

УДК 521.35

## ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СТОЛКНОВЕНИЯ АСТЕРОИДОВ С ЗЕМЛЕЙ ПРИ ЗАМЕТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ЗАДАЧЕ УЛУЧШЕНИЯ ОРБИТЫ

© 2023 г. А. П. Батури́н\*

НИИ ПММ ТГУ, Томск, Россия

\*E-mail: apbaturin@mail.tsu.ru

Поступила в редакцию 18.12.2022 г.

После доработки 02.01.2023 г.

Принята к публикации 10.01.2023 г.

Разработан метод оценивания вероятности столкновения астероидов с Землей, основанный на выявлении трубок столкновительных орбит в начальной доверительной области с учетом нелинейности в задаче улучшения орбиты. Метод заключается в последовательной переборке уровневых поверхностей минимизируемой функции и условной минимизации на них расстояния от астероида до Земли в каком-либо его рассматриваемом сближении. Разработан приближенный способ вычисления доверительной вероятности в любой точке начальной области при заметной нелинейности в задаче улучшения орбиты. Оценивание вероятности столкновения выполняется путем применения этого способа для выявленной трубки столкновительных орбит. Метод апробирован для ряда потенциально опасных астероидов в их ожидаемых сближениях с Землей.

**Ключевые слова:** астероиды, нелинейность, доверительная вероятность, вероятность столкновения

**DOI:** 10.31857/S0320930X23030015, **EDN:** HYISTY

### ВВЕДЕНИЕ

Данная работа продолжает исследования, опубликованные в работах автора (Батури́н, 2012; 2016; 2020; 2022), и посвящена вопросу выявления столкновительных орбит потенциально опасных астероидов с последующим оцениванием вероятности их столкновения с Землей. Этому вопросу посвящено множество работ, среди которых можно упомянуть (Milani, 2006; Ivashkin, Stikhno, 2007; Milani и др., 2009; Ивашкин, Стихно, 2009; Железнов, 2010; Прохоренко, 2010; Соколов и др., 2012; Черницов и др., 2016; Ivashkin, Stikhno, 2019).

Рассматриваемый метод оценивания вероятности столкновения основан на использовании способа выявления столкновительных орбит, описанного в работе автора (Батури́н, 2022) и заключающегося в поиске столкновительных начальных параметров движения на отдельных уровнях поверхностей минимизируемой функции в задаче улучшения орбиты. При оценивании вероятности столкновения сначала был разработан способ определения доверительной вероятности в любой точке начальной области при заметной нелинейности в задаче улучшения орбиты, который рассмотрим далее.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В НАЧАЛЬНОЙ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В работе автора (Батури́н, 2022) было показано, что среднеквадратическая ошибка  $\sigma$  представления наблюдений, вычисляемая на конце наименьшей полуоси доверительного эллипсоида, зависит от коэффициента увеличения  $k$  размеров эллипсоида квадратичным образом, а именно

$\sigma = \sigma_0 + bk^2$ , где  $\sigma_0$  — представление наблюдений в центре эллипсоида (МНК-оценкой);  $b$  — постоянный коэффициент. Такая квадратичная зависимость означает отсутствие нелинейности вдоль данного направления в пространстве начальных параметров движения. Покажем это более подробно.

Минимизируемая функция при улучшении орбиты, как правило, имеет вид  $\Phi(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N (\Delta\alpha_i^2 \cos^2 \delta_i^{(O)} + \Delta\delta_i^2)$ , где  $\Delta\alpha_i = \alpha_i(\mathbf{q}) - \alpha_i^{(O)}$ ,  $\Delta\delta_i = \delta_i(\mathbf{q}) - \delta_i^{(O)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — разности вычисленных и измеренных значений прямого восхождения и склонения объекта соответственно;  $\mathbf{q} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T$  — искомый вектор улучшаемых начальных параметров движения (прямо-

угольных координат и компонент скорости объекта);  $N$  — число наблюдений. Среднеквадратическая ошибка  $\sigma$  представления наблюдений каким-либо вектором  $\mathbf{q}$  вычисляется как  $\sqrt{\Phi(\mathbf{q})/(2N-6)}$ .

Функцию  $\Phi(\mathbf{q})$  можно разложить в ряд в окрестности ее минимума, имеющего место в некоторой точке  $\bar{\mathbf{q}}$ :

$$\Phi(\mathbf{q}) = \Phi(\bar{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q} \Phi''(\bar{\mathbf{q}}) \Delta \mathbf{q}^T + O(\Delta \mathbf{q}^3),$$

где  $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$ ;  $\Phi''(\bar{\mathbf{q}})$  — матрица вторых частных производных от функции  $\Phi(\mathbf{q})$  по вектору  $\mathbf{q}$ .

В случае линейной модели оценивания (линейных функций  $\alpha_i(\mathbf{q})$  и  $\delta_i(\mathbf{q})$ ) слагаемых выше второго порядка относительно  $\Delta \mathbf{q}$  не будет, т.е.  $\Phi(\mathbf{q}) = \Phi(\bar{\mathbf{q}}) + 0.5 \Delta \mathbf{q} \Phi''(\bar{\mathbf{q}}) \Delta \mathbf{q}^T$ .

Легко показать, что любая функция  $\Phi(\mathbf{q})$  имеет приблизительно такое же разложение в ряд. Например, среднеквадратическая ошибка  $\sigma = \sqrt{\Phi(\mathbf{q})/(2N-6)}$  раскладывается по аналогичной формуле:

$$\sigma(\mathbf{q}) \approx \sigma(\bar{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q} \sigma''(\bar{\mathbf{q}}) \Delta \mathbf{q}^T.$$

Если увеличить отклонение  $\Delta \mathbf{q}$  в  $k$  раз, т.е. вместо  $\Delta \mathbf{q}$  взять  $k \Delta \mathbf{q}$ , то

$$\sigma(\mathbf{q}) \approx \sigma(\bar{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} k \Delta \mathbf{q} \sigma''(\bar{\mathbf{q}}) k \Delta \mathbf{q}^T$$

или  $\sigma(\mathbf{q}) \approx \sigma_0 + k^2 \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q} \sigma''(\bar{\mathbf{q}}) \Delta \mathbf{q}^T = \sigma_0 + b k^2$ , где  $\sigma_0 = \sigma(\bar{\mathbf{q}})$ ;  $b = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q} \sigma''(\bar{\mathbf{q}}) \Delta \mathbf{q}^T$ .

Таким образом, в случае отсутствия нелинейности в задаче улучшения орбиты среднеквадратическая ошибка зависит от коэффициента увеличения  $k$  размеров начальной доверительной области (эллипсоида) квадратичным образом:

$\sigma = \sigma_0 + b k^2$ . Зависимость же доверительной вероятности от коэффициента  $k$  является взаимно-однозначной и выведена, например, в работах (Сюсина и др., 2012) и (Батури́н, 2020).

Исследуем далее характер изменения среднеквадратической ошибки  $\sigma$  в зависимости от направления в пространстве начальных параметров движения. В качестве исследуемых направлений возьмем 12 полуосей доверительного эллипсоида.

