$

уравнения (15)–(21) могут быть переписаны в виде:

$$\hat{\omega} \rho_1 + \rho \hat{k} v_1 = 0, \quad (25)$$

$$\hat{\omega} v_1 + \frac{1}{\rho} \hat{k} P_{g1} + \frac{B}{\mu \rho} \hat{k} B_1 + \varepsilon \frac{B}{\rho} \hat{\omega}_0 E_1 = \frac{\kappa_F}{c} F_{r1}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (\hat{\omega} + \theta \omega_{th}) P_{g1} + \gamma P_g \hat{k} v_1 - \theta \omega_{th} c_T^2 \rho_1 = \\ = 4\pi(\gamma - 1) \kappa_F \theta \rho J_1, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} (\hat{\omega} + \kappa_F \theta \rho) J_1 + (1 + f) J_1 \hat{k} v_1 + c \hat{k} F_{r1} = \\ = \frac{\theta \omega_{th}}{4\pi(\gamma - 1)} (P_{g1} - c_T^2 \rho_1), \end{aligned} \quad (28)$$

$$(\hat{\omega} + \omega_F) F_{r1} + c f \hat{k} J_1 = 0, \quad (29)$$

$$\hat{\omega}_0 B_1 + \hat{k} E_1 = 0, \quad (30)$$

$$\hat{\omega}_0 E_1 + \frac{1}{\varepsilon \mu} \hat{k} B_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon} (E_1 - v B_1 - B v_1). \quad (31)$$

Здесь

$c_T^2 := \left(\frac{\partial P_g}{\partial \rho} \right)_T = \frac{P_g}{\rho}$ — изотермическая скорость звука в газе;

$$\omega_{th} := 12(\gamma - 1) \frac{P_r}{P_g} \omega_F = 12 \frac{\gamma - 1}{1 + f} \frac{c_r^2}{c_T^2} \omega_F = \omega_F \Upsilon$$

— частота теплообмена, определяющая эволюцию и характер акустических волн;

$c_r^2 := (1 + f) P_r / \rho$ — радиационная адиабатическая скорость звука;

$$\Upsilon := 12(\gamma - 1) \frac{P_r}{P_g} = \frac{12(\gamma - 1)(1 - \beta)}{\beta} = \frac{C_{rV}}{C_{gV}}$$

— отношение удельных теплоемкостей излучения и газа (плазмы) при постоянном объеме;

$P := (P_g + P_r)$ и $S := (s_g + s_r) = C_{Vg} \ln(P_g / \rho^\gamma) + 4aT^3 / 3\rho$ — соответственно полное давление и полная энтропия радиационной среды;

$\beta := \frac{P_g}{P} = \frac{12(\gamma - 1)}{\gamma + 12(\gamma - 1)} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}$ — коэффициент, характеризующий долю газа в полном давлении смеси вещества и чернотельного излучения.

УПРАВЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ РАДИАЦИОННОЙ АКУСТИКИ В НАМАГНИЧЕННОЙ СЕРОЙ СРЕДЕ

Получим здесь управляющее уравнение радиационной акустики для намагниченной серой среды путем последовательного исключения всех возмущенных величин из линеаризованных уравнений (25)–(31). В результате крайне трудоемких преобразований получим точное управляющее уравнение (седьмого порядка) радиационной акустики в намагниченной серой среде в следующем виде:

$$\{P_7 + \omega_F[1 + (1 + \gamma)\theta]P_6 + \omega_F\Delta[1 + (1 + \gamma)\theta]P_5 + \omega_F^2\Delta[(1 + \gamma)\theta]P_4\}\psi = 0, \quad (32)$$

где $\psi := \{p_1, v_1, P_{g1}, J_1, F_{r1}, B_1, E_1\}$ — возмущенные величины, а операторы $P_7(x, t)$, $P_6(x, t)$, $P_5(x, t)$, и $P_4(x, t)$ для волн седьмого, шестого, пятого и четвертого порядков, соответствующие высокочастотному, среднечастотному и низкочастотному режимам, задаются соотношениями:

$$P_7 := \hat{\omega}(\hat{\omega}^2 - c_g^2 \hat{k}^2) \left((\hat{\omega}^2 - c_f^2 \hat{k}^2) \left(\hat{\omega}_0^2 - c^2 \hat{k}^2 \right) \right), \quad (33)$$

$$P_6 := \left(\hat{\omega}^2 - c_f^2 \hat{k}^2 \right) \left[\hat{\omega}^2 - (c_T^2 + c_A^2) \hat{k}^2 \right] + \frac{\Delta}{\omega_F[1 + (1 + \gamma)\theta]} \hat{\omega}^2 \left(\hat{\omega}^2 - c_f^2 \hat{k}^2 \right) \left[\hat{\omega}^2 - (c_g^2 + c_A^2) \hat{k}^2 \right], \quad (34)$$

$$P_5 := \hat{\omega} \left[\left(\hat{\omega}^2 - c_f^2 \hat{k}^2 \right) \left(\hat{\omega}^2 - c_{II}^2 \hat{k}^2 \right) + \frac{c_A^2}{c^2} \left(\hat{\omega}^2 - \frac{\gamma\theta}{1 + (1 + \gamma)\theta} c_f^2 \hat{k}^2 \right) \left(\hat{\omega}_0^2 - c^2 \hat{k}^2 \right) \right] + \frac{\omega_F}{\Delta} \frac{(1 + \gamma)\theta}{1 + (1 + \gamma)\theta} \hat{\omega} \left(\hat{\omega}^2 - c_f^2 \hat{k}^2 \right) \left(\hat{\omega}_0^2 - c^2 \hat{k}^2 \right), \quad (35)$$

$$P_4 := \hat{\omega}^2 \left[\hat{\omega}^2 - (c_T^2 + c_A^2) \hat{k}^2 \right]. \quad (36)$$

Здесь

$$c_g^2 := \left(\frac{\partial p_g}{\partial \rho} \right)_{S_g} = \gamma \frac{p_g}{\rho} \text{ — адиабатическая скорость}$$

