



АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



НАУКА
— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 70, номер 6, 2024

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

- Проверка соотношений, полученных в радиоастрономии,
при корреляционном приеме теплового акустического излучения
*А. А. Аносов, Н. В. Грановский, А. В. Ерофеев,
А. Д. Мансфельд, Р. В. Беляев, А. С. Казанский* 807
- Применение пьезоэлектрического резонатора
для восстановления параметров контактирующей жидкости
А. П. Семёнов, Б. Д. Зайцев, А. А. Теплых, И. А. Бородина 815
- Особенности лазероиндуцированной
термокавитации воды
В. И. Юсупов 828

АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

- Оценка амплитудно-частотной характеристики источника звука по измерениям в бассейне
с отражающими границами
В. К. Бахтин, А. Л. Вировлянский, М. С. Дерябин, А. Ю. Казарова 838
- Флуктуации интенсивности звука, вызванные движением солитонов
внутренних волн в эксперименте ASIAEX
В. А. Григорьев 844

АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

- Акустическое излучение турбулентного пограничного слоя,
образующегося над плоской гладкой границей
И. В. Беляев, В. Ф. Копьев, М. А. Миронов 865
- Применение метода собственного ортогонального разложения
для анализа звукового поля аэроакустических источников
О. П. Бычков, Г. А. Фараносов 878
- Волны в тяжелом стратифицированном газе:
подзадачи для акустических и для внутренних гравитационных волн
С. П. Кшеевский, Ю. А. Курдяева, Н. М. Гаврилов 891

АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

- Амплитудные характеристики волн рэлеевского типа
в горизонтально-неоднородных слоистых средах
Р. А. Жостков, Д. А. Жарков 907

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ. ШУМЫ И ВИБРАЦИЯ

- Звуковые ландшафты в городской среде:
субъективное восприятие и объективный контроль
Л. К. Римская-Корсакова, Н. Г. Канев, А. И. Комкин, С. А. Шуляков 921

**ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Учет вязких и термических эффектов во времени в вычислительных задачах акустики

А. И. Корольков, А. Ю. Лаптев, А. В. Шанин

933

**АКУСТИКА ЖИВЫХ СИСТЕМ.
БИОМЕДИЦИНСКАЯ АКУСТИКА**

Морфология и некоторые слуховые механизмы наружных
ушей дельфина афалина (*Tursiops Truncatus*) и человека

В. А. Рябов

941

УДК 534.8

ПРОВЕРКА СООТНОШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В РАДИОАСТРОНОМИИ, ПРИ КОРРЕЛЯЦИОННОМ ПРИЕМЕ ТЕПЛООВОГО АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2024 г. А. А. Аносов^{a,b}, Н. В. Грановский^{a,*}, А. В. Ерофеев^{a,b},
А. Д. Мансфельд^c, Р. В. Беляев^c, А. С. Казанский^a

^aФГАОУ ВО Первый МГМУ им. И.М. Сеченова Минздрава России
(Сеченовский Университет), ул. Трубецкая 8, стр. 21, Москва, 19991 Россия

^bИнститут радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая 11/7, Москва, 125009 Россия

^cИнститут прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603950 Россия

*e-mail: granovsky_nikita@mail.ru

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

После доработки 07.08.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Осуществлен корреляционный прием теплового акустического излучения парой датчиков. В эксперименте использовали приемники с разной полосой пропускания, меняли размер нагретых источников и расстояние от источников до приемников, а также сдвигали источники в поперечном направлении перпендикулярно акустической оси системы. Для каждого случая с помощью соотношений, используемых в радиоастрономии, были рассчитаны корреляционные функции теплового акустического излучения. Показано, что полученные в экспериментах и рассчитанные кросскорреляционные функции близки с учетом погрешности измерений.

Ключевые слова: кросскорреляционная функция, тепловое акустическое излучение, акустояркая температура

DOI: 10.31857/S0320791924060013, **EDN:** JUFDNB

ВВЕДЕНИЕ

В ходе различных медицинских процедур, таких как гипертермия, термоабляция, контроль адресной доставки лекарств в термолипосомальной оболочке и так далее, важно осуществлять безболезненные неинвазивные измерения глубинной температуры человеческого тела. Существует несколько методов для этой цели: магнитно-резонансная термометрия [1], регистрация теплового излучения в СВЧ-диапазоне [2], измерения скорости звука, которая меняется при изменении температуры тканей [3], пассивная акустическая термометрия [4]. Возможно, магнитно-резонансная термометрия позволит решить проблему восстановления пространственного распределения глубинной температуры тела человека, однако этот метод требует дорогого оборудования, обученного персонала и специально подготовленных помещений. Поэтому приветствуется разработка альтернативных методов, при условии надлежащей точности. В частности, мы рассматриваем возможности пассивной акустической термометрии [5–8].

Пассивная акустическая термометрия — это метод измерения теплового акустического излучения объекта для определения его внутренней температуры. При необходимости восстановить распределение температуры можно использовать корреляционный или некорреляционный прием. Согласно теореме Ван Циттерта–Цернике [9] тепловое излучение, зарегистрированное на двух приемниках, будет коррелировать в пространстве и во времени, так как приемное устройство имеет ограниченную полосу пропускания. Преимуществом корреляционного приема над некорреляционным является то, что он обеспечивает лучшее пространственное разрешение. Предел разрешения при некорреляционном приеме в дальней зоне обратно пропорционален размеру приемника, а при корреляционном приеме — расстоянию между крайними датчиками в приемной решетке [10]. Р. Хессемер и Л. Перпер [11] предложили использовать корреляционный прием теплового акустического излучения для измерения внутренней температуры биологических объектов. Первые экспериментальные результаты были получены группой В.И. Пасечника [12].

В рамках исследований [13–17] использовалась пара датчиков для анализа временных кросскорреляционных функций теплового акустического излучения. Использование активно-пассивной термоакустической томографии рассмотрено в работах [13, 14]. В ходе работы [15] были изучены корреляционные сигналы при суммарных задержках, которые соответствуют не разности, а сумме расстояний между нагретым объектом и преобразователями. Корреляция возникала из-за того, что сигналы, излучаемые одним преобразователем, отражались от поверхности нагретого объекта и принимались другим преобразователем, и наоборот. В исследовании [16] была обнаружена корреляция на фокусируемых антеннах. Экспериментально исследованы вопросы корреляции тепловых фононов упругих волн в работе [18]. В работе [19] было произведено измерение корреляции теплового акустического излучения линейной решеткой, включающей в себя три датчика, были получены кросскорреляционные функции для каждой пары датчиков.

В работе [20] был рассмотрен способ восстановления распределения температуры при корреляционном приеме. Для этого было предложено складывать с определенными весами кросскорреляционные функции, полученные с помощью линейной решетки датчиков. Этот способ является частным вариантом метода, используемого в радиоастрономии, где две разнесенные антенны работают как пространственный фильтр с узкой полосой пропускания на частоте, которая определяется расстоянием между антеннами и длиной волны [10].

Отметим, что при корреляционном приеме теплового акустического излучения систематической экспериментальной проверки соотношений [10], используемых в радиоастрономии, не проводилось. В работах [12, 17, 20] меняли положение источника – его сдвигали на половину пространственного периода кросскорреляционной функции, в результате чего две кросскорреляционные функции, полученные до и после сдвига источника, менялись в противофазе. В работе [20] сравнивали между собой кросскорреляционные функции, полученные с помощью приемников с разными полосами пропускания. Однако сравнение экспериментальных результатов и теоретических расчетов при изменении размеров источников, при разных расстояниях от источника до приемников ранее не проводилось.

В настоящей работе осуществлен корреляционный прием теплового акустического излучения парой датчиков, рассчитаны кросскорреляционные функции и проведено сравнение экспериментальных и расчетных данных при изменении полосы пропускания приемников, при изменении размеров источников, при разных расстояниях от источника до приемников. Результат получен благодаря коллаборации групп ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН и ИПФ РАН.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Схема для корреляционного приема теплового акустического излучения представлена на рис. 1. Акустические датчики квадратного сечения со стороной $a = 20.0 \pm 0.2$ мм, расстояние между центрами которых $D = 22.0 \pm 0.3$ мм, находились в аквариуме, заполненном водой при комнатной температуре 19.6 ± 0.3 °С. Оси датчиков лежали в горизонтальной плоскости и пересекались на расстоянии $z = 515 \pm 3$ мм или 800 ± 3 мм от приемников. В качестве источников теплового акустического излучения использовали расположенные вертикально тефлоновые цилиндры длиной 142 ± 1 мм и диаметрами $\Delta x = 5.5, 7.6, 11.2, 15.8 \pm 0.1$ мм. Цилиндры были предварительно нагреты до температуры 55 ± 0.3 °С, после чего помещались в аквариум. Температуру воды и начальную температуру цилиндров контролировали цифровыми термометрами DS18S20P (Maxim Integrated, Сан-Хосе, США) с точностью 0.3 К. Время одного измерения составляло 2.5 с, измерения повторяли четыре раза.