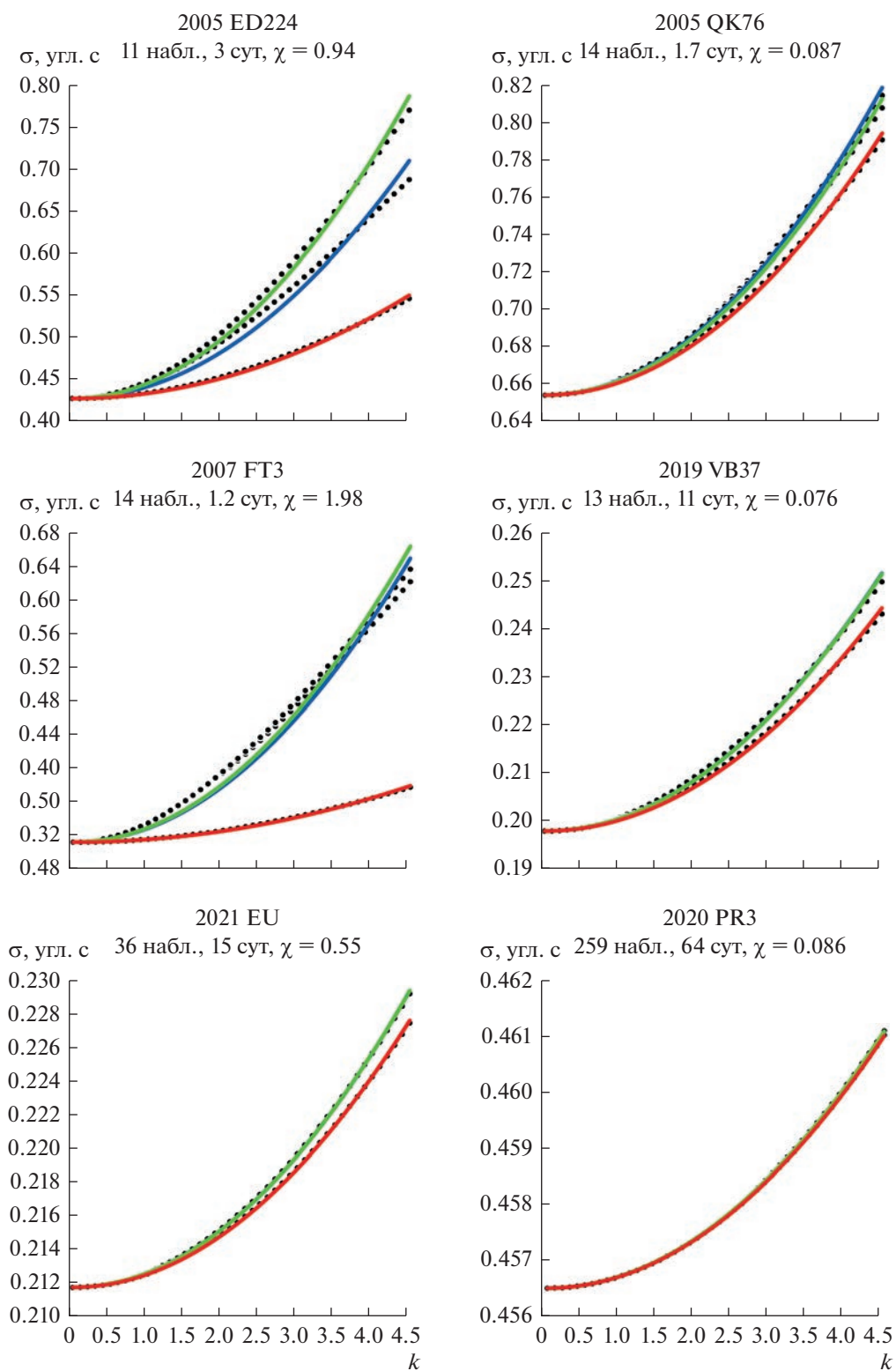
В качестве модельных объектов было выбрано несколько потенциально опасных астероидов, наблюдаемых на короткой дуге орбиты (с сайта <https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>). Для них было выполнено улучшение орбиты по всем наблюдениям без отбраковки. Коэффициент увеличения

эллипсоида  $k$  для всех объектов варьировался от 0 до 4.5 с шагом 0.1. Для каждого значения  $k$  вычислялись среднеквадратические ошибки представления наблюдений на концах 12 полуосей доверительного эллипсоида.

Результаты приведены на рис. 1. Под названием каждого астероида указано число его наблюдений, продолжительность наблюдений и коэффициент нелинейности  $\chi$ , вычисляемый как  $0.5(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/(\sigma_{\min} - \sigma_0)$  (Черницов и др., 2014), где  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  — соответственно максимальная и минимальная среднеквадратическая ошибка представления наблюдений векторами начальных параметров, расположенными на концах 12 полуосей доверительного эллипсоида (взятого с коэффициентом увеличения 4.5). Цветные кривые — это аппроксимации значений  $\sigma$  с помощью формулы  $\sigma = \sigma_0 + b k^2$ : зеленая — по направлению первой полуоси, соответствующей наибольшим значениям  $\sigma$ ; синяя — по направлению второй полуоси (т.е. по противоположному направлению этой же оси); красная — по направлению остальных 10 полуосей (для них значения  $\sigma$  практически совпали).

Как видно из рис. 1, при заметной нелинейности (объекты 2005 ED 224, 2007 FT, 2020 FA5) изменение среднеквадратической ошибки вдоль наибольшей оси эллипсоида плохо аппроксимируется кривой вида  $\sigma = \sigma_0 + b k^2$ , однако вдоль остальных осей такая аппроксимация выполняется практически точно. При меньшей нелинейности (объекты 2019 VB37 и 2021 EU) аппроксимация выполняется хорошо вдоль всех полуосей эллипсоида, однако представление наблюдений вдоль наибольшей оси заметно отличается от представления вдоль остальных осей. При слабой нелинейности (объект 2020 PR3) представления наблюдений вдоль всех полуосей эллипсоида практически одинаковы.

Для более строгого сравнения результатов представления наблюдений вдоль различных полуосей эллипсоида можно ввести среднеквадратическую норму  $\Delta \sigma$ , вычисляемую как  $\sqrt{1/(M-1) \sum_{i=1}^M [\sigma(k) - \sigma_{\min}(k)]^2}$ , где  $M$  — число используемых значений коэффициента  $k$  (в данном случае  $M = 45$ );  $\sigma(k)$  — среднеквадратическая ошибка представления наблюдений, вычисляемая вдоль рассматриваемой полуоси для заданного значения  $k$ ;  $\sigma_{\min}(k)$  — та же величина, вычисляемая вдоль полуоси с наименьшим значением представления наблюдений (как правило, это последняя, 12-я полуось эллипсоида). Величина  $\Delta \sigma$  для первых трех полуосей доверительного эллип-



**Рис. 1.** Представление наблюдений на концах 12 полуосей доверительного эллипсоида и его аппроксимация с помощью выражения  $\sigma_0 + bk^2$ .