звука в газе;

$$c_T^2 := \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \Gamma_1 \frac{P}{\rho} = \Gamma_0 \frac{P_g}{\rho} = \Gamma_0 c_T^2 \text{ — изэнтропическая радиационно-акустическая скорость;}$$

$$\Gamma_1 := \beta + \frac{(\gamma - 1)(4 - 3\beta)^2}{\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)} = \frac{4}{3} \frac{\gamma^2 + (\gamma - 1)(15\gamma + 9\gamma)}{(\gamma + 1)[\gamma + 12(\gamma - 1)]} -$$

обобщенный показатель адиабаты для смеси вещества с излучением (Cox, Giuli, 1968);

$$\Gamma_0 := \frac{C_p^{(tot)}}{C_V^{(tot)}} = \frac{\gamma^2 + (\gamma - 1)(15\gamma + 9\gamma)}{9(\gamma + 1)(\gamma - 1)} = \frac{c_T^2}{c_g^2} \text{ — отно-}$$

шение полных удельных теплоемкостей излучающего вещества при постоянном давлении $C_p^{(tot)}$

и постоянном объеме $C_V^{(tot)} := C_{rV} + C_{gV}$;

$$C_p^{(tot)} - C_V^{(tot)} = \frac{R}{\mu} \left(1 + 4 \frac{P_r}{P_g} \right)^2 \text{ — обобщенное соотно-}$$

шение Майера;

$$c_{rg}^2 := c_r^2 + c_g^2 \text{ — радиационная акустическая скорость;}$$

$$c_A := \sqrt{B / \mu \rho} \text{ — групповая скорость волны Альвена;}$$

$$\Delta := \sigma / \varepsilon = c^2 \sigma \mu.$$

Скорости c_I^2 и c_{II}^2 определяются выражением (Kaneko и др., 2005)

$$c_I^2, c_{II}^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (37)$$

где $A := 1 + (1 + \gamma)\theta$,

$$B := c_{rg}^2 + [c_g^2 + 3(\gamma - 1)c_r^2 + (c_f^2 + c_g^2)\gamma]\theta, \quad C := c_f^2 c_g^2 \theta \gamma.$$

В нерелятивистском приближении, когда справедливо неравенство $P / \rho c^2 \ll \beta^{-1}(1 - \beta)\theta$, скорости c_I^2 и c_{II}^2 задаются соотношениями

$$c_{II}^2 = c_T^2, \quad c_I^2 = \frac{\theta \gamma}{1 + \theta(1 + \gamma)} c_f^2 = \frac{12(\gamma - 1)(1 - \beta)\theta}{\beta + [\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)]\theta} c_f^2 \quad (38)$$

— уменьшенная скорость волны излучения (не являющаяся, однако, реальной скоростью распространяющейся волны). Если $(1 - \beta)\theta \gg \beta$, то $c_I^2 = c_f^2$, что соответствует радиационно-индуцированной волне, которая возникает из радиационного возмущения со скоростью c_f ; если $\theta = 1$, то $c_I^2 = c_f^2 \Upsilon(2 + \Upsilon)^{-1}$; если $\theta = 0$, то $c_I^2 = 0$, $c_{II}^2 = c_{rg}^2$.

Уравнение (32) является фундаментальным акустическим уравнением для изучения поведения одномерных радиационных гидродинамических волн в намагниченной серой среде.

Чтобы несколько упростить структуру операторов P_6 и P_5 , далее предположим, что

$$\omega_F \ll \Delta = c^2 \sigma \mu, \quad (B/\mu\rho)^2/c^2 \ll 1. \quad (39)$$

Поскольку величины $l_p := c/\omega_F$ и $l_d := c/\Delta$ являются, соответственно, средним свободным путем излучения и расстоянием затухания электромагнитной волны в проводящей среде, то первое неравенство (39) означает, что $l_p \gg l_d$. Второе неравенство (39) всегда выполняется в МГД.

При последовательном исключении всех возмущенных величин из (15)–(21) с учетом предпо-

ложения (39) можно получить следующее основное управляющее уравнение

$$\left\{ \begin{aligned} P_7 + \Delta P_6' + \omega_F \Delta [1 + (1 + \Upsilon)\theta] P_5' + \\ + \omega_F^2 \Delta [(1 + \Upsilon)\theta] P_4 \end{aligned} \right\} \Psi = 0, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} P_6' &= \hat{\omega}^2 \left(\hat{\omega}^2 - c_f^2 \hat{k}^2 \right) \left(\hat{\omega}^2 - a_{gA}^2 \hat{k}^2 \right), \\ P_5' &= \hat{\omega} \left(\hat{\omega}^2 - c_f^2 \hat{k}^2 \right) \left(\hat{\omega}^2 - a_{TA}^2 \hat{k}^2 \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{gA}^2 &:= c_g^2 + (B/\mu\rho)^2, \quad a_{TA}^2 := c_T^2 + (B/\mu\rho)^2, \\ a_{rA}^2 &:= c_r^2 + (B/\mu\rho)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

— адиабатическая, изотермическая и изоэнтропийная магнитоакустические скорости соответственно.

Чтобы несколько упростить задачу, в этой работе будем предполагать, что в уравнении (40) равновесная скорость $v = 0$. Тогда управляющее уравнение радиационной акустики в намагниченной серой среде примет более простой вид:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi + \Delta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{gA}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi + \\ &+ \omega_F \Delta [1 + (1 + \Upsilon)\theta] \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{TA}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi + \\ &+ \omega_F^2 \Delta [(1 + \Upsilon)\theta] \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{rA}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Наконец, с целью рассмотрения влияния магнитного поля только на характер акустических явлений в намагниченной плазме, проигнориру-

ем далее члены высшего порядка, включающие скорость света в уравнении (43); в результате получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{gA}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi + \omega_F [1 + (1 + \Upsilon)\theta] \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{TA}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi + \\ &+ \omega_F^2 [(1 + \Upsilon)\theta] \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{rA}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

В случае чистого рассеяния энергии ($\theta = 0$, $c_I^2 = 0$), из уравнения (44) следует еще более простое управляющее соотношение

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{gA}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi + \\ &+ \omega_F \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{TA}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В РАДИАЦИОННОЙ АКУСТИКЕ

Рассмотрим плоскую коротковолновую моду возмущения равновесного фона и будем предполагать, что начальное возмущение термодинамических параметров является одномерным синусоидальным колебанием. Тогда все структурные параметры излучающей среды эволюционируют

во времени по закону $\psi := \alpha \exp[i(kx - \omega t)]$, где ω — частота гармонических колебаний, а k — волновое число, т. е. все возмущения $\rho_1, v_1, P_{g1}, J_1, F_{r1}, B_1$ и E_1 зависят только от x и t . При этом действительная часть комплексной частоты ω связана с фазовой скоростью $V = |\operatorname{Re} \omega|/k$, а обратная мнимая часть дает время затухания волны $t_d = 1 / |\operatorname{Im} \omega|$.

