

УДК 521.19

## НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ВРАЩЕНИЯ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ НА ПРИМЕРЕ ЮПИТЕРА И ЕГО ГАЛИЛЕЕВЫХ СПУТНИКОВ

© 2024 г. В. В. Пашкевич\*, А. Н. Вершков

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

\* e-mail: pashvladvit@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.08.2023 г.

После доработки 08.09.2023 г.

Принята к публикации 27.09.2023 г.

Данная статья посвящена некоторым аспектам исследования релятивистских эффектов (геодезической прецессии и геодезической нутации, вместе составляющих геодезическое вращение) во вращении небесных тел Солнечной системы на примере Юпитера и его галилеевых спутников (Ио, Европа, Ганимеда и Каллисто). Показано различие векторов угловой скорости геодезического вращения в зависимости от выбора координатной системы отсчета. Так, абсолютная величина вектора угловой скорости геодезического вращения исследуемого спутника относительно барицентра Солнечной системы не будет совпадать с абсолютной величиной аналогичного вектора исследуемого спутника относительно барицентра спутниковой системы планеты. В результате впервые определены наиболее существенные вековые и периодические члены геодезического вращения: а) Юпитера и его галилеевых спутников в углах Эйлера, в возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения исследуемого тела относительно барицентра Солнечной системы и плоскости средней орбиты Юпитера эпохи J2000.0; б) галилеевых спутников Юпитера в возмущающих членах физической либрации и абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения исследуемого тела относительно барицентра системы спутников Юпитера и плоскости средней орбиты исследуемого спутника эпохи J2000.0. Полученные аналитические величины геодезического вращения изучаемых объектов могут быть использованы для численного исследования их вращения в релятивистском приближении, а также использованы для оценки влияния релятивистских эффектов на орбитально-вращательную динамику тел экзопланетных систем.

**Ключевые слова:** релятивистское вращение, геодезическая прецессия, геодезическая нутация, Юпитер, Ио, Европа, Ганимед, Каллисто

**DOI:** 10.31857/S0320930X24010109, **EDN:** OGPYCB

### ВВЕДЕНИЕ

Наиболее существенными эффектами в релятивистском вращении небесных тел вокруг своей оси являются систематический эффект — геодезической прецессии (de Sitter, 1916) и периодический эффект — геодезической нутации (Fukushima, 1991). Оба эти эффекта составляют геодезическое вращение небесного тела и имеют формальное сходство с известными в классической механике явлениями прецессии и нутации. Их появление не связано с действием на тело каких-либо сил, в отличие от вышеупомянутых эффектов классической механики, а обусловлено изменением направления его оси вращения в результате параллельного переноса вектора углового момента тела вдоль его орбиты в искривленном пространстве-времени.

Систематическое, или вековое, изменение геодезического вращения исследуемого тела в рассматриваемых углах  $x$  (в данном исследовании  $\Delta x = x_{\text{релятив.}} - x_{\text{ньютонов.}}$  принимает значения рассматриваемых разностей углов Эйлера ( $\Delta\psi$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\varphi$ ) в релятивистском и ньютоновом приближениях, разностей возмущающих членов физической либрации ( $\Delta\tau$ ,  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\sigma$ ) в релятивистском и ньютоновом приближениях и абсолютной величины вектора углового поворота геодезического вращения  $|\bar{\Lambda}|$  исследуемого тела) может быть представлено в виде полинома по степеням времени:

$$\Delta x_I = \sum_{n=0}^N \Delta x_n t^n,$$

где  $t$  — время;  $\Delta x_n$  — коэффициенты вековых членов;  $N$  — степень аппроксимирующего полинома.

Традиционно в небесной механике нутационное движение оси вращения тела называют периодическим, хотя оно может описываться как периодическими рядами Фурье, так и дополнительно к ним смешанными по времени рядами Пуассона (см., например, Вулард, 1963; Абалакин, 1979; Brumberg, Bretagnon, 2000). Таким образом, в данной статье эффект геодезической нутации исследуемого тела в рассматриваемых углах  $x$  будет представлен в виде суммы периодических членов рядов Фурье и смешанных по времени пуассоновских членов (которые далее в статье будут называться “периодическими” и “смешанными” членами):

$$\Delta x_{II} = \sum_j \sum_{k=0}^M \left( \Delta x_{Cjk} \cos(v_{j0} + v_{j1}t) + \Delta x_{Sjk} \sin(v_{j0} + v_{j1}t) \right) t^k,$$

где  $t$  – время; индекс суммирования  $j$  определяет количество суммируемых членов;  $\Delta x_{Sjk}$ ,  $\Delta x_{Cjk}$  – коэффициенты периодических членов и смешанных по времени пуассоновских членов;  $v_{j0}$ ,  $v_{j1}$  – фазы и частоты исследуемого тела;  $M$  – параметр аппроксимации.

В различной литературе по небесной механике используются разные названия одного и того же понятия, поэтому чтобы не было путаницы и различий дадим определения некоторых из них.

“Средняя орбита тела эпохи”, или “неподвижная орбита тела эпохи”, – это усреднённая относительно выбранной эпохи возмущённая орбита исследуемого тела, учитывающая только вековые (прецессионные) возмущения от возмущающих тел, т. е. орбита без периодических (нутационных) возмущений.

“Мгновенная орбита тела”, или “истинная орбита даты тела”, или просто “орбита даты тела”, – это возмущённая орбита тела на текущий момент времени (даты), учитывающая как вековые (прецессионные) возмущения от возмущающих тел, так и периодические (нутационные) возмущения от возмущающих тел.

На рис. 1 (слово “средняя” опущено) под “орбитой тела” подразумевается “средняя орбита тела эпохи”.

“Средний экватор тела эпохи”, или “неподвижный экватор тела эпохи”, – это усреднённый относительно выбранной эпохи экватор исследуемого тела, на положение которого влияют только вековые (прецессионные) возмущения от возмущающих тел.

“Мгновенный экватор тела”, или “истинный экватор даты тела”, или просто “экватор даты тела”, – определяет истинное положение экватора тела на текущий момент времени (даты), учиты-

вает как вековые (прецессионные) возмущения от возмущающих тел, так и периодические (нутационные) возмущения от возмущающих тел.

На рис. 1 (слово “истинный” опущено) под “экватором даты тела” подразумевается “истинный экватор даты тела”.

В предыдущих работах (Eroshkin, Pashkevich, 2007; Пашкевич, 2016; Pashkevich, Vershkov, 2022) проводились исследования геодезического вращения тел Солнечной системы относительно неподвижной эклиптики эпохи J2000.0 и барицентра Солнечной системы.

Благодаря реализации в последнее время современных космических проектов по изучению планет Солнечной системы и их спутников появились новые долгосрочные высокоточные эфемериды этих тел (Giorgini и др., 2001; Park и др., 2021). Использование этих эфемерид позволяет уточнить орбиты этих тел и, как следствие, построить более высокоточные долгосрочные теории их релятивистского вращения относительно собственных координатных систем. Для этих целей вместо плоскости эклиптики в качестве опорных плоскостей лучше использовать плоскости орбит исследуемых планет и их спутников (Baland и др., 2023).

Основываясь на исследованиях тел Солнечной системы с известными параметрами движения, можно выявить закономерности во влиянии релятивистских эффектов на орбитально-вращательную динамику тел экзопланетных систем. Особенно интересно изучение объектов с существенным геодезическим вращением, обусловленным, в первую очередь, их близостью к возмущающему центральному телу (например, у спутников планет-гигантов), а не массой центрального тела (Pashkevich, Vershkov, 2022), как это бывает у объектов, вращающихся вокруг сверхмассивных центральных тел (например, нейтронных звезд).

Знание аналитических значений геодезического вращения небесных тел позволит использовать релятивистские поправки, в частности, как для вычисления параметров собственного вращения небесных тел при построении высокоточных долгосрочных численных или полуаналитических теорий вращения тел вокруг собственного центра масс в релятивистском приближении, так и для оценки степени влияния релятивистских факторов на данные, получаемые из наблюдений.

Основной целью данного исследования является определение наиболее существенных вековых и периодических членов геодезического вращения Юпитера относительно его неподвижной орбиты эпохи J2000.0 и барицентра Солнечной системы (Solar System Barycenter – SSB), и его галилеевых спутников (Ио (J1), Европы (J2),

Ганимеда (J3), и Каллисто (J4)) относительно неподвижной орбиты Юпитера эпохи J2000.0 и барицентра Солнечной системы и относительно неподвижной орбиты изучаемого спутника Юпитера эпохи J2000.0 и барицентра системы спутников Юпитера (Jovian System Barycenter – JSB).

Для этого будем использовать модифицированный авторами метод, разработанный в статье (Пашкевич, 2016) для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы, имеющих долгосрочные эфемериды.

### ОПИСАНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В следующих четырех пунктах излагается суть применяемого модифицированного метода (Пашкевич, 2016):

1. Задача о геодезическом (релятивистском) вращении Юпитера и его галилеевых спутников изучается относительно кинематически невращающейся (Koreikin и др., 2011) собственной координатной системы исследуемых тел (Archinal и др., 2018). Положения, скорости и орбитальные элементы для Ио, Европы, Ганимеда и Каллисто берутся из Horizons On-Line Ephemeris System (Giorgini и др., 2001). Для Солнца, Луны, Плутона и больших планет положения и скорости вычисляются с помощью фундаментальной эфемериды JPL DE441/LE441 (Park и др., 2021).

2. Используя Horizons On-Line Ephemeris System (Giorgini и др., 2001), для каждого исследуемого тела авторы получили временной ряд оскулирующих элементов его орбиты (для Юпитера на интервале времени от AD999 24 декабря 12 ч. 00 мин. до AD3000 08 января 12 ч. 00 мин. с шагом 1 сут., для его галилеевых спутников на интервале времени от AD1599 26 декабря 00 ч. 00 мин. до AD2400 13 января 00 ч. 00 мин. с шагом 0.1 периода их обращения вокруг Юпитера). Из него методом наименьших квадратов, используя разработанный В.В. Пашкевичем комплекс про-

грамм (Series of Programs for Calculations of Trends) SPCT2023, были вычислены средние элементы их орбит (табл. 1):

$$y = \sum_{n=0}^6 y_n t^n, \quad (1)$$

где  $y_n$  – коэффициенты вековых членов,  $y = i_0, \Omega, J, \Omega_j$ ;  $i_0$  – наклон средней орбиты исследуемого тела эпохи J2000.0 к эклиптике,  $\Omega$  – долгота восходящего узла средней орбиты исследуемого тела эпохи J2000.0 на эклиптике,  $J$  – наклон средней орбиты исследуемого тела эпохи J2000.0 к неподвижному экватору Земли (ICRF),  $\Omega_j = \Upsilon D$  – долгота восходящего узла средней орбиты исследуемого тела эпохи J2000.0 на экваторе Земли эпохи J2000.0 (ICRF – International Celestial Reference Frame (Ma и др., 1998)) (рис. 1),  $t$  – время в юлианских днях) от эпохи J2000.0.

В результате, из полученных средних элементов орбит Юпитера и его галилеевых спутников были вычислены средние орбиты Юпитера (вокруг SSB) и его галилеевых спутников (вокруг JSB) эпохи J2000.0.

