АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК, 2023, том 57, № 3, с. 262–274

УДК 523-52

# ДЖИНСОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВЫСОКОГО РАДИАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ И ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

**© 2023 г. А. В. Колесниченко***

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

**e-mail: kolesn@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 26.06.2022 г.
После доработки 15.11.2022 г.
Принята к публикации 28.12.2022 г.

В рамках проблемы моделирования эволюции протозвездного диска обсуждается влияние излучения на джинсовскую гравитационную неустойчивость для самогравитирующей оптически толстой (для собственного инфракрасного излучения) газопылевой среды, с учетом влияния на критическую длину волны возмущения радиационного давления и диффузионного лучистого переноса. Рассмотрены два приближения радиационной диффузии: случай идеального теплового равновесия, когда температуры вещества и излучения одинаковы; случай зависимости поля излучения от времени, когда имеет место энергетическое разделение между излучением и веществом. При использовании анализа нормального режима мод выведены дисперсионные соотношения, позволяющие получить модификации классического критерия неустойчивости Джинса под влиянием радиационного давления и диффузии излучения. В частности, показано, что в отличие от локального термодинамического равновесия системы, когда акустическая скорость возмущенного газа распространяется с изотермической скоростью звука, в случае различия температур излучения и газа возмущающая волна распространяется с адиабатической скоростью звука в газе. Полученные результаты направлены на решение проблемы гравитационной неустойчивости отдельных массивных протозвездных дисков или самогравитирующих радиационных сред, характеризующихся большими оптическими глубинами для собственного инфракрасного излучения, трансформированного пылью.

**Ключевые слова:** критерий неустойчивости Джинса, радиационное давление, чернотельное излучение, диффузионный перенос излучения

**DOI:** 10.31857/S0320930X23030040, **EDN:** IGNBYM

## ВВЕДЕНИЕ

Заключительным этапом эволюции маломассивного протозвездного объекта является звезда типа T Tau, окруженная газопылевым диском. Изучение этих дисков вызывает особый интерес, поскольку в них, по современным представлениям, происходит образование планетных систем, подобных Солнечной системе. При этом критерии гравитационной неустойчивости в горячем газе имеют ключевое значение в понимании процессов эволюции подобных околозвездных дисков. Именно гравитационная неустойчивость Джинса играет главную роль в процессе фрагментации дискового вещества. В частности, экзопланетные диски формируются из самогравитирующих околозвездных дисков в результате потери ими гравитационной устойчивости. Однако полной ясности в том, какие физико-механические свойства подобной звездной системы доминируют при их формировании, до сих пор нет. Большинство обнаруженных на сегодняшний день экзопланетных дисков вокруг галактических звезд заметно отличаются от протопланетного диска Солнца (Маров, Шевченко, 2017; Бисикало и др., 2021).

Классическая теория гравитационной неустойчивости Джинса предполагает, что среда однородна и изотропна и характеризуется баротропным уравнением состояния (Jeans, 1902). Существенное усовершенствование этой теории при учете различных предположений о вращении астрофизической системы и пронизывающего ее магнитного поля было выполнено Чандрасекхаром (Chandrasekhar, 1961). В дальнейшем многочисленные исследователи обсуждали гравитационную неустойчивость в линейном и нелинейном приближениях для вращающихся газа и плазмы в разных аспектах относительной ориентации магнитного поля, оси вращения и вектора распространения волны возмущения, а также с учетом влияния различных физических процессов и явлений (см., например, Bhatia, 1967; Aggarwal, Talwar, 1969; Sharma, 1974; Fridman, Polyachenko, 1984; Sharma, Singh, 1988; Bora, Nayyar, 1991; Хоперсков, Храпов, 1999; Jacobs, Shukla, 2005; Borah, Sen, 2007; Dhiman, Dadwal, 2011; 2012; Shaikh и др., 2008; Фридман, Хоперсков, 2011; Kaothekar, Chhajlani, 2012; Prajapati и др., 2012; Argal и др., 2014; Joshi, Pensia, 2017; Kumar и др., 2017; Pensia и др., 2018; Колесниченко, 2020).

В литературе имеется также относительно небольшое число работ, в которых при различных предположениях относительно направления магнитного поля и режимов распространения волны возмущения было исследовано влияние взвешенных пылевых частиц и процессов лучевой теплопроводности на магнито-гравитационную неустойчивость вращающейся плазмы (см., например, Chhajlani, Vaghela, 1987; Tsintsadze и др., 2008; Prajapati, Chhajlani, 2011; Prajapati, Bhakta, 2015; Sharma, Patidar, 2017; Kumar и др., 2018). Во всех перечисленных выше публикациях показано, что критерий неустойчивости Джинса сохраняется с некоторыми модификациями, связанными с учетом влияния разнообразных параметров.

И совсем немного на сегодняшний день имеется работ, в которых исследуется неустойчивость самогравитирующих астрофизических объектов в приближении чернотельного излучения (см., например, Vranješ, Čadež, 1990; Vranješ, 1990; Vaghela, Shrivastava, 1994; Prajapati, Chhajlani, 2011; Kumar и др., 2017; Kolesnichenko, 2020; 2021). Обычно, температура газа в околозвездных дисках растет с приближением к аккрецирующему объекту. С ростом температуры увеличивается значимость давления излучения в эволюции диска по сравнению с газовым давлением. Наиболее ранняя работа, посвященная эволюции самогравитирующих радиационных сред с преобладанием давления излучения, была проведена в публикациях (Silk, 1967; 1968), а затем дополнена в работах (Peebles, Yu, 1970; Weinberg, 1971; Hu, Sugiyama, 1996; Dodelson, 2003) в контексте затухания акустических волн первичных флуктуаций под действием радиационной диффузии. Однако в этих работах не рассматривались модифицированные критерии Джинса, когда давление излучения динамически доминирует в системе, и не обсуждалась физика медленных диффузионных мод. Кроме того, в этих и в некоторых цитируемых выше работах по проблеме неустойчивости радиационно-доминирующей области астрофизического объекта рассматривались только изоэнтропические волновые возмущения, при которых энтропия каждого элемента массы на всем его пути сохраняется. В этом случае мелкомасштабные эйлеровы вариации давления $\delta P$, плотности $\delta\rho$ и температуры $\delta T$ в линеаризованном уравнении сохранения энергии определялись, как правило, на основе известных адиабатических соотношений Эддингтона–Чандрасекхара (см. Тассуль, 1982). И хотя для большинства астрофизических приложений эти соотношения представляют собой достаточно разумное приближение, во многих более реалистических ситуациях необходимо учитывать отклонение от изоэнтропичности, при которой элементы массы приобретают или теряют тепло (например, в звездах верхней части главной последовательности, в которых давление излучения преобладает над газовым давлением). В этом случае относительно простые адиабатические соотношения Эддингтона–Чандрасекхара более не применимы и следует использовать более общие соотношения (Cox, Giuli, 1968; Cox, 1979), усложненные за счет учета вектора потока энергии, обусловленного всеми возможными механизмами переноса (излучением, теплопроводностью, конвекцией, нейтринными потерями, потерями массы и т.п.).

Вопрос о неустойчивости самогравитирующего газового облака, с учетом чернотельного излучения в неизоэнтропическом случае, обсуждался в литературе также недостаточно. Лишь в немногих публикациях (см., например, Blaes, Socrates, 2001; 2003; Kaneko и др., 2005; Kaneko, Morita, 2006; Колесниченко, 2022) было исследовано распространение одномерных малоамплитудных возмущений в излучающей и рассеивающей серой среде идеального газа с учетом диффузионного переноса излучения.

В связи со сказанным, представляется вполне оправданным появление публикаций, целью которых является исследование того, как классический критерий гравитационной неустойчивости модифицируется для оптически толстых (для собственного инфракрасного излучения) астрофизических дисков в случае неизоэнтропичности возмущений совокупных структурных параметров вещества и излучения и при наличии динамически значимого давления излучения и радиационной диффузии, которая является немаловажным источником затухания акустических волн. При этом, сами акустические волны могут быть нестабильными из-за динамического воздействия нестационарной радиации, связанной с временной эволюцией поля излучения.

Представленная статья посвящена исследованию эволюции самогравитирующих протозвездных дисков, строение которых характеризуется высокой плотностью энергии излучения и высокой плотностью вещества, а также оптическими глубинами для собственного инфракрасного излучения, переработанного пылью. В каждом из подобных протозвездных дисков гравитационное давление может быть сравнимо с радиационным давлением, а связанная с ним плотность энергии фотонов соперничает только с плотностью энергии турбулентности и, возможно, с энергетическими вкладами космических лучей и магнитных полей (Blaes, Socrates, 2001; 2003). Проведенный здесь анализ может представлять определенный интерес для исследования джинсовской неустойчивости отдельных массивных звезд на ранней стадии их образования, а также для самогравитирующих астрофизических сред, радиационное давление в которых, связанное с воздействием излучения, доминирует над давлением вещества.

## ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим некоторую область протозвездного диска как идеализированную астрофизическую среду, для которой возможно моделировать только физику взаимодействия излучения и вещества, без учета сложности реального диска. В этом случае система уравнений радиационной гидродинамики для идеального совершенного газа в нерелятивистском приближении, состоящая из трех уравнений гидродинамики, уравнения Пуассона и двух моментных уравнений излучения, имеет следующий вид (Hsieh, Spiegel, 1976; Buchler, 1979; Kaneko и др., 1976; Mihalas D., Mihalas B.W., 1984; Бисикало и др., 2013):

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\mathcal{D}\mathbf{v}}{\mathcal{D}t} = -\nabla P_g + \frac{\kappa_F\rho}{c}\mathcal{F}_r + \rho\nabla\Phi, \tag{2}$$

$$\rho T_g\frac{\mathcal{D}s_g}{\mathcal{D}t} = \rho\left[\frac{\mathcal{D}e_g}{\mathcal{D}t} + P_g\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = \kappa\rho\left(c\rho e_r - 4\pi\mathcal{S}_r\right), \tag{3}$$

$$\rho T_r\frac{\mathcal{D}s_r}{\mathcal{D}t} = \rho\left[\frac{\mathcal{D}e_r}{\mathcal{D}t} + P_r\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = -\nabla\cdot\mathcal{F}_r - \hat{\mathbf{P}}_r : \nabla\mathbf{v} + \kappa\rho\left(4\pi\mathcal{S}_r - c\rho e_r\right), \tag{4}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathcal{D}\mathcal{F}_r}{\mathcal{D}t} + \nabla\cdot\mathbf{P}_r = -\frac{1}{c}\kappa\rho\mathcal{F}_r, \tag{5}$$

$$\Delta\Phi = -4\pi G\rho. \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{D}/\mathcal{D}t = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$; $\rho(\mathbf{r},t)$ – массовая плотность; $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ – гидродинамическая скорость потока; $c$ – скорость света; $T_g(\mathbf{r},t)$ – температура вещества (газа); $e_g(\mathbf{r},t) = C_{Vg}T_g = P_g/(\gamma-1)\rho$ – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия газа; $P_g(\mathbf{r},t) = (\mathcal{R}/\bar{\mu})\rho T_g$ – давление газа; $\gamma = C_{Pg}/C_{Vg}$ – показатель адиабаты (отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении $C_{Pg} = \gamma(\mathcal{R}/\bar{\mu})/(\gamma-1)$ и постоянном объеме $C_{Vg} = (\mathcal{R}/\bar{\mu})/(\gamma-1)$; $s_g(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\gamma-1}\times(\mathcal{R}/\bar{\mu})\ln\left(P_g/\rho^\gamma\right) + \mathrm{const}$ – удельная энтропия газа; $\Phi(\mathbf{r},t)$ – ньютоновский гравитационный потенциал, являющейся решением уравнения Пуассона (6); $G$ – гравитационная постоянная; $\mathcal{F}_r(\mathbf{r},t)$ – интегральный поток энергии излучения; $e_r(\mathbf{r},t) = aT_r^4/\rho$ – удельная энергия излучения; $T_r(\mathbf{r},t)$ – температура поля излучения; $s_r(\mathbf{r},t) = 4aT_r^3/3\rho$ – удельная энтропия излучения; $\mathbf{P}_r(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{P}}_r + P_r\mathbf{I}$ – интегральный тензор анизотропного давления излучения (в приближении Эддингтона $\mathbf{P}_r = \mathbf{f}_E\rho e_r$, где тензор $\mathbf{f}_E = f_E\mathbf{I}$ (здесь $f_E$ – фактор Эддингтона, равный $f_E = 1/3$ в случае оптически толстой среды; для оптически тонкой среды $f_E = 1$); $P_r(\mathbf{r},t)$ – давление излучения; $\hat{\mathbf{P}}_r(\mathbf{r},t)$ – бесследный тензор радиационного давления; $\mathcal{S}_r(\mathbf{r},t)$ – интегральная функция источника излучения; $\kappa$ – коэффициент усредненной непрозрачности Росселанда (коэффициент поглощения излучения веществом), который в общем случае может быть функцией плотности и температуры газа, а также плотности энергии излучения). Более подробное описание поля излучения, когда учитывается различие между рассеянием излучения и чистой поглощающей непрозрачностью, рассматривается, например, в работах (Blaes, Socrates, 2003; Kaneko и др., 2005).

Отметим также, что в случае приближения Эддингтона эффектом фотонной вязкости можно пренебречь (Agol, Krolik, 1998). Кроме этого, рассматривая далее излучение, захваченное пылевой непрозрачностью[1], мы, тем не менее, в уравнениях (1)–(6) будем пренебрегать двухфазностью астрофизической среды, предполагая идеальную столкновительную и энергетическую связь между газом и пылью (более общий случай рассмотрен, например, в работах (Pier, Krolik, 1992; Thompson и др., 2005; Chang и др., 2007; Sharma, Patidar, 2017; Kumar и др., 2018; Колесниченко, 2022)).

Полная плотность энергии излучения $u_r(\mathbf{r},t) = \rho e_r$, поток $\mathcal{F}_r(\mathbf{r},t)$ и тензор давления $\mathbf{P}_r(\mathbf{r},t)$ излучения определяются через угловые моменты от удельной спектральной интенсивности излучения $I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{n},t)$ соотношениями

[1] В работе считается, что излучение перерабатывается только газом и пылью; при этом взаимодействие между фотонами можно считать полностью отсутствующим (см. Ландау, Лифшиц, 1976).

$$u_r = \frac{1}{c}\int_0^\infty d\nu \oint d\Omega I_\nu, \quad \mathscr{F}_r = \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega I_\nu \mathbf{n},$$
$$\mathbf{P}_r = \frac{1}{c}\int_0^\infty d\nu \oint d\Omega I_\nu \mathbf{nn}, \tag{7}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении распространения излучения, которому соответствует элемент телесного угла $d\Omega$.

## ЛОКАЛЬНОЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

В случае ЛТР, когда излучение в каждой точке находится в равновесии с веществом при температуре $T_r = T_g = T(\mathbf{r},t)$, суммирование уравнений (3) и (4) приводит к уравнениям для полной энтропии $s(\mathbf{r},t) = s_g + s_r$ и полной энергии $e(\mathbf{r},t) = e_g + e_r$ газа и излучения

$$\rho T \frac{\mathscr{D}s}{\mathscr{D}t} = -\nabla \cdot \mathscr{F}_r - \hat{\mathbf{P}}_r : \nabla \mathbf{v}, \tag{8}$$

$$\rho\left[\frac{\mathscr{D}e}{\mathscr{D}t} + P\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = -\nabla \cdot \mathscr{F}_r - \hat{\mathbf{P}}_r : \nabla \mathbf{v}, \tag{9}$$

где

$$P = P_g + P_r = P_g + f_{\mathrm{E}} u_r \tag{10}$$

– полное давление в системе.

При ЛТР равновесная интенсивность излучения $I_\nu^{eq}$ описывается независящей от направления потока излучения $\mathbf{n}$ термодинамической формулой Планка

$$I_\nu^{eq}(\mathbf{r},t) = \mathscr{B}_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \tag{11}$$

Поскольку имеют место соотношения

$$\oint d\Omega = 4\pi, \quad \oint \mathbf{n}\, d\Omega = 0, \quad \oint \mathbf{nn} d\Omega = \frac{4}{3}\pi \mathbf{I}, \tag{12}$$

то в этом случае для интегральных плотности энергии $u_r(\mathbf{r},t) = \rho e_r(\mathbf{r},t)$, потока $\mathscr{F}_r(\mathbf{r},t)$ и давления $P_r(\mathbf{r},t)$ излучения справедливы следующие представления

$$u_r^{eq}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathscr{B}(T) = aT^4, \quad \mathscr{F}_r^{eq}(\mathbf{r},t) = 0,$$
$$P_r^{eq}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{3c}\mathscr{B}(T) = \frac{a}{3}T^4. \tag{13}$$

Здесь $\mathscr{B}(T) = acT^4/4\pi$ – интегрированная по всем частотам функция Планка;

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^2} = 7.565\times 10^{-15} \quad \text{г/см с}^2\ \text{град}^4$$

– постоянная давления излучения. Кроме этого, для черного излучения удельные энтропия $s_r(\mathbf{r},t)$ и теплоемкость $C_{Vr}(\mathbf{r},t)$ при постоянном давлении определяются выражениями (см. Ландау, Лифшиц, 1976)

$$s_r(\mathbf{r},t) = (4/3)aT^3/\rho + \mathrm{const},$$
$$C_{Vr}(\mathbf{r},t) = 4aT^3/\rho, \tag{14}$$

а функция источника $\mathscr{S}_r(\mathbf{r},t)$ принимает вид:

$$\mathscr{S}_r^{eq}(\mathbf{r},t) = \mathscr{B}(T) = acT^4/4\pi, \tag{15}$$

в результате этого слагаемые $\kappa\rho\left(c\rho e_r - 4\pi\mathscr{S}_r\right)$ в уравнениях (3) и (4) исчезают.