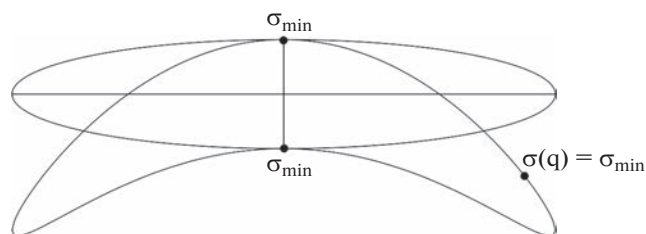


Рис. 2. Примерное расположение уральной поверхности относительно эллипсоидальной (демонстрация в двумерном случае).

соида, вдоль которых представление наблюдений самое большое, имеет следующие значения: для объекта 2005 ED224 – 0.075, 0.11 и  $1.8 \times 10^{-5}$ ; для 2005 QK76 – 0.011, 0.0086 и  $1.3 \times 10^{-5}$ ; для 2007 FT3 – 0.13, 0.13 и  $4.6 \times 10^{-6}$ ; для 2019 VB37 – 0.0034, 0.0033 и  $2.2 \times 10^{-6}$ ; для 2021 EU –  $8.2 \times 10^{-4}$ ,  $8.2 \times 10^{-4}$  и  $3.1 \times 10^{-7}$ ; для 2020 PR3 –  $2.6 \times 10^{-5}$ ,  $3.7 \times 10^{-5}$  и  $6.5 \times 10^{-8}$ .

Легко показать, что плотность вероятности в какой-либо точке  $\mathbf{q}$  доверительного эллипсоида выра-

жается как функция  $f(\mathbf{q}) = \frac{1}{l_1 \dots l_n \sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)$ ,

где  $k$  – коэффициент увеличения эллипсоида, проходящего через точку  $\mathbf{q}$ ;  $l_1 \dots l_n$  – полуоси эллипсоида;  $n$  – размерность пространства (в нашем случае  $n = 6$ ).

Как было отмечено в работе (Батурин, 2022), при сильной нелинейности уральной поверхности функции  $\Phi(\mathbf{q})$  заметно отличаются от эллипсоидальных. Примерная картина расположения уральной поверхности относительно эллипсоидальной приведена на рис. 2. Эти поверхности, как показано в работах (Черницов и др., 2014; 2017), практически совпадают на концах наименьшей оси эллипсоида, среднеквадратическая ошибка представления наблюдений в этих точках обозначена как  $\sigma_{\min}$ .

Практическое совпадение уральной и эллипсоидальной поверхностей на концах наименьшей оси эллипсоида позволяет использовать значения функции  $\sigma(\mathbf{q})$  в этих точках как значения, определяющие уральную поверхность, соответствующую эллипсоидальной поверхности с заданной доверительной вероятностью.

Выразив  $k^2$  из аппроксимирующей формулы  $\sigma(\mathbf{q}) = \sigma_{\min} = \sigma_0 + bk^2$ , примененной вдоль наименьшей полуоси, получим  $k^2 = (\sigma(\mathbf{q}) - \sigma_0)/b$ . Таким образом, плотность доверительной вероятности в нелинейном случае может вычисляться

по той же формуле, что и в линейном, только коэффициент  $k$  зависит от представления наблюдений  $\sigma(\mathbf{q})$  в рассматриваемой точке:

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{l_1 \dots l_n \sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{\sigma(\mathbf{q}) - \sigma_0}{2b}\right). \quad (1)$$

## ВЫЯВЛЕНИЕ ТРУБОК СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ОРБИТ И ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СТОЛКНОВЕНИЯ

Рассмотрим теперь способ выявления трубки столкновительных орбит в каком-либо его сближении с Землей. Для этого сначала применяется способ условной минимизации расстояния до Земли в рассматриваемом сближении, описанный в работе (Батурин, 2022). Обозначим через  $\mathbf{g}_i (i = 1, \dots, m)$  полученные начальные векторы столкновительных орбит, расположенные на последовательных уральных поверхностях функции  $\Phi(\mathbf{q})$ , где  $m$  – число выявленных векторов.

Далее все полученные векторы усредняются:  $\bar{\mathbf{g}} = 1/m \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i$ , и вычисляется ковариационная матрица  $\mathbf{D}$  их разброса:  $D_{ij} = 1/(m-1) \times \sum_{k=1}^m (g_{ki} - \bar{g}_i)(g_{kj} - \bar{g}_j)$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ). После этого определяются собственные значения  $\lambda_i$  и соответствующие им собственные векторы  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) этой матрицы. Ковариационная матрица описывает разброс каких-либо точек с помощью эллипсоида, квадраты полуосей которого равны ее собственным значениям, а направления осей задаются собственными векторами, поэтому собственный вектор (обозначим его  $\mathbf{p}$ ), соответствующий наибольшему собственному значению (как правило, первому), определяет направление наибольшей вытянутости разброса точек. Это направление принимается за центральную ось трубки столкновительных орбит.

Затем эта ось разбивается с мелким шагом на равные отрезки, и в узлах разбиения (обозначим их через  $\mathbf{w}_i$ ) моделируется случайный разброс точек, равномерно заполняющих  $(n-1)$ -мерную (в данном случае пятимерную) окружность, расположенную перпендикулярно направлению на предыдущий или последующий узел (рис. 3). Для каждой из точек разброса проверяется наличие столкновения в рассматриваемом сближении. Радиус  $r$  окружности подбирается эмпирически, так, чтобы столкновительные точки (обозначенные красным) располагались примерно до половины этого радиуса. Для пятимерного пространства в этом случае отношение числа столкнови-



**Таблица 1.** Выбранные сближения астероидов с Землей

| Астероид   | Дата (UTC)      | Мин. расстояние,<br>а. е. |
|------------|-----------------|---------------------------|
| 2005 ED224 | 2026 3 11.80134 | 0.0137140                 |
| 2005 QK76  | 2078 2 26.82202 | 0.0078645                 |
| 2007 FT3   | 2045 10 5.26474 | 0.0280076                 |
| 2019 VB37  | 2049 4 26.55132 | 0.0076586                 |
| 2021 EU    | 2024 2 23.51033 | 0.0635848                 |
| 2020 PR3   | 2027 8 6.14973  | 0.0778269                 |

мула оценки вероятности столкновения в рассматриваемом сближении:

$$P = \bar{f} V. \quad (3)$$

#### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРИ ОЦЕНИВАНИИ ВЕРОЯТНОСТИ СТОЛКНОВЕНИЯ РЯДА АСТЕРОИДОВ

Описанный метод был апробирован при оценивании вероятности столкновения двух выбранных астероидов в одном из их предстоящих сближений с Землей. Для всех астероидов на основе улучшенных начальных параметров орбиты были рассчитаны сближения с Землей, среди которых для каждого астероида было выбрано одно из наибольших сближений, отстоящее не слишком далеко в будущем. Информация о выбранных сближениях приведена в табл. 1.