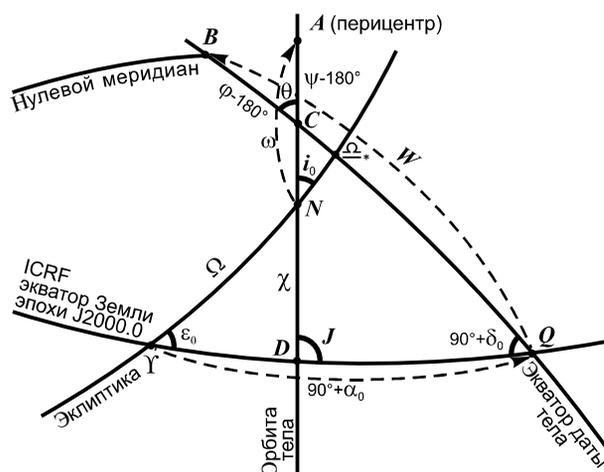


Рис. 1. Определение углов ориентации исследуемого тела для перехода между геоцентрической системой координат и кинематически невращающейся собственной системой координат исследуемого тела.

Таблица 1. Средние элементы орбит Юпитера и его галилеевых спутников эпохи J2000.0

Объект	P	$i_0$ , угл. град	$\Omega$ , угл. град	$J$ , угл. град	$\Omega_j$ , угл. град
Юпитер (B5)	11.862 лет	1.30400566	100.47584272	23.23561035	3.25171174
Ио (J1)	1.769 сут.	2.21474943	-22.16602976	25.50314080	-1.94049249
Европа (J2)	3.551 сут.	2.23865896	-22.03183642	25.50643617	-1.92829117
Ганимед (J3)	7.155 сут.	2.15872228	-22.31943589	25.44569687	-1.90327473
Каллисто (J4)	16.689 сут.	2.02604234	-21.45503716	25.33579801	-1.70796843

Примечание: P – сидерический период обращения (Юпитера вокруг Солнца, галилеевых спутников вокруг Юпитера). Из средних элементов орбит Юпитера и его галилеевых спутников эпохи J2000.0 в табл. 1 приводятся только постоянные члены, которые используются в данном исследовании (так как для неподвижной орбиты эпохи J2000.0  $t = 0$ , следовательно, и вековые члены выражения (1) обращаются в ноль).

На рис. 1 изображены углы ориентации исследуемого тела для перехода между геоцентрической системой координат и неподвижной собственной системой координат исследуемого тела:  $\alpha_0$  – прямое восхождение северного полюса вращения тела;  $\delta_0$  – склонение северного полюса вращения тела;  $W = QB$  – угловое расстояние нулевого меридиана тела, отсчитываемое по подвижному экватору даты тела от неподвижного экватора Земли эпохи J2000.0;  $\varepsilon_0$  – угол наклона неподвижного экватора Земли эпохи J2000.0 к неподвижной эклиптике эпохи J2000.0;  $\psi$  – угол долготы нисходящего узла подвижного экватора даты тела на его средней орбите эпохи J2000.0, отсчитываемый от перигентра его орбиты (точка  $A$  на рис. 1);  $\theta$  – угол наклона подвижного экватора даты тела к его средней орбите эпохи J2000.0;  $\varphi$  – угол собственного вращения тела между восходящим узлом его средней орбиты эпохи J2000.0 и главной осью  $OA$  (рис. 3) минимального момента инерции тела (точка  $B$  на рис. 1);  $\omega$  – угловое расстояние перигентра средней орбиты тела эпохи J2000.0 от узла  $N$ ;  $\chi$  – долгота нисходящего узла эклиптики на средней орбите исследуемого тела эпохи J2000.0;  $Y$  – точка весеннего равноденствия Земли эпохи J2000.0;  $\Omega_*$  – точка осеннего равноденствия даты исследуемого тела на эклиптике.

3. С помощью формул, приведенных в данном пункте, вычисляются временные ряды скоростей геодезического вращения для каждого исследуемого тела в углах Эйлера, в возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора угловой скорости вращения, с шагом: 12 ч. для Юпитера (B5), 4 ч. 14 мин. 44.160 с для Ио (J1), 8 ч. 31 мин. 20.640 с для Европы (J2), 17 ч. 10 мин. 19.200 с для Ганимеда (J3) и 1 сут. 16 ч. 3 мин. 21.600 с для Каллисто (J4) на 800-летнем интервале времени (от AD1599 26 декабря 00 ч. 00 мин. до AD2400 13 января 00 ч. 00 мин.). (Шаг выбирался с учётом достижения необходимой точности для дальнейших вычислений из получаемых временных рядов периодических членов геодезического вращения исследуемых тел. Для спутников этот шаг равен 0.1 периода их обращения вокруг Юпитера.)

Формула вектора угловой скорости геодезического вращения для любых тел Солнечной системы имеет следующий вид (Eroshkin, Pashkevich, 2007):

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|^3} (\bar{R}_i - \bar{R}_j) \wedge \left( \frac{3}{2} \dot{\bar{R}}_i - 2 \dot{\bar{R}}_j \right), \quad (2)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме;  $G$  – гравитационная постоянная; индекс  $i$  соответствует исследуемым телам (Юпитеру и его галилеевым спутникам),  $a, j$  – возмущающим телам (Солнцу, Луне,

Плутону и большим планетам (Юпитер исключается из возмущающих тел, когда становится исследуемым телом));  $\bar{R}_i, \dot{\bar{R}}_i, \bar{R}_j, \dot{\bar{R}}_j$  – барицентрические векторы положений и скоростей  $i$ -го и  $j$ -го тела, соответственно;  $m_j$  – масса  $j$ -го тела; символ  $\wedge$  означает векторное произведение.

Разность векторов скоростей в правой части векторного произведения формулы (2) не является симметричной (т. е. в данном случае формула не является симметричной из-за разных величин коэффициентов в разности барицентрических векторов скоростей исследуемого и возмущаемого тел) относительно выбора начала отсчета координатной системы, таким образом, результирующее значение вектора, вычисленного по этой формуле, будет зависеть от выбранной системы координат.

Для наглядности вышесказанного сравним два исследуемых вектора угловой скорости геодезического вращения в различных системах координат:

1) вектор угловой скорости геодезического вращения, вычисляемый относительно SSB, имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{(SSB)i} &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{r}_{ji}|^3} (\bar{r}_{ji}) \wedge \left( \frac{3}{2} \dot{\bar{r}}_{ji} - \frac{1}{2} \dot{\bar{R}}_{(SSB)j} \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{r}_{ji}|^3} \left( \frac{3}{2} \bar{r}_{ji} \wedge \dot{\bar{r}}_{ji} - \frac{1}{2} \bar{r}_{ji} \wedge \dot{\bar{R}}_{(SSB)j} \right), \end{aligned}$$

где  $\bar{R}_{(SSB)i}, \dot{\bar{R}}_{(SSB)i}, \bar{R}_{(SSB)j}, \dot{\bar{R}}_{(SSB)j}$  – барицентрические векторы (относительно SSB) положений и скоростей  $i$ -го и  $j$ -го тела, соответственно;  $\bar{r}_{ji} = \bar{R}_{(SSB)i} - \bar{R}_{(SSB)j}$ ;  $\dot{\bar{r}}_{ji} = \dot{\bar{R}}_{(SSB)i} - \dot{\bar{R}}_{(SSB)j}$ ;

2) вектор угловой скорости геодезического вращения, вычисляемый относительно JSB, имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{(JSB)i} &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{r}_{ji}|^3} (\bar{r}_{ji}) \wedge \left( \frac{3}{2} \dot{\bar{r}}_{ji} - \frac{1}{2} \dot{\bar{R}}_{(JSB)j} \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{r}_{ji}|^3} \left( \frac{3}{2} \bar{r}_{ji} \wedge \dot{\bar{r}}_{ji} - \frac{1}{2} \bar{r}_{ji} \wedge \dot{\bar{R}}_{(JSB)j} \right), \end{aligned}$$

где  $\bar{R}_{(JSB)i}, \dot{\bar{R}}_{(JSB)i}, \bar{R}_{(JSB)j}, \dot{\bar{R}}_{(JSB)j}$  – барицентрические векторы (относительно JSB) положений и скоростей  $i$ -го и  $j$ -го тела, соответственно;  $\bar{r}_{ji} = \bar{R}_{(JSB)i} - \bar{R}_{(JSB)j}$ ;  $\dot{\bar{r}}_{ji} = \dot{\bar{R}}_{(JSB)i} - \dot{\bar{R}}_{(JSB)j}$ .

В результате выражение разности этих векторов угловой скорости геодезического вращения имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{(SSB)i} - \bar{\sigma}_{(JSB)i} &= \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{r}_{ji}|^3} \left( \frac{1}{2} \bar{r}_{ji} \wedge \dot{\bar{R}}_{(JSB)j} - \frac{1}{2} \bar{r}_{ji} \wedge \dot{\bar{R}}_{(SSB)j} \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{r}_{ji}|^3} \frac{1}{2} (\bar{r}_{ji}) \wedge (\dot{\bar{r}}_{(SSB)(JSB)}), \end{aligned}$$

где  $\dot{\bar{r}}_{(SSB)(JSB)} = \dot{\bar{R}}_{(JSB)j} - \dot{\bar{R}}_{(SSB)j}$  – вектор скорости движения барицентров друг относительно друга. Далее в формулах индекс  $i$  будет опущен. Следовательно  $\bar{\sigma}_{SSB} \neq \bar{\sigma}_{JSB}$ . (Заметим, что если бы формула была симметричной, например:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|^3} (\bar{R}_i - \bar{R}_j) \wedge \left( \frac{3}{2} \dot{\bar{R}}_i - \frac{3}{2} \dot{\bar{R}}_j \right),$$

тогда

$$\bar{\sigma}_{(SSB)i} = \bar{\sigma}_{(JSB)i} = \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{r}_{ji}|^3} \left( \frac{3}{2} \bar{r}_{ji} \wedge \dot{\bar{r}}_{ji} \right).$$

Для симметричной формулы результирующее значение величины вектора не зависит от выбора координатной системы.)

Тем самым в нашем исследовании показана зависимость величины эффекта геодезического вращения от выбора координатной системы из вида самой формулы.

Поэтому для исследуемых спутников относительно разных систем координат существуют разные векторы угловой скорости их геодезического вращения, более того, эти векторы не переходят один в другой путем параллельного переноса или угловых поворотов, как это происходит для векторов угловой скорости в евклидовом пространстве (т. е. не проецируются друг в друга и имеют разные величины своих абсолютных значений).

Таким образом, вектор угловой скорости геодезического вращения исследуемого спутника относительно SSB  $\bar{\sigma}_{SSB}$  не будет совпадать с аналогичным вектором исследуемого спутника относительно JSB  $\bar{\sigma}_{JSB}$  (рис. 2).

Известно, что не возмущаемый (т. е. не возмущаемый другими телами, кроме центрального тела – задача двух тел) вектор угловой скорости геодезического вращения исследуемого тела перпендикулярен плоскости орбиты этого тела (Baland и др., 2023). Поэтому для наглядности различия между векторами, на рис. 2 будем пренебрегать возмущениями от других тел, таким образом, вектор спутника Юпитера  $\bar{\sigma}_{JSB}$  перпендикулярен плоскости своей средней орбиты, а другой вектор спутника Юпитера  $\bar{\sigma}_{SSB}$  перпендикулярен плоскости средней орбиты Юпитера.