### *Диффузионное приближение*

При строгом тепловом равновесии вещества и излучения поток излучения в любом направлении отсутствует, $\mathscr{F}_r^{eq}(\mathbf{r},t) = 0$. Можно, однако, показать, что соотношения (10) и (11) все же могут быть использованы (с высокой точностью) даже в присутствии небольшого отличия от нуля спектрального потока $\mathscr{F}_r^{eq}$, если градиент интенсивности излучения мал. С этой целью рассмотрим уравнение для спектрального потока излучения

$$c^{-1}\mathscr{D}\mathscr{F}_\nu/\mathscr{D}t + \oint \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla I_\nu)d\Omega = -\kappa_\nu\rho\mathscr{F}_\nu, \tag{16}$$

которое является первым угловым моментом уравнения переноса излучения в случае, когда поле излучения лишь слегка анизотропно. Здесь $\kappa_\nu(\mathbf{r},\mathbf{n},t)$ – коэффициент поглощения (непрозрачность) излучения в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$, определенный так, что величина $\kappa_\nu\,\rho\, I_\nu\, d\nu\, d\Omega$ представляет собой соответствующую энергию, поглощенную в единице объема среды в единицу времени из пучка излучения данной интенсивности $I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{n},t)$. Если теперь предположить, что излучение является квазистационарным в каждый момент времени, то это уравнение (16) сводится к следующему виду:

$$\oint \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla I_\nu)d\Omega = -\kappa_\nu\,\rho\mathscr{F}_\nu. \tag{17}$$

Для слегка анизотропного поля излучения можно оценить левую часть этого уравнения следующим образом

$$\oint \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla I_\nu)d\Omega \simeq \nabla I_\nu^{eq}\oint \mathbf{nn}d\Omega =$$
$$= \frac{c}{3}\nabla u_\nu^{eq} = \frac{4\pi}{3}\nabla\mathscr{B}_\nu,$$

где использовано первое соотношение (11). В результате, после интегрирования по всем частотам, получим

$$\mathscr{F}_r(\mathbf{r},t) = -\frac{c}{3\rho}\int_0^\infty (1/\kappa_\nu)\nabla u_\nu^{eq} d\nu. \qquad (18)$$

Если теперь ввести усредненную по Росселанду непрозрачность коэффициента $\kappa$

$$\frac{1}{\kappa} = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{du_\nu^{eq}}{dT}d\nu \Bigg/ \int_0^\infty \frac{d\,u_\nu^{eq}}{dT}d\nu = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{d\,u_\nu^{eq}}{dT}d\nu \Bigg/ \frac{d\,u_r^{eq}}{dT},$$

то интегральный поток излучения (18) может быть записан в виде следующего закона лучистой теплопроводности:

$$\mathscr{F}_r = -\frac{c}{3\rho}\int_0^\infty (1/\kappa_\nu)\nabla u_\nu^{eq} d\nu = -\frac{c}{3\rho\kappa}\nabla u_r^{eq} = -\lambda_r \nabla T, \qquad (19)$$

где $\lambda_r = \frac{4}{3}(ac/\rho\kappa)T^3$ – коэффициент лучистой теплопроводности.

*Балансовое уравнение для полной энтропии*

Известно, что закон лучистой теплопроводности можно использовать и для нестационарного поля излучения при наличии источников энергии[2]. В этом случае уравнение (8) для полной энтропии

$$s(\mathbf{r},t) = \frac{4aT^3}{3\rho} + \frac{(\mathscr{R}/\bar{\mu})}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}}\right) = \frac{C_{Vr}}{3} + C_{Pg}\ln\left(\frac{T}{P_g^{(\gamma-1)/\gamma}}\right) \qquad (20)$$

совершенного газа и черного излучения с постоянными теплоемкостями принимает вид:

$$\rho T\frac{\mathscr{D}s}{\mathscr{D}t} = \rho\left[\frac{\mathscr{D}e}{\mathscr{D}t} + P\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = \lambda_r\nabla^2 T. \qquad (21)$$

Этому уравнению можно придать следующие (удобные для астрофизических приложений) две эквивалентные формы:

$$T\frac{\mathscr{D}s}{\mathscr{D}t} = \frac{P}{\rho}\times \left[\left(\frac{\beta + 12(1-\beta)(\gamma-1)}{(\gamma-1)}\right)\frac{\mathscr{D}\ln T}{\mathscr{D}t} - (4-3\beta)\frac{\mathscr{D}\ln\rho}{\mathscr{D}t}\right] = C_{V\Sigma}\rho T^2\left[\frac{\mathscr{D}\ln T}{\mathscr{D}t} - (\Gamma_3 - 1)\frac{\mathscr{D}\ln\rho}{\mathscr{D}t}\right] = \lambda_r\nabla^2 T \qquad (22)$$

и

$$T\frac{\mathscr{D}s}{\mathscr{D}t} = \frac{P}{\rho}\left[\left(\frac{\beta + 12(1-\beta)(\gamma-1)}{(\gamma-1)(4-3\beta)}\right)\times \left(\frac{\mathscr{D}\ln P}{\mathscr{D}t} - \beta\frac{\mathscr{D}\ln\rho}{\mathscr{D}t}\right) - (4-3\beta)\frac{\mathscr{D}\ln\rho}{\mathscr{D}t}\right] = \frac{1}{\Gamma_3 - 1}\frac{\mathscr{D}\ln}{\mathscr{D}t} - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1}\frac{\mathscr{D}\ln\rho}{\mathscr{D}t} = \lambda_r\nabla^2 T. \qquad (23)$$

Здесь величины $\Gamma_1$ и $\Gamma_3$ (обобщенные показатели адиабаты для смеси газа и черного излучения) определяются соотношениями (Chandrasekhar, 1961)

$$\Gamma_1 := \left(\frac{\partial\ln P}{\partial\ln\rho}\right)_S = \beta + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)}, \qquad (24)$$

$$\Gamma_3 := 1 + \left(\frac{\partial\ln T}{\partial\ln\rho}\right)_S = 1 + \frac{(4-3\beta)(\gamma-1)}{\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)} = \frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta}, \qquad (25)$$

в которых параметр

$$\beta := P_g/(P_g + P_r) \qquad (26)$$

характеризует долю газа в полном давлении смеси.

Когда $P_g \gg P_r$, то $\beta \simeq 1$ и все обобщенные показатели адиабаты для смеси “газ + излучение” совпадают с показателем адиабаты совершенного газа $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \gamma$, а если присутствует одно лишь излучение абсолютно черного тела ($P_g \ll P_r$), то они равны 4/3. Таким образом, для рассматриваемой астрофизической системы обобщенные показатели адиабаты принимают промежуточные значения от 4/3 до 5/3.

Для полной удельной теплоемкости газа и излучения имеем

$$C_{V\Sigma} = C_{Vg} + C_{Vr} = \frac{(\mathscr{R}/\bar{\mu})}{\gamma - 1} + \frac{4aT^3}{\rho} = \frac{1}{\rho T}\left(\frac{P_g}{\gamma - 1} + 12P_r\right) = \frac{C_{Vg}}{\beta}\frac{(\gamma-1)(4-3\beta)^2}{\Gamma_1 - \beta} = \frac{C_{Vg}}{\beta}[\beta + 12(1-\beta)(\gamma-1)]. \qquad (27)$$

Уравнения (22) и (23), записанные в изоэнтропическом случае, также позволяют найти выражения для полных удельных теплоемкостей (при постоянном объеме и при постоянном давлении) смеси материи и излучения

$$C_{V\Sigma} = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V = \frac{(\mathscr{R}/\bar{\mu})}{\beta}\left(\frac{\beta + 12(1-\beta)(\gamma-1)}{(\gamma-1)}\right), \qquad (28)$$

[2] В диффузионном приближения существенное изменение плотности энергии излучения (за счет нестационарности) и источников энергии имеет место только в тех областях среды, где пробег излучения больше всех характерных длин рассматриваемого явления, например, у самой поверхности звезды (Франк-Каменецкий, 1959).