Легко убедиться, что в этом случае фундаментальному акустическому уравнению (44) соответствует следующее дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} & \omega(\omega^2 - c_f^2 k^2)(\omega^2 - a_{gA}^2 k^2) + \\ & + i\omega_F [1 + (1 + \Upsilon)\theta](\omega^2 - c_f^2 k^2)(\omega^2 - a_{TA}^2 k^2) + \\ & + \omega_F^2 \omega(1 + \Upsilon)\theta(\omega^2 - a_{TA}^2 k^2) = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

В случае чистого рассеяния энергии ($\theta = 0, c_f^2 = 0$) из уравнения (46) следует более простое дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} & \omega^5 + i\omega_F [1 + (1 + \Upsilon)\theta] \omega^4 - [(c_f^2 + a_{gA}^2)k^2 + \omega_F^2(1 + \Upsilon)\theta] \omega^3 - \\ & - i\omega_F [1 + (1 + \Upsilon)\theta] [(c_f^2 + a_{TA}^2)k^2] \omega^2 + [c_f^2 a_{gA}^2 k^4 + \omega_F^2(1 + \Upsilon)\theta a_{TA}^2 k^2] \omega + \\ & + i\omega_F [1 + (1 + \Upsilon)\theta] c_f^2 a_{TA}^2 k^4 = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Альтернативное выражение для уравнения (47) может быть записано в виде биквадратного уравнения относительно комплексного волнового числа k при заданном вещественном параметре ω

$$\begin{aligned} & \{c_f^2 a_{gA}^2 \omega + i\omega_F [1 + (1 + \Upsilon)\theta] c_f^2 a_{TA}^2\} k^4 - \\ & - \{(c_f^2 + a_{gA}^2) \omega^3 + i\omega_F [1 + (1 + \Upsilon)\theta] (c_f^2 + a_{TA}^2) \omega^2 - \omega_F^2(1 + \Upsilon)\theta a_{TA}^2 \omega\} k^2 + \\ & + \{\omega^5 + i\omega_F [1 + (1 + \Upsilon)\theta] \omega^4 - \omega_F^2(1 + \Upsilon)\theta \omega^3\} = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Для чистого рассеяния ($\theta = 0, c_f^2 = 0$) соотношение (49) принимает более простой вид:

$$\begin{aligned} & c_f^2 a_{gA}^2 k^4 - [(c_f^2 + a_{gA}^2) \omega^2 + i\omega_F a_{TA}^2 \omega] k^2 + \\ & + \omega^4 + i\omega_F \omega^3 = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Это уравнение играет важную роль при определении того, какие моды возникают в результате простого обмена импульсами между намагниченным веществом и излучением.

Формальное решение

Как уже говорилось, в данной работе мы остановились на исследовании уравнения (49), поскольку уравнение (48) достаточно основательно изучено в литературе (см. Cogley, Vincenti, 1969; Mihalas, Mihalas, 1983; 1999; Simmons, Mihalas, 2000; Kaneko и др., 2005; Kato, Fukue, 2020; Ко-

$$\begin{aligned} & \omega(\omega^2 - c_f^2 k^2)(\omega^2 - a_{gA}^2 k^2) + \\ & + i\omega_F \Delta \omega^2 (\omega^2 - a_{TA}^2 k^2) = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

решение которого описывает частоты распространяющихся волновых мод, возникающих в результате обмена импульсами между намагниченным веществом и излучением.

Как уже упоминалось во “Введении”, у нас есть два различных способа анализа дисперсионного соотношения (46). Один из них — решить уравнение (46), выбрав волновой вектор k в качестве заданного вещественного параметра, в этом случае частота ω является комплексной величиной. Другой — решить уравнение (46), взяв ω в качестве заданного вещественного параметра, в этом случае k является комплексным числом.

Если уравнение (46) рассматривается как функция от комплексной частоты ω (при этом $\operatorname{Im} k = 0$), то его можно записать в виде уравнения пятого порядка

лесниченко, 2023). В этом случае наша задача заключается в анализе плоских волн, которые возникают от малоамплитудных начальных возмущений волнового числа k . Заметим, что действительная и мнимая части комплексного числа k задают фазовую скорость $V = \omega / |\operatorname{Re} k|$ и длину затухания $d = 1 / |\operatorname{Im} k|$ соответственно.

Введем теперь безразмерные частоту $\tilde{\omega}$ и волновое число $\tilde{k}$:

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_F} = 2\pi \left(\frac{l_p}{\lambda} \right) \left(\frac{V}{c} \right), \quad \tilde{k} = \frac{c}{\omega_F} k = l_p k, \quad (51)$$

где $\lambda = 2\pi V/\omega$ — длина волны возмущения частоты ω , распространяющегося с фазовой скоростью V . Действительная часть $|\operatorname{Re} \tilde{k}|$ также связана с оптической глубиной τ одной длины волны каждой моды частоты ω при ее скорости как