Чтобы избежать “паразитных”, не акустических корреляций, мы проводили измерения теплового акустического излучения дважды, с источником и без него. В результате брали разницу между полученными корреляционными функциями.

Для измерений был использован многоканальный акустотермограф [21, 22], разработанный в ИПФ РАН группой под руководством А.Д. Мансфельда (пороговая чувствительность при времени интегрирования 10 с – 0.25 К). Принимаемые акустические сигналы преобразовывались в электрические, усиливались и подавались на четырнадцатизрядный АЦП ADM 414х65М (Insys, Москва, Россия) с частотой дискретизации 15 МГц на один канал. Разработанные программы проводили дальнейшую обработку данных.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Согласно [10, 20] кросскорреляционную функцию теплового акустического излучения

$$K(\tau) = \overline{p_1(t)p_2(t+\tau)} - \overline{p_1(t)}\overline{p_2(t)},$$

где t – время, τ – временной сдвиг, p_1, p_2 – давления, измеренные датчиками R1 и R2, черта сверху означает усреднение по времени, $\overline{p_1(t)} = \overline{p_2(t)} = 0$, для схемы, показанной на рис. 1, можно представить выражением:

$$\begin{aligned} K(\tau) = & \frac{2a\Delta x}{\lambda z} T_0 \text{sinc}^2\left(\frac{2\pi a x_0}{\lambda z}\right) \times \\ & \times \text{sinc}\left[\pi \frac{\Delta f}{f_0} \left(\frac{D x_0}{\lambda z} - f_0 \tau\right)\right] \times \\ & \times \text{sinc}\left(\frac{\pi D \Delta x}{\lambda z}\right) \cos\left[2\pi \left(\frac{D x_0}{\lambda z} - f_0 \tau\right)\right], \end{aligned} \quad (1)$$

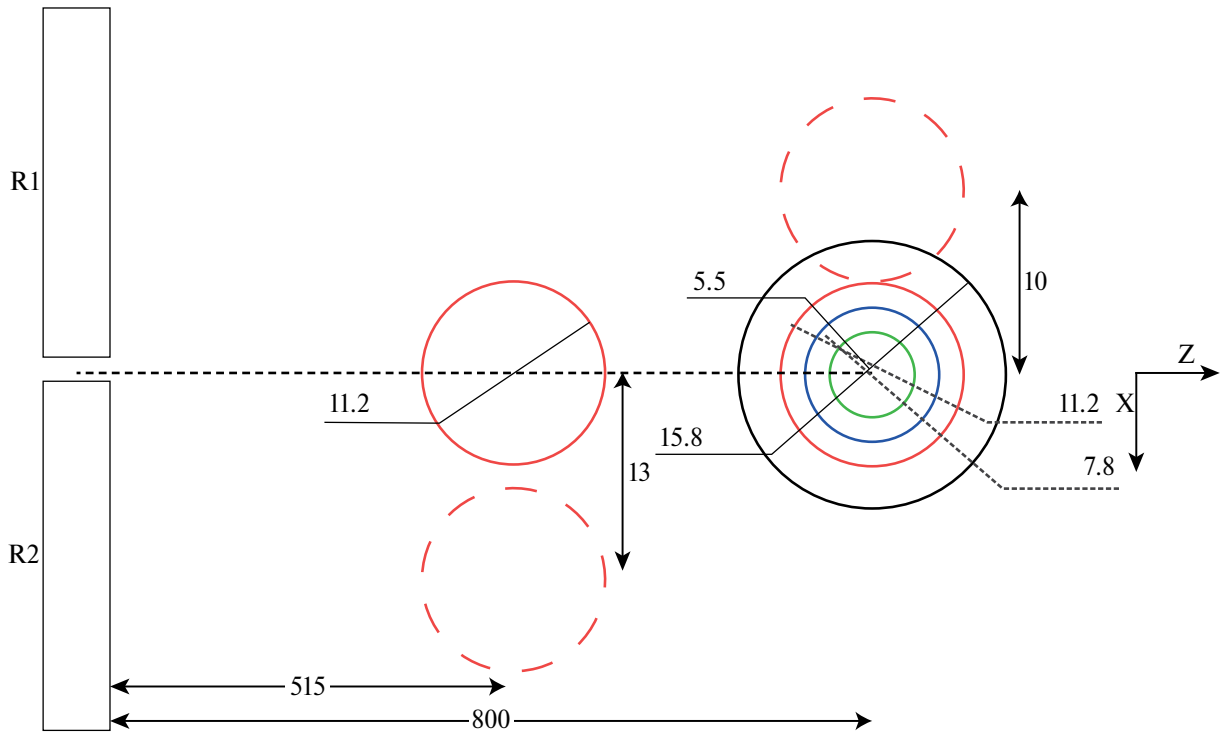


Рис. 1. Схема корреляционного приема теплового акустического излучения парой датчиков R1 и R2. Показано расположение нагретых источников разного диаметра 5.5, 7.6, 11.2 и 15.8 мм, находившихся на расстояниях 515 и 800 мм от приемников. Все размеры указаны в миллиметрах.

где Δf – полоса пропускания датчика, λ и f_0 – средняя длина волны и частота принимаемого сигнала, D – расстояние между датчиками, $2a$ – размер датчика, z – расстояние от датчиков до источника сигнала, T_0 , x_0 , Δx – температура, положение центра, поперечный размер источника, $\text{sinc } y = \frac{\sin y}{y}$. Здесь предполагается, что температура источника T_0 постоянна и апертуры датчиков на расстоянии z совпадают. Множитель $\text{sinc} \left[\pi \frac{\Delta f}{f_0} \left(\frac{Dx_0}{\lambda z} - f_0 \tau \right) \right]$ определяется конечной полосой Δf пропускания приемника, множитель $\text{sinc} \left(\frac{\pi D \Delta x}{\lambda z} \right)$ – конечным размером Δx источника, множитель $\text{sinc}^2 \left(\frac{2\pi a x_0}{\lambda z} \right)$ – диаграммой направленности датчика, множитель $\cos \left[2\pi \left(\frac{Dx_0}{\lambda z} - f_0 \tau \right) \right]$ определяет осциллирующий характер коррелированного сигнала, $\frac{\lambda z}{2a}$ – характерный размер диаграммы направленности. Отметим, что вертикальный размер источника 142 мм превышает характерный поперечный размер апертуры датчика на расстоянии 800 мм – $\frac{\lambda z}{a} = 92$ мм, поэтому выражение (1) не зависит от вертикальной координаты.

Согласно (1), максимальное значение кросс-корреляционной функции в точке $\tau = Dx_0/cz$, где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, при $x_0 = 0$ определяется выражением

$$K(\tau = Dx_0/cz, x_0 = 0) = T_0 \frac{2a}{\pi D} \sin \left(\frac{\pi D \Delta x}{\lambda z} \right). \quad (2)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В эксперименте использовали две пары датчиков. По полученным автокорреляционным функциям датчиков были рассчитаны их спектры. Эти спектры определяются свойствами датчика как приемника акустического излучения, а также – частотными свойствами усилителя сигналов. Чтобы исключить шумы усилителя, мы строили разности спектров, полученных, когда измерения были проведены с источником и без источника. Разности спектров для датчиков R1 и R2 (R3 и R4) представлены на рис. 2а (рис. 2б). Показанные спектры несимметричны – среднюю частоту f_0 амплитудно-частотной характеристики датчика рассчитывали по формуле $f_0 = \int_{0 \text{ МГц}}^{3 \text{ МГц}} f A(f) df / \int_{0 \text{ МГц}}^{3 \text{ МГц}} A(f) df$, где $A(f)$ – представленные на рис. 2 спектры датчиков. Формула (1) справедлива для прямоугольного спектра – полосу пропускания Δf датчика рассчитывали исходя из равенства площадей под

экспериментальным и приближенным прямоугольным спектрами: $A(f_0)\Delta f = \int_{0 \text{ МГц}}^3 \text{МГц} A(f)df$.

Были получены следующие спектральные характеристики $f_0 \pm \Delta f/2$: 1.31 ± 0.51 (R1), 1.28 ± 0.56 (R2), 1.74 ± 0.76 (R3), 1.79 ± 0.82 (R4) МГц. В экспериментах использовались пара датчиков R1 и R2 и пара датчиков R3 и R4. Как видно из рис. 2, спектры датчиков не идентичны, поэтому были рассчитаны средние значения спектральных характеристик: 1.29 ± 0.54 (R1 и R2), 1.77 ± 0.79 (R3 и R4) МГц.