В качестве модели движения астероидов была использована возмущенная задача двух тел с учетом возмущений от восьми планет, Плутона и Луны, координаты которых при выполнении вычислений извлекались из последних на момент данной публикации эфемерид DE440 (<ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets>). Такой упрощенной модели вполне достаточно для демонстрации возможностей рассматриваемого способа выявления столкновительных орбит. Все вычисления выполнялись с использованием 80-битовых чисел с плавающей точкой, имеющих 19-значную десятичную разрядность. Для компиляции программ был использован свободно распространяемый компилятор GNU-Fortran (<http://www.equation.com/servlet/equation.cmd?fa=fortran>). Для численного интегрирования уравнений движения был применен метод Эверхарта (Everhart, 1984) 19-го порядка с переменным шагом интегрирования.

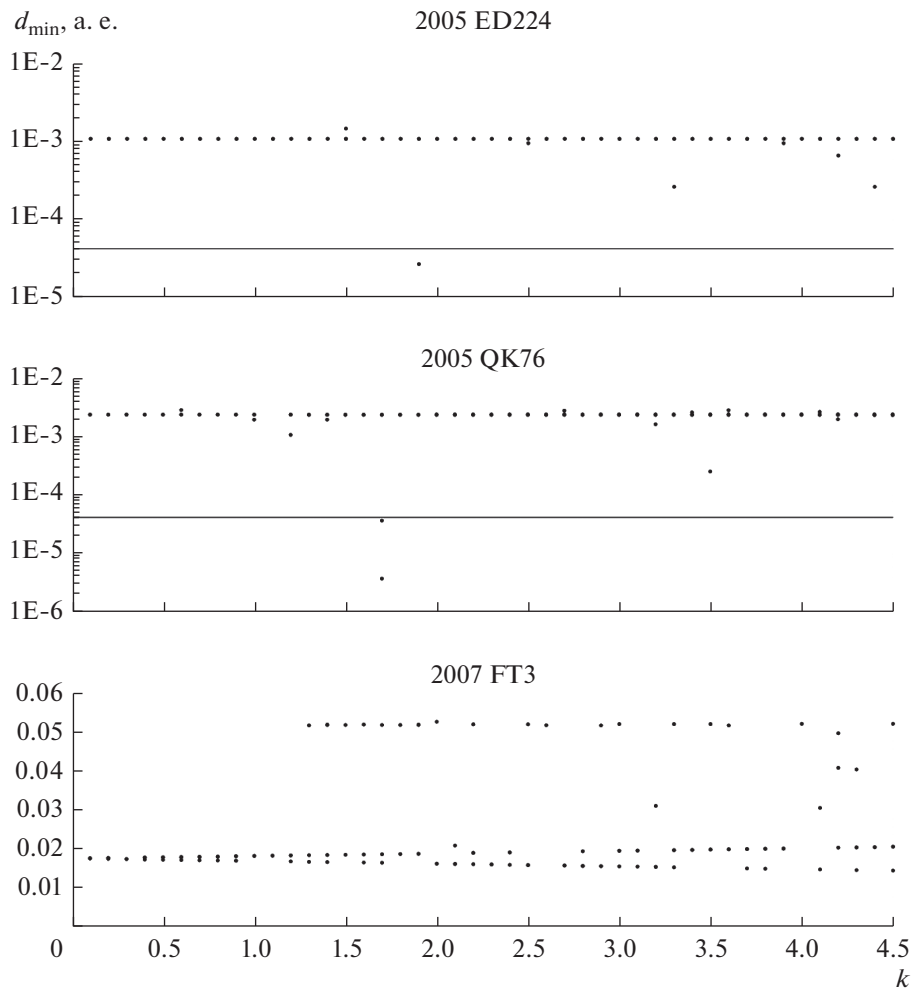
Затем для каждого из астероидов был применен метод выявления столкновительных орбит на отдельных уровнях поверхностей функции

$\Phi(\mathbf{q})$ , описанный в работе (Батурин, 2022). Результаты приведены на рис. 4–5. На этих рисунках приведено минимальное расстояние  $d_{\min}$  до центра Земли на каждой из уровнях поверхностей, соответствующих коэффициенту увеличения  $k$ , варьируемому от 0.1 до 4.5 с шагом 0.1. Прямая горизонтальная линия на некоторых графиках соответствует радиусу Земли, равному  $4.26 \times 10^{-5}$  а. е.

Как видно из рис. 4, для объекта 2005 ED224 была выявлена всего одна столкновительная орбита — на уровне поверхности, соответствующей коэффициенту увеличения  $k = 1.9$ ; для объекта 2005 QK76 — две орбиты на уровне поверхности, соответствующей  $k = 1.7$ . Поэтому для этих объектов не представляется возможным применение описанного выше метода оценивания вероятности столкновения, поскольку не существует необходимого разброса точек. Для них необходимо применять другие методы, планируемые к исследованию в дальнейшем. Для объекта 2007 FT3 не выявлено ни одной столкновительной орбиты, минимальное расстояние  $d_{\min}$  на всех уровнях поверхностях остается больше чем 0.0149 а. е., поэтому вероятность его столкновения с Землей в рассматриваемом сближении практически равна нулю.

На рис. 5 видно, что для объекта 2019 VB37 столкновительные орбиты выявляются на всех уровнях поверхностях; для объекта 2021 EU — начиная с коэффициента  $k = 2.8$ . Для объекта 2020 PR3 минимальное расстояние  $d_{\min}$  на всех уровнях поверхностях остается больше чем 0.0757 а. е., поэтому можно сделать вывод, что вероятность его столкновения с Землей в рассматриваемом сближении практически равна нулю. Учитывая полученные результаты, оставим далее в рассмотрении только объекты 2019 VB37 и 2021 EU.

Выявленные столкновительные орбиты  $\mathbf{g}_i$  для этих объектов приведены на рис. 6 и 7 в системе координат  $\xi_1, \dots, \xi_6$ , начало которой задается их средним вектором  $\bar{\mathbf{g}}$ , а оси совпадают с осями эллипсоида, задаваемого ковариационной матрицей  $\mathbf{D}$  их разброса, т.е. с ее собственными векторами. На рис. 6 и 7 приведено всего шесть проекций — на плоскости  $(\xi_1, \xi_2), (\xi_2, \xi_3), (\xi_1, \xi_3), (\xi_4, \xi_5), (\xi_4, \xi_6)$  и  $(\xi_5, \xi_6)$  — которые, однако, позволяют убедиться (учитывая различие масштабов по осям координат), что область столкновительных орбит в обоих случаях представляет собой довольно узкую трубку в пространстве начальных параметров движения. Это позволяет использовать в качестве длины  $L$  трубки разность максимального и минимального значений  $\xi_1$  среди всех векторов  $\mathbf{g}_i$ .



**Рис. 4.** Результаты выявления столкновительных начальных параметров движения на отдельных уровнях поверхностях для астероидов 2005 ED224, 2005 QK76 и 2007 FT3.

Полученный при выявлении столкновительных орбит разброс уже можно использовать для предварительной оценки вероятности столкновения, взяв при этом в качестве радиуса трубки  $R$  максимальное из всех расстояний до центральной оси трубки (оси  $\xi_1$ ), вычисляемых для каждой точки как  $\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_5^2}$ . Для вычисления среднего значения  $\bar{f}$  плотности доверительной вероятности центральная ось разбивается от минимально-

го до максимального значения  $\xi_1$  на некоторое число (в нашем случае 100) равных интервалов, на концах  $w_i$  этих интервалов вычисляется плотность вероятности по формуле (1) и все полученные значения усредняются.