$\tau/2\pi = 1/|\operatorname{Re} \vec{k}|$. Уравнение (49) в безразмерной форме принимает вид:

$$L \vec{k}^4 - M \vec{k}^2 + N = 0, \quad (52)$$

где

$$L = \left[\frac{c_f^2 (c_g^2 + (B/\mu\rho)^2)}{c^4} \vec{\omega} + i[1 + (1 + \Upsilon)\theta] \frac{c_f^2 (c_T^2 + (B/\mu\rho)^2)}{c^4} \right],$$

$$M = \frac{c_f^2 + c_g^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \vec{\omega}^3 + i[1 + (1 + \Upsilon)\theta] \frac{c_f^2 + c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \vec{\omega}^2 - (1 + \Upsilon)\theta \frac{c_g^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \vec{\omega}, \quad (53)$$

$$N = \vec{\omega}^5 + i[1 + (1 + \Upsilon)\theta] \vec{\omega}^4 - (1 + \Upsilon)\theta \vec{\omega}^3.$$

Формальное решение уравнения (52) можно представить в виде:

$$\vec{k}^{(1)} = \pm \left[\frac{M - \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L} \right]^{1/2},$$

$$\vec{k}^{(2)} = \pm \left[\frac{M + \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L} \right]^{1/2}, \quad (54)$$

где $\vec{k}^{(1)}$ и $\vec{k}^{(2)}$ — волновые векторы для радиационно-индуцированных и модифицированных магнитным полем классических гидродинамических волн соответственно; а знаки перед квадратной скобкой обозначают два направления распространения. Таким образом, общее решение задается как линейная комбинация двух комплексных решений $\vec{k}^{(1)}$ и $\vec{k}^{(2)}$:

$$\psi = \alpha_1 \exp[i\omega_F(c^{-1}\vec{k}_1 x - \vec{\omega}t)] + \alpha_2 \exp[i\omega_F(c^{-1}\vec{k}_2 x - \vec{\omega}t)]. \quad (55)$$

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ WHITHAM МЕТОДА ДЛЯ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В РАДИАЦИОННОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Используемый в этом разделе Whitham метод (1959) приближенного решения задачи распространения акустических волн позволяет, как было указано во “Ведении”, заменить точное управляющее уравнение набором приближенных уравнений низшего порядка, каждое из которых является частью достоверного приближения к точному уравнению в определенной области независимой временной переменной. Для каждой скорости распространения, входящей в точное уравнение, можно получить собственное управляющее уравнение низшего порядка. При этом решение

уравнения низшего порядка, которое во многих случаях можно получить в замкнутой форме, представляет собой часть общего решения. Преимуществом данного метода является разделение задачи на физически значимые части, что дает возможность увидеть, каким образом развиваются

ся во времени результирующие формы отдельных волн возмущения. В работе мы ограничимся только линейными задачами. Однако, как показал Whitham, линейные решения являются важным первым шагом в понимании соответствующих нелинейных явлений.

Добавим к сказанному, что относительно простая форма уравнений низшего порядка позволяет без формального решения полной задачи определить явно, какого типа отклика на возмущение равновесного фона системы можно ожидать. В радиационной акустике возможно появление так называемых вырожденных скоростей со значениями ноль и бесконечность. Эти вырожденные скорости могут представлять собой диффузионные механизмы, которые приводят к возникновению чисто диффузионных волн. Whitham метод носит эвристический и приближенный характер и не претендует на математически строгую аргументацию. Поэтому его точность не приводится в качестве неотъемлемой части метода. Вместе с тем, как показало сравнение результатов, полученных подобным методом, и полученных с помощью численного решения точного управляющего уравнения, их точность весьма высока в широком диапазоне частот для всех режимов радиационной акустики (см. Vincenti, Baldwin, 1962; Lick, 1964; Moore, 1966; Long, Vincenti, 1967; Cogley, Vincenti, 1969; Kaneko и др., 2005). Исключения возможны в небольших областях частот, при которых решение переходит от одного уравнения низшего порядка к другому, но и в этом случае аналитические результаты не имеют серьезных отклонений.

Продemonстрируем теперь возможности эвристического Whitham подхода на примере определения характерных черт для основных (но не всех) фундаментальных акустических мод в радиационной магнитной акустике.

*Одномерные радиационные волны
в высокочастотном режиме*

В этом подразделе поясним Whitham метод, рассмотрев в качестве простого примера высокочастотный радиационно-волновой режим. С этой целью положим в точном управляющем уравнении радиационной акустики (44) $\partial^2/\partial t^2 \approx c_f^2 \partial^2/\partial x^2$ что соответствует трактовке Whitham о том, что радиационная волновая мода со скоростью c_f аппроксимируется заданием $\partial/\partial t \approx \pm c_f \partial/\partial x$. Поскольку радиационно-волновой режим излучения волн имеет пятый порядок, то можно пренебречь в уравнении (44) членом, описывающим волны третьего порядка P_3 . В двух оставшихся частях уравнения (44) с помощью выбранного аппроксимационного соотношения для $\partial^2/\partial t^2$ в членах, включающих скорости a_{gA}^2 , c_f^2 и a_{TA}^2 , производную $\partial^2/\partial t^2$ заменим на $c_f^2 \partial^2/\partial x^2$, а затем к обрезанному уравнению радиационной акустики применим очевидные неравенства $a_{gA}^2 \ll c_f^2$ и $a_{TA}^2 \ll c_f^2$. В результате получим следующее приближенное управляющее уравнение в виде радиационной части для возмущенных величин $\psi = \{E_{r1}, F_{r1}\}$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_F(1+\theta) \frac{\partial}{\partial t} - c_f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \psi = 0, \quad (56)$$

где для оценки скорости c_f^2 было использовано соотношение $c_f^2 = c_f^2 \theta \Upsilon / [1 + \theta(1 + \Upsilon)]$.