Для проверки выражения (1) мы использовали разные приемники (с разной полосой

пропускания), источники разных размеров, расположенных на разных расстояниях от приемников, а также сдвигали источники по оси x , т.е. в направлении, перпендикулярном акустической оси. Измеренные и рассчитанные по формуле (1) кросскорреляционные функции представлены на рис. 3.

На рис. 3а, 3б показаны кросскорреляционные функции приемников R1 и R2, на рис. 3в — корреляционные функции приемников R3 и R4. Для расчета кросскорреляционных функций использовались размеры, указанные в разделе Материалы и методы, а также полосы пропускания, определенные по спектрам датчиков (см. выше). Выражение (1) приближали к экспериментальным данным методом наименьших квадратов в диапазоне

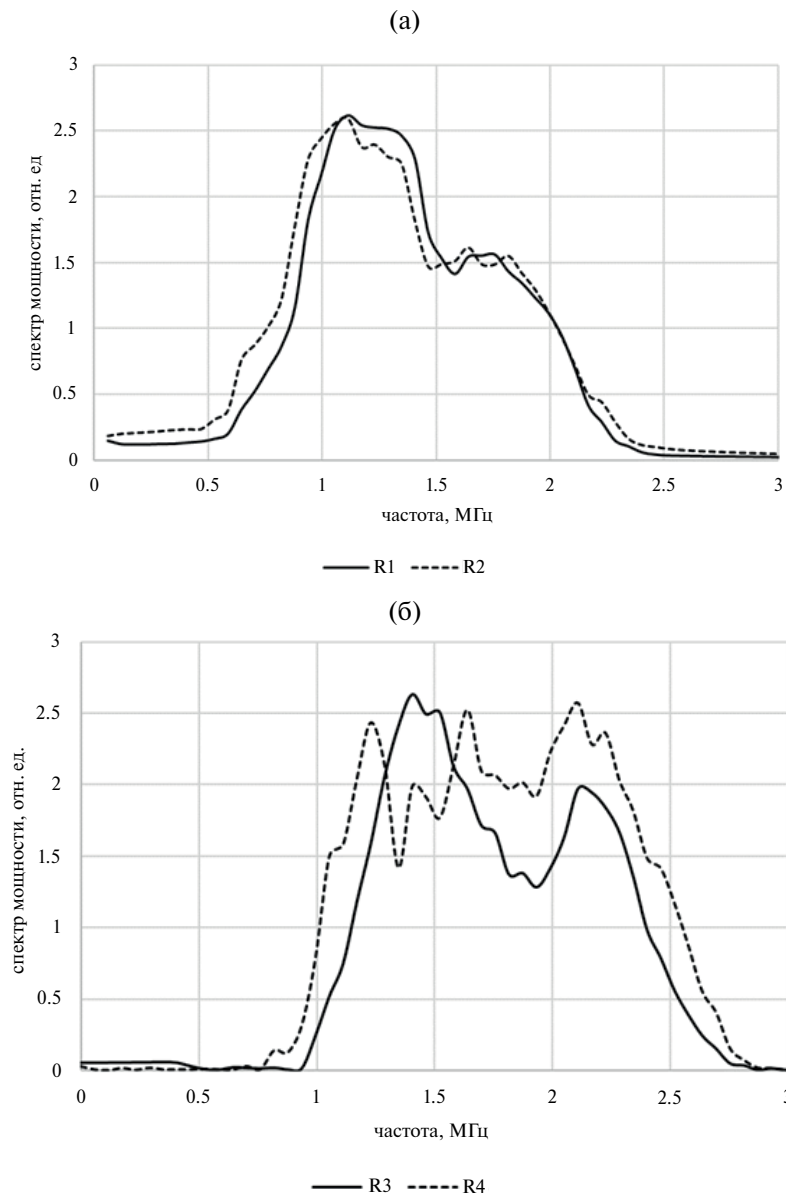


Рис. 2. Спектры датчиков (а) — R1 и R2 и (б) — R3 и R4.

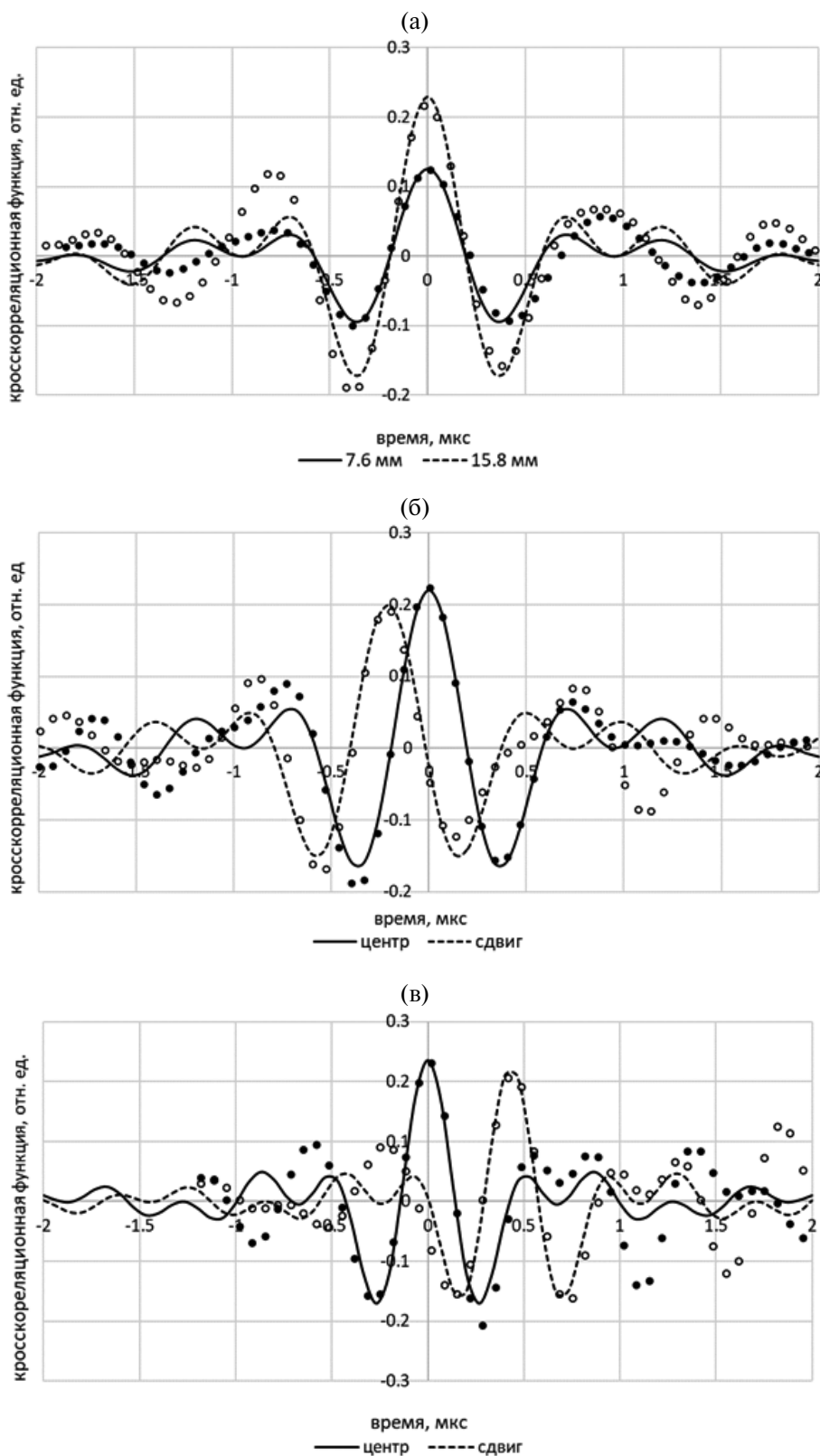


Рис. 3. Экспериментальные (маркеры) и расчетные (линии) кросскорреляционные функции теплового акустического излучения при разных положениях нагретых источников: (а) — для источников \varnothing 7.6 и 15.8 мм на акустической оси системы на расстоянии 800 мм от приемников; (б) — источник \varnothing 11.2 мм на расстоянии 800 мм на акустической оси системы (центр) и сдвинутый в отрицательном направлении оси x на 10 ± 2 мм; (в) — источник \varnothing 11.2 мм на расстоянии 515 мм на акустической оси системы и сдвинутый в положительном направлении оси x на 13 ± 2 мм.