$$C_{P\Sigma} = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = C_{Vg}\frac{\Gamma_1(\gamma-1)(4-3\beta)^2}{\beta^2(\Gamma_1-\beta)} = \\ = \frac{C_{Vg}}{\beta^2}\left[\beta^2 + (\gamma-1)(4-3\beta)^2 + 12\beta(\gamma-1)(1-\beta)\right]. \quad (29)$$

Из формул (28) и (29) следует, что отношение полных удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме и обобщенная формула Майера для смеси совершенного газа и черного излучения имеют вид:

$$C_{P\Sigma}/C_{V\Sigma} = \Gamma_1/\beta, \;\; C_{P\Sigma} - C_{V\Sigma} = (\mathcal{R}/\overline{\mu})\left(\frac{4-3\beta}{\beta}\right)^2. \quad (30)$$

## ВЛИЯНИЕ ЧЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДЖИНСОВСКУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

### *Линеаризованные уравнения радиационной газодинамики в диффузионном приближении*

Для изучения мелкомасштабных возмущений линеаризуем систему уравнений (1), (2), (6) и (9), записанную в приближении оптически толстой среды. С этой целью представим газодинамические переменные в виде сумм невозмущенных величин $\rho_0, T_0, P_0$ $\mathbf{v}_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = 0$, $\Phi_0 \cong 0$ (далее используется так называемое “мошенничество” Джинса) и возмущенных величин $\delta\rho, \delta T, \delta P, \delta\mathbf{v}$, $\delta\mathcal{F}$, $\delta\Phi$[3]. Невозмущенные величины описывают, по предположению, некоторое равновесное состояние системы, а возмущенные – суть малые пульсации параметров, слабо нарушающие невозмущенное состояние. Для состояния равновесия излучения будем предполагать однородное и изотропное поле излучения; при этом средняя непрозрачность $\kappa = \mathrm{const}$. Кроме этого, будем (для простоты) считать, что характерная длина волны возмущения мала по сравнению с характерным пространственным изменением как структурных гидродинамических параметров $P_0, T_0, \rho_0$, так и других характерных длин задачи (т.е. ограничимся так называемым приближением коротковолновой акустики). В этом случае в линеаризованных уравнениях можно пренебречь всеми пространственными производными. Далее индекс “0” у невозмущенных величин будем опускать.

С учетом сделанных упрощающих предположений дифференциальные уравнения (1), (2), (6) и (9) при выполнении всех необходимых разложений и удержании членов первого порядка относительно малых возмущений принимают следующий линеаризованный вид:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot\delta\mathbf{v} = 0, \quad (31)$$

$$\rho\frac{\partial\,\delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla\delta P - \nabla\delta\Phi = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial\,\delta P}{\partial t} = \Gamma_1\frac{P}{\rho}\frac{\partial\,\delta\rho}{\partial t} + (\Gamma_3-1)\lambda_r\nabla^2\delta T, \quad (33)$$

$$\Delta\delta\Phi = -4\pi G\delta\rho. \quad (34)$$

Здесь энергетическое уравнение (9) записано в форме (23). К уравнениям (31)–(34) необходимо добавить линеаризованное уравнение состояния смеси (вещество + излучение). С учетом формулы (26), характеризующей долю вещества в полном давлении системы, эйлерову вариацию полного давления можно преобразовать к виду

$$\delta P = \delta P_g + \delta P_r = \frac{\mathcal{R}T}{\overline{\mu}}\delta\rho + \left\{\frac{\mathcal{R}\rho}{\overline{\mu}} + \frac{4}{3}aT^3\right\}\delta T = \\ = \beta P\left\{\frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{(4-3\beta)}{\beta}\frac{\delta T}{T}\right\}. \quad (35)$$

Поскольку уравнения (31)–(35), описывающие эволюцию малых неизоэнтропических возмущений параметров радиационной среды с черным излучением на фоне ее равновесного состояния, являются линейными однородными уравнениями в частных производных, то к ним применим метод нормальных колебаний (метод мод). Рассмотрим далее плоскую волну возмущения однородного фона и будем предполагать, что волны возмущения эволюционируют во времени по закону $\sim \exp(\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, где $\omega$ – частота гармонических колебаний (частота мод), $\mathbf{k}$ – волновой вектор, $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ – волновое число.

Комбинируя записанное для возмущений уравнение (33) и соотношение (35), получим ключевую для дальнейшего связь между термодинамическими возмущениями (пульсациями) полного давления среды $\delta P$ и плотности $\delta\rho$:

$$\delta P = \left[\left(\omega c_{gr}^2 + \mathcal{A}\right)/(\omega + \mathcal{B})\right]\delta\rho. \quad (36)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{A} := (\Gamma_3-1)\beta\frac{\lambda_r T}{\rho(4-3\beta)}\mathbf{k}^2, \\ \mathcal{B} := (\Gamma_3-1)\frac{\lambda_r T}{P(4-3\beta)}\mathbf{k}^2, \quad (37)$$

[3] Через $\delta$ обозначены эйлеровы вариации, которые коммутируют с операторами градиента $\nabla$ и временной производной $\partial/\partial t$.

$$c_{GR} := \sqrt{\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_s} = \sqrt{\frac{P}{\rho}\Gamma_1} = \\ = \sqrt{(\mathcal{R}/\bar{\mu})T\left[1 + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta[\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)]}\right]} \tag{38}$$

— невозмущенная адиабатическая скорость звука вещества и черного излучения. Заметим, что в случае, когда параметр $\beta \to 1$, выражение для скорости $c_{GR}$ совпадает с классическим выражением для адиабатической скорости звука в газе, $c_{GR}\big|_{\beta\to 1} \to c_{gs} := (\partial P_g/\partial\rho)\big|_{s_g} = \sqrt{\gamma P_g/\rho}$.

Из уравнений (31) и (34) следуют еще два соотношения для возмущений скорости и плотности:

$$\omega\delta\rho + i\rho(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{k}^2\delta\Phi = 4\pi G\,\delta\rho. \tag{39}$$

Используя (34), (35) и (39) при преобразовании уравнения (18) для пульсаций скорости $\delta\mathbf{v}$, в результате получим:

$$\omega\delta\mathbf{v} + i\frac{\mathbf{k}}{\mathrm{k}^2}\Omega_T^2\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right) = 0. \tag{40}$$

Наконец, взяв дивергенцию от уравнения (32) и учитывая соотношение (34), найдем еще одно соотношение для возмущений плотности:

$$\left(\omega^2 + \Omega_T^2\right)\frac{\delta\rho}{\rho} = 0. \tag{41}$$

При написании алгебраических уравнений (40) и (41) были использованы обозначения:

$$\Omega_T^2 := \frac{\Omega_I^2 + \omega\Omega_J^2}{\omega + \mathrm{B}}, \quad \Omega_I^2 := \mathcal{A}\mathbf{k}^2 - (4\pi G\rho)\mathcal{B}, \\ \Omega_J^2 := c_{GR}^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho. \tag{42}$$

*Дисперсионные соотношения в среде с черным излучением*

Полученная система однородных линейных уравнений (39)–(41) для пульсаций скорости и плотности является исходной для дальнейшего анализа динамики малых возмущений в модели газа с чернотельной радиацией. Она имеет решение, отличное от тривиального только в том случае, когда определитель системы равен нулю. Опуская несложные выкладки, сразу приведем получаемое при этом общее дисперсионное соотношение:

$$\omega^3\left(\omega^2 + \frac{\Omega_I^2 + \omega\Omega_J^2}{\omega + \mathcal{B}}\right) = 0, \tag{43}$$

которое описывает связанное поведение вещества и поля излучения в равновесном случае. Это соотношение состоит из двух сомножителей, приравнивание каждого из которых к нулю приводит к двум независимым режимам распространения волны возмущения. Первое решение $\omega = 0$ уравнения (43) описывает минимально устойчивый режим распространения волны возмущения (так называемый энтропийный режим). Другие корни уравнения (43) являются решениями алгебраического кубического уравнения $\omega^2(\omega + \mathcal{B}) + \Omega_I^2 + \omega\Omega_J^2 = 0$, которое с учетом обозначений (42) можно записать в виде дисперсионного уравнения

$$\omega^3 + \omega^2\mathcal{B} + \omega\left(\mathbf{k}^2c_{GR}^2 - 4\pi G\rho\right) + \\ + \left(\mathbf{k}^2c_{gs}'^2 - 4\pi G\rho\right)\mathcal{B} = 0. \tag{44}$$