Для объекта 2019 VB37 получены следующие результаты:  $L = 1.624 \times 10^{-5}$ ,  $R = 2.086 \times 10^{-10}$ ,  $\bar{f} = 4.024 \times 10^{39}$ , откуда вычисляемая по формуле (3) вероятность  $P = 1.36 \times 10^{-13}$ .

**Таблица 2.** Информация о выявленных столкновительных орбитах

| Астероид  | $r = R$          |                                 |                         | $r = 10R$        |                                 |                        | $r = 100R$       |                                 |                        |
|-----------|------------------|---------------------------------|-------------------------|------------------|---------------------------------|------------------------|------------------|---------------------------------|------------------------|
|           | $N_{\text{imp}}$ | $N_{\text{imp}}/N_{\text{tot}}$ | $R_{\text{max}}$        | $N_{\text{imp}}$ | $N_{\text{imp}}/N_{\text{tot}}$ | $R_{\text{max}}$       | $N_{\text{imp}}$ | $N_{\text{imp}}/N_{\text{tot}}$ | $R_{\text{max}}$       |
| 2019 VB37 | 100861           | 0.99862                         | $2.086 \times 10^{-10}$ | 62935            | 0.62312                         | $2.086 \times 10^{-9}$ | 7092             | 0.07022                         | $2.083 \times 10^{-8}$ |
| 2021 EU   | 100864           | 0.99865                         | $3.861 \times 10^{-9}$  | 3525             | 0.03490                         | $3.850 \times 10^{-8}$ | 388              | 0.00384                         | $3.837 \times 10^{-7}$ |

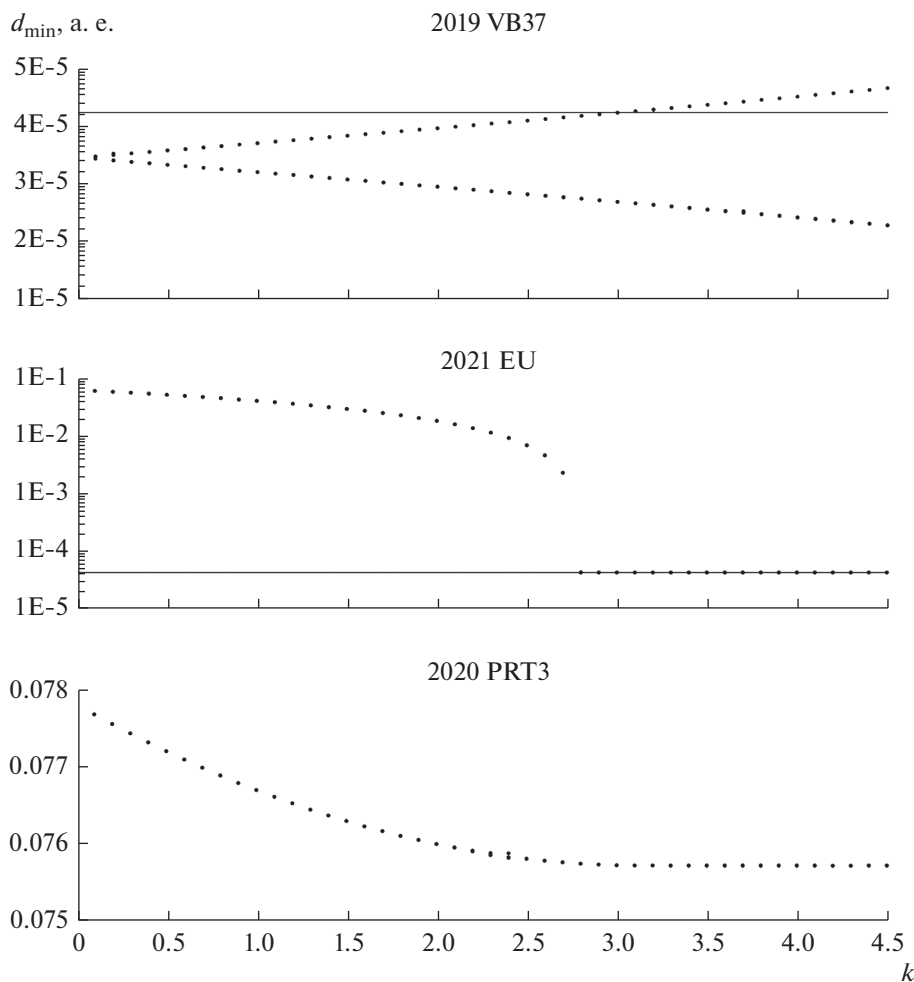


Рис. 5. Результаты выявления столкновительных начальных параметров движения на отдельных уровнях поверхностях для астероидов 2019 VB37, 2021 EU и 2020 PR3.

Для объекта 2021 EU:  $L = 4.559 \times 10^{-8}$ ,  $R = 3.862 \times 10^{-9}$ ,  $\bar{f} = 4.781 \times 10^{40}$ , откуда вероятность  $P = 9.86 \times 10^{-9}$ .

Далее для обоих объектов была применена описанная выше аппроксимация трубки столкновительных орбит с помощью перпендикулярных сечений и выполнен расчет сближений. Каждое сечение строилось вблизи введенных узлов  $\mathbf{w}_i$ , т.е. всего было взято 101 сечение-окружность, в каждой из которых задавалось по 10000 равномерно заполняющих окружность случайных точек. Таким образом, всего было использовано 101000 тестовых точек, обозначим это число как  $N_{\text{tot}}$ . Радиус окружностей  $r$  сначала задавался равным наибольшему расстоянию  $R$ , а затем увеличивался для того, чтобы число столкновительных точек  $N_{\text{imp}}$  было близко к  $1/2^5$  от их общего числа  $N_{\text{tot}}$ . В табл. 2 приведено число выявленных столкновительных орбит при различных значе-

ниях радиуса  $r$ , доля этого числа от общего числа тестовых орбит ( $N_{\text{imp}}/N_{\text{tot}}$ ) и максимальное расстояние  $R_{\text{max}}$  среди всех выявленных столкновительных орбит от центральной оси трубки (оси  $\xi_1$ ).

Как видно из табл. 2, для объекта 2019 VB37 близким к оптимальному является значение  $r = 100R$ , при котором доля столкновительных орбит составляет около 0.07, при этом радиус пятимерной окружности, аппроксимирующей область их расположения, составляет примерно 0.588 от радиуса цилиндрической трубки тестовых орбит. Для объекта 2021 EU к оптимальному близко значение  $r = 10R$ , при котором доля столкновительных орбит составляет 0.0349, что соответствует радиусу пятимерной окружности 0.511 от радиуса цилиндрической трубки.