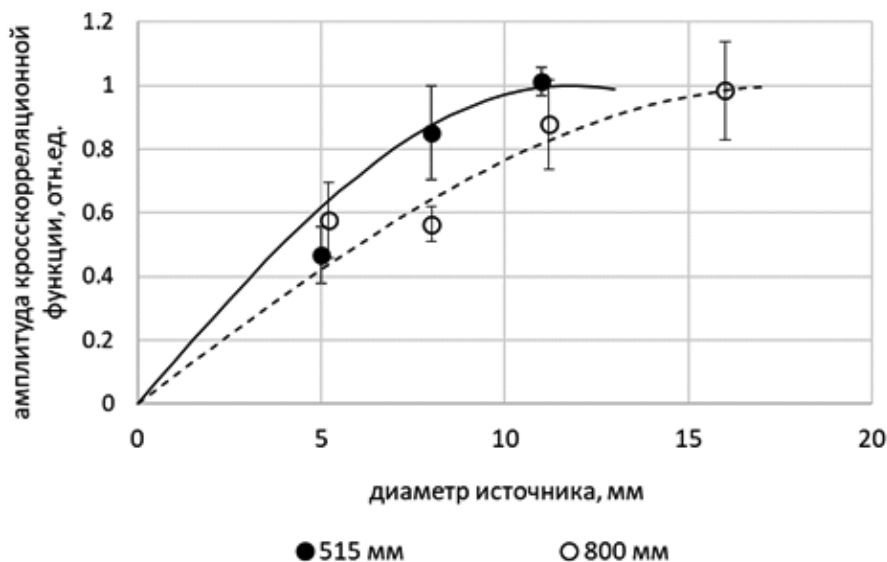


Рис. 4. Экспериментальные (маркеры) и рассчитанные (линии) зависимости амплитуд кросскорреляционных функций от диаметров источников при двух расстояниях между источниками и приемниками 515 (сплошная линия) и 800 (пунктир) мм. Показана стандартная ошибка.

$\left[\frac{Dx_0}{cz} - \frac{3}{4f_0}, \frac{Dx_0}{cz} + \frac{3}{4f_0} \right]$. Этот диапазон с центром в точке максимума кросскорреляционной функции составляет 1.2 мкс.

На рис. 3а показаны кросскорреляционные функции для источников разных размеров (7.6 и 15.8 мм), которые были расположены на акустической оси системы на расстоянии 800 мм от приемников. В этом случае при аппроксимации подбирали единственный параметр — амплитуду кросскорреляционной функции (см. выражение (2)). Как и следовало ожидать, максимум кросскорреляционной функции выше для более широкого источника.

На рис. 3б и 3в показаны кросскорреляционные функции для источника диаметром 11.2 мм, который располагали на расстояниях 800 (рис. 3б) и 515 (рис. 3в) мм от приемников и на 10 ± 2 мм в отрицательном направлении оси x (рис. 3б) и на 13 ± 2 мм в положительном направлении оси x (рис. 3в). В этом случае при аппроксимации подбирали два параметра — амплитуду кросскорреляционной функции и сдвиг x_0 источника. В результате оптимальные приближения соответствовали сдвигам источника в пространстве на 15 и -11 мм, что в целом соответствует указанным экспериментальным данным. При этом временные кросскорреляционные функции сдвигались на -0.2 (рис. 3б) и на 0.4 (рис. 3в) мкс.

Измеренные и рассчитанные по формуле (2) зависимости максимальных значений (амплитуд) кросскорреляционных функций от диаметра Δx

источника для $z = 515$ и 800 мм представлены на рис. 4. Из графика видно, что экспериментальные и рассчитанные значения близки с учетом погрешности измерений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены корреляционные измерения теплового акустического излучения с помощью двух пар приемников. При этом изменяли следующие параметры экспериментальной схемы: полосу пропускания приемников, размер и положение источников, а также расстояние от источников до приемников. Согласно формулам, используемым в радиоастрономии [10], рассчитаны кросскорреляционные функции теплового акустического излучения. Показано, что экспериментальные и расчетные значения параметров кросскорреляционных функций близки с учетом погрешности измерений.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда No 23-22-00175, <https://rscf.ru/project/23-22-00175/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rieke V.* MR thermometry // *Interventional Magnetic Resonance Imaging*. 2011. P. 271–288.
2. *Hand J.W. et al.* Monitoring of deep brain temperature in infants using multi-frequency microwave radiometry and thermal modelling // *Physics in Medicine & Biology*. 2001. V. 46. № 7. P. 1885.
3. *Maass-Moreno R., Damianou C.A.* Noninvasive temperature estimation in tissue via ultrasound echo-

- shifts. Part I. Analytical model // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 100. № 4. P. 2514–2521.
4. *Bowen T.* Passive remote temperature sensor system: пат. 4246784 США. 1981.
5. *Аносов А.А., Беляев Р.В., Вилков В.А., Дворникова М.В., Дворникова В.В., Казанский А.С., Курятникова Н.А., Мансфельд А.Д.* Акустотермометрический контроль кисти человека при гипертермии и гипотермии // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 1. С. 109–114.
6. *Anosov A.A., Subochev P.V., Mansfeld A.D., Sharakshane A.A.* Physical and computer-based modeling in internal temperature reconstruction by the method of passive acoustic thermometry // Ultrasonics. 2018. V. 82. 336–344.
7. *Аносов А.А., Беляев Р.В., Вилков В.А., Казанский А.С., Курятникова Н.А., Мансфельд А.Д.* Акустотермометрические данные о кровотоке и теплопродукции в предплечье при физической нагрузке // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 4. С. 539–544.
8. *Аносов А.А., Пасечник В.И., Исрефилов М.Г.* Восстановление двумерного распределения внутренней температуры модельного объекта методом пассивной термоакустической томографии // Акуст. журн. 1999. Т. 45(1). С. 20–24.
9. *Zernike F.* The concept of degree of coherence and its application to optical problems // Physica. 1938. V. 5. № 8. P. 785–795.
10. *Есепкина Н.А., Корольков Д.В., Парийский Ю.Н.* Радиотелескопы и радиометры. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. С. 19–22.
11. *Hessemer Jr R.A., Perper L.J.* Correlation thermography: пат. 4416552 США. 1983.
12. *Аносов А.А., Антонов М.А., Пасечник В.И.* Измерение корреляционных свойств теплового акустического излучения // Акуст. журн. 2000. Т. 46. С. 28–34.
13. *Буров В.А., Дариалашвили П.И., Евтухов С.Н., Румянцева О.Д.* Экспериментальное моделирование процессов активно-пассивной термоакустической томографии // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 3. С. 298–298.
14. *Yurchenko S.A., Dmitriev K.V.* Reconstructing a Dynamic Change in an Object's Temperature by Means of Acoustic Thermotomography // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2022. V. 86. № 1. P. 88–93.
15. *Миргородский В.И., Герасимов В.В., Пешин С.В.* Экспериментальные исследования особенностей пассивной корреляционной томографии источников некогерентного акустического излучения мегагерцевого диапазона // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 5. С. 702–709.
16. *Вилков В.А., Кротов Е.В., Мансфельд А.Д., Рейман А.М.* Применение фокусируемых антенн для задач акустотермометрии // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 1. С. 81–89.
17. *Аносов А.А., Барабаненков Ю.Н., Сельский А.Г.* Корреляционный прием теплового акустического излучения // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 6. С. 725–730.
18. *Weaver R.L., Lobkis O.I.* Elastic wave thermal fluctuations, ultrasonic waveforms by correlation of thermal phonons // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113. № 5. P. 2611–2621.
19. *Аносов А.А., Грановский Н.В., Ерофеев А.В., Беляев Р.В., Санин А.Г., Мансфельд А.Д.* Корреляционные измерения теплового акустического излучения решеткой датчиков. // Акуст. журн. 2024. Т. 70. № 1. С. 21–28.
20. *Аносов А.А., Барабаненков Ю.Н., Казанский А.С., Лесс Ю.А., Шаракианэ А.С.* Обратная задача акустотермографии при корреляционном приеме теплового акустического излучения // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 1. С. 98–103.
21. *Мансфельд А.Д.* Акустотермометрия. Состояние и перспективы // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 546–556.
22. *Аносов А.А.* Одномерная обратная задача пассивной акустической термометрии с использованием уравнения теплопроводности: компьютерное и физическое моделирование // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 5. С. 562–570.
23. *Аносов А.А., Шаракианэ А.А., Казанский А.С., Мансфельд А.Д., Санин А.Г., Шаракианэ А.С.* Аппаратная функция широкополосного акустотермометрического датчика // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 5. С. 616–623.

Verification of relations obtained in radio astronomy for correlation reception of thermal acoustic radiation

A. A. Anosov^{a,b}, N. V. Granovskii^{a,*}, A. V. Erofeev^{a,b}, A. D. Mansfel'd^c,
R. V. Belyaev^c, A. S. Kazansky^a

^a*Sechenov First Moscow State Medical University of the Russian Ministry of Health
(Sechenov University), Trubetskaya St. 8, Bldg. 21, Moscow, 19991 Russia*

^b*Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics
of the Russian Academy of Sciences, Mokhovaya St. 11/7, Moscow, 125009 Russia*

^c*Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences,
Ulyanova St. 46, Nizhny Novgorod, 603950 Russia*

*e-mail: granovsky_nikita@mail.ru

In this work, correlation reception of thermal acoustic radiation by a pair of sensors was carried out. The experiment used receivers with different bandwidths, changed the size of the heated sources and the distance from the sources to the receivers, and also shifted the sources in the transverse direction perpendicular to the acoustic axis of the system. For each case, using the relations used in radio astronomy, the correlation functions of thermal acoustic radiation were calculated. It is shown that the cross-correlation functions obtained in experiments and calculated are close, taking into account the measurement error.