При написании уравнения (44) использованы преобразованные с учетом (24), (25) и (28) формулы для величин $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} := \frac{(\Gamma_3 - 1)\lambda_r T}{(4-3\beta)}\frac{\mathbf{k}^2}{P} = \frac{C_{Vg}}{C_{V\Sigma}}(\gamma-1)\frac{\lambda_r\mathbf{k}^2}{(\mathcal{R}/\bar{\mu})/\rho} = \\ = \frac{\lambda_r k^2}{\rho C_{V\Sigma}} = \frac{C_{Vr}}{C_{V\Sigma}}\left(\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa}\right) = \left(1 + \frac{u_g}{4u_r}\right)^{-1}\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa} = \\ = \left(1 + \frac{1}{12(\gamma-1)}\frac{P_g}{P_r}\right)^{-1}\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa} \tag{45}$$

— так называемая скорость диффузии излучения (по шкале $|\mathbf{k}|^{-1}$),

$$\mathcal{A} := \frac{(\Gamma_3 - 1)}{(4-3\beta)}\beta\frac{\lambda_r T}{\rho}\mathbf{k}^2 = \frac{\Gamma_1}{\beta C_{P\Sigma}}\frac{\lambda_r P_g}{\rho\rho}\mathbf{k}^2 = \\ = \frac{1}{C_{V\Sigma}}\frac{\lambda_r c_{gs}'^2}{\rho}\mathbf{k}^2 = \frac{C_{Vr}}{C_{V\Sigma}}\left(\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa}\right)c_{gs}'^2, \tag{46}$$

— величина, связанная с $\mathcal{B}$ соотношением $\mathcal{A} = \mathcal{B}c'^2_{gs}$. Здесь

$$c_{gs}' = \sqrt{(\partial P_g/\partial\rho)\big|_T} = \sqrt{(\mathcal{R}/\bar{\mu})T} = \\ = \sqrt{\beta P/\rho} = c_{gs}\big/\sqrt{\gamma} \tag{47}$$

— изотермическая скорость звука газовой составляющей протозвездного диска.

Сразу отметим, что в пределе медленной диффузии, когда преобладает газовое давления в системе (при этом справедливы пределы $\beta \to 1$, $u_r/u_g \to 0$, $c_{GR}^2\big|_{\beta\to 1} \to c_{gs}^2 = \gamma P_g/\rho), \mathcal{B} = (1 + u_g/4u_r)^{-1}c\mathbf{k}^2/3\rho\kappa \to 0)$, уравнение (44) сводится к классическому уравнению Джинса $\omega^3 + \left(\mathbf{k}^2c_{GR}^2 - 4\pi G\rho\right)\omega = 0$, которое включает энтропийный режим $\omega = 0$ и явно содержит адиабатическую скорость $c_{g\,s}^2$ звука газа. Из этого уравнения следует дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 + \left(\mathbf{k}^2 c_{gs}^2 - 4\pi G\rho\right) \cong 0, \tag{48}$$

из которого вытекает классический критерий неустойчивости Джинса для газа[4]

$$\mathbf{k}^2 \le 4\pi G\rho / c_{gs}^2 = k_{\mathrm{J}}^2. \tag{49}$$

Здесь $k_{\mathrm{J}}$ — классическое волновое число Джинса, $\mathrm{k}_{\mathrm{J}}^2 := 4\pi G\rho / c_{gs}^2$.

Из неравенства (49) можно сделать вывод, что лучистая теплопроводность не влияет на стандартный классический критерий Джинса в радиационной газовой среде в случае медленной диффузии излучения. Другими словами, в оптически толстой для инфракрасного излучения среде при медленной диффузии излучения адиабатичность волны возмущения не нарушается.

В противоположном пределе, когда доминирует радиационное давление в системе, имеем: i) $\mathcal{B} \to c\mathbf{k}^2 / 3\kappa\rho$ (здесь $\tau = \kappa\rho|\mathbf{k}|^{-1}$ — оптическая глубина по шкале $\sim|\mathbf{k}|^{-1}$); ii) полная адиабатическая скорость звука $c_{GR}$ вещества и черного излучения переходит в адиабатическую радиационную скорость звука $c_{rs}$, которая в этом случае много больше термической скорости звука $c_{gs}^{'}$ в веществе

$$\begin{gathered} c_{GR}^2 \equiv \Gamma_1 P/\rho \to c_{rs}^2 \equiv \\ \equiv (4/3) P_r \rho^{-1} \gg c_{gs}^{'2} = \gamma P_g \rho^{-1}. \end{gathered} \tag{50}$$

В результате дисперсионное соотношение для акустических волн в оптически толстой среде с радиационным давлением и в предположении быстрой диффузии излучения принимает вид:

$$\begin{gathered} \omega^3 + \omega^2 \frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa} + \omega\left(\mathbf{k}^2 c_{rs}^2 - 4\pi G\rho\right) + \\ + \left(\mathbf{k}^2 c_{gs}^{'2} - 4\pi G\rho\right)\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa} = 0. \end{gathered} \tag{51}$$

Для того чтобы точнее охарактеризовать проблему гравитационной неустойчивости в случае быстрой диффузии излучения, введем три безразмерных параметра, которые влияют на характер эволюции волны возмущения: $\vartheta_T = \mathbf{k}^2 c_{gs}^{'2} / 4\pi G\rho$ — изотермическое число Джинса, определяющее роль газового давления в поддержании среды в масштабе $|\mathbf{k}|^{-1}$; $\vartheta_{rs} = \mathbf{k}^2 c_{rs}^2 / 4\pi G\rho$ — адиабатическое число Джинса, определяющее роль радиационного давления в распространении волны возмущения; $\mathcal{B}_{rs} = c\mathbf{k}^2 / 3\rho\kappa\sqrt{4\pi G\rho}$ — безразмерное число, характеризующее скорость диффузии равновесного излучения (при $\mathcal{B}_{rs} \gg 1$ имеет место быстрая диффузия излучения, а при $\mathcal{B}_{rs} \ll 1$ — медленная). Используя также безразмерную частоту $\varpi = \omega / \sqrt{4\pi G\rho}$, перепишем уравнение (51) в виде

$$\varpi^3 + \varpi^2 \mathcal{B}_{rs} + \varpi(\vartheta_{rs} - 1) + (\vartheta_T - 1)\mathcal{B}_{rs} = 0. \tag{52}$$

Точное решение этого алгебраического уравнения третьей степени может быть найдено методом Кардана. Однако подобное решение не приводит, к сожалению, к наглядным формулам для различных показателей роста. По этой причине нахождение критерия неустойчивости может быть выполнено при некотором упрощении уравнения (52), связанном с оценкой численных значений безразмерных параметров, соответствующих той или иной области протозвездного диска.

В частности, в пределе быстрой диффузии излучения в оптически толстой среде, когда $\mathcal{B}_{rs} \gg 1$, $\vartheta_T$, и $\vartheta_{rs}$, уравнение (52) принимает вид

$$\omega^2 + \left(\mathbf{k}^2 c_{gs}^{'2} - 4\pi G\rho\right) \cong 0.$$

Для того, чтобы это уравнение имело действительный корень, необходимо выполнение неравенства $\mathbf{k}^2 c_{gs}^{'2} - 4\pi G\rho < 0$. Отсюда следует модифицированный изотермический критерий неустойчивости для газа,

$$k^2 \le 4\pi G\rho / c_{gs}^{'2} = k_{\mathrm{J}}^2 / \gamma. \tag{53}$$

Из неравенства (53), представляющего собой модификацию критерия Джинса, можно сделать вывод, что в случае быстрой диффузии излучения диффузия теплового излучения влияет на стандартный критерий Джинса в радиационной газовой среде, приводя к замене адиабатической скорости звука $c_{gs}$ на изотермическую $c_{gs}^{'}$. Другими словами, быстрая диффузия обеспечивает изотермичность волны возмущения в радиационной среде.

## ВЛИЯНИЕ ДИНАМИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ГРАВИТАЦИОННУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ. УРАВНЕНИЯ РАДИАЦИОННОЙ АКУСТИКИ

С целью получения уравнений радиационной акустики в случае отсутствия равновесия между веществом и излучением, линеаризуем записан-

[4] Напомним, что для неустойчивых волн возмущения частота $\omega > 0$, тогда как устойчивость соответствует условию $\omega < 0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения. Критическая длина волны возмущения $\lambda_{cr} = 2\pi/\mathrm{k}_{cr}$ (для идеального газа: $\mathrm{k}_{cr}^2 = \omega_{cr}^2 / c_{gs}^2$, $\omega_{cr}^2 = 4\pi G\rho$) является размером мельчайших “капель” рассматриваемой среды, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением.