На рис. 8–9 приведено изображение столкновительных (красные точки) и нестолкновительных (синие точки) орбит во всех трех случаях в

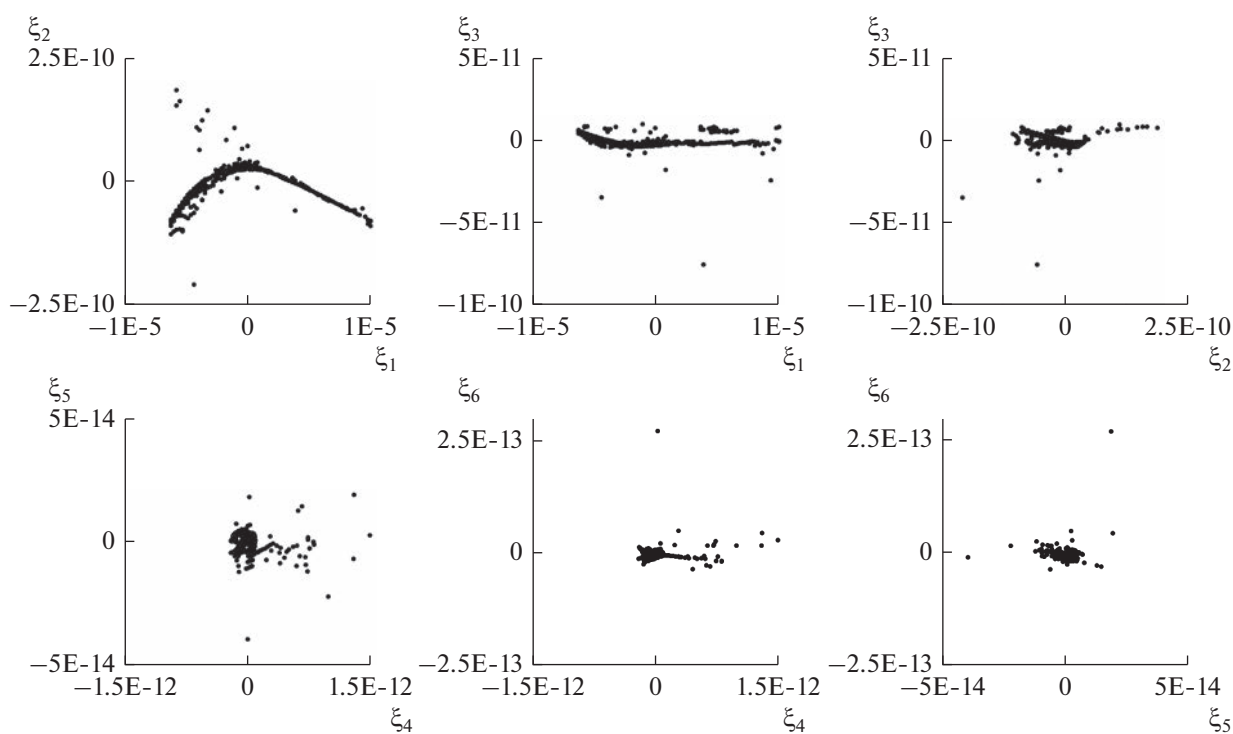


Рис. 6. Выявленные столкновительные орбиты для астероида 2019 VB37.

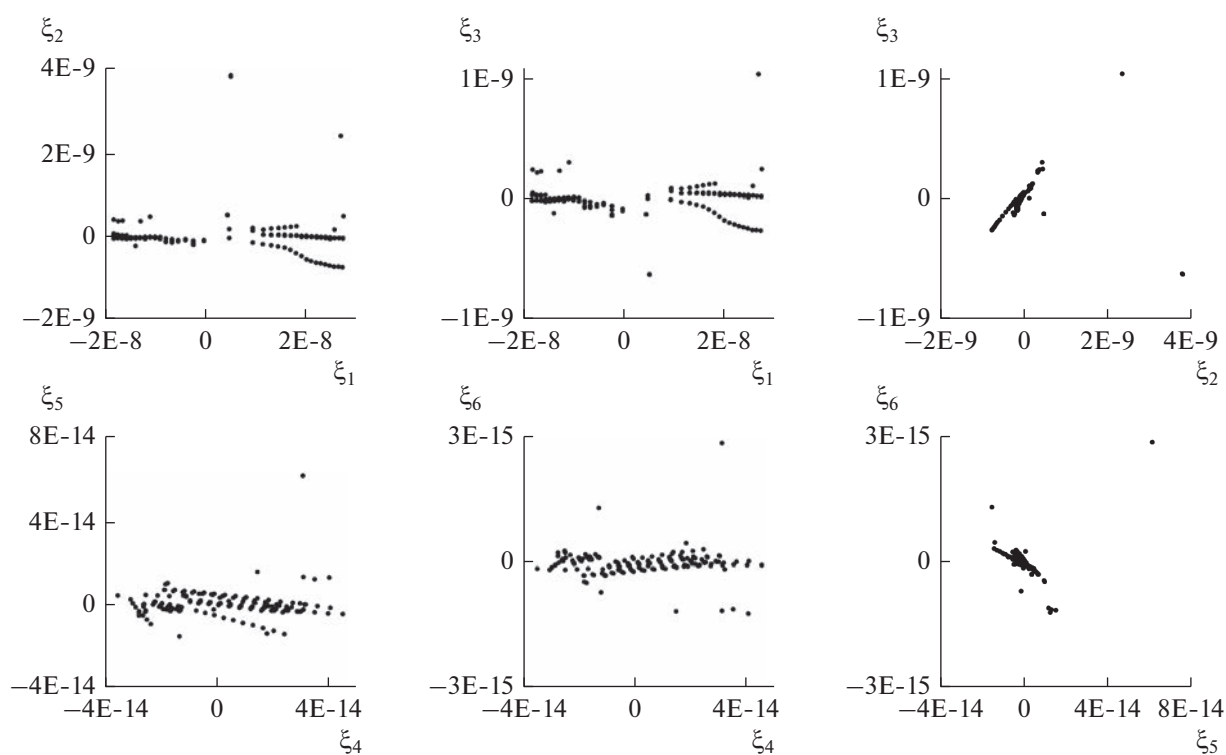


Рис. 7. Выявленные столкновительные орбиты для астероида 2021 EU.