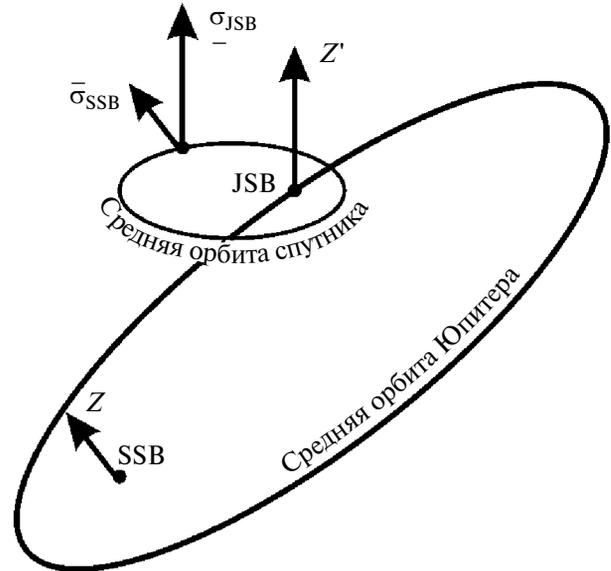


Рис. 2. Различие между вектором угловой скорости геодезического вращения исследуемого спутника относительно SSB и аналогичным вектором исследуемого спутника относительно JSB. Ось SSBZ перпендикулярна плоскости средней орбиты Юпитера, а ось JSBZ' перпендикулярна плоскости средней орбиты спутника Юпитера.

В данном исследовании были вычислены значения векторов угловой скорости геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера относительно SSB и относительно JSB и значение вектора угловой скорости геодезического вращения Юпитера относительно SSB. Для их вычисления в формуле (1) используются барицентрические координаты и скорости, взятые из эфемерид JPL DE441/LE441 (Park и др., 2021), Horizons On-Line Ephemeris System (Giorgini и др., 2001), координатная система которых является геоцентрической. Поэтому необходимо произвести редукцию компонент вектора угловой скорости геодезического вращения Юпитера и его галилеевых спутников от геоцентрической системы координат к телоцентрической координатной системе (Archinal и др., 2018).

Благодаря комментариям в работе (Baland и др., 2023) Пашкевичем была найдена и исправлена ошибка в знаке в формуле редукции (3) (Пашкевич, 2016), в этой формуле  $-\varepsilon_*$  нужно заменить на  $\varepsilon_*$ , в результате исправленная формула имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = r(\gamma_* B) p(\varepsilon_*) r(\gamma_0 \gamma_*) p(\varepsilon_0) r(\Delta) \begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_* = \angle \underline{\gamma_*} Q$  (рис. 1) – угол наклона от неподвижной эклиптики эпохи J2000.0 к экватору даты

исследуемого тела; в данной статье вместо  $\gamma_0, \gamma_*$  используются обозначения  $\gamma, \underline{\Omega}_*$ , соответственно (т. е.  $\gamma_* \mathbf{B} = \underline{\Omega}_* \mathbf{B}$ ,  $\gamma_0 \gamma_* = \gamma \underline{\Omega}_*$  (рис. 1),  $\mathbf{B}$  – точка пересечения нулевого меридиана исследуемого тела с его экватором даты (рис. 1)); матрицы поворота на угол  $a$  определяются формулами (Абалакин, 1979):

$$\begin{aligned} r(a) &= \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ p(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & -\sin a & \cos a \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

В данной статье формула (3) упростится (так как в данном исследовании используются эфемериды JPLDE441/LE441 (Park и др., 2021) и Horizons On-Line Ephemeris System (Giorgini и др., 2001), не требующие дополнительного поворота на  $\Delta = -0''.05294$  вдоль экватора Земли, как это было необходимо в более ранних эфемеридах JPL, не используемых в данной работе):

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = r(\underline{\Omega}_* \mathbf{B}) p(\varepsilon_*) r(\gamma \underline{\Omega}_*) p(\varepsilon_0) \begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.448 = 84381''.448$  (Giorgini и др., 2001; Park и др., 2021);  $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$  – компоненты геоцентрического вектора угловой скорости геодезического вращения тела;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – компоненты телоцентрического вектора угловой скорости геодезического вращения тела;  $X, Y, Z$  – компоненты вектора  $\bar{R}$  в формуле (2). В данном исследовании вместо формулы (5) использовалась эквивалентная ей формула, требующая меньшего числа вычислений и поворотов:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = r(W) p(90^\circ - \delta_0) r(\alpha_0 + 90^\circ) \begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{pmatrix}, \quad (6)$$

значения величин  $\alpha_0, \delta_0, W$  можно найти в работе (Archinal и др., 2018).

Итак, как показано на рис. 1, с помощью трех матриц в формуле (6) производится редукция компонент вектора угловой скорости геодезического вращения Юпитера и его галилеевых спутников от геоцентрической системы координат (координатная система используемых в данном исследовании эфемерид (Park и др., 2021; Giorgini и др., 2001) к телоцентрической координатной системе (Archinal и др., 2018)), осуществляя следующие повороты:

- поворот на угол  $\alpha_0 + 90^\circ$  вдоль неподвижного геоэкваатора (ICRF) эпохи J2000.0 от точки весеннего равноденствия Земли эпохи J2000.0 к точке восходящего узла экватора даты изучаемого тела;

- поворот на угол  $90^\circ - \delta_0$  от неподвижного геоэкваатора (ICRF) эпохи J2000.0 к экватору даты изучаемого тела;

- поворот на угол  $W$  вдоль экватора даты изучаемого тела от точки восходящего узла экватора даты изучаемого тела к точке пересечения нулевого меридиана планеты с экватором даты изучаемого тела.

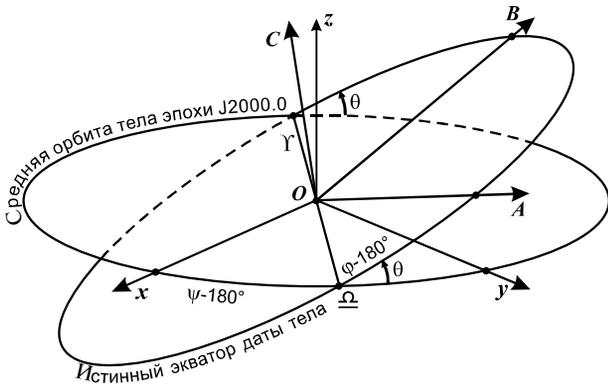
Скорости геодезического вращения тел Солнечной системы определяются для Юпитера и его галилеевых спутников в углах Эйлера и в возмущающих членах физической либрации с использованием следующих выражений (Пашкевич, 2016):

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\psi} &= -\frac{\sigma_1 \sin \varphi + \sigma_2 \cos \varphi}{\sin \theta} \\ \Delta\dot{\theta} &= -\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi \\ \Delta\dot{\phi} &= \sigma_3 - \Delta\dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta \Delta\dot{\psi} &= -\sigma_1 \sin \varphi - \sigma_2 \cos \varphi = \Delta(I\dot{\sigma}) \\ \Delta\dot{\theta} &= -\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi = \Delta\dot{\rho} \end{aligned} \right\}.$$

$$\Delta\dot{\psi} + \Delta\dot{\phi} = \sigma_3 - (\sigma_1 \sin \varphi + \sigma_2 \cos \varphi) \tan \frac{\theta}{2} = \Delta\dot{\tau}$$

Здесь  $\psi, \theta, \varphi$  – углы Эйлера (рис. 1 и 3) (заметим, что в данном исследовании углы Эйлера (рис. 3) относятся к экватору вращения (истинному экватору даты) исследуемого тела, как определено в работе (Archinal и др., 2018), и могут не совпадать с углами Эйлера, определенными в классической механике относительно экватора фигуры исследуемого тела (Суслов, 1946), за исключением случаев, когда экватор фигуры исследуемого тела совпадает с экватором его вращения);  $\tau, \rho$  и  $\sigma$  (не стоит путать с вектором  $\bar{\sigma}$ ) – возмущающие члены физической либрации исследуемого тела для его средней орбиты эпохи J2000.0 в долготе, в наклоне и в долготе узла, соответственно;  $I$  – постоянный угол наклона экватора исследуемого тела эпохи J2000.0 к его средней орбите эпохи J2000.0;  $\Delta\dot{\psi} = \dot{\psi}_r - \dot{\psi}$ ,  $\Delta\dot{\theta} = \dot{\theta}_r - \dot{\theta}$  и  $\Delta\dot{\phi} = \dot{\phi}_r - \dot{\phi}$  – разности производных по времени от релятивистских и ньютоновых углов Эйлера исследуемого тела, соответственно;  $\Delta(I\dot{\sigma}) = I\dot{\sigma}_r - I\dot{\sigma}$ ,  $\Delta\dot{\rho} = \dot{\rho}_r - \dot{\rho}$  и  $\Delta\dot{\tau} = \dot{\tau}_r - \dot{\tau}$  – разности производных по времени от релятивистских и ньютоновых возмущающих членов физической либрации исследуемого тела, соответственно; точка означает дифференциро-



**Рис. 3.** Определение углов Эйлера исследуемого тела относительно кинематически невращающейся его собственной системы координат (ось инерции  $OC$  перпендикулярна плоскости истинного экватора даты исследуемого тела, а ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости средней орбиты исследуемого тела эпохи J2000.0).

вание по времени. По сути, эти различия являются скоростями геодезического вращения исследуемого тела в углах Эйлера и в его возмущающих членах физической либрации.

Значения углов  $\theta$  и  $\varphi$ , используемых в вычислениях по формуле (7), определяются из решения сферического треугольника  $DCQ$  (рис. 1), применяя для этого формулы сферической геометрии (Жаров, 2006). В нем известны два угла ( $Di$  и  $Q$ ) и сторона между ними ( $DQ = YQ - YD = \alpha_0 + 90^\circ - \Omega_j$ ). В результате вычисляются стороны  $DC$  и  $QC$  и угол  $\theta$ , а угол  $\varphi = QB - QC + 180^\circ = W - QC + 180^\circ$ .

Выражение для абсолютной величины вектора угловой скорости геодезического вращения исследуемого тела имеет вид:

$$|\vec{\sigma}| = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}. \quad (8)$$

Данная формула верна, так как величина вектора не зависит от выбранной для его проецирования системы координат.

4. Наиболее существенные составляющие скорости геодезического вращения исследуемого тела находятся из вычисленных временных рядов аналитическими и численными методами – численного интегрирования, наименьших квадратов и спектрального анализа. В результате вычисляются значения коэффициентов основных систематических и периодических членов скорости геодезического вращения тела.

Численно интегрируя методом “Гаусса–Лежандра по 10 точкам” (Press и др., 1986) полученные значения скоростей геодезического вращения исследуемого тела в углах Эйлера, в его возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора угловой скорости вращения, вычисляются численные временные ряды величин геодезического вращения

исследуемого тела в рассматриваемых углах и абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения тела  $|\vec{\Lambda}| = \left| \int \vec{\sigma} dt \right|$ .