ные для оптически толстой среды базовые уравнения радиационной гидродинамики (1)–(6). В качестве начального состояния газа примем равновесное состояние, при котором $\rho_0 = \mathrm{const}$, $P_{g0} = \mathrm{const}$, $\mathbf{v}_0 = 0$ и все производные по времени исчезают. Для начального состояния излучения примем ЛТР, при котором $T_g \cong T_r = T$ и справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\frac{c}{4\pi}u_{r0} - \mathcal{S}_{r0} \equiv \frac{c}{4\pi}aT_0^4 - \mathcal{B}(T) = 0,\\ \mathcal{F}_{r0} = 0,\quad P_{r0} = f_{\mathrm{E}}u_{r0} = \frac{1}{3}u_{r0},\end{gathered} \tag{54}$$

где $u_{r0} = aT_0^4$; фактор Эддингтона считается постоянным, $f_{\mathrm{E}} = 1/3$. Кроме этого, будем считать, что средняя непрозрачность Росселанда $\kappa$ также постоянна. Далее индекс “0” у невозмущенных величин будем опускать.

С учетом сделанных упрощающих предположений дифференциальные уравнения радиационной гидродинамики (1)–(6) при выполнении необходимых разложений и удержании только членов первого порядка относительно малых возмущений, а также при использовании “мошенничества” Джинса принимают следующий линеаризованный вид:

$$\partial\delta\rho/\partial t + \rho\nabla\cdot\delta\mathbf{v} = 0, \tag{55}$$

$$\rho\partial\delta\mathbf{v}/\partial t + \nabla\delta P_g - \rho\nabla\delta\Phi - \kappa\rho c^{-1}\delta\mathcal{F}_r = 0, \tag{56}$$

$$\partial\,\delta u_g/\partial t + \gamma u_g\nabla\cdot\delta\mathbf{v} - \kappa\rho c(\delta u_r - \delta u_B) = 0, \tag{57}$$

$$\nabla^2\delta\Phi = -4\pi G\delta\rho, \tag{58}$$

$$\begin{gathered}\partial\delta u_r/\partial t + \nabla\cdot\delta\mathcal{F}_r + (4/3)u_r\nabla\cdot\delta\mathbf{v} +\\ +\ \kappa\rho c(\delta u_r - \delta u_B) = 0,\end{gathered} \tag{59}$$

$$\partial\delta\mathcal{F}_r/\partial t + c^2\nabla\delta u_r + c\kappa\rho\delta\mathcal{F}_r = 0. \tag{60}$$

К этим уравнениям необходимо добавить выражения для вариации функции источника

$$\delta u_B = \frac{4\pi}{c}\delta\mathcal{B}(T) = 4aT^3\delta T. \tag{61}$$

Заметим, что уравнения (55)–(60) для вариаций параметров состояния системы (с учетом динамики поля излучения), в отличие от уравнений (31)–(34), позволяют моделировать энергетическую развязку между излучением и веществом. Эти уравнения, описывающие эволюцию малых возмущений структурных параметров среды с неравновесным излучением на фоне ее равновесного состояния, являются линейными однородными уравнениями в частных производных, следовательно, к ним применим метод нормальных колебаний. Далее рассмотрим плоскую волну возмущения однородного фона и будем предполагать, что возмущения эволюционируют во времени по закону $\sim \exp(\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, где $\omega$ — частота гармонических колебаний (при этом $\omega$ является комплексным числом), а $\mathbf{k}$ — волновой вектор, т.е. все величины $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathcal{F}_r$, $\delta u_g$ и $\delta u_r$ зависят только от $\mathbf{r}$ и $t$. В этом случае система уравнений (55)–(60) принимает вид:

$$-\omega\delta\rho + i\rho\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v} = 0, \tag{62}$$

$$-\omega\delta\mathbf{v} + i\mathbf{k}\frac{\delta P_g}{\rho} - i\mathbf{k}\delta\Phi - \frac{\kappa}{c}\delta\mathcal{F}_r = 0, \tag{63}$$

$$-\omega\delta u_g + i\gamma u_g\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v} + \kappa\rho c\left(\delta u_r - 4aT^3\delta T\right) = 0, \tag{64}$$

$$-\mathbf{k}^2\delta\Phi + 4\pi G\delta\rho = 0, \tag{65}$$

$$\begin{gathered}-\omega\delta u_r + i\frac{4}{3}u_r\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v} +\\ +\ i\mathbf{k}\cdot\delta\mathcal{F}_r\kappa\rho c\left(\delta u_r - 4aT^3\delta T\right) = 0,\end{gathered} \tag{66}$$

$$-\omega\delta\mathcal{F}_r + \frac{c^2}{3}i\mathbf{k}\delta u_r + \kappa\rho c\delta\mathcal{F}_r = 0. \tag{67}$$

Эта система однородных линейных уравнений имеет решение, отличное от тривиального, только в том случае, когда определитель системы равен нулю. Опуская несложные выкладки, сразу напишем основное дисперсионное соотношение, которое в общем случае неравновесного излучения принимает вид:

$$\begin{gathered}\omega^5 + \omega_p(\Gamma+2)\omega^4 + \omega_p^2\times\\ \times\left[(\Gamma+1) + \frac{c_{\mathrm{F}}^2\mathbf{k}^2}{\omega_p^2} + \frac{(c_{rs}^2 + c_{gs}^2)\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho}{\omega_p^2}\right]\omega^3 +\\ +\ \omega_p\left[\Gamma c_{\mathrm{F}}^2\mathbf{k}^2 + 2\left(\frac{2\Gamma}{3\gamma}+1\right)c_{gs}^2\mathbf{k}^2 +\right.\\ \left.+\ (3\gamma+\Gamma-2)c_{rs}^2\mathbf{k}^2 - (\Gamma+2)4\pi G\rho\right]\omega^2 +\\ +\ \omega_p^2\left[\gamma c_{gs}'^2\mathbf{k}^2\left(\frac{c_{\mathrm{F}}^2\mathbf{k}^2}{\omega_p^2} + \frac{4\Gamma}{3\gamma} + 1\right) +\right.\\ \left.+\ (3\gamma+\Gamma-3)\,c_{rs}^2\mathbf{k}^2 - \left(1 + \Gamma + \frac{c_{\mathrm{F}}^2\mathbf{k}^2}{\omega_p^2}\right)4\pi G\rho\right]\omega +\\ +\ \omega_p\Gamma\left(c_{gs}'^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right)c_{\mathrm{F}}^2\mathbf{k}^2 = 0.\end{gathered} \tag{68}$$

Здесь введены следующие параметры:

$$\begin{gathered}c_{gs} = \sqrt{(\partial P_g/\partial\rho)_{s_g}} = \sqrt{\gamma(P_g/\rho)} = \sqrt{\gamma}c_{gs}',\\ c_{gs}' = \sqrt{P_g/\rho},\end{gathered}$$

— соответственно адиабатическая и изотермическая скорость звука в газе; $c_{\mathrm{F}} = \sqrt{c^2/3}$ — скорость радиационной волны; $\omega_p = \kappa\rho c$ — частота, характеризующая затухание потока энергии излучения (эта величина связана с длиной свободного пробега фотона

$l_p = 1/\kappa\rho$ и со средним временем пробега фотона $t_p = l_p/c = 1/\omega_p$, которое является временным масштабом, характеризующим затухание потока энергии излучения); $\Gamma = 4u_r/u_g = 12(\gamma-1)P_r/P_g = C_{Vr}/C_{Vg}$ — отношение удельных теплоемкостей излучения $C_{Vr} = T\left(\partial s_r/\partial T\right)_V = 4aT^3/\rho$ и вещества $C_{Vg} = (\mathcal{R}/\overline{\mu})/(\gamma-1)$ при постоянном объеме; $c_{rs}^2 = \left(\partial P_r/\partial\rho\right)_{S_r} = (4/9)u_r/\rho$ — квадрат радиационной скорости звука (заметим, что введенная ранее результирующая скорость звука для смеси вещества и излучения, равная $c_{RG} = \sqrt{c_{rs}^2 + c_{gs}^2}$, связана с обменом импульсами между газом и излучением); величина $\dfrac{c_{\mathrm{F}}^2\mathbf{k}^2}{\omega_p^2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(\kappa\rho|\mathbf{k}|^{-1})^2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\tau_p^2}$ является обратной квадрату оптической глубины среды $\tau = \kappa\rho|\mathbf{k}|^{-1}$ по шкале $\sim|\mathbf{k}|^{-1}$.

На основе дисперсионного уравнения (68) возможно изучение гидродинамических линейных волн, возникающих при малоамплитудных начальных флуктуациях с волновым числом $\mathbf{k}$ в излучающей среде с учетом эффектов гравитационной неустойчивости. Поскольку аналитическое решение уравнения (68) в общем случае затруднительно, то строгий количественный анализ на его основе возможен только с помощью численных методов. Вместе с тем некоторые критерии неустойчивости радиационной среды могут быть найдены при упрощении уравнения (68), связанном с предварительной оценкой численных значений параметров, характеризующих ту или иную область протозвездного диска.