Подставляя гармоническое возмущение вида $\psi \sim \exp[i(kx - \omega t)]$ в уравнение (56), получим следующее дисперсионное соотношение для распространения волны-излучения:

$$\omega^2 + i\omega_F(1+\theta)\omega - c_f^2 k^2 = 0. \quad (57)$$

Коэффициент $\omega_F(1+\theta)$ в этом уравнении означает, что затухание радиационно-волновой моды обусловлено как потерей потока энергии излучения из-за непрозрачности, так и потерей плотности энергии за счет реабсорбции. Уравнение (56) (или (57)) характеризуется следующей специфической частотой: $\omega_c(f) = \omega_F(1+\theta)/2$. При ограничении $\omega > \omega_c(f)$ уравнение (57) для радиационно-волновой моды имеет решение

$$\pm k_c(f) \simeq \frac{\omega}{c_f} + i \frac{\omega_F(1+\theta)}{2c_f}. \quad (58)$$

Обратная мнимая часть уравнения (58) дает длину затухания

$$d_f = \frac{1}{|Im k_c(f)|} = \frac{2c_f}{\omega_F(1+\theta)} = \frac{2I_p}{\sqrt{3}(1+\theta)}. \quad (59)$$

Таким образом, величина d_f порядка длины среднего свободного пробега фотона I_p . Вместе с ограничением $\omega > \omega_c(f)$ это означает, что длина волны радиационно-волновой моды $\lambda = 2\pi c_f/\omega$ соответствует оптически тонкому режиму.

В случае рассеяния без обмена энергией между веществом и излучением, когда в приведенном выше результате $\theta = 0$, эффект истинного излучения отсутствует, и взаимодействие между ними происходит только за счет обмена импульсом. В этом случае дисперсионное соотношение (58) принимает вид:

$$\omega^2 + i\omega_F\omega - c_f^2 k^2 = 0.$$

Именно это уравнение определяет поведение радиационной моды при строго консервативном условии и, следовательно, отвечает консервативной волне излучения.

Итак, выполненное здесь рассмотрение показало, что магнитное поле не оказывает влияния на скорость распространения радиационной волны со скоростью c_f .

Адиабатическая магнитно-звуковая мода

Для исследования адиабатического режима магнитно-звуковой волны положим в управляющем уравнении магнитно-радиационной акустики (44)

$$\partial^2/\partial t^2 \approx [c_g^2 + (B/\mu\rho)^2] \partial^2/\partial x^2.$$

В результате, при использовании предположений $c_f^2 \gg c_g^2 + (B/\mu\rho)^2$ и $P_3 = 0$, уравнение (44) может быть аппроксимировано для возмущенных величин $\psi = \{\rho_1, v_1, P_{g1}\}$ следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [c_g^2 + (B/\mu\rho)^2] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi + \left(\omega_F \frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \omega_{th} \theta \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (60)$$

Поскольку член затухания из-за охлаждения $\theta \omega_{th} \frac{\gamma-1}{\gamma} = 12 \frac{\theta(\gamma-1)^2}{\gamma(1+f)} \frac{c_r^2}{c_f^2} \omega_F$ намного больше, чем сила радиационного сопротивления $\omega_F c_r^2 / c_f^2$, то уравнение (60) может быть переписано в более простом виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [c_g^2 + (B/\mu\rho)^2] \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \omega_{th} \theta \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0. \quad (61)$$

С другой стороны, в случае рассеяния из (60), следует уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [c_g^2 + (B/\mu\rho)^2] \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega_F \frac{c_r^2}{c_f^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = 0. \quad (62)$$

В следующем разделе будет показано, что в случае рассеяния не возникает магнитно-изотермической звуковой моды, а магнитно-адиабатическая звуковая мода занимает как высокочастотный, так и среднечастотный режимы.

Запишем теперь дисперсионное соотношение, соответствующее управляющему уравнению (61):

$$\omega^2 + i \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \omega_{th} \theta \right) \omega - [c_g^2 + (B/\mu\rho)^2] k^2 = 0. \quad (63)$$

Уравнение (61) (или (63)) имеет следующую характеристическую частоту:

$$\omega_c(gA) = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \omega_{th} \theta. \quad (64)$$

Принимая ограничение $\omega > \omega_c(gA)$ для магнитно-адиабатической звуковой моды, получим следующее решение уравнения (63) (Mihalas, Mihalas, 1999):

$$\pm k_{gA} = \frac{\omega}{c_g^2 + (B/\mu\rho)^2} + i \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\omega_{th} \theta}{c_g^2 + (B/\mu\rho)^2}. \quad (65)$$

Из выражения (65) следует, что длина затухания магнитно-адиабатической звуковой волны, т. е. порядок расстояния, которое проходит волна за время охлаждения t_N , оценивается как

$$d_{gA} = \frac{1}{|Im k_{gA}|} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\omega_{th} \theta} (c_g^2 + (B/\mu\rho)^2) \sim (c_g^2 + (B/\mu\rho)^2) t_N. \quad (66)$$

В случае рассеяния решение уравнения (62) принимает вид

$$\pm k'_{gA} = \frac{\omega}{c_g^2 + (B/\mu\rho)^2} + i \frac{\omega_F}{2 [c_g^2 + (B/\mu\rho)^2]} \frac{c_r^2}{c_f^2}. \quad (67)$$

Ниже будет показано, что, когда обмен энергией между веществом и излучением мал, сила радиационного сопротивления управляет затуханием магнитно-адиабатического звукового режима как в высокочастотном, так и в среднечастотном режимах.

Изотермическая магнитно-звуковая мода

Для исследования изотермической магнитно-звуковой волны положим в управляющем уравнении (44) $\partial^2/\partial t^2 \approx [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2] \partial^2/\partial x^2$. В результате, при использовании предположений $c_f^2, c_I^2 \gg [c_g^2 + (B/\mu\rho)^2]$, $[c_T^2 + (B/\mu\rho)^2]$ получим

следующее уравнение для возмущенных величин $\Psi := \{\rho_1, v_1, P_{g1}\}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi + \omega_F \frac{c_r^2}{c_f^2} \left(1 + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{3c_r^2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\gamma - 1}{\theta \omega_{th}} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3}. \quad (68)$$

Соответствующее дисперсионное соотношение для изотермической магнитно-звуковой моды принимает вид:

$$\omega^2 + i \left[\frac{\gamma - 1}{\theta \omega_{th}} \omega^3 + \omega_F \left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c} \right) \omega \right] - (c_T^2 + (B/\mu\rho)^2) k^2 = 0. \quad (69)$$

Решая это уравнение, получим:

$$\pm k_{TA} = \frac{\omega}{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2} + i \left[(\gamma - 1) \frac{\omega^2}{\theta \omega_{th}} + \omega_F \left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c} \right) \right]. \quad (70)$$

Мнимая часть этого решения состоит из двух частей: одна часть пропорциональна величине $(\gamma - 1) \omega^2 / \theta \omega_{th}$, а другая — величине $\omega_F [c_r^2 / c_f^2 + (c_T^2 + (B/\mu\rho)^2) / c]$. Вследствие различия в механизме демпфирования магнитно-изотермический режим звука может быть разделен на две подмоды.