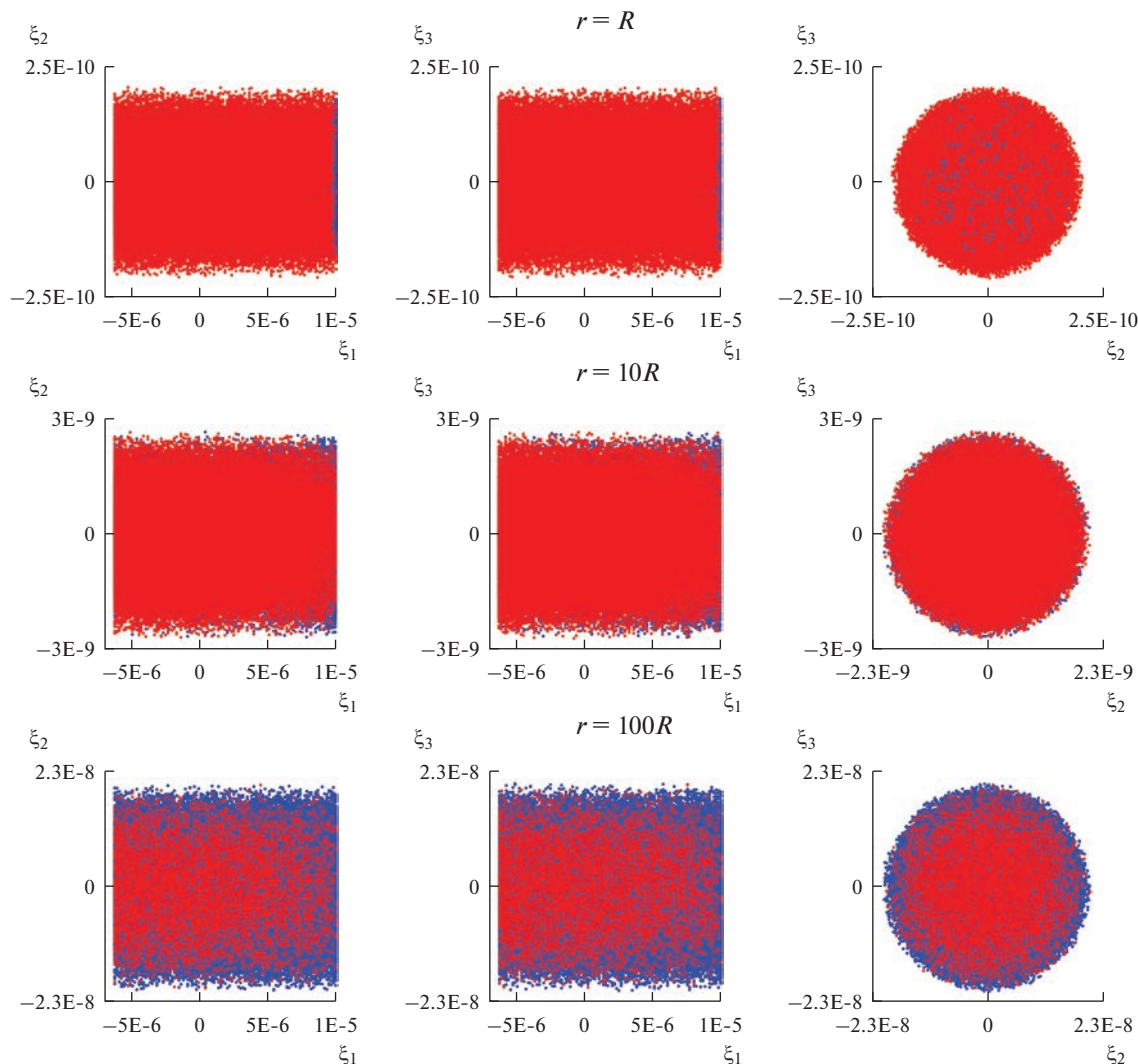


Рис. 8. Расположение столкновительных орбит для астероида 2019 VB37.

той же системе координат, что и на рис. 6–7. На рис. 8–9 в каждом случае приведены только три проекции, поскольку этого достаточно для демонстрации области распространения столкновительных орбит среди остальных.

Из рис. 8 и 9 видно, что области столкновительных и нестолкновительных орбит строго не разделены — и те и другие расположены вперемешку, поэтому в качестве области столкновительных орбит можно рассматривать область, где значительна плотность их распространения среди остальных орбит. Для объекта 2019 VB37 эта плотность еще значительна при  $r = 100R$ , в то время как для 2021 EU уже при  $r > 100R$  она становится незначительной.

Поскольку рассматриваемый способ позволяет оценивать вероятность столкновения лишь “сверху”, то в качестве такой оценки для 2019

VB37 можно взять вероятность, рассчитываемую по формуле (3), при  $R = R_{\max} = 2.083 \times 10^{-8}$  (табл. 2), что дает ее значение  $1.35 \times 10^{-3}$ . Для объекта 2021 EU плотность распространения столкновительных орбит становится незначительной уже при  $r > 10R$ , “оценка сверху” вероятности в этом случае получается равной  $9.71 \times 10^{-4}$ .

Полученные оценки можно сделать более точными, если учесть плотность распространения столкновительных орбит среди рассматриваемой трубки. Для этого оценку вероятности, полученную для 2019 VB37, следует умножить на 0.07022 (табл. 2), что дает значение  $9.48 \times 10^{-5}$ . Для объекта 2021 EU полученную оценку вероятности следует умножить на 0.0349 (табл. 2), что дает значение  $3.39 \times 10^{-5}$ .