Ключевые слова: cross correlation function, thermal acoustic radiation, acoustic brightness temperature

УДК 534.231.3

ПРИМЕНЕНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОНТАКТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. А. П. Семёнов^а, Б. Д. Зайцев^{а,*}, А. А. Теплых^а, И. А. Бородина^а

^аФедеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук, Саратовский филиал, ул. Зеленая 38, Саратов, Россия

*e-mail: zai-boris@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.05.2024 г.

После доработки 18.10.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Исследовано влияние проводящих и непроводящих жидкостей на характеристики пьезоэлектрического резонатора с продольным электрическим полем, погруженного в жидкость. Резонатор, работающий на продольной акустической моде с резонансной частотой около 4 МГц, представлял собой диск из лангасита X-среза с круглыми электродами на обеих сторонах. Резонатор закрепляли в основании контейнера, который заполняли исследуемой жидкостью. Затем реальная и мнимая части его электрического импеданса в зависимости от частоты измерялись векторным анализатором цепей. Была построена модернизированная электромеханическая схема такого резонатора, учитывающая влияние проводимости и диэлектрической проницаемости жидкости на изменение эффективной площади электродов. Продемонстрирована возможность определения модуля упругости, коэффициента вязкости исследуемой жидкости и величин дополнительных элементов эквивалентной схемы путем фиттинга рассчитанных частотных зависимостей комплексного электрического импеданса резонатора, погруженного в жидкость, к измеренным зависимостям.

Ключевые слова: пьезоэлектрический резонатор, возбуждаемый продольным электрическим полем, эквивалентная схема Мэзона, электрический импеданс и адмиттанс, проводимость, диэлектрическая проницаемость, коэффициент вязкости и модуль упругости жидкости

DOI: 10.31857/S0320791924060027, **EDN:** JUCNJO

1. ВВЕДЕНИЕ

Разработка и совершенствование акустических датчиков и методов определения механических и электрических характеристик различных жидкостей остаются актуальными в течение последних десятилетий [1–38] для многих областей науки и техники. Особое внимание уделялось датчикам, которые используют поверхностные и пластинчатые акустические волны, распространяющиеся в пьезоэлектрических структурах. Здесь можно выделить двухканальные датчики, основанные на возбуждении и регистрации поперечно горизонтальных поверхностных акустических волн, распространяющихся в танталате лития 36-УХ среза [4–8]. Один канал у таких датчиков является электрически свободным, и он реагирует на изменение электрических и механических свойств контактирующей жидкости. Другой канал электрически закорочен проводящей пленкой, и он реагирует

только на изменение механических свойств. Особой популярностью пользуются датчики и методы, основанные на использовании акустических волн нулевого и высших порядков в пьезоэлектрических пластинах [9–15, 33]. Эти методы основаны на том, что одни типы волн чувствительны к изменению механических свойств исследуемой жидкости, а другие типы волн чувствительны только к изменениям электрических свойств. Это открывает возможность раздельного определения механических и электрических свойств жидкости при анализе различных типов волн в одном датчике.

Весьма популярными оказались датчики, основанные на резонаторах с поперечным электрическим полем. Электроды таких резонаторов расположены с одной стороны пьезоэлектрической пластины, а акустическая волна возбуждается между электродами [16–24]. Было показано, что резонансная частота и максимум реальной части

электрического импеданса зависят от вязкости, проводимости и диэлектрической проницаемости жидкости, контактирующей со свободной стороной резонатора. Показано также, что с помощью метода эквивалентных схем можно определять вязкость, модуль упругости и диэлектрическую проницаемость жидкости [25].

Весьма эффективными оказались методы анализа жидкостей с помощью резонаторов с продольным электрическим полем [26–32]. Показаны возможности таких резонаторов по одновременному определению коэффициентов вязкости и модулей упругости как простых суспензий, так и вязких и проводящих жидкостей

Данная работа посвящена изучению влияния проводящих и непроводящих жидкостей на характеристики пьезоэлектрического резонатора с продольным электрическим полем с использованием модернизированной электромеханической схемы резонатора, полностью погруженного в исследуемую жидкость, учитывающей влияние проводимости и диэлектрической проницаемости жидкости на изменение эффективной площади электродов.

2. ОПИСАНИЕ РЕЗОНАТОРА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ КОНСТАНТ ЛАНГАСИТА

В работе исследовался резонатор из лангасита X -среза, возбуждаемый продольным электрическим полем. Выбор ориентации кристалла был

обусловлен низким температурным коэффициентом задержки для объемной продольной акустической моды. Резонатор с толщиной пластины 706 мкм и диаметром электродов 7.5 мм был закреплен в основании пластмассового контейнера объемом 30 мл (рис. 1) [30–32].

Вначале были измерены действительная и мнимая части электрического импеданса свободного резонатора в зависимости от частоты с помощью анализатора импеданса E4990A (Keysight Technologies, Санта-Роза, Калифорния, США). Расчет частотных зависимостей реальной и мнимой частей электрического импеданса свободного резонатора проводился с помощью эквивалентной схемы Мэзона [39–41]. С помощью данной схемы и методики, подробно изложенной ранее [30, 31, 40–42], были получены значения материальных констант лангасита, такие как плотность ρ , модуль упругости C_{11} , коэффициент вязкости η_{11} , пьезоэлектрическая константа e_{11} и диэлектрическая проницаемость ϵ_{11} . Эти данные соответствовали системе координат, в которой ось X_1 ориентирована нормально плоскости пластины. В табл. 1 представлены справочные [43] и полученные в рамках данной работы материальные константы лангасита.

Результат подгонки рассчитанных и измеренных частотных зависимостей реальной и мнимой частей электрического импеданса свободного резонатора представлен на рис. 2. Видно хорошее их соответствие.

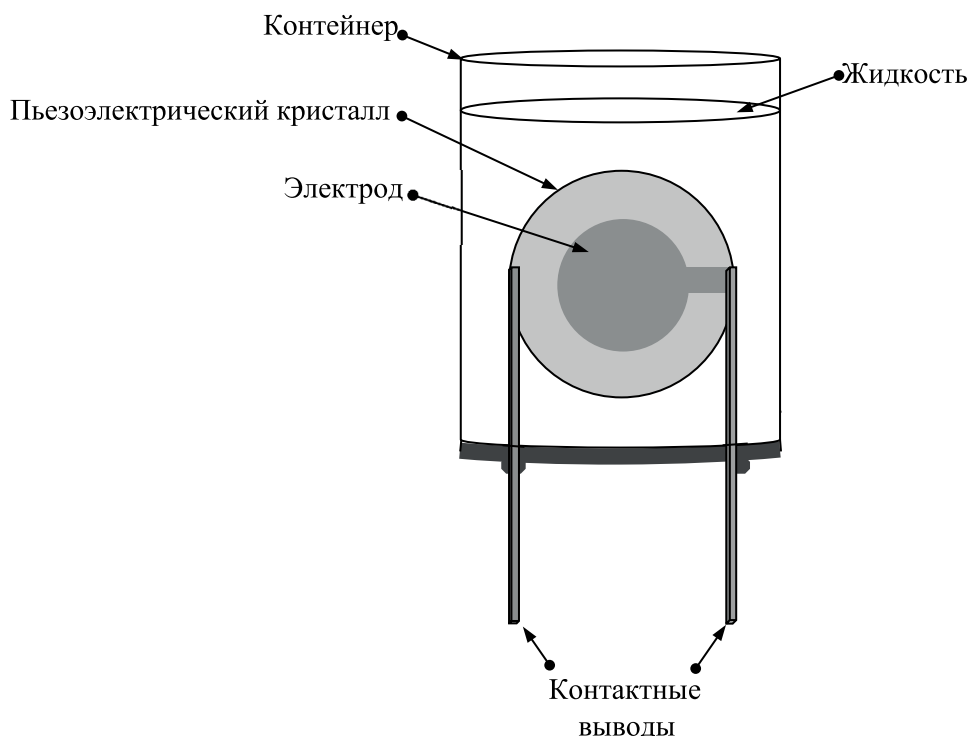


Рис. 1. Жидкостный контейнер с закрепленным в основании резонатором.

Таблица 1. Значения материальных констант лангасита X-среза.