Пренебрегая вторым членом в левой части уравнения (68), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi - \frac{\gamma - 1}{\theta \omega_{th}} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} = 0. \quad (71)$$

Это уравнение описывает магнитно-изотермический акустический режим в наиболее высокочастотной части, которая называется режимом охлаждения. Решение уравнения (71) имеет вид:

$$\pm k_{TA} = \frac{\omega}{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2} + i \frac{\gamma - 1}{\theta \omega_{th}} \omega^2. \quad (72)$$

Таким образом, это режим можно назвать изотермическим магнитно-звуковым режимом с затуханием при охлаждении. Уравнение (71) согласуется с решением изотермического звукового режима, полученным Mihalas и Mihalas (1999).

Уравнение (71) имеет характерную частоту

$$\omega_c(t_A) = 2 \omega_{th} \theta / (\gamma - 1). \quad (73)$$

Условие $\omega_c(t_A) \sim \omega_{th}\theta$ накладывает более высокую степень блокировки на изотермический магнитно-звуковой режим. Длина затухания изотермической магнитно-звуковой моды с охлаждением находится из решения (72) и имеет вид:

$$d_{TA} = \frac{1}{|Im k_{TA}|} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{\omega_{th}\theta} \left(\frac{\omega_c(t_A)}{\omega} \right)^2. \quad (74)$$

Эта длина оценивается как $\sim [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2] t_N$ при $\omega \sim \omega_c(t_A)$. Сравнение с частотой (64) показывает, что справедливо неравенство $\omega_c(gA) < \omega_c(t_A)$. Это неравенство означает, что адиабатический магнитно-звуковой режим накладывается на изотермический магнитно-звуковой режим в диапазоне $\omega_c(gA) < \omega < \omega_c(t_A)$. Другими словами, можно считать, что адиабатический магнитно-звуковой режим и изотермический магнитно-звуковой режим с охлаждением взаимодействуют друг с другом в этой области перекрытия. Частоту перехода между этими двумя магнитно-звуковыми режимами можно определить как

$$\omega_c(gA-t_A) = \sqrt{\omega_c(gA)\omega_c(t_A)} = \omega_{th}\theta/\gamma. \quad (75)$$

Таким образом, адиабатическая магнитно-звуковая мода, возникающая в области $\omega > \omega_c(gA-t_A)$, гасится при $\omega \sim \omega_c(gA-t_A)$ радиационным охлаждением, за которым следует изотермическая магнитно-звуковая мода с охлаждением при $\omega < \omega_c(gA-t_A)$.

Возвращаясь теперь к уравнению (68) и пренебрегая его правой частью, в результате получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi + \omega_F \left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \quad (76)$$

Очевидно, что второй член в левой части уравнения (76) возникает из-за силы сопротивления. Таким образом, частотный режим, в котором выполняется уравнение (76), можно назвать режимом тяглового усилия. Решение уравнения (76) дается выражением:

$$\pm k'_{TA} = \frac{\omega}{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2} + i \frac{\omega_F}{2(c_T^2 + c_A^2)} \left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \right). \quad (77)$$

Этот режим может быть назван изотермическим магнитно-звуковым режимом с затуханием, вызванным силой сопротивления.

В предыдущем подразделе было показано, что величина $\omega_F c_r^2 / c_f^2$ является частью силы радиационного сопротивления. В случае рассеяния без обмена энергией между намагниченным веществом и излучением, уравнение (75) заменяется уравнением (62), а решение (77) – уравнением (67), в котором только сила радиационного сопротивления появляется как член затухания. Это означает, что в случае рассеяния высокочастотный и среднечастотный режимы заняты адиабатической звуковой модой, затухание которой обусловлено только силой радиационного сопротивления.

В излучающей и рассеивающей среде сила сопротивления имеет более общий вид, приведенный выше. Фигурирующая в уравнении (76) величина $\omega_F [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2] / c^2$ может быть названа тепловой частью силы сопротивления, которая, очевидно, возникает в результате обмена энергией.

Величину $\omega_F \{ c_r^2 / c_f^2 + [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2] / c^2 \}$, таким образом, можно назвать полной радиационной магнитно-тепловой силой сопротивления. Когда намагниченное вещество и излучение взаимодействуют друг с другом посредством обмена энергией и импульсом, магнитно-акустическая мода, гасимая силой сопротивления, является не магнитно-адиабатической, а магнитно-изотермической звуковой модой, и ее затухание обусловлено радиационно-тепловой силой сопротивления.

Уравнение (75) имеет следующую характерную частоту:

$$\omega'_c(t_A) = \frac{\omega_F}{2} \left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \right) = \frac{1}{t'_{TA}}. \quad (78)$$

Неравенство $\omega > \omega_c(t_A)$ для действительного параметра ω является ограничением для изотермической магнитно-звуковой моды с демпфированием силой сопротивления. Длина демпфирования составляет

$$d'_{TA} = \frac{1}{|Im k'_{TA}|} = \frac{2[c_T^2 + (B/\mu\rho)^2]}{\omega_F} \times \frac{c_f^2}{c_r^2 + [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2] / 3} = (c_T^2 + c_A^2) t'_{TA}. \quad (79)$$

Определим теперь частоту $\omega''_c(t_A)$, при которой возможен переход между изотермическим магнитно-звуковым режимом с затуханием охлаждением и с затуханием, вызванным силой сопротивления, таким образом, что

$$\omega_F \left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \right) = \frac{\gamma - 1}{\omega_{th}\theta} [\omega_c''(TA)]^2. \quad (80)$$