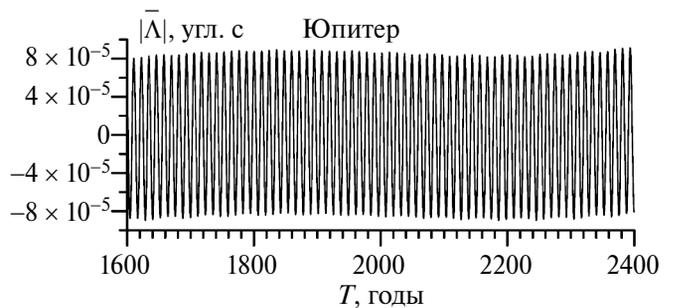
Выражение для вычисления величины эффекта геодезического вращения небесного тела имеет вид:

$$\Delta x = \Delta x_I + \Delta x_{II} = \sum_{n=0}^N \Delta x_n t^n + \sum_j \sum_{k=0}^M \left( \Delta x_{Cjk} \cos(v_{j0} + v_{j1}t) + \Delta x_{Sjk} \sin(v_{j0} + v_{j1}t) \right) t^k, \quad (9)$$

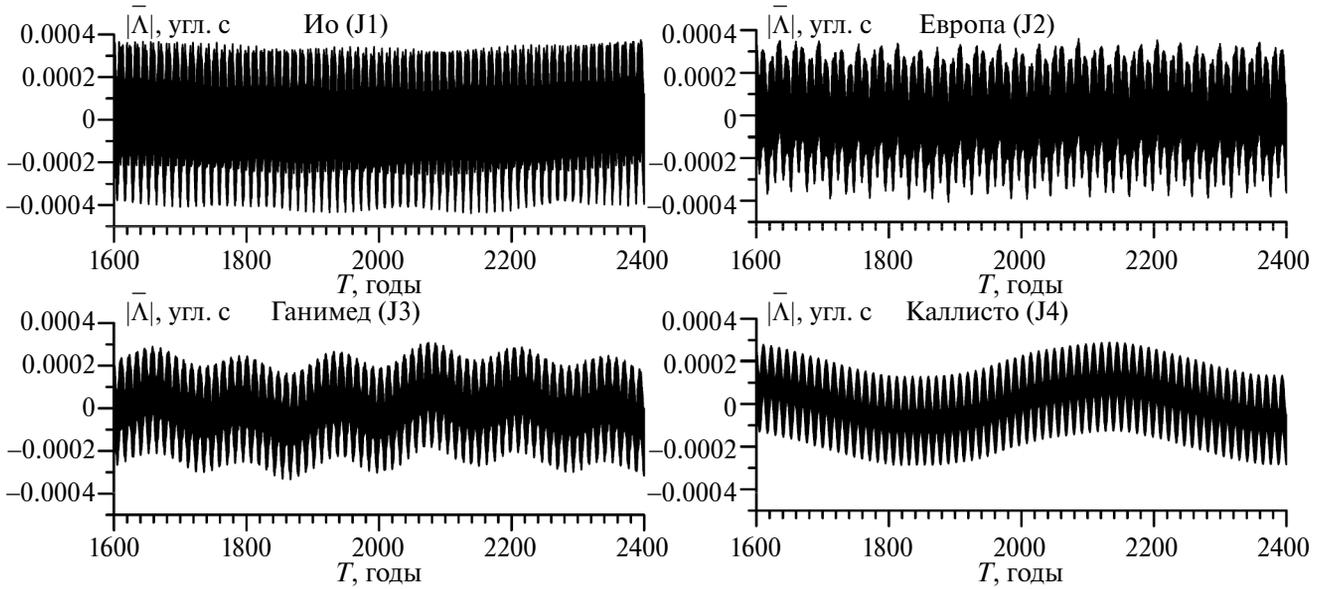
где  $\Delta x_n$  – коэффициенты вековых членов;  $\Delta x_{Sjk}$ ,  $\Delta x_{Cjk}$  – коэффициенты периодических и смешанных членов при синусах и косинусах, соответственно;  $\Delta x = x_{\text{релятив.}} - x_{\text{ньютон.}}$ ;  $\Delta x = \Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta t, \Delta\rho, \Delta I\sigma, |\vec{\Lambda}|$ ;  $v_{j0}, v_{j1}$  – фазы и частоты исследуемого тела в данном исследовании берутся из работы (Archinal и др., 2018); индекс суммирования  $j$  определяет количество суммируемых периодических членов и его значение изменяется для каждого исследуемого тела;  $t$  – время в юлианских днях;  $N = 1, M = 1$ .

Сначала методом наименьших квадратов в рассматриваемых углах для каждого исследуемого тела из полученных для него численных временных рядов вычисляются систематические члены геодезической прецессии  $\Delta x_p$ , и их величины вычитаются из исходных временных рядов. Таким образом, исключив вековые члены из исходных временных рядов, результирующие ряды содержат только периодические члены (некоторые из таких рядов приведены на рис. 4–6).

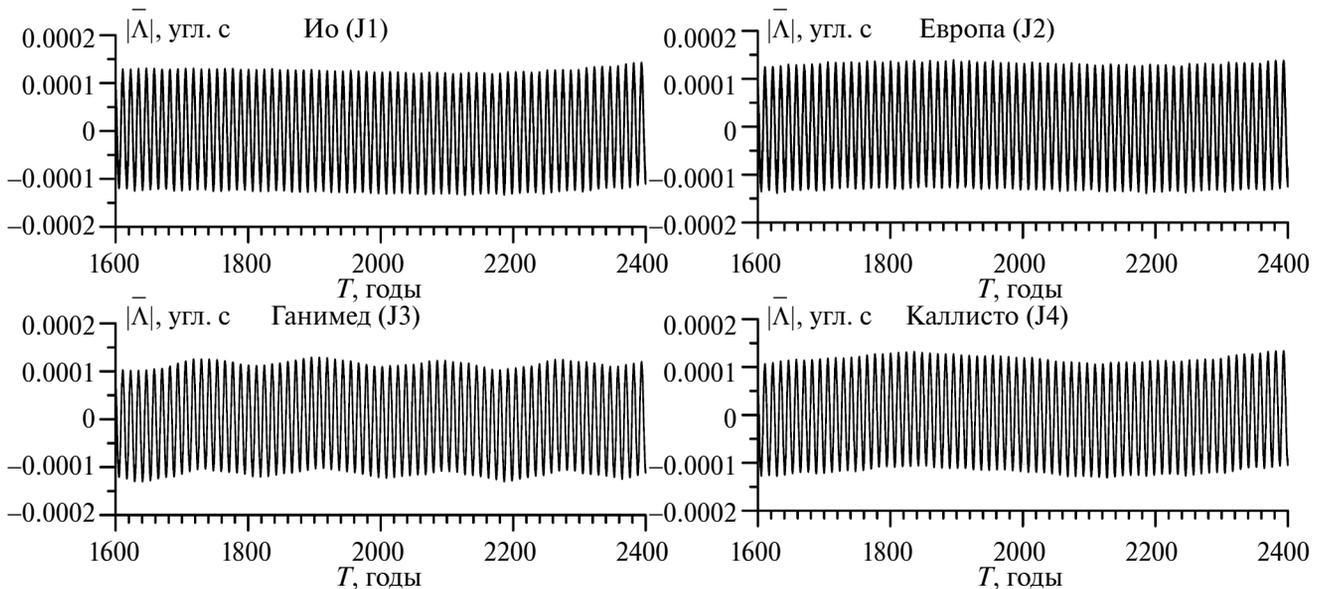
Далее, используя результирующие временные ряды и набор периодических гармоник, взятых из работы (Archinal и др., 2018), во всех исследуемых углах для каждого исследуемого тела методом спектрального анализа (Jenkins, Watts, 1969) авторы строят спектры мощности (некоторые из них



**Рис. 4.** Временной ряд изменения геодезической нутации Юпитера для абсолютной величины вектора его углового поворота геодезического вращения  $|\vec{\Lambda}_{SSB}|$  относительно SSB и средней орбиты Юпитера на интервале времени 800 лет.



**Рис. 5.** Временные ряды изменения геодезической нутации галилеевых спутников Юпитера для абсолютной величины вектора их углового поворота геодезического вращения  $|\bar{\Lambda}_{SSB}|$  относительно SSB и средней орбиты Юпитера на интервале времени 800 лет.



**Рис. 6.** Временные ряды изменения геодезической нутации галилеевых спутников Юпитера для абсолютной величины вектора их углового поворота геодезического вращения  $|\bar{\Lambda}_{JSB}|$  относительно JSB и средней орбиты спутника на интервале времени 800 лет.

приведены на рис. 7–9). С их помощью определяется дальнейший порядок (в порядке убывания от гармоник с наибольшей мощностью к гармонике с наименьшей мощностью) вычисления периодических членов, соответствующих этим гармоникам, и их исключения из результирующего ряда. В результате для каждого исследуемого тела методом наименьших квадратов вычисляются периодические члены геодезической нутации  $\Delta\chi_{II}$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Для Юпитера и его галилеевых спутников в углах Эйлера, в возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота геодезического вращения вычислены вековые (табл. 2 и 3) и периодические члены их геодезического вращения (табл. 4 и 5). Их значения используются в выражении (9) для вычисления величины эффекта геодезического вращения небесного тела.

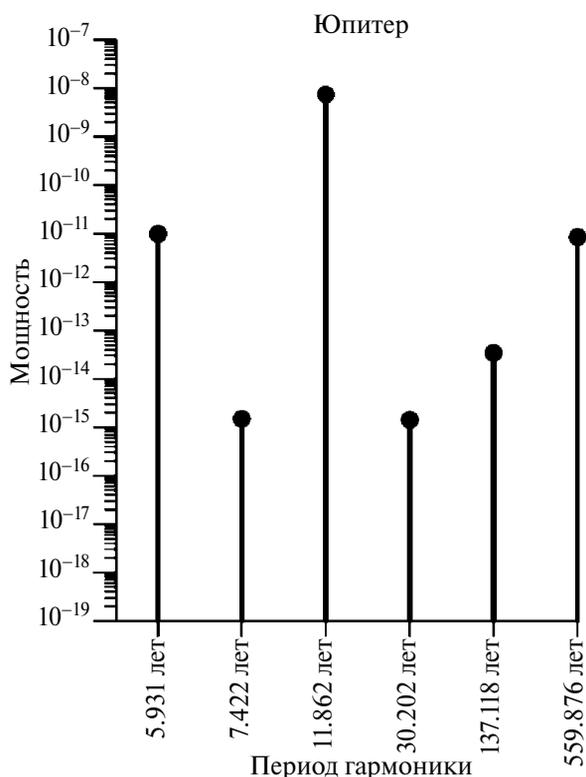


Рис. 7. Спектр мощности Юпитера для абсолютной величины вектора его углового поворота геодезического вращения  $|\bar{\Lambda}_{SSB}|$  относительно SSB и средней орбиты Юпитера.

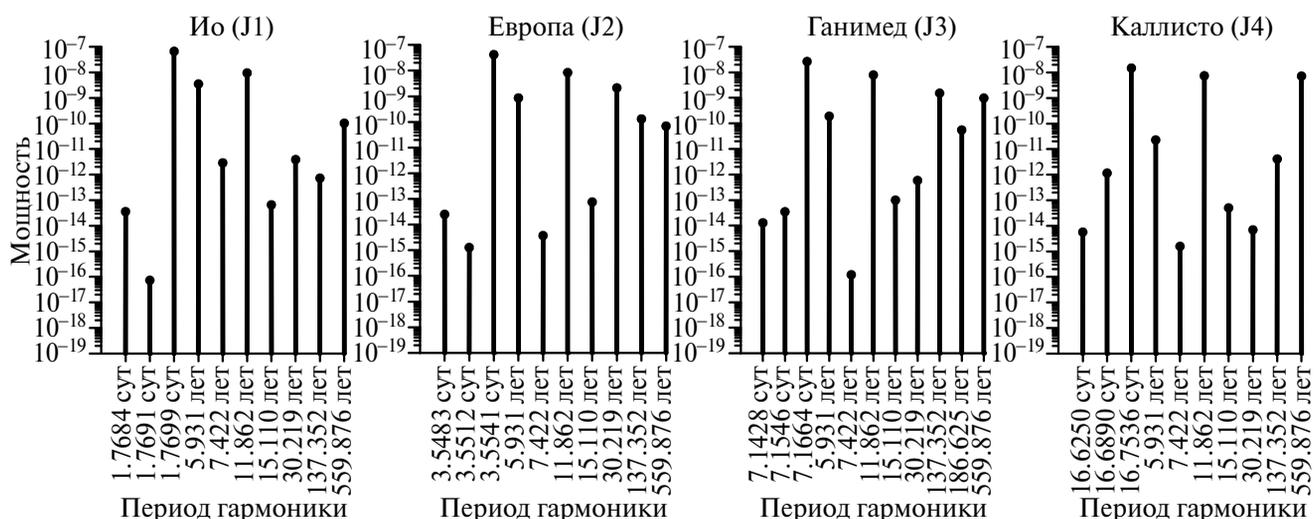


Рис. 8. Спектры мощности галилеевых спутников Юпитера для абсолютной величины вектора их углового поворота геодезического вращения  $|\bar{\Lambda}_{SSB}|$  относительно SSB и средней орбиты Юпитера.