	ρ , кг/м ³	C_{11} , 10 ¹⁰ Па	η_{11} , Па·с	e_{11} , С/м ²	ε_{11} , 10 ⁻¹¹ Ф/м
Справочные данные [43]	5743	18.93	0	-0.431	16.79
Результаты фиттинга	5743	18.88	3.8	-0.35	17.56

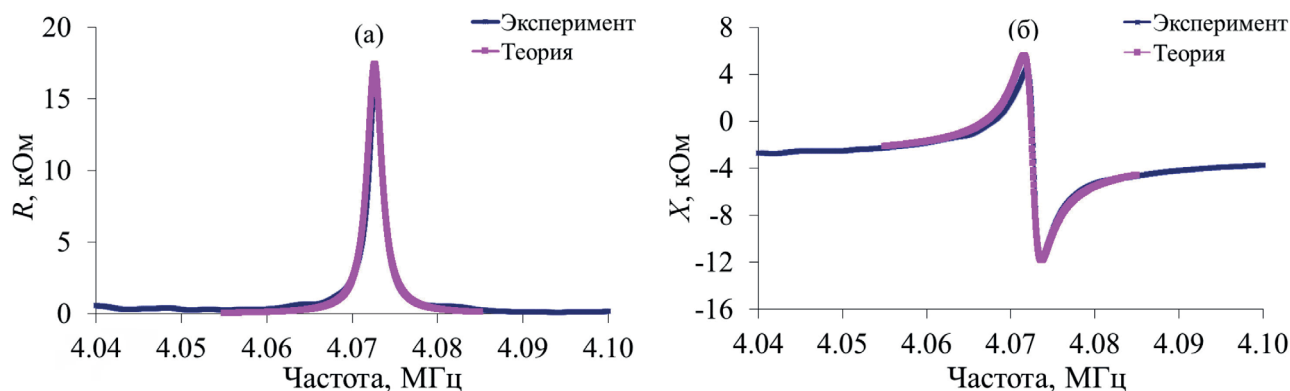


Рис. 2. Частотные зависимости (а) — реальной и (б) — мнимой частей электрического импеданса резонатора из лангасита X-среза без нагрузки (синий — эксперимент, розовый — теория).

Затем контейнер заполняли образцом исследуемой жидкости так, чтобы резонатор был полностью погружен в жидкость, и повторяли измерение указанных частотных зависимостей. Ниже представлена схема Мэсона для описанного резонатора из лангасита, контактирующего с исследуемой жидкостью, и описана методика определения материальных постоянных этой жидкости.

3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА МЭСОНА РЕЗОНАТОРА, ПОГРУЖЕННОГО В ИССЛЕДУЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Исследование акустических и диэлектрических свойств контактирующих жидкостей методом, изложенным ранее [30–32], показало, что путем учета в эквивалентной схеме резонатора, полностью погруженного в жидкость с конечной проводимостью, добавочной емкости C_a и добавочного сопротивления R_a можно определить модуль упругости и коэффициент вязкости жидкости [32]. Эта схема представлена на рис. 3. Здесь добавочная емкость C_a и добавочное сопротивление R_a связаны с шунтирующим влиянием контактирующей жидкости. При этом механический контакт резонатора с жидкостью описывается импедансом Z^l , который определяется следующей формулой [40]

$$Z^l = z_{11}^l / S, \quad (1)$$

где S — площадь электродов резонатора. Удельный механический импеданс z_{11}^l равен

$$z_{11}^l = \{(C_{11}^l + i\omega\eta_{11}^l)\rho^l\}^{1/2}, \quad (2)$$

где C_{11}^l — продольный модуль упругости, ω — круговая частота, η_{11}^l — продольный коэффициент вязкости, ρ^l — плотность. Индексом “ l ” обозначена принадлежность величины к жидкости.

Согласно методике, описанной в [30–32], определяется такой набор искомых величин C_{11}^l , η_{11}^l , C_a и R_a , при котором экспериментальные и расчетные частотные зависимости реальной и мнимой частей электрического импеданса резонатора, полностью погруженного в жидкость, максимально совпадают друг с другом.

Однако эквивалентная схема на рис. 3 не учитывает тот факт, что проводимость и диэлектрическая проницаемость жидкости могут привести к увеличению эффективной площади электродов на поверхности кристалла резонатора. Это, в свою очередь, приведет к увеличению собственной емкости резонатора, которая окажется равной $C_0 + C_0^l$, где C_0^l — это связанная с возбуждением акустической волны добавочная емкость. Увеличение емкости приведет к изменению коэффициента трансформации электромеханического трансформатора $N = h(C_0 + C_0^l)$, где $h = e_{11}/\varepsilon_{11}$. Здесь e_{11} и ε_{11} — пьезоконстанта и диэлектрическая постоянная, относящиеся к лангаситу. С учетом этого фактора эквивалентную схему пьезоэлектрического резонатора можно представить в следующем виде (рис. 4). Именно эта схема будет использоваться в настоящей работе для расчета характеристик пьезоэлектрического резонатора, погруженного в жидкость и для определения механических и электрических свойств жидкости.

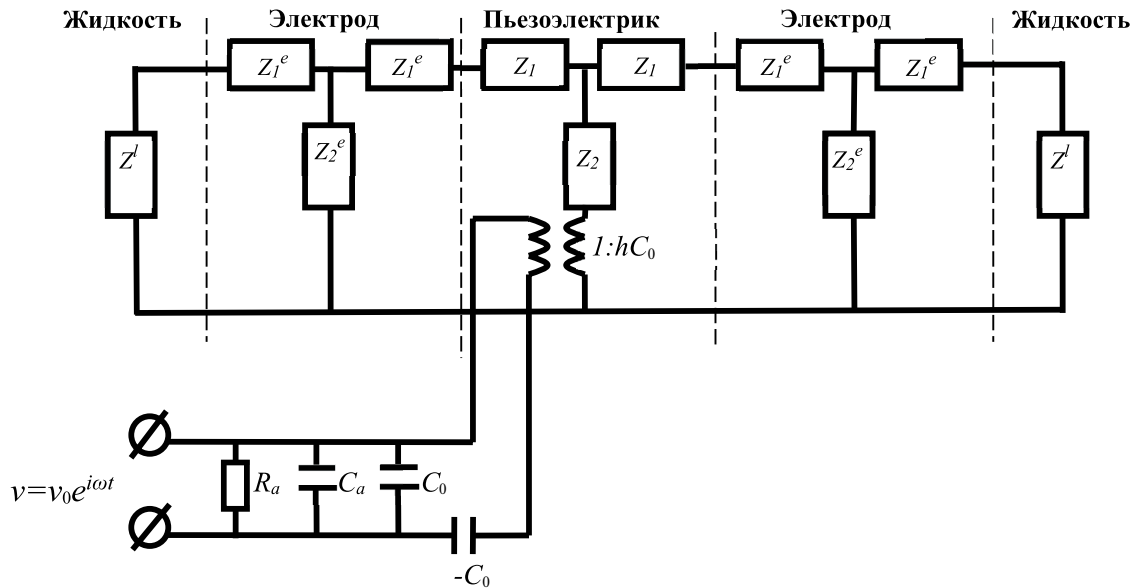


Рис. 3. Эквивалентная схема резонатора с продольным электрическим полем, погруженного в жидкость с учетом краевой добавочной емкости C_a и добавочного сопротивления R_a .

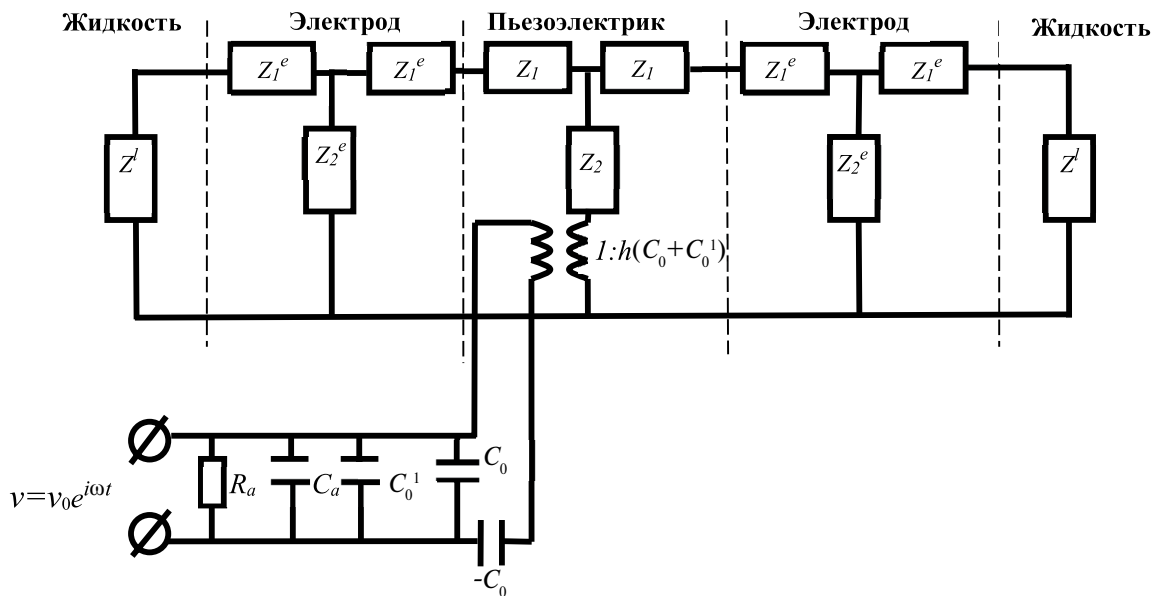


Рис. 4. Эквивалентная схема погруженного в жидкость резонатора с учетом дополнительной емкости C_a и дополнительного сопротивления R_a , которые связаны с присутствием жидкости, а также добавочной емкости C_0^1 , связанной с увеличением эффективной площади электродов.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ КОНСТАНТ НЕПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ

Таким образом, в данной работе на основе эквивалентной схемы (рис. 4) погруженного в жидкость резонатора с продольным электрическим полем определялись модуль упругости C_{11}^l , коэффициент вязкости η_{11}^l непроводящих жидкостей, а также добавочная емкость C_a , добавочное

сопротивление R_a и эффективная емкость резонатора $C_0 + C_0^1$. Определялся такой набор искомых величин C_{11}^l , η_{11}^l , C_a , R_a и C_0^1 , для которого экспериментальные частотные зависимости реальной и мнимой частей электрического импеданса погруженного в жидкость резонатора максимально соответствовали рассчитанным. В качестве непроводящих жидкостей исследовались дистиллированная вода, этиловый спирт, изопропиловый спирт,

ацетон, жидкий парафин, керосин и уайт-спирит. Рис. 5 показывает, что расчетные частотные зависимости, полученные методом подгонки параметров в рамках используемой теоретической модели для реальной (R) и мнимой (X) частей электрического импеданса резонатора, погруженного в дистиллированную воду (рис. 5а, 5б), в керосин марки ТС-1 (рис. 5в, 5г) и в ацетон (рис. 5д, 5е) находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Проводимость этих жидкостей не превышала 2 мкСм/см.

Найденные материальные постоянные исследуемых жидкостей представлены в табл. 2. Следует отметить, что диэлектрическая проницаемость ϵ^l и

плотность ρ^l были предварительно измерены по методике, описанной ранее в [32, 33]. В результате фиттинга были найдены продольный модуль упругости C_{11}^l , продольный коэффициент вязкости η_{11}^l , скорость продольной волны v_{11}^l и добавочное сопротивление R_a . Здесь же приведены справочные значения продольного модуля упругости C_{11}^{IR} и скорости продольной акустической волны v_{11}^{IR} , взятые из [45].

Из табл. 2 видно хорошее соответствие рассчитанных и справочных значений как для продольного модуля упругости, так и для скорости продольной акустической волны в жидкостях.

В табл. 3 приведено значение собственной емкости свободного резонатора C_0 , полученное в

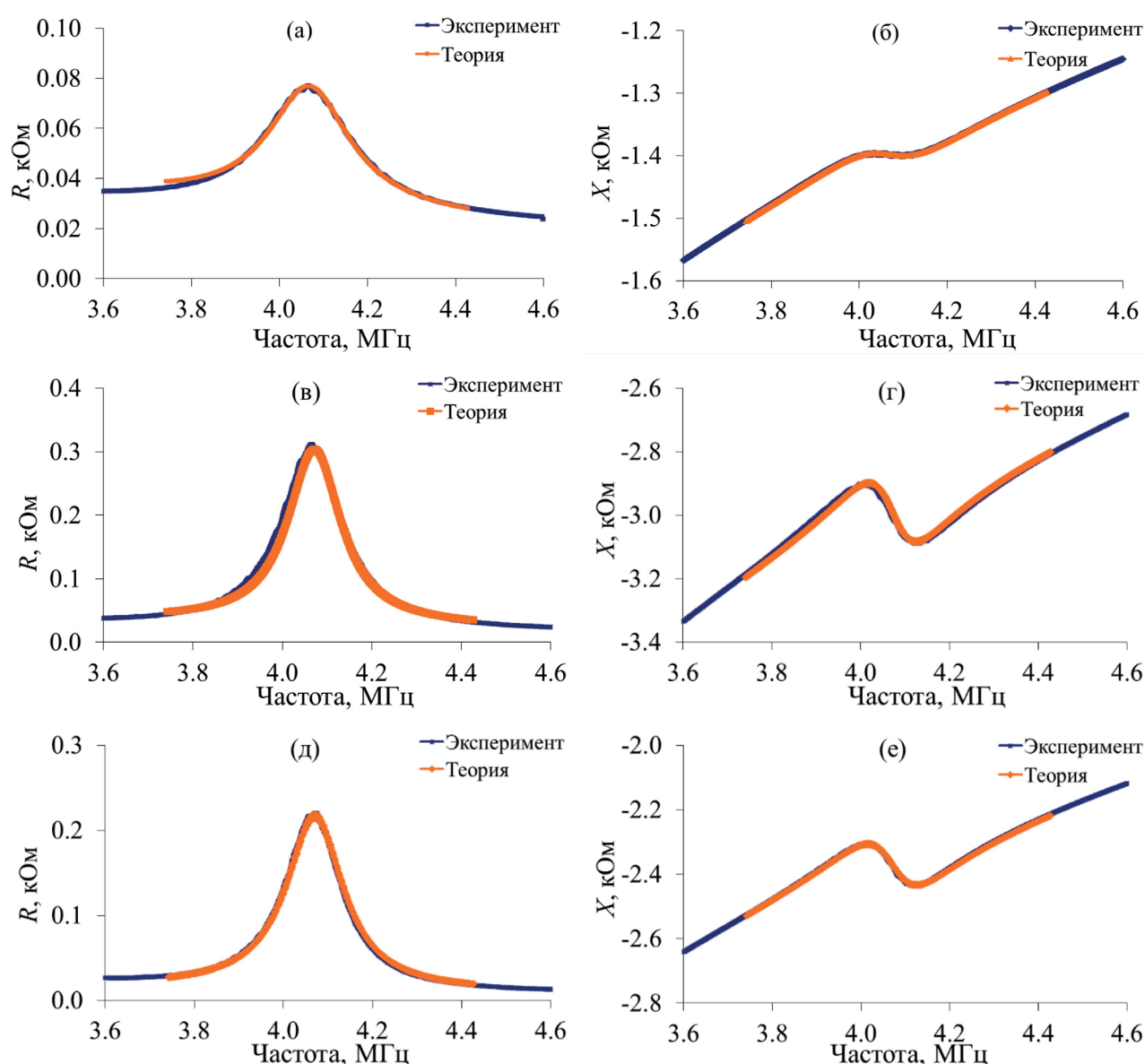


Рис. 5. Частотные зависимости (а, в, д) — реальной и (б, г, е) — мнимой частей электрического импеданса резонатора из лангсита, погруженного (а, б) — в воду, (в, г) — в керосин ТС-1 и (д, е) — в ацетон (синий цвет — эксперимент, оранжевый цвет — теория).

Таблица 2. Полученные и справочные [45] значения материальных констант исследуемых жидкостей.

Жидкость	ϵ^l	ρ^l , кг/м ³	C_{11}^{IR} , 10 ⁹ Па	C_{11}^l , 10 ⁹ Па	η_{11}^l , мПа·с	ν_{11}^{IR} , м/с (4 МГц)	ν_{11}^l , м/с (4 МГц)	R_a , МОм
Вода	81	1000	2.2	2	5	1483	1414	0.07
Спирт этиловый 95%	24	800	1.1			1180		
Спирт этиловый 71%	35	850		1.45	10		1346	0.101
Изопропиловый спирт	21	800		1.14	11		1194	0.28
Ацетон	21	790	1.12	1.22	11	1192	1243	0.45
Жидкий парафин	3.5	826	1.66	1.35	500	1420	1278	1.1
Керосин ТС-1	3.5	750	1.26	1.1	50	1295	1211	0.31
Уайт-спирит	3.4	790		1.05	5		1025	0.22

Таблица 3. Полученные и измеренные значения емкостей для исследуемых жидкостей.