Проиллюстрируем возможность такого подхода на простом примере определения условий возникновения джинсовской неустойчивости в случае большой оптической глубины $\tau \cong \kappa\rho|\mathbf{k}|^{-1}$ дисковой среды. В этом случае для третьего и пятого членов уравнения (68) справедлива оценка $c_{\mathrm{F}}^2\mathbf{k}^2/\omega_p^2 = 1/3\tau^2 \ll 1 \ll \Gamma$. Кроме того, для нерелятивистской среды в четвертом члене уравнения (68) справедливы оценки $c_{\mathrm{F}}^2\mathbf{k}^2 \gg c_{rs}^2\mathbf{k}^2$, $c_{gs}'^2\mathbf{k}^2$ и $4\pi G\rho$. Используя этот порядок величин и разделив (68) на $(n_p\Gamma)^2$, получим (при учете $c_{\mathrm{F}}^2\mathbf{k}^2/\omega_p = c\mathbf{k}^2/3\kappa\rho = \omega_{diff}$ — частота диффузии излучения) следующее дисперсионное соотношение:

$$\frac{\omega^5}{(\omega_{th})^2} + \frac{\omega^4}{\omega_{th}} + \omega^3 + \frac{c\mathbf{k}^2}{3\kappa\rho}\omega^2 + \left[\left(\frac{4}{3}c_{gs}'^2 + c_{rs}^2\right)\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right]\omega + \left(c_{gs}'^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right)\frac{1}{\Gamma}\frac{c\,\mathbf{k}^2}{3\kappa\rho} \cong 0. \tag{69}$$

Здесь

$$\omega_{th} = \Gamma\omega_p = 4\frac{u_r}{u_g}\kappa\rho c \tag{70}$$

— характерная частота теплообмена (обмена энергией между веществом и полем излучения) (Blaes, Socrates, 2003).

Из сопоставления этого уравнения с уравнением (44) видно, что последние четыре члена (69) качественно идентичны членам (44) в пределе с преобладанием давления излучения $\Gamma \simeq 1$. Следовательно, появление первых двух членов в уравнении (69) связано с вовлеченностью в анализ переноса неравновесного излучения дополнительного уравнения (60) для зависящего от времени потока излучения $\mathcal{F}_r(t)$. При этом значимость этих членов определятся величиной частоты $\omega_{th}$ затухания потока энергии.

Когда частота велика $(\omega_{th} \gg 1)$, первые два члена в уравнении (69) могут быть опущены. В результате получим уравнение

$$\omega^3 + \frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa}\omega^2 + \left[\left(\frac{4}{3}c_{gs}'^2 + c_{rs}^2\right)\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right]\omega + \left(c_{gs}'^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right)\frac{1}{\Gamma}\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa} = 0, \tag{71}$$

аналогичное уравнению (51), которое было проанализировано выше.

Если частота диффузии излучения $\omega_{diff} \cong c\mathbf{k}^2/3\kappa\rho$ мала (т.е. преобладает газовое давление в системе), то уравнение (71) принимает вид:

$$\omega\left\{\omega^2 + \left[\left(\frac{4}{3}c_{gs}'^2 + c_{rs}^2\right)\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right]\right\} \simeq 0. \tag{72}$$

Отсюда следует модифицированный критерий неустойчивости Джинса

$$\mathbf{k}^2 < \frac{4\pi G\rho}{(4/3)c_{gs}'^2 + c_{rs}^2}. \tag{73}$$

Можно показать, что для больших значениях параметра $\Gamma = 4u_r/u_g$ выражение $(4/3)c_{gs}'^2 + c_{rs}^2$ сводится к адиабатической скорости звука для излучения $c_{rs}^2$, а для малых величин $\Gamma$ переходит в $c_{gs}^2$. Таким образом, для диска с большой оптической глубиной и в случае медленной диффузии, критерий неустойчивости (53) сохраняется для малых Γ (но уже в случае отсутствия равновесия между веществом и излучением, когда нет энергетической связи между ними), а для больших Γвидоизменяется и принимает вид

$$\mathbf{k}^2 < 4\pi G\rho \big/ c_{rs}^2. \tag{74}$$

Таким образом, в оптически толстом пределе с медленной диффузией давление неравновесного излучения способствует устойчивости системы к гравитационному коллапсу.

В противоположном случае, когда $\omega_p \to 0$, $c_f^2 |\mathbf{k}|^2 \big/ \omega_p^2 \gg \Gamma, 1, \Gamma c_f^2 |\mathbf{k}|^2$, уравнение (68) сводится к

$$\omega^3 - \left(c_{gs}^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right)\omega \cong 0. \tag{75}$$

Отсюда следует, что, в отличие от критерия неустойчивости (53) (полученного выше для случая быстрой диффузии, $\mathcal{B} = \Gamma\omega_{diff} \gg 1$ и согласно которому скорость акустической моды газа равна изотермической скорости звука $c_{gs}^{'}$), в случае, когда энергетическая связь между излучением и газом незначительна, акустические моды распространяются с адиабатической скоростью звука $c_{gs}$, т.е. имеет место классический газовый критерий Джинса. Этот эффект отсутствует в случае совершенной энергетической связи.

Более полное численное исследование дисперсионного уравнения (68) предполагается рассмотреть в последующих публикациях автора. Подобная задача связана с необходимостью выбора ad hoc конкретного астрофизического объекта, характеризующегося своими специфическими исходными параметрами, и с разработкой, в общем случае, адекватных вычислительных методов для проведения количественных оценок.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью работы является получение модифицированных излучением критериев джинсовской неустойчивости для космологических самогравитирующих газопылевых сред (на примере эволюции радиационно-доминирующих аккреционных астрофизических систем) в плохо изученном в литературе случае, когда учитывается влияние на критическую длину волны возмущения динамически важного радиационного давления, сравнимого с давлением газа, и диффузионного переноса излучения, взятого в приближении различных температур вещества и излучения (т.е. когда имеет место энергетическое разделение между излучением и веществом). Изучены основные режимы радиационных гидродинамических линейных волн, возникающих из одномерных малоамплитудных возмущений в радиационной среде с учетом гравитационных эффектов. Уравнения радиационной акустики выводятся из уравнений гидродинамики, уравнения Пуассона и двух моментных уравнений излучения, используемых в приближении Эддингтона. Получены дисперсионные соотношения, позволяющие получить модифицированные критерии гравитационной неустойчивости Джинса под влиянием радиационного давления и диффузии излучения. Рассмотрены два приближения радиационной диффузии: случай идеального теплового равновесия, когда температуры вещества и излучения одинаковы; случай временной зависимости поля излучения, когда имеет место энергетическая развязка между излучением и веществом. Показано, что в отличие от ЛТР системы, когда скорость волны возмущения совпадает с изотермической скоростью звука, в случае различия температур излучения и газа возмущающая волна распространяется с адиабатической скоростью звука в газе.

Полученные здесь результаты, направленные на решение проблемы гравитационной неустойчивости отдельных массивных протозвездных дисков или самогравитирующих радиационных астрофизических сред, характеризующихся большими оптическими глубинами для собственного инфракрасного излучения (трансформированного пылью), закладывают необходимую теоретическую основу для будущих разработок более адекватных численных моделей эволюции указанных космологических объектов, для которых излучение играет доминирующую динамическую роль.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Бисикало Д.В., Жилкин А.Г., Боярчук А.А.* Газодинамика тесных двойных звезд. М.: Физматлит, 2013. 632 с.

*Бисикало Д.В., Шематович В.И., Кайгородов П.В., Жилкин А.Г.* Газовые оболочки экзопланет – горячих юпитеров // Успехи физ. наук. 2021. Т. 191. № 8. С. 785–845.

*Колесниченко А.В.* Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия гравитационной неустойчивости Джинса для допланетного вращающегося облака с учетом радиации и магнитного поля // Mathematica Montisnigri. 2020. V. XLVII. P. 176–200.

*Колесниченко А.В.* Роль черного излучения в модификации критериев неустойчивости Джинса для экзопланетного пылевого плазменного диска при учете магнитной вязкости и лучевого теплообмена // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2022. № 3. 40 с.

*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая механика. М.: Наука, 1976. 588 с.

*Маров М.Я., Шевченко И.И.* Экзопланеты. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 140 с.

*Тассуль Ж.-Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.

*Франк-Каменецкий Д.А.* Физические процессы внутри звезд. М.: Физматгиз, 1959. с. 543.

*Фридман А.М., Хоперсков А.В.* Физика галактических дисков. М.: Физматлит, 2011. 640 с.

*Хоперсков А.В., Храпов С.С.* Неустойчивость тепловой, вязкой и акустических мод в тонких аккреционных дисках // Астрон. журн. 1999. Т. 76. № 4. С. 256–269.