Вековые (табл. 3) и периодические (табл. 5) члены геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера относительно JSB из-за особенности в синусе наклона  $(\sin \theta)^{-1}$  (7) вычисляются только в возмущающих членах физической либрации и абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения тела относительно средней орбиты исследуемого спутника эпохи J2000.0. В табл. 4 и 5 оставлены наиболее

существенные периодические члены с наиболее весомыми гармониками в их спектрах мощности (рис. 7–9) (в данном случае исключены гармоники, чей вклад в спектр мощности на три порядка меньше максимального). Так, из шести гармоник спектра для абсолютной величины вектора углового поворота геодезического вращения Юпитера (рис. 7) оставлены только три его гармоники (табл. 4).

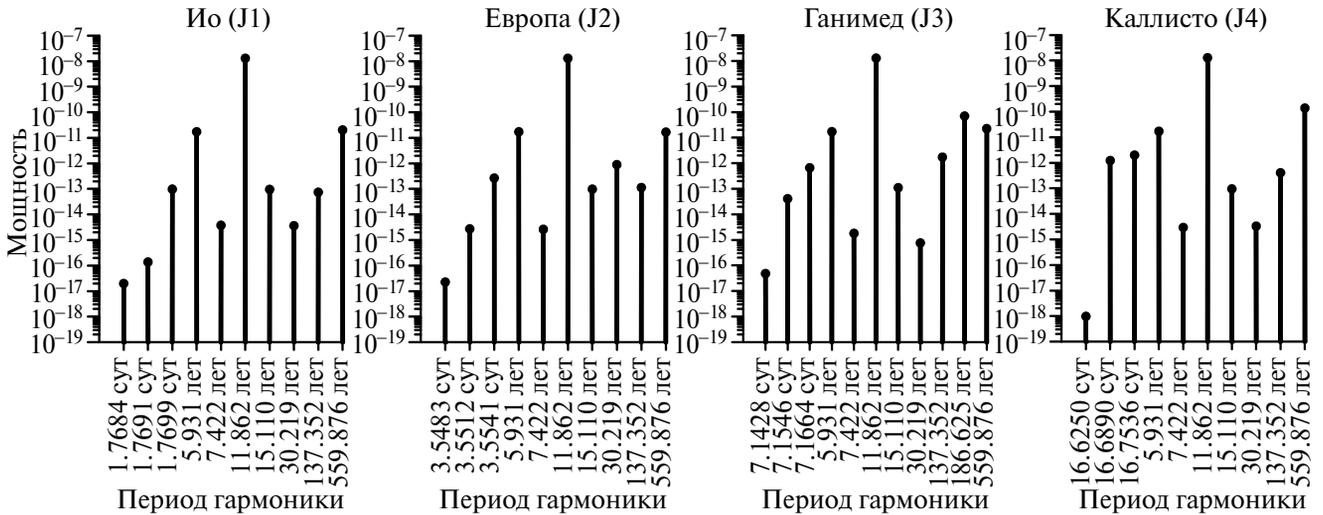


Рис. 9. Спектры мощности галилеевых спутников Юпитера для абсолютной величины вектора их углового поворота геодезического вращения  $|\bar{\Lambda}_{JSB}|$  относительно JSB и средней орбиты спутника.

Таблица 2. Вековые члены геодезического вращения Юпитера и его галилеевых спутников, вычисленные для углов Эйлера, параметров физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота относительно SSB и средней орбиты Юпитера

Тело \ Параметр (угл. с)	Юпитер (B5), $a=5.2029$ а. е.	Ио (J1), $a=421800$ км	Европа (J2), $a=671100$ км	Ганимед (J3), $a=1070400$ км	Каллисто (J4), $a=1882700$ км
$\Delta\psi_1$	$-0.3117t$	$-0.4264t$	$-0.2490t$	$-0.2977t$	$-0.2944t$
$\Delta\theta_1$	$5 \times 10^{-7}t$	$-0.1210t$	$-0.0236t$	$-0.0062t$	$-0.0044t$
$\Delta\varphi_1$	$-2 \times 10^{-5}t$	$-1341.5587t$	$-420.1821t$	$-130.7324t$	$-31.8793t$
$\Delta\tau_1$	$-0.3118t$	$-1341.9851t$	$-420.4310t$	$-131.0301t$	$-32.1737t$
$\Delta(I\sigma)_1$	$-0.0170t$	$-0.0239t$	$-0.0151t$	$-0.0157t$	$-0.0139t$
$ \bar{\Lambda} _1$	$0.3118t$	$1342.0490t$	$420.4637t$	$131.0456t$	$32.1790t$

Таблица 3. Вековые члены геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера, вычисленные для параметров физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота относительно JSB и средней орбиты спутника

Спутник \ Параметр (угл. с)	Ио (J1), $a=421800$ км	Европа (J2), $a=671100$ км	Ганимед (J3), $a=1070400$ км	Каллисто(J4), $a=1882700$ км
$\Delta\theta_1$	$-0.0609t$	$0.0086t$	$0.0027t$	$0.0027t$
$\Delta\tau_1$	$-1342.0881t$	$-420.5343t$	$-131.1334t$	$-32.2770t$
$\Delta(I\sigma)_1$	$-0.1195t$	$-0.0229t$	$0.0020t$	$0.0094t$
$ \bar{\Lambda} _1$	$1342.0881t$	$420.5342t$	$131.1334t$	$32.2770t$

Примечание: в табл. 2–3:  $t$  – динамическое барицентрическое время (Temps Dynamique Barycentrique – TDB) измеряется в юлианских тысячелетиях (tjy) (365250 суток) от эпохи J2000.0;  $a$  – большая полуось орбит Юпитера и его спутников.

**Таблица 4.** Периодические и смешанные члены геодезического вращения Юпитера и его галилеевых спутников, вычисленные для углов Эйлера, параметров физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота относительно SSB и средней орбиты Юпитера

Тело	Параметр (угл. с)	Период	Аргумент	Коэффициент при $\cos(\text{аргумент}), ((\text{угл. с}) \times 10^{-6})$	Коэффициент при $\sin(\text{аргумент}), ((\text{угл. с}) \times 10^{-6})$
Юпитер (B5)	$\Delta\psi_{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	$21.6144+4.4208t$	$-82.5517-0.8898t$
		559.876 лет	Je	$13.4688-76.0074t$	$10.8813+65.3776t$
		5.931 лет	Jd	$2.9843+0.4400t$	$-0.8552+0.6162t$
		137.118 лет	Jc	$-0.4169+3.3367t$	$0.3496+2.1046t$
	$\Delta\theta_{II}$	559.876 лет	Je	$-2.9523+21.2373t$	$-3.6402-18.0637t$
		137.118 лет	Jc	$0.0638-0.9536t$	$-0.1239-0.5583t$
		30.202 лет	Jb	$-0.0271-0.0162t$	$0.0040-0.0807t$
		11.862 лет	$\lambda_5$	$-0.0094-0.0194t$	$-0.0060+0.0637t$
	$\Delta\varphi_{II}$	559.876 лет	Je	$-15.9931+74.9080t$	$-9.4152-67.1425t$
		137.118 лет	Jc	$0.5726-3.2540t$	$-0.2499-1.8430t$
		30.202 лет	Jb	$-0.1311+0.5056t$	$0.0474-0.4328t$
	$\Delta\tau_{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	$21.2540+4.5698t$	$-82.8337+0.1697t$
		5.931 лет	Jd	$3.0064+0.2687t$	$-0.8390+0.4810t$
		559.876 лет	Je	$-2.5144-1.1126t$	$1.4574-1.7675t$
	$\Delta(I\sigma)_{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	$1.1776+0.2670t$	$-4.4928-0.0320t$
		559.876 лет	Je	$0.4426-4.1923t$	$0.9392+3.6135t$
		5.931 лет	Jd	$0.1625+0.0259t$	$-0.0466+0.0346t$
		137.118 лет	Jc	$-0.0700+0.1832t$	$0.0750+0.1141t$
	$ \bar{\Lambda} _{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	$-21.2545-4.5696t$	$82.8332-0.1682t$
		5.931 лет	Jd	$-3.0064-0.2709t$	$0.8391-0.4821t$
559.876 лет		Je	$2.4911+1.2239t$	$-1.4717+1.6682t$	
Ио (J1)	$\Delta\psi_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-22950.8220+101040.2153t$	$-7297.0660-86574.4459t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$8045.0564-6713.4553t$	$-9556.7202-3883.9093t$
		7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$-541.0161+326.3821t$	$2537.1069+125.8945t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-863.5325-2052.7101t$	$1698.5568-2130.0943t$
	$\Delta\theta_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-3726.9530+23122.2346t$	$-4106.0024-19932.8723t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$559.2590-1049.2446t$	$283.3482-547.2629t$
		7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$-148.5377+48.3189t$	$-23.0757+9.2947t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-65.7976+61.1071t$	$-81.3023-188.5410t$
	$\Delta\varphi_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$22917.6868-100878.6524t$	$7282.7611+86438.5192t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-8033.5350+6703.3373t$	$9542.5533+3876.9082t$
		7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$539.5816-325.9930t$	$-2533.3371-122.5827t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$862.2137+2047.1093t$	$-1696.2122+2129.8247t$
	$\Delta\tau_{II}$	1.770 сут.	$D_{51}$	$-9.2087+11.6153t$	$258.7824+0.3468t$
		11.862 лет	$\lambda_5$	$22.1710+4.1205t$	$-82.2192-1.9509t$
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-33.2136+163.3117t$	$-14.1985-137.1139t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$11.7507-10.7380t$	$-14.3487-6.5202t$
7.422 лет		$\Omega_{L51}$	$-0.7427+0.7112t$	$3.7721+0.4400t$	
5.931 лет		J8	$3.0899+0.7191t$	$-0.7681+0.6082t$	
30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-1.2701-3.1745t$	$2.4906-2.7694t$		