Тогда величина

$$\begin{aligned} \omega_c''(TA) &= \sqrt{\omega_c(TA)\omega_c'(TA)} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega_F\omega_{th}\theta}{\gamma - 1} \left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \right)} \end{aligned} \quad (81)$$

является той частотой, при которой эффект радиационного охлаждения уравновешивается эффектом радиационно-тепловое сопротивления, как механизмом демпфирования. Таким образом, уравнение (71) справедливо в режиме охлаждения в диапазоне $\omega_c(TA) > \omega > \omega_c''(TA)$, а уравнение (76) справедливо в режиме демпфирования силой сопротивления, когда заданная частота ω удовлетворяет неравенству

$$\omega_c''(TA) > \omega > \omega_c(TA).$$

Радиационная изоэнтروпийная магнитно-звуковая мода

Для исследования радиационного изоэнтروпийного магнитно-акустического режима распространения одномерной волны возмущения в излучающем газе положим в управляющем уравнении (44) $\partial^2 / \partial t^2 \approx c_T^2 \partial^2 / \partial x^2$. В результате, при использовании предположений $c_f^2 \gg c_T^2$ и $P_5 = 0$, получим следующее упрощенное управляющее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= G \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3}, \\ G &:= \frac{c_f^2 c_r^2}{\omega_F c_T^4} \left[\frac{\Upsilon}{1 + \Upsilon} \left(1 + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{3c_r^2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (82)$$

В случае рассеяния скорость c_T^2 заменяется на $c_{gr}^2 + (B/\mu\rho)^2$ и коэффициент G на

$$G' = c_f^2 c_r^2 / \omega_F (c_{gr}^2 + (B/\mu\rho)^2)^2. \quad (83)$$

Дисперсионное соотношение для управляющего уравнения (82) имеет вид:

$$\omega^2 - c_T^2 k^2 = -iG\omega^3. \quad (84)$$

Это уравнение характеризуется следующей частотой:

$$\omega_c(\Gamma) = \frac{\omega_F c_T^4}{c_f^2 c_r^2} \left[\frac{1 + \Upsilon}{\Upsilon} \frac{3c_r^2}{3c_r^2 + c_T^2 + (B/\mu\rho)^2} \right]^2 = \frac{1}{t_\Gamma}. \quad (85)$$

Если справедливо неравенство $\omega < \omega_c(\Gamma)$, то решение уравнения (84) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \pm k_\Gamma &= \frac{\omega}{c_\Gamma} + i \frac{G}{2c_\Gamma} \omega^2 = \\ &= \frac{\omega}{c_\Gamma} + i \frac{c_f^2 c_r^2}{2\omega_F c_\Gamma^5} \left[\frac{\Upsilon}{1 + \Upsilon} \left(1 + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{3c_r^2} \right) \right]^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (86)$$

Сравним теперь характеристическую частоту $\omega_c(\Gamma)$ с частотой $\omega_c'(TA)$ (см. (78)). В случае с преобладанием излучения имеет место приближенное равенство $\omega_c(\Gamma) \simeq \omega_c'(TA)$. Это означает, что переход изотермической магнитно-звуковой моды в радиационную изоэнтропийную магнитно-акустическую происходит при $\omega \sim \omega_c'(TA)$.

С другой стороны, в случае преобладания намагниченной плазмы справедливо неравенство $\omega_c(\Gamma) > \omega_c'(TA)$, т. е. изотермическая магнитно-звуковая мода и радиационная изоэнтропическая магнитно-акустическая мода перекрываются в пределах $\omega_c(\Gamma) > \omega > \omega_c'(TA)$. Следовательно, можно определить частоту перехода между этими двумя модами как

$$\begin{aligned} \omega_c(\Gamma - \Gamma) &= \sqrt{\omega_c(\Gamma)\omega_c'(TA)} = \\ &= \omega_F \frac{c_T^2}{c_f^2} \frac{1 + \Upsilon}{\Upsilon} \sqrt{\frac{3c_r^2}{3c_r^2 + c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}}. \end{aligned} \quad (87)$$

Таким образом, в случае намагниченной материи изотермическая магнитно-звуковая мода сливается при $\omega \sim \omega_c(\Gamma - \Gamma)$ в радиационную изоэнтропийную магнитно-акустическую моду, а диапазон частот для изотермического звука $\omega_c(\Gamma - \Gamma) > \omega > \omega_c(\Gamma)$ становится более узким с уменьшением интенсивности излучения. Если критическая частота $\omega_c(\Gamma - \Gamma)$ становится равной частоте $\omega_c(\Gamma)$, то изотермический режим звука исчезает, когда имеет место преобладание намагниченной плазмы.

В заключение этого подраздела отметим, что уравнение (82) имеет ту же математическую форму, что и уравнение (71), управляющее магнитно-изотермическим режимом звука в случае охлаждения. Как видно из вышеизложенного, радиационная изоэнтропийная магнитно-акустическая волна затухает при $\omega \sim \omega_c(\Gamma)$ за счет поглощения энергии волны. Между тем изотермическая магнитно-звуковая волна исчезает при $\omega \sim \omega_c(TA)$, поскольку эффект радиационного охлаждения становится недостаточным вблизи этой частоты для поддержания изотермического состояния. Магнитно-изотермическая звуковая волна гасится не за счет поглощения волновой

энергии, а за счет неактивной роли радиационного охлаждения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многие современные исследования в области астрофизики требуют изучения динамики излучающих потоков. В данной работе проанализированы уравнения радиационной магнитной гидродинамики с целью понимания их математической структуры. Основная часть проведенных здесь исследований направлена на моделирование линейных явлений в потоке намагниченной плазмы, поскольку результаты линейного анализа часто дают фундаментальные представления и концептуальные рамки, в которых могут быть интерпретированы и поняты результаты нелинейных расчетов. В частности, анализ распространения одномерных волн играет центральную роль в процессе модификации численных схем Годунова высокого порядка, поскольку облегчают построение надежных алгоритмов для решения гиперболических уравнений радиационной акустики.