Жидкость	ϵ^l	ρ^l , кг/м ³	C_0^m , пФ	C_0 , пФ	C_0^l , пФ	C_a , пФ	$C_0 + C_0^l + C_a$, пФ	C_0^{lm} , пФ
Свободный резонатор			12.7	11.82	0	0	11.82	
Вода	81	1000	12.7	11.82	2.7	13.41	27.93	27.94
Спирт этиловый 71%	35	850	12.7	11.82	2.7	4.43	18.95	19.13
Изопропиловый спирт	21	800	12.7	11.82	2.8	1.63	16.25	16.15
Ацетон	21	790	12.7	11.82	2.83	1.82	16.47	16.5
Жидкий парафин	3.5	826	12.7	11.82	0.9	0.1	12.82	12.85
Керосин ТС-1	3.5	750	12.7	11.82	1.12	0.1	13.04	12.84
Уайт-спирит	3.4	790	12.7	11.82	1.13	0.12	13.07	12.84

результате фиттинга, и ее измеренное значение C_0^m . Приведены также полученные в результате фиттинга добавочные емкости C_a и C_0^l и измеренное значение емкости резонатора C_0^{lm} , погруженного в жидкость. Поскольку все теоретически определяемые емкости (C_0 , C_0^l , C_a) соединены параллельно в эквивалентной схеме на рис. 4, в табл. 3 представлена также их сумма. Из табл. 3 видно, что сумма рассчитанных емкостей C_0 , C_0^l , C_a практически равна измеренному значению емкости C_0^{lm} .

На основании полученных результатов можно заключить, что определение модуля упругости и коэффициента вязкости жидкости, в которую погружен резонатор, возможно на основе анализа его эквивалентной схемы, представленной на рис. 4. Эта схема учитывает тот факт, что контактирующая жидкость приводит не только к появлению добавочного сопротивления и добавочной емкости в первичной цепи, но и к изменению эффективной площади электродов.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ
КОНСТАНТ ПРОВОДЯЩИХ
И ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

5.1. Приготовление смесей жидкостей

Для проведения исследований по влиянию проводящих и вязких жидкостей на характеристики резонатора из лангасита, возбуждаемого продольным

электрическим полем и работающего на продольной акустической волне, были изготовлены образцы смеси воды и глицерина с объемными концентрациями глицерина β в воде: 0, 44, 65, 75% с различными проводимостями. Для получения фиксированного значения проводимости образца жидкости в него добавлялось определенное количество NaCl с последующим перемешиванием на магнитной мешалке в течение 1 часа. Определение проводимости полученных образцов осуществлялось при помощи кондуктометра (HI8733, HANNA Instruments, Woonsocket, RI, USA). Было изготовлено двадцать различных образцов смесей с проводимостями 1.4, 27, 55, 82, 123 мкСм/см. Плотность полученных образцов определялась при помощи аналитических весов (Pioneer PA-214C, OHAUS Corporation, NJ, USA) и прецизионной лабораторной пипетки (Колор, Ленпипет). Диэлектрическая проницаемость определялась с помощью плоского конденсатора по методике, описанной в [33].

5.2. Влияние исследуемых жидкостей
на характеристики резонатора

Для исследования влияния проводимости и вязкости жидкости на характеристики резонатора с продольным электрическим полем, контейнер с резонатором заполнялся исследуемым образцом жидкости. После этого измерялись частотные зависимости реальной и мнимой частей

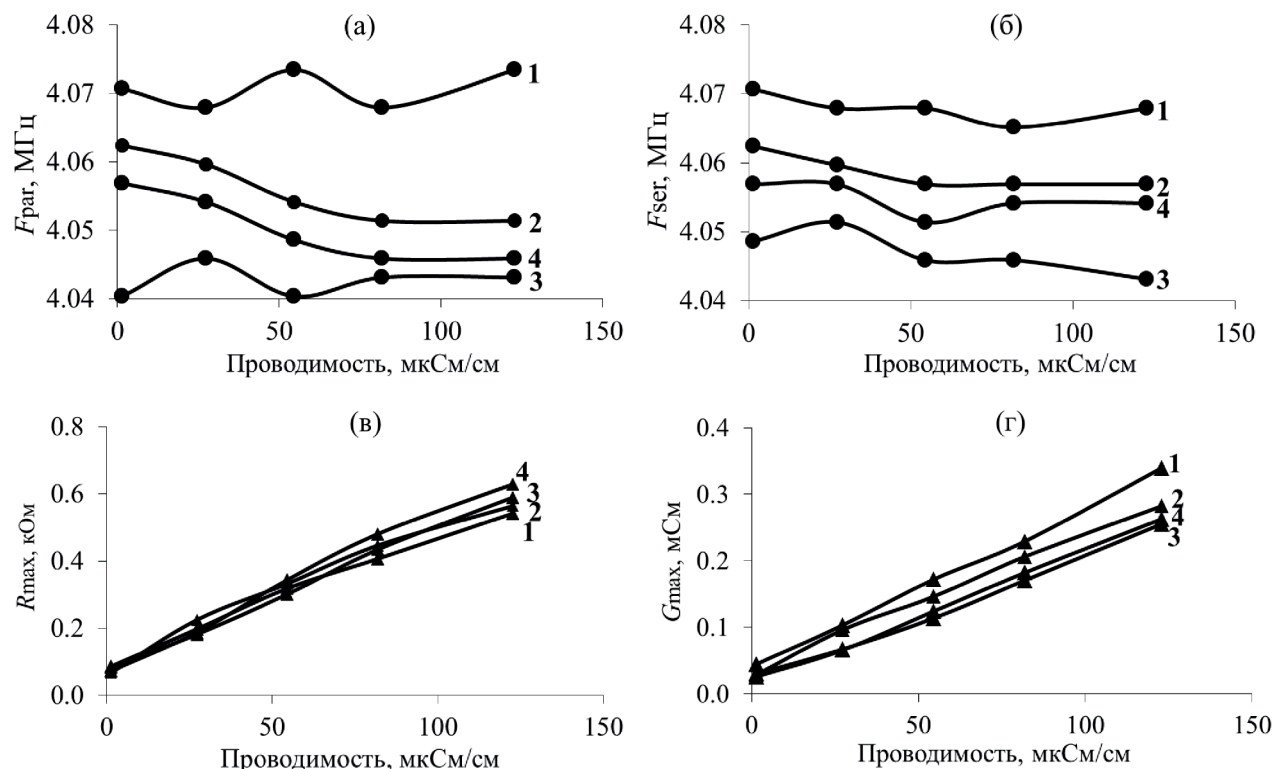


Рис. 6. Зависимости резонансной частоты (а) — параллельного и (б) — последовательного резонансов, (в) — максимальных значений реальной части электрического импеданса и (г) — адмиттанса резонатора из лангасита, погруженного в жидкость, от проводимости жидкости (1 — вода, 2 — смесь вода-глицерин $\beta=44\%$, 3 — смесь вода-глицерин $\beta=65\%$, 4 — смесь вода-глицерин $\beta=75\%$).

электрического импеданса. Измеренные частотные зависимости позволили построить зависимости частот параллельного F_{par} и последовательного F_{ser} резонансов, а также максимальных значений электрического импеданса R_{max} и адмиттанса G_{max} от проводимости жидкостей. Полученные графики представлены на рис. 6.

Рис. 6 показывает, что в случае с резонатором из лангасита, работающем на продольной акустической волне, при увеличении проводимости образцов жидкости от 1.4 до 123 мкСм/см частоты параллельного и последовательного резонанса изменяются слабо (рис. 6а, 6б) и разброс значений не превышает 3%. Максимальные значения электрического импеданса и адмиттанса монотонно увеличиваются с ростом проводимости для всех четырех типов жидкостей (рис. 6в, 6г).

5.3. Определение материальных констант проводящих и вязких жидкостей, а также добавочных емкостей и добавочного сопротивления в эквивалентной схеме

Определение модуля упругости C_{11}^I , коэффициента вязкости η_{11}^I вязких и проводящих жидкостей, а также значений добавочной емкости C_a , добавочного сопротивления R_a и эффективной емкости

резонатора $C_0 + C_0^I$ проводили на основе анализа эквивалентной схемы погруженного в жидкость резонатора (рис. 4). На рис. 7 представлены рассчитанные и экспериментальные частотные зависимости реальной и мнимой частей электрического импеданса резонатора, полностью опущенного в воду с проводимостью 27 мкСм/см (рис. 7а, 7б) и в смесь вода-глицерин с 75% содержанием глицерина в воде с проводимостью 123 мкСм/см (рис. 7в, 7г). Видно, что рассчитанные кривые находятся в хорошем соответствии с экспериментальными.

Полученные значения относительной диэлектрической проницаемости ϵ^I , плотности ρ^I , проводимости σ^I , продольного модуля упругости C_{11}^I , коэффициента вязкости η_{11}^I , скорости продольной акустической волны v_{11}^I и добавочного сопротивления R_a для жидкостей с различной вязкостью и проводимостью представлены в табл. 4. Символом β обозначена относительная объемная концентрация глицерина в воде.

В табл. 5 представлены: собственная емкость свободного резонатора C_0 и ее измеренное значение C_0^m , добавочные емкости C_0^I и C_a , и измеренное значение емкости резонатора, погруженного в жидкость C_0^{lm} .