Таблица 4. Продолжение

Тело	Параметр (угл. с)	Период	Аргумент	Коэффициент при cos(аргумент), ((угл. с)×10 <sup>-6</sup> )	Коэффициент при sin(аргумент), ((угл. с)×10 <sup>-6</sup> )	
	$\Delta(I\sigma)_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-1248.2306+5497.0427t$	$-397.3204-4709.6679t$	
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$437.5331-364.8521t$	$-519.8317-211.8508t$	
		7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$-29.6306+16.9071t$	$138.2311+7.8380t$	
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-47.0880-112.6170t$	$92.6421-115.4349t$	
	$ \bar{\Lambda} _{II}$	1.770 сут.	$D_{51}$	$9.2013-11.6068t$	$-258.5789-0.3475t$	
		11.862 лет	$\lambda_5$	$-24.5096-5.1278t$	$94.4672+0.0717t$	
		5.931 лет	J8	$36.4659-4.3212t$	$46.8850+2.1410t$	
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$4.9330-46.8809t$	$8.8519+39.1806t$	
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$1.3223-0.0870t$	$-1.4611-0.3814t$	
		7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$1.1845-0.1205t$	$-1.2179-0.0138t$	
	Европа (J2)	$\Delta\psi_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-11386.5075+35810.7142t$	$6680.5149-28130.7476t$
			137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-1915.1708-1221.5746t$	$1644.6876-3416.4759t$
			30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-1955.0491-28746.3828t$	$1031.6872-26083.8840t$
			7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$-151.5889+45.9568t$	$120.8322+110.2081t$
15.11 лет			J7	$-115.2828-337.1568t$	$-30.6304-3128.3614t$	
$\Delta\theta_{II}$		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-996.8543+4490.6495t$	$-1268.1163-3782.4604t$	
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-63.4078-137.7709t$	$-154.2259+11.4460t$	
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-52.1133+1349.2627t$	$-105.2553-1534.8308t$	
		7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$-6.4976+8.6305t$	$-7.3277-1.1637t$	
$\Delta\varphi_{II}$		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$11372.3049-35761.5369t$	$-6671.6615+28094.2715t$	
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$1912.0768+1220.0505t$	$-1642.0724+3410.7532t$	
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$1952.3233+28701.3131t$	$-1030.4588+26049.9008t$	
		7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$150.7371-45.9397t$	$-120.6437-107.0323t$	
		15.11 лет	J7	$114.5751+338.5026t$	$29.3765+3126.8202t$	
$\Delta\tau_{II}$	3.5541 сут.	$D_{52}$	$-11.6677+4.3883t$	$204.8108+0.2234t$		
	11.862 лет	$\lambda_5$	$21.5464+3.6599t$	$-82.3619-1.1366t$		
	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-14.2809+50.9639t$	$8.9606-37.6953t$		
	137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-2.8616-2.1539t$	$2.4280-5.2430t$		
	5.931 лет	J8	$3.0672+0.8711t$	$-0.7831+0.5363t$		
	30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-2.6789-42.6649t$	$1.3675-36.5329t$		
$\Delta(I\sigma)_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-605.5900+1917.9708t$	$358.5968-1497.4646t$		
	137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-105.1126-66.7916t$	$92.1160-180.5340t$		
	30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-110.4493-1558.3277t$	$62.0449-1390.4315t$		
	7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$-7.7874+3.0971t$	$6.5603+4.4687t$		
$ \bar{\Lambda} _{II}$	3.5541 сут.	$D_{52}$	$11.6577-4.3870t$	$-204.6419-0.2253t$		
	11.862 лет	$\lambda_5$	$-22.6834-2.4703t$	$88.6761+2.2961t$		
	30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$30.0868-5.5963t$	$-34.8182-4.2374t$		
	5.931 лет	J8	$16.8989-1.8543t$	$23.8696+0.9873t$		
	137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$6.8467+4.1163t$	$-9.1340+6.7665t$		
	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$7.1845-14.5624t$	$-4.1147+9.9082t$		

Таблица 4. Продолжение

Тело	Параметр (угл. с)	Период	Аргумент	Коэффициент при $\cos(\text{аргумент}), ((\text{угл. с}) \times 10^{-6})$	Коэффициент при $\sin(\text{аргумент}), ((\text{угл. с}) \times 10^{-6})$
Ганимед (J3)	$\Delta\psi_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-3935.6926+13179.2577t$	$174.0359-9918.2231t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-596.7236-1471.8295t$	$-1033.5358-1658.1010t$
		186.625 лет	$3\Omega_{L54}$	$112.0732-619.5584t$	$173.4122+1032.2197t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-71.6614+259.5968t$	$90.0299+274.3836t$
		7.143 сут.	$\lambda_{53}+\lambda_5$	$-80.3923+0.2283t$	$-11.7982+1.2803t$
		7.166 сут.	$D_{53}$	$-5.7310+2.6014t$	$80.9137+0.3573t$
		11.862 лет	$\lambda_5$	$14.1255+17.5083t$	$-78.6881+15.2737t$
		5.931 лет	J8	$52.1962+2.0014t$	$54.8662+1.2652t$
	$\Delta\theta_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-415.5843+2021.3567t$	$-440.1180-1720.0932t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$85.0853-41.2602t$	$-71.1086-92.1141t$
		186.625 лет	$3\Omega_{L54}$	$11.4692-136.4939t$	$11.5067+132.5710t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-6.7729-20.6378t$	$-2.8465+8.8942t$
	$\Delta\varphi_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$3933.0177-13173.1621t$	$-175.2794+9916.6693t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$596.4942+1467.3688t$	$1031.1916+1653.3046t$
		186.625 лет	$3\Omega_{L54}$	$-115.6033+618.5210t$	$-179.3926-1028.6547t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$71.4234-261.6194t$	$-90.0708-271.2114t$
		7.143 сут.	$\lambda_{53}+\lambda_5$	$80.4932+0.5104t$	$11.8009+1.2682t$
		7.166 сут.	$D_{53}$	$-5.8532-0.6976t$	$80.8411-0.2710t$
	$\Delta\tau_{II}$	5.931 лет	J8	$-49.1848-1.7621t$	$-55.7023-0.5567t$
		7.166 сут.	$D_{53}$	$-11.5844+1.8990t$	$161.7571+0.0864t$
		11.862 лет	$\lambda_5$	$21.2575+4.3492t$	$-82.5924-0.0430t$
		186.625 лет	$3\Omega_{L54}$	$-3.6720-5.2205t$	$-5.4410+4.2788t$
		5.931 лет	J8	$3.0511+0.5340t$	$-0.8150+0.5269t$
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-2.6573+15.0688t$	$-0.9262-8.4412t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-0.7421-3.5672t$	$-1.5440-3.4257t$
		15.11 лет	J7	$0.1595+0.5669t$	$0.1702-1.0126t$
	$\Delta(I\sigma)_{II}$	7.155 сут.	$\lambda_{53}$	$-0.0369+0.1673t$	$-0.1834-0.5949t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-0.1110+0.3317t$	$0.0962+0.6189t$
559.876 лет		$\Omega_{L54}$	$-218.5031+694.7377t$	$22.9134-520.1284t$	
137.352 лет		$\Omega_{L53}$	$-44.6705-81.7997t$	$-37.9675-77.7141t$	
186.625 лет		$3\Omega_{L54}$	$5.3702-36.7884t$	$7.2470+55.2751t$	
30.219 лет		$\Omega_{L52}$	$-3.4652+13.7983t$	$4.3845+14.0524t$	
7.143 сут.		$\lambda_{53}+\lambda_5$	$-4.2332+0.0991t$	$-0.6213+0.0832t$	
7.166 сут.		$D_{53}$	$-0.3019+0.1428t$	$4.2606-0.0693t$	
$ \bar{\Lambda} _{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	$0.7224+0.8914t$	$-4.1570+0.9019t$	
	5.931 лет	J8	$2.7463-0.0351t$	$2.8917-0.0282t$	
	7.166 сут.	$D_{53}$	$11.5751-1.8972t$	$-161.6255-0.0974t$	
	11.862 лет	$\lambda_5$	$-21.6122-2.5758t$	$85.7375+0.5961t$	
	137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$22.9416-5.1019t$	$-31.4256+12.6220t$	
	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$21.0774+1.7051t$	$-23.0256-6.3236t$	
	5.931 лет	J8	$6.6696-1.2914t$	$12.0481-0.2454t$	
	186.625 лет	$3\Omega_{L54}$	$4.1358+0.0095t$	$6.1424-8.3474t$	
	30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-0.4413-1.0873t$	$0.6224-0.0359t$	

Таблица 4. Окончание

Тело	Параметр (угл. с)	Период	Аргу- мент	Коэффициент при $\cos(\text{аргумент}), ((\text{угл. с}) \times 10^{-6})$	Коэффициент при $\sin(\text{аргумент}), ((\text{угл. с}) \times 10^{-6})$
Каллисто (J4)	$\Delta\psi_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-3085.8817+6395.6224t$	$-410.1365-4062.3474t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-155.1210+323.7668t$	$216.2099+495.7919t$
		11.862 лет	$\lambda_5$	$14.0717+59.0226t$	$-85.2687+45.2141t$
		16.625 сут.	$\lambda_{54}+\lambda_5$	$-61.0308+0.1936t$	$-5.2897+0.9520t$
		16.754 сут.	$D_{54}$	$-0.1302+2.7188t$	$60.8831+0.5599t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-9.8776-186.9747t$	$24.6394+0.4679t$
		15.11 лет	J7	$-0.2015-5.3932t$	$-12.3390+42.9008t$
	$\Delta\theta_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$25.5470+312.1362t$	$-257.5189-212.9777t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-13.6879-21.9526t$	$-7.9178+5.6109t$
		16.625 сут.	$\lambda_{54}+\lambda_5$	$-0.2427+0.0536t$	$2.8047-0.0044t$
		16.754 сут.	$D_{54}$	$2.8008+0.0199t$	$0.0242-0.1001t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-1.4201-1.8654t$	$-0.9025-1.4982t$
	$\Delta\varphi_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$3086.0317-6388.0416t$	$408.0648+4059.8807t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$154.3291-322.3438t$	$-215.6234-495.5752t$
		16.625 сут.	$\lambda_{54}+\lambda_5$	$61.1119+0.3658t$	$5.2924+0.8297t$
		16.754 сут.	$D_{54}$	$-0.4920-0.0419t$	$60.8585-0.6946t$
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$9.8718+186.6318t$	$-24.3477-0.7931t$
	$\Delta\tau_{II}$	16.754 сут.	$D_{54}$	$-0.6203+2.6763t$	$121.7436-0.1464t$
		11.862 лет	$\lambda_5$	$21.2087+4.5376t$	$-82.5517+0.1171t$
		5.931 лет	J8	$2.9851+0.3374t$	$-0.8764+0.4015t$
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$0.0604+9.3525t$	$-1.9554-3.6583t$
		16.689 сут.	$\lambda_{54}$	$-0.1497+1.5449t$	$-1.0654-0.1068t$
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-0.5567+0.7436t$	$0.4050+0.7946t$
		$\Delta(I\sigma)_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-221.1565+279.7596t$
	137.352 лет		$\Omega_{L53}$	$-5.0848+9.7995t$	$7.8576+19.4721t$
	11.862 лет		$\lambda_5$	$0.6928+2.6783t$	$-3.8795+1.9695t$
	16.625 сут.		$\lambda_{54}+\lambda_5$	$-2.8045-0.0068t$	$-0.2430+0.0608t$
	16.754 сут.		$D_{54}$	$-0.0065+0.1189t$	$2.7980+0.0390t$
	30.219 лет		$\Omega_{L52}$	$-0.6034-8.4129t$	$1.1395-0.0367t$
	$ \bar{\Lambda} _{II}$	16.754 сут.	$D_{54}$	$0.6171-2.6772t$	$-121.6584+0.1620t$
11.862 лет		$\lambda_5$	$-21.3578+0.2723t$	$83.4700+3.1915t$	
559.876 лет		$\Omega_{L54}$	$56.1117-4.5482t$	$-63.7233+0.9259t$	
5.931 лет		J8	$0.3056-0.6196t$	$4.7659-0.1959t$	
137.352 лет		$\Omega_{L53}$	$-1.2171+1.6775t$	$1.6186+1.1381t$	
16.689 сут.		$\lambda_{54}$	$0.1496-1.5431t$	$1.0642+0.1079t$	