*Agol E., Krolik J.* Photon damping of waves in accretion disks // Astrophys. J. 1998. V. 507. № 1. P. 304–315.

*Aggrawal M., Talwar S.P.* Magnetothermal instability in a rotating gravitating fluid // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1969. V. 146. P. 235–242.

*Argal S., Tiwari A., Sharma P.K.* Jeans instability of a rotating self-gravitating viscoelastic fluid // Europhys. Lett. 2014. V. 108. id. 35003.

*Bhatia P.K.* Gravitational instability of a rotating anisotropic plasma // Physics of Fluids. 1967. V. 10. № 8. P. 1652–1653.

*Blaes O., Socrates A.* Local dynamical instabilities in magnetized, radiation pressure supported accretion disks // Astrophys. J. 2001. V. 553. № 2. P. 987–998.

*Blaes O., Socrates A.* Local radiative hydrodynamic and magnetohydrodynamic instabilities in optically thick media // Astrophys. J. 2003. V. 596. № 1. P. 509–537.

*Bora M.P., Nayyar N.K.* Gravitational instability of a heat-conducting plasma // Astrophys. and Space Sci. 1991. V. 179. P. 313–320.

*Borah A.C., Sen A.K.* Gravitational instability of partially ionized molecular clouds // J. Plasma Physics. 2007. V. 73. № 6. P. 831–838.

*Buchler J.R.* Radiation hydrodynamics in the fluid frame // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1979. V. 22. P. 293–300.

*Chandrasekhar S.* Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 588 p.

*Chang P., Quataert E., Murray N.* From thin to thick: The impact of X-ray irradiation on accretion disks in active galactic nuclei // Astrophys. J. 2007. V. 662. № 1. P. 94–101.

*Chhajlani R.K., Vaghela D.S.* Gravitational stability of finitely conducting two-component plasma through porous medium // Astrophys. and Space Sci. 1987. V. 139. P. 337–352.

*Cox J.P.* Theory of Stellar Pulsation. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1979. 378.

*Cox J.P., Giuli R.T.* Principles of Stellar Structure. New York: Gordon and Dreach, 1968. 568 p.

*Dhiman J.S., Dadwal R.* The gravitational instability of a non-uniformly rotating heat conducting medium in the presence of non-uniform magnetic field // Astrophys. and Space Sci. 2011. V. 332. № 2. P. 373–378.

*Dhiman J.S., Dadwal R.* On the Jeans criterion of a stratified heat conducting gaseous medium in the presence of non-uniform rotation and magnetic field // J. Astrophys. and Astron. 2012. V. 33. P. 363–373.

*Dodelson S.* Modern Cosmology. Amsterdam (Netherlands): Acad. Press, 2003. 440 p.

*Fridman A.M., Polyachenko V.L.* Physics of Gravitating System. N.Y.: Springer-Verlag. 1984. V. 1. 468 p.; V. 2. 358 p.

*Jacobs G., Shukla P.K.* Stability of molecular clouds in partially ionized self-gravitating space plasmas // J. Plasma Physics. 2005. V. 71. № 4. P. 487–493.

*Jeans J.H.* The stability of spherical nebulae // Philosoph. Transact. Roy. Soc. 1902. V. 199. P. 1–53.

*Joshi H., Pensia R.K.* Effect of rotation on Jeans instability of magnetized radiative quantum plasma // Physics of Plasmas. 2017. V. 24. № 3. id. 032113.

*Hsieh S.-H., Spiegel E.A.* The equations of photohydrodynamis // Astrophys. J. 1976. V. 207. P. 244–252.

*Hu W., Sugiyama N.* Small-scale cosmological perturbations: An analytic approach // Astrophys. J. 1996. V. 471. P. 542–570.

*Kaneko N., Tamazawa S., Ono Y.* Linear waves in a radiating and scattering grey medium // Astrophys. and Space Sci. 1976. V. 42. № 2. P. 441–461.

*Kaneko N., Morita K., Satoh T., Hayasaki K.* Small-amplitude disturbances in a radiating and scattering grey medium II. Solutions of given real wave number k // Astrophys. and Space Sci. 2005. V. 299. P. 263–306.

*Kaneko N., Morita K.* Small-amplitude disturbances in a radiating and scattering grey medium III. Gravitational effects on the solutions of given real wave number *k* // Astrophys. and Space Sci. 2006. V. 305. P. 349–376.

*Kaothekar S., Chhajlani R.K.* Effect of radiative heat-loss function and finite Larmor radius corrections on Jeans instability of viscous thermally conducting self-gravitating astrophysical plasma // ISRN Astron. and Astrophys. 2012. V. 2012. id. 420938 (14 p.).

*Kolesnichenko A.V.* Jeans instability of a protoplanetary gas cloud with radiation in nonextensive Tsallis kinetics // Sol. Syst. Res. 2020. V. 54. №. 2. P. 137–149.

*Kolesnichenko A.V.* Jeans instability of a protoplanetary circular disk taking into account the magnetic field and radiation in nonextensive Tsallis kinetics // Sol. Syst. Res. 2021. V. 55. № 2. P. 132–149.

*Kumar A., Sutar D.L., Pensia R.K., Sharma S.* Effect of fine dust particles and finite electron inertia of rotating magnetized plasma // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1953. № 1. id. 060036 (4 p.).

*Kumar A., Sutar D.L., Pensia RK.* Jeans instability of a monatomic gas in the presence of thermal radiation // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 836. id. 012012 (3p.).

*Mihalas D., Mihalas B.W.* On the propagation of acoustic waves in a radiative fluid // Astrophys. J. 1984. V. 283. P. 469.

*Pensia R.K., Sutar D.L., Sharma S.* Analysis of Jeans instability of optically thick quantum plasma under the effect of modified Ohms law // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1953. № 1. id. 060044 (4 p.).

*Pier E.A., Krolik J.H.* Radiation-pressure-supported obscuring tori around active galactic nuclei // Astrophys. J. 1992. V. 399. № 1. P. L23–L26.

*Peebles P.J.E., Yu J.T.* Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe // Astrophys. J. 1970. V. 162. P. 815–836.

*Prajapati R.P., Chhajlani R.K.* Gravitational Instability of Dusty Plasma with Radiative Process // AIP Conf. Proc. 2011. V. 1397. P. 267–268.

*Prajapati R.P., Sharma P.K., Sanghvi R.K., Chhajlani R.K.* Jeans instability of self-gravitating magnetized strongly coupled plasma // J. Phys.: Conf. Ser. 2012. V. 365. id. 012040 (4 p.).

*Prajapati R.P., Bhakta S.* Influence of dust charge fluctuation and polarization force on radiative condensation instability of magnetized gravitating dusty plasma // Phys. Lett. A. 2015. V. 379. № 42. P. 2723–2729.

*Silk J.* Fluctuations in the primordial fireball // Nature. 1967. V. 215. № 5106. P. 1155–1156.

*Silk J.* Cosmic black-body radiation and galaxy formation // Astrophys. J. 1968. V. 151. P. 459–471.

*Shaikh S., Khan A., Bhatia P.K.* Jeans' gravitational instability of a thermally conducting plasma. // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. № 9. P. 1451–1457.

*Sharma R.C.* Gravitational instability of a rotating plasma // Astrophys. and Space Sci. 1974. V. 29. P. L1–L4.

*Sharma R.C., Patidar A.* Effect of ion radiative cooling on Jeans instability of partially ionized dusty plasma with dust charge fluctuation // Physics of Plasmas. 2017. V. 24. id. 013705 (13 p.).

*Sharma R.C., Singh B.* Gravitational instability of a rotating and partially-ionized plasma in the presence of variable magnetic field // Astrophys. and Space Sci. 1988. V. 143. P. 233–239.

*Thompson T.A., Quataert E., Murray N.* Radiation pressure-supported starburst disks and active galactic nucleus fueling // Astrophys. J. 2005. V. 630. № 1. P. 167–185.

*Tsintsadze N.L., Chaudhary R., Shah H.A., Murtaza G.* Jeans instability in a magneto-radiative dusty plasma // J. Plasma Physics. 2008. V. 74. № 6. P. 847–853.

*Vaghela D.S., Shrivastava H.S.P.* Magnetogravitational instability of a rotating homogeneous gas cloud with radiation // Czechoslovak J. Physics. 1994. V. 44. № 10. P. 905–911.

*Vranješ J.* Gravitational instability of a quasi-homogeneous plasma cloud with radiation // Astrophys. and Space Sci. 1990. V. 173. № 2. P. 293–298.

*Vranješ J., Čadež V.* Gravitational instability of a homogeneous gas cloud with radiation // Astrophys. and Space Sci. 1990. V. 164. № 2. P. 329–331.

*Weinberg S.* Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe // Astrophys. J. 1971. V. 168. P. 175–194.