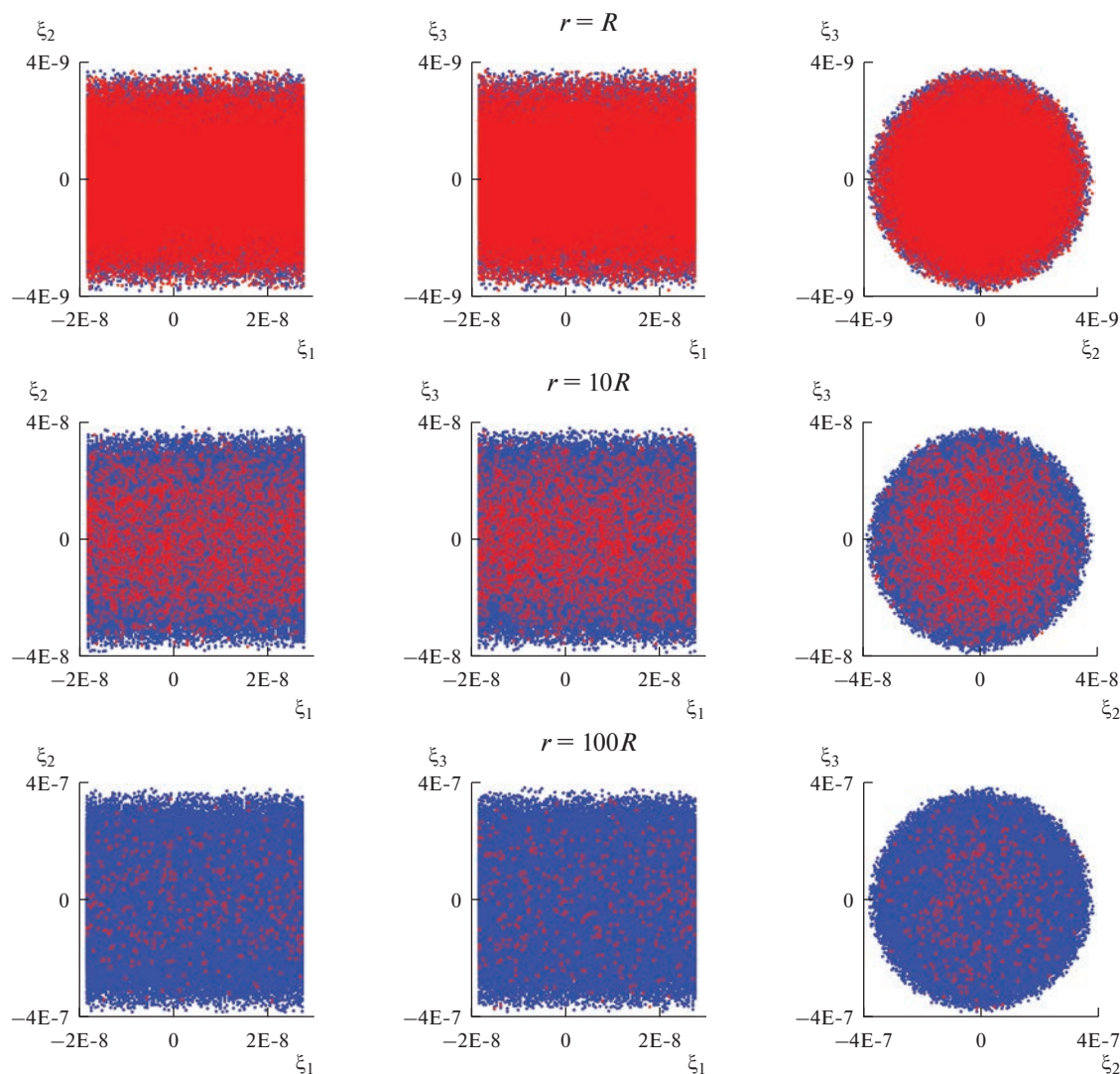


Рис. 9. Расположение столкновительных орбит для астероида 2021 EU.

Выполненное исследование позволяет заключить, что рассмотренный способ оценивания вероятности столкновения, основанный на выявлении трубки столкновительных орбит, позволяет получать ее “оценки сверху”, которые являются значительно более точными, чем оценки, получаемые лишь на основе выявленных столкновительных орбит на отдельных уровнях поверхностей. При выполнении исследования был применен способ определения доверительной вероятности в начальной области параметров движения, позволяющий вычислять эту вероятность в нелинейном случае по формуле, аналогичной формуле вычисления доверительной вероятности в линейном случае.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSWM-2020-0049).

Работа выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования “Терскольская обсерватория” (наблюдения астероида 2020 PR3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Батулин А.П. Выявление областей столкновительных орбит с помощью цилиндрических аппроксимаций и оценивание вероятности столкновения астероидов с Землей // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55. № 10-2. С. 34–49.
- Батулин А.П. Выявление столкновительных орбит астероидов с помощью представления начальной доверительной области в виде последовательности эллипсоидальных гиперповерхностей // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 10. С. 145–150.
- Батулин А.П. Выявление столкновительных орбит астероидов с помощью условной минимизации

- расстояния до Земли // Астрон. вестн. 2020. Т. 54. № 6. С. 560–566. (*Baturin A.P.* Detection of asteroid impact orbits using conditional minimization of the distance to the Earth // *Sol. Syst. Res.* 2020. V. 54. № 6. P. 550–556.)
- Батури́н А.П.* Выявление столкновительных орбит астероидов при заметной нелинейности в задаче улучшения орбиты // Астрон. вестн. 2022. Т. 56. № 5. С. 335–343. (*Baturin A.P.* Detection of collisional asteroid orbits under observable nonlinearity in the problem of orbit improvement // *Sol. Syst. Res.* 2022. V. 56. № 5. P. 318–326.)
- Железнов Н.Б.* Влияние корреляционных связей между орбитальными параметрами астероида на определение вероятности его столкновения с планетой методом Монте-Карло // Астрон. вестн. 2010. Т. 44. № 2. С. 150–157. (*Zheleznov N.B.* The influence of the correlations between an asteroid's orbital parameters on the estimation of the probability of planetary collision by the Monte Carlo method // *Sol. Syst. Res.* 2010. V. 44. № 2. P. 136–143.)
- Ивашкин В.В., Стихно К.А.* О предотвращении возможного столкновения астероида Апофис с Землей // Астрон. вестн. 2009. Т. 43. № 6. С. 502–516. (*Ivashkin V.V., Stikhno C.A.* On the prevention of a possible collision of asteroid Apophis with the Earth // *Sol. Syst. Res.* 2009. V. 43. № 6. P. 483–496.)
- Прохоренко В.И.* Об анализе тесных сближений двух космических тел на близких почти круговых орбитах // Космич. исслед. 2010. Т. 48. № 6. С. 541–548.
- Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.
- Соколов Л.Л., Башаков А.А., Борисова Т.П., Петров Н.А., Питьев Н.П., Шайдюлин В.Ш.* Траектории соударения астероида Апофис с Землей в XXI веке // Астрон. вестн. 2012. Т. 46. № 4. С. 311–320. (*Sokolov L.L., Bashakov A.A., Borisova T.P., Petrov N.A., Pitjev N.P., Shaidulin V.S.* Impact trajectories of the asteroid Apophis in the 21st century // *Sol. Syst. Res.* 2012. V. 46. № 4. P. 291–300.)
- Сюсина О.М., Черницов А.М., Тамаров В.А.* Построение доверительных областей в задаче вероятностного исследования движения малых тел Солнечной системы // Астрон. вестн. 2012. Т. 46. № 3. С. 209–222. (*Syusina O.M., Chernitsov A.M., Tamarov V.A.* Construction of confidence regions in problem on probabilistic study into motion of minor bodies of the Solar system // *Sol. Syst. Res.* 2012. V. 46. № 3. P. 195–207.)
- Черницов А.М., Тамаров В.А., Баранников Е.А.* Оценивание вероятности столкновения астероида с Землей методом Монте-Карло // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 5. С. 84–91.
- Черницов А.М., Сюсина О.М., Тамаров В.А.* Оценивание нелинейности в задаче построения доверительных областей движения потенциально опасных астероидов, наблюдаемых в одной оппозиции // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 12. С. 139–145.
- Черницов А.М., Тамаров В.А., Баранников Е.А.* Построение доверительных областей в задаче определения орбит астероидов // Астрон. вестн. 2017. Т. 51. № 5. С. 432–440. (*Chernitsov A.M., Tamarov V.A., Barannikov Y.A.* Construction of confidence regions in the problem of asteroid orbit determination // *Sol. Syst. Res.* 2017. V. 51. № 5. P. 400–408.)
- Everhart E.* An efficient integrator that uses Gauss–Radau spacings // *Proc. 83rd Colloq. Int. Astron. Union “Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution”*. Rome, June 11–15, 1984 / Eds Carusi A., Valsecchi G.B. Dordrecht: D. Reidel, 1985. P. 185–202.
- Ivashkin V.V., Stikhno C.A.* A problem of the orbit correction for the near-Earth asteroid Apophis // 58th Int. Astronautical Congress-2007, Hyderabad, India, September 24–28, 2007. *Proc.*, ISSN 1995-6258, Paper IAC-07-C1.7.08.
- Ivashkin V.V., Stikhno C.A.* Analysis of correction of asteroid Apophis' orbit providing its collision with the Moon // Int. Meeting “Fundamental and applied problems of mechanics-2018”. IOP Conf. Series: J. Physics: Conf. Ser. 1301 (2019) 012003 IOP Publishing, 2019. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1301/1/012003>.
- Milani A.* Asteroid impact monitoring // *Serb. Astron. J.* 2006. V. 172. P. 1–11.
- Milani Andrea, Chesley Steven R., Sansaturio M.E., Bernardi F., Valsecchi G.B., Arratia O.* Long term impact risk for (101955) 1999RQ36 // *Icarus*. 2009. V. 203. № 2. P. 460–471.