**Таблица 5.** Периодические и смешанные члены геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера, вычисленные для параметров физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота относительно JSB и средней орбиты спутника

Спутник	Параметр (угл. с)	Период	Аргумент	Коэффициент при $\cos(\text{аргумент}), ((\text{угл. с}) \times 10^{-6})$	Коэффициент при $\sin(\text{аргумент}), ((\text{угл. с}) \times 10^{-6})$	
Ио (J1)	$\Delta\theta_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$71.6643-1760.4335t$	$420.8237+1215.5157t$	
		7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$-62.0073-70.4047t$	$109.2117+176.1223t$	
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-21.1573+81.5540t$	$74.1960+162.7571t$	
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$2.2924-128.1429t$	$66.0597+396.8310t$	
	$\Delta\tau_{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	$28.3544+6.1854t$	$-110.1027+0.1561t$	
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$1.2349+19.5576t$	$-5.0722-12.6009t$	
		5.931 лет	J8	$3.9820+0.3774t$	$-1.1741+0.5465t$	
	$\Delta(I\sigma)_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-561.6401+7454.5725t$	$-1598.2399-5855.8741t$	
		7.422 лет	$\Omega_{L51}$	$-123.7501-309.7438t$	$-56.4984-58.5010t$	
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-76.7396-221.4011t$	$-42.7792-122.1287t$	
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$12.5728-76.4321t$	$-46.7733+6.0371t$	
	$ \bar{\Lambda} _{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	$-28.3378-6.1238t$	$110.1125-0.1415t$	
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-1.3395-16.2165t$	$4.3021+10.1177t$	
		5.931 лет	J8	$-3.9815-0.3767t$	$1.1756-0.5475t$	
	Европа (J2)	$\Delta\theta_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$4867.5125-35818.5568t$	$5833.3005+30298.4603t$
			137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-177.4351+1760.2904t$	$218.1829+1022.6355t$
30.219 лет			$\Omega_{L52}$	$45.2896-187.6553t$	$141.9686+497.9494t$	
11.862 лет			$\lambda_5$	$-17.0173-1.1246t$	$-11.5898-1.1681t$	
$\Delta\tau_{II}$		11.862 лет	$\lambda_5$	$28.2292+6.0622t$	$-110.0283+0.2431t$	
		5.931 лет	J8	$3.9710+0.2726t$	$-1.1522+0.4080t$	
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$3.1863+0.5510t$	$-2.0200+2.7260t$	
$\Delta(I\sigma)_{II}$		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$-132.4355-219.9600t$	$-18.6669-147.1523t$	
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$83.1354+135.7838t$	$-100.0919-0.4094t$	
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$-26.7294-34.8096t$	$23.1235-29.7624t$	
		15.11 лет	J7	$3.6628+7.7595t$	$-5.5513+3.9283t$	
		11.862 лет	$\lambda_5$	$-0.6708+2.6845t$	$-1.0768+6.6508t$	
$ \bar{\Lambda} _{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	$-28.2307-6.1035t$	$110.0250-0.2755t$		
	5.931 лет	J8	$-3.9752-0.2779t$	$1.1479-0.4072t$		
	559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$-3.4793-0.7823t$	$2.1251-2.9115t$		
Ганимед (J3)	$\Delta\theta_{II}$	137.352 лет	$\Omega_{L53}$	$241.5157+110.6352t$	$369.6714+682.1298t$	
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$172.5134-825.2496t$	$316.0139+541.3554t$	
		186.625 лет	$3\Omega_{L54}$	$-51.4174-83.0091t$	$32.2591+159.6262t$	
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	$0.8979-4.4519t$	$-3.7098+4.0979t$	
	$\Delta\tau_{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	$28.2221+5.9792t$	$-110.0840+0.2456t$	
		186.625 лет	$3\Omega_{L54}$	$-4.0014-5.0996t$	$-7.3172+10.8256t$	
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	$3.8344-0.9787t$	$-1.9191+4.6488t$	
		5.931 лет	J8	$3.9654+0.3140t$	$-1.1706+0.5154t$	

Таблица 5. Окончание

Спутник	Параметр (угл. с)	Период	Аргумент	Коэффициент при cos(аргумент), ((угл. с)×10 <sup>-6</sup> )	Коэффициент при sin(аргумент), ((угл. с)×10 <sup>-6</sup> )
Каллисто (J4)	$\Delta(I\sigma)_{II}$	137.352 лет	$\Omega_{L53}$	-351.9278-323.2815 <i>t</i>	302.0418-240.1284 <i>t</i>
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	-112.0286-203.3264 <i>t</i>	138.3680+224.7149 <i>t</i>
		186.625 лет	$3\Omega_{L54}$	-18.4503-81.7625 <i>t</i>	-68.8950+8.7477 <i>t</i>
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	4.3644+13.4906 <i>t</i>	-2.5943-2.1542 <i>t</i>
	$ \bar{\Lambda} _{II}$	11.862 лет	$\lambda_5$	-28.2311-6.0250 <i>t</i>	110.0820-0.2619 <i>t</i>
		186.625 лет	$3\Omega_{L54}$	3.9518+4.2716 <i>t</i>	7.3633-10.8681 <i>t</i>
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	-4.1272+0.5552 <i>t</i>	2.3418-4.3162 <i>t</i>
		5.931 лет	J8	-3.9690-0.3464 <i>t</i>	1.1702-0.5321 <i>t</i>
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	-0.7927-1.4991 <i>t</i>	1.0441+3.6693 <i>t</i>
			$\Delta\theta_{II}$	559.876 лет	$\Omega_{L54}$
137.352 лет	$\Omega_{L53}$			-1.6881+53.2247 <i>t</i>	-52.3382-16.8704 <i>t</i>
30.219 лет	$\Omega_{L52}$			-0.0909-1.6142 <i>t</i>	2.2410+4.3751 <i>t</i>
11.862 лет	$\lambda_5$			1.1511+1.1354 <i>t</i>	-0.1613+1.0402 <i>t</i>
5.931 лет	J8			0.3239+1.0349 <i>t</i>	-0.2345+0.4500 <i>t</i>
$\Delta\tau_{II}$	11.862 лет		$\lambda_5$	28.2358+6.3105 <i>t</i>	-110.0283+0.3991 <i>t</i>
	559.876 лет		$\Omega_{L54}$	6.5603+2.4524 <i>t</i>	-5.3943+1.0145 <i>t</i>
	5.931 лет		J8	3.9688+0.2907 <i>t</i>	-1.1641+0.4971 <i>t</i>
	16.754 суток		$D_{54}$	0.0094+0.1045 <i>t</i>	-1.4106-0.1240 <i>t</i>
	16.689 суток		$\lambda_{54}$	-0.1455+1.5076 <i>t</i>	-1.0971-0.1713 <i>t</i>
	$\Delta(I\sigma)_{II}$	137.352 лет	$\Omega_{L53}$	-0.4401+0.7576 <i>t</i>	0.1985+0.3278 <i>t</i>
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	-555.9966-196.5872 <i>t</i>	494.8124+163.3462 <i>t</i>
		137.352 лет	$\Omega_{L53}$	54.2386+27.2710 <i>t</i>	-19.5596+69.7886 <i>t</i>
		11.862 лет	$\lambda_5$	-1.1051-4.2078 <i>t</i>	2.9924-1.9101 <i>t</i>
		30.219 лет	$\Omega_{L52}$	1.1234+10.2639 <i>t</i>	-0.1216+0.4778 <i>t</i>
		15.11 лет	J7	0.2219+0.7103 <i>t</i>	0.8228+5.3319 <i>t</i>
	$ \bar{\Lambda} _{II}$	5.931 лет	J8	-0.4233-2.1163 <i>t</i>	-0.0614-0.5769 <i>t</i>
		11.862 лет	$\lambda_5$	-28.2460-6.5182 <i>t</i>	110.0456-0.5336 <i>t</i>
		559.876 лет	$\Omega_{L54}$	-9.0263-3.7558 <i>t</i>	7.5280-0.3924 <i>t</i>
		5.931 лет	J8	-3.9711-0.2908 <i>t</i>	1.1631-0.4959 <i>t</i>
	16.754 суток	$D_{54}$	-0.0094-0.1045 <i>t</i>	1.4107+0.1239 <i>t</i>	
	16.689 суток	$\lambda_{54}$	0.1455-1.5077 <i>t</i>	1.0971+0.1713 <i>t</i>	
	137.352 лет	$\Omega_{L53}$	0.5745-0.6407 <i>t</i>	-0.2758-0.3607 <i>t</i>	

В табл. 4–5 *t* – динамическое барицентрическое время (TDB) измеряется в юлианских тысячелетиях (tjy) (365250 сут.) от эпохи J2000.0;  $\Omega_{L51}$ ,  $\Omega_{L52}$ ,  $\Omega_{L53}$ ,  $\Omega_{L54}$  – долготы восходящих узлов орбит галилеевых спутников Юпитера на плоскости Лапласа (средней орбиты этих спутников эпохи J2000.0) от их пересечения с неподвижным эк-

ватором Земли ICRF эпохи J2000.0;  $\lambda_5$  – средняя долгота Юпитера;  $\lambda_{51}$ ,  $\lambda_{52}$ ,  $\lambda_{53}$ ,  $\lambda_{54}$  – средние юпитероцентрические долготы Ио (J1), Европы (J2), Ганимеда (J3), и Каллисто (J4), соответственно;  $D_{51} = \lambda_{51} - \lambda_5 + 180^\circ$ ,  $D_{52} = \lambda_{52} - \lambda_5 + 180^\circ$ ,  $D_{53} = \lambda_{53} - \lambda_5 + 180^\circ$ ,  $D_{54} = \lambda_{54} - \lambda_5 + 180^\circ$  – средние элонгации от Солнца Ио (J1), Европы (J2), Ганимеда (J3),

и Каллисто (J4), соответственно. Средняя долгота Юпитера взята из работы (Brumberg, Bretagnon, 2000), средние долготы и долготы восходящих узлов галилеевых спутников Юпитера взяты из статьи (Archinal и др., 2018):

$$\begin{aligned} J_a &= 99^\circ.360714 + 4850^\circ.4046T, \\ J_b &= 175^\circ.895369 + 1191^\circ.9605T, \\ J_c &= 300^\circ.323162 + 262^\circ.5475T, \\ J_d &= 114^\circ.012305 + 6070^\circ.2476T, \\ J_e &= 49^\circ.511251 + 64^\circ.3000T, \\ \lambda_5 &= 34^\circ.35 + 3034^\circ.91T, \\ J_8 &= 113^\circ.35 + 6070^\circ.0T, \\ \lambda_{51} = W_1 &= 200^\circ.39 + 7432434^\circ.04T, \\ \Omega_{L51} = J_3 &= 283^\circ.90 + 4850^\circ.7T, \\ \lambda_{52} = W_2 &= 36^\circ.02 + 3702711^\circ.78T, \\ \Omega_{L52} = J_4 &= 355^\circ.80 + 1191^\circ.3T, \\ J_7 &= 352^\circ.25 + 2382^\circ.6T, \\ \lambda_{53} = W_3 &= 44^\circ.06 + 1837850^\circ.64T, \\ \Omega_{L53} = J_5 &= 119^\circ.90 + 262^\circ.1T, \\ \lambda_{54} = W_4 &= 259^\circ.51 + 787883^\circ.39T, \\ \Omega_{L54} = J_6 &= 229^\circ.80 + 64^\circ.3T, \end{aligned}$$

где  $T$  – динамическое барицентрическое время (TDB) измеряется в юлианских столетиях (с<sub>J</sub>) (36525 дней) от эпохи J2000.0.