В работе рассматривается распространение линейных акустических возмущений в бесконечной, однородной, серой излучающей плазме, первоначально находящейся в радиационном равновесии. Во всех предыдущих работах по этой проблеме рассматривалось в основном влияние радиационного энергообмена на волновое движение излучающей жидкости, но при этом не учитывалось воздействие магнитного поля на распространение радиационных волн в намагниченной плазме. Кроме этого, часто пренебрегалось широко используемой в настоящей работе радиационной термодинамикой, которая оказалась весьма полезной при анализе волновых явлений в радиационной гидродинамике.

В работе выведено управляющее уравнение радиационной акустики с учетом влияния поперечного магнитного поля и получены его приближенные решения. Соответствующие ему управляющие уравнения низкого порядка и их аналитические решения могут служить удобным математическим инструментом для исследования поведения акустических волн в различных физических условиях излучающей намагниченной плазмы. Проблема распространения линейных гармонических волн проанализирована в работе с использованием Whitham метода, с помощью которого были установлены фундаментальные свойства этих волн с учетом влияния на их распространение поперечного магнитного поля.

Исходная система уравнений (1)–(6), (9) и (10) радиационной МГД для намагниченной излучающей серой среды описывает поведение как

классических, так и различных радиационно-индуцированных мод, рассмотренных, в частности, в работе (Колесниченко, 2023). Единственное отличие состоит в том, что адиабатическая, изотермическая и изоэнтропическая скорости звука и радиационно-акустическая скорость заменены на адиабатическую, изотермическую и изоэнтропическую магнитно-акустическую скорость и радиационную магнитно-акустическую скорость соответственно. При этом следует заметить, что важным отличием от классических результатов является то, что намагниченная плазма допускает и другие малоизученные в литературе простые волны. К ним, в частности, относятся радиационно-диффузионная мода постоянного объема, моды с затуханием при непрозрачности и затуханием при охлаждении и некоторые другие. Однако на распространение этих волн поперечное магнитное поле влияния не оказывает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бисноватый-Коган Г.С., Блинников С.И.* Распространение волн в средах с высоким давлением излучения. I. Уравнения и случай однородной среды // *Астрофизика*. 1978. Т. 14. С. 563–577.
- Колесниченко А.В.* Простые волны и малоамплитудные возмущения в радиационной газодинамике // *Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2023. № 48. 36 с.
- Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Изд-во Московский лицей, 1998. 412 с.
- Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во Ин. Лит., 1950. 426 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Изд-во Мир, 1977. 624 с.
- Agol E., Krolik J.* Photon damping of waves in accretion disks // *Astrophys. J.* 1998. V. 507. № 1. P. 304–315.
- Balsara D.S.* An analysis of the hyperbolic nature of the equations of radiation hydrodynamics // *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer*. 1999. V. 61. № 5. P. 617–527.
- Balsara D.S.* The eigen structure of the equations of radiation magnetohydrodynamics // *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer*. 1998. V. 61. P. 637–646.
- Buchler J.R.* Radiation hydrodynamics in the fluid frame // *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer*. 1979. V. 22. P. 293–300.
- Cogley A.C., Vincenti W.G.* Application to radiative acoustics of Whitham's method for the analysis of non-equilibrium wave phenomena // *J. Fluid. Mech.* 1969. V. 39. P. 641–666.
- Cox J.P., Giuli R.T.* Principles of Stellar Structure. New York: Gordon & Breach, 1968. 804 p.

- Glatzel W.* On the origin of strange modes and the mechanism of related instabilities // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1994. V. 271. P. 66–74.
- Hsieh S.-H., Spiegel E.A.* The equations of photohydrodynamics // *Astrophys. J.* 1976. V. 207. P. 244–252.
- Jiang Y.-F., Stone J.M., Davi S.W.* A Godunov method for multidimensional radiation magnetohydrodynamics based on a variable Eddington tensor // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2012. V. 199. id. 14 (1–29).
- Johnson B.M., Richard I., Klein R.I.* Numerical tests and properties of waves in radiating fluids // *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer.* 2010. V. 111. P. 723–741.
- Kaneko N., Habe A., Ôno Y.* Linear waves in a radiating and scattering grey medium. III. The effect of a non-transverse magnetic field // *Astrophys. and Space Sci.* 1977. V. 50. P. 451–460.
- Kaneko N., Morita K., Maekawa M.* The comoving-frame equation of radiative transfer in a curvilinear coordinate system // *Astrophys. and Space Sci.* 1984. V. 107. P. 333–346.
- Kaneko N., Morita K., Satoh T., Hayasaki K.* Small-amplitude disturbances in a radiating and scattering grey medium II. Solutions of given real wave number k // *Astrophys. and Space Sci.* 2005. V. 299. P. 263–306.
- Kato S., Fukue J.* Fundamentals of Astrophysical Fluid Dynamics Hydrodynamics: Magnetohydrodynamics, and Radiation Hydrodynamics. Singapore: Springer, 2020. 625 p.
- Lick W.J.* The propagation of small disturbances in a radiating gas // *J. Fluid Mech.* 1964 V. 18. P. 274–284.
- Long H.R., Vincenti W.G.* Radiation-driven acoustic waves in a confined gas // *Phys. Fluids.* 1967. V. 10. P. 1365–1386.
- Lowrie R.B., More J.E.* Issues with high-resolution Godunov methods for radiation hydrodynamics // *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer.* 2001. V. 69. P. 475–489.
- Mihalas D., Mihalas B.W.* On the propagation of acoustic waves in a radiating fluid // *Astrophys. J.* 1983. V. 273. P. 355–362.
- Mihalas D., Mihalas B.W.* Foundations of Radiation Hydrodynamics. New York: Oxford Univ. Press, 1999. 731 p.
- Moore F.K.* Effect of radiative transfer on a sound wave travelling in a gas having γ near one // *Phys. Fluids.* 1966. V. 9. P. 70–80.
- Simmons K.H., Mihalas D.A.* Linearized analysis of the modified $P_{1/3}$ equations // *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer.* 2000. V. 66. P. 263–269.
- Vincenti W., Baldwin B.* Effect of thermal radiation on the propagation of plane acoustic waves // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 12. P. 449–477.
- Whitham G.B.* Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics // *Comm. Pure Appl. Math.* 1959. V. 12. P. 113–158.