Поскольку масса Солнца является доминирующей в Солнечной системе, одна из частей вектора угловой скорости геодезического вращения относительно барицентра Солнечной системы  $\bar{\sigma}_{SSB}$  для планет, имеющих спутники, и их спутников является результатом их орбитального движения вокруг SSB. Юпитер и его спутники находятся в среднем на одном расстоянии от Солнца и движутся относительно него в среднем с одной скоростью. Вследствие этого величины их геодезического вращения, вызванного влиянием Солнца, подобно величинам геодезического вращения Земли и Луны (Пашкевич, 2016), должны быть достаточно близки между собой. Подтверждения этому можно увидеть в значениях геодезической прецессии в долготе нисходящего узла экватора исследуемого тела  $\Delta\psi_I$  для всех исследуемых тел (табл. 2), которые являются близкими по величине, и в значениях коэффициентов периодических членов с аргументом  $\lambda_5$  геодезической нутации в  $\Delta\psi_{II}$  и  $\Delta\tau_{II}$  (табл. 4), которые в соответствующих коэффициентах тоже достаточно близки друг другу.

На Юпитер его спутники оказывают малое влияние, поэтому величины коэффициентов его

геодезического вращения при вековых составляющих (табл. 2) и периодических (табл. 4) составляющих с аргументом  $\lambda_5$  в  $\Delta\psi$  и  $\Delta\tau$ , соответственно, близки друг к другу. Для Юпитера влияние от Солнца является основным, что отражается в доминирующей величине его геодезической прецессии в долготе  $\Delta\psi_I$  (табл. 2) над аналогичными величинами в других углах Эйлера.

Геодезическое вращение спутников Юпитера определяется не только Солнцем, но и Юпитером. Таким образом, другая часть вектора угловой скорости геодезического вращения относительно SSB  $\bar{\sigma}_{SSB}$  для планет, имеющих спутники, и их спутников является результатом их орбитального движения вокруг барицентра спутниковой системы планеты. Из-за близости галилеевых спутников к Юпитеру, ее вклад является основным для них и отображается для каждого спутника в значении геодезического вращения в угле его собственного вращения  $\Delta\phi_I$  (табл. 2), которое является доминирующей величиной над аналогичными величинами в других углах Эйлера. В то же время величины полного геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера  $\Delta\tau$  и  $|\bar{\Lambda}|$  значительно превосходят аналогичные величины геодезического вращения Юпитера. Поэтому величины их коэффициентов в  $\Delta\psi_I$  и  $\Delta\tau_I$  при вековых составляющих (табл. 2) заметно отличаются друг от друга. Это связано с тем, что из-за близкого к ним расстояния Юпитер оказывает большее влияние на их геодезическое вращение, чем Солнце на Юпитер.

Обращение галилеевых спутников вокруг двух барицентров JSB и SSB отражается в появлении для каждого спутника двух доминирующих гармоник с аргументом  $D_{sj}$  ( $j=1, 2, 3, 4$  – номер спутника) и следующей за ней по величине гармоники с аргументом  $\lambda_5$  в их углах геодезической нутации  $\Delta\tau_{II}$  и  $|\bar{\Lambda}|_{II}$  (табл. 4), соответственно.

У Юпитера в этих углах доминирует гармоника с аргументом  $\lambda_5$ , отражающая его обращение вокруг SSB, поскольку, как уже было сказано, его спутники оказывают малое влияние. Для вектора угловой скорости геодезического вращения исследуемого спутника относительно JSB  $\bar{\sigma}_{JSB}$  гармоника с аргументом  $D_{sj}$  в этих углах на два порядка меньше. В них доминирует гармоника с аргументом  $\lambda_5$ . Это указывает на то, что в периодических членах геодезического вращения исследуемых тел всегда преобладают внешние возмущения. Таким в периодических членах геодезического вращения исследуемого тела относительно плоскости средней орбиты исследуемого спутника эпохи J2000.0 и JSB является возмущение от Солнца, а в периодических членах геодезического вращения исследуемого тела

относительно плоскости средней орбиты Юпитера эпохи J2000.0 и SSB для галилеевых спутников на первом месте становится возмущение от Юпитера, а затем от Солнца.

Из табл. 2 и 3 видно, что для всех исследуемых спутников абсолютная величина вектора углового поворота геодезического вращения тела относительно средней орбиты исследуемого спутника эпохи J2000.0 и  $JSB|\bar{\Lambda}_{JSB}|_{II}$  больше абсолютной величины вектора углового поворота геодезического вращения тела относительно плоскости средней орбиты Юпитера эпохи J2000.0 и SSB  $|\bar{\Lambda}_{SSB}|_{II}$ . Следовательно, для всех исследуемых спутников абсолютная величина вектора угловой скорости геодезического вращения  $|\bar{\sigma}_{JSB}|$  больше абсолютной величины вектора угловой скорости геодезического вращения  $|\bar{\sigma}_{SSB}|$ .

Из табл. 2 и 3 видно, что величина геодезического вращения спутников Юпитера убывает с увеличением их расстояния от Юпитера.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном исследовании на примере Юпитера и его галилеевых спутников (Ио, Европы, Ганимеда и Каллисто) показано различие векторов угловой скорости геодезического вращения в зависимости от выбора координатной системы отсчета. Так, абсолютная величина вектора угловой скорости геодезического вращения исследуемого спутника относительно барицентра Солнечной системы SSB не совпадает с абсолютной величиной аналогичного вектора исследуемого спутника относительно барицентра спутниковой системы планеты JSB. В результате были определены значения векторов угловой скорости геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера относительно SSB и относительно JSB. На их основе впервые вычислены наиболее существенные вековые (табл. 2 и 3) и периодические (табл. 4 и 5) члены геодезического вращения: а) Юпитера и его галилеевых спутников в углах Эйлера, в возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения исследуемого тела относительно SSB и плоскости средней орбиты Юпитера эпохи J2000.0; б) галилеевых спутников Юпитера в возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения исследуемого тела относительно JSB и средней орбиты исследуемого спутника эпохи J2000.0. Для их вычисления использовался модифицированный авторами метод, разработанный в статье (Пашкевич, 2016), который применим для изучения

любых тел Солнечной системы, имеющих долгосрочные эфемериды. Благодаря комментариям в работе (Baland и др., 2023) Пашкевичем была найдена и исправлена ошибка в знаке в формуле редукции (Пашкевич, 2016), в ней  $-\varepsilon_*$ , нужно заменить на  $\varepsilon_*$ , в результате исправленная формула (3) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = r(\gamma_* \mathbf{B}) p(\varepsilon_*) r(\gamma_0 \gamma_*) p(\varepsilon_0) r(\Delta) \begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{pmatrix}.$$

Для всех исследуемых спутников абсолютная величина вектора угловой скорости геодезического вращения относительно средней орбиты исследуемого спутника эпохи J2000.0 и  $JSB|\bar{\sigma}_{JSB}|$  больше абсолютной величины вектора угловой скорости геодезического вращения относительно плоскости средней орбиты Юпитера эпохи J2000.0 и SSB  $|\bar{\sigma}_{SSB}|$ .

Полученные аналитические значения для геодезического вращения Юпитера и его галилеевых спутников могут быть использованы для численного исследования их вращения в релятивистском приближении, а также для оценки влияния релятивистских эффектов на орбитально-вращательную динамику тел экзопланетных систем. На примере тел Солнечной системы данное исследование показало, что величина геодезического вращения может быть существенной не только у объектов, которые вращаются вокруг сверхмассивных релятивистских центральных тел, но и у тел с малым расстоянием до менее массивного центрального тела, например, у спутников планет-гигантов в экзопланетных системах. В Солнечной системе одними из таких объектов являются галилеевы спутники Юпитера. В частности, величина геодезической прецессии галилеевых спутников Юпитера (для которых Юпитер является менее массивным возмущающим центральным телом, чем Солнце) находится в пределах от  $-32''.2$  за тысячу лет до  $-1342''.0$  за тысячу лет (табл. 2 и 3), что от 100 до 4300 раз больше, чем у Юпитера ( $-0''.3$  за тысячу лет), вращающегося вокруг своего более массивного центрального тела (Солнца).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Абалакин В.К. Основы эфемеридной астрономии. М.: Наука, 1979. 448 с.
- Вуллард Э. Теория вращения Земли вокруг центра масс. М.: Физматгиз, 1963. 144 с.
- Жаров В.Е. Сферическая астрономия. Фрязино, 2006. 480 с.

- Пашкевич В.В.* Геодезическое (релятивистское) вращение тел Солнечной системы // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 506–516.
- Суслов Г.К.* Теоретическая механика. Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1946. 655с.
- Archinal B.A., Acton C.H., A’Hearn M.F., Conrad A., Consolmagno G.J., Duxbury T., Hestroffer D., Hilton J.L., Kirk R.L., Klioner S.A., and 8 co-authors.* Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015 // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2018. V. 130. № 22. P. 21–46.  
<https://doi.org/10.1007/s10569-017-9805-5>
- Baland R.-M., Hees A., Yseboodt M., Bourgoin A., Le Maistre S.* Relativistic contributions to the rotation of Mars // *Astron. and Astrophys.* 2023. V. 670. id. A29. (15 p.)  
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202244420>
- Brumberg V.A., Bretagnon P.* Kinematical relativistic corrections for Earth’s rotation parameters // *Proc. IAU Colloq. 180. U.S. Naval Observatory, 2000. P. 293–302.*
- de Sitter W.* On Einstein’s theory of gravitation and its astronomical consequences // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1916. № 77. P. 155–184.  
<https://doi.org/10.1093/mnras/77.2.155>
- Eroshkin G.I., Pashkevich V.V.* Geodetic rotation of the Solar system bodies // *Artificial Satellites.* 2007. V. 42. № 1. P. 59–70.  
<https://doi.org/10.2478/v10018-007-0017-1>
- Fukushima T.* Geodesic nutation // *Astron. and Astrophys.* 1991. V. 244. № 1. P. L11–L12.
- Giorgini J.D., Chodas P.W., Yeomans D.K.* Orbit uncertainty and close-approach analysis capabilities of the Horizons On-Line Ephemeris System // *AAS/Division for planetary sciences meeting in New Orleans. LA. Nov 26. 2001 – Dec 01. 2001. Abstracts #33.*
- Jenkins G.M., Watts D.G.* Spectral analysis and its applications. San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam: Holden-day, 1969. 525 p.
- Kopeikin S., Efroimsky M., Kaplan G.* Relativistic Celestial Mechanics in the Solar System. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011. 894 p.  
DOI:10.1002/9783527634569
- Ma C., Arias E.F., Eubanks T.M., Fey A.L., Gontier A.-M., Jacobs C.S., Sovers O.J., Archinal B.A., Charlot P.* The international celestial reference frame as realized by very long baseline interferometry // *Astron. J.* 1998. V. 116. P. 516–546.  
DOI: 10.1086/300408
- Pashkevich V.V., Vershkov A.N.* Geodetic precession of the Sun, Solar system planets, and their satellites // *Artificial Satellites.* 2022. V. 57. № 1. P. 77–109.  
DOI:10.2478/arsa-2022-0005
- Park R.S., Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H.* The JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE440 and DE441 // *Astron. J.* 2021. V. 161. id. 105. (15 p.).  
<https://doi.org/10.3847/1538-3881/abd414>
- Press William H., Flannery Brian P., Teukolsky Saul A., Vetterling William T.* Numerical recipes: The art of scientific computing. Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney: Cambridge Univ. Press, 1986. 20+818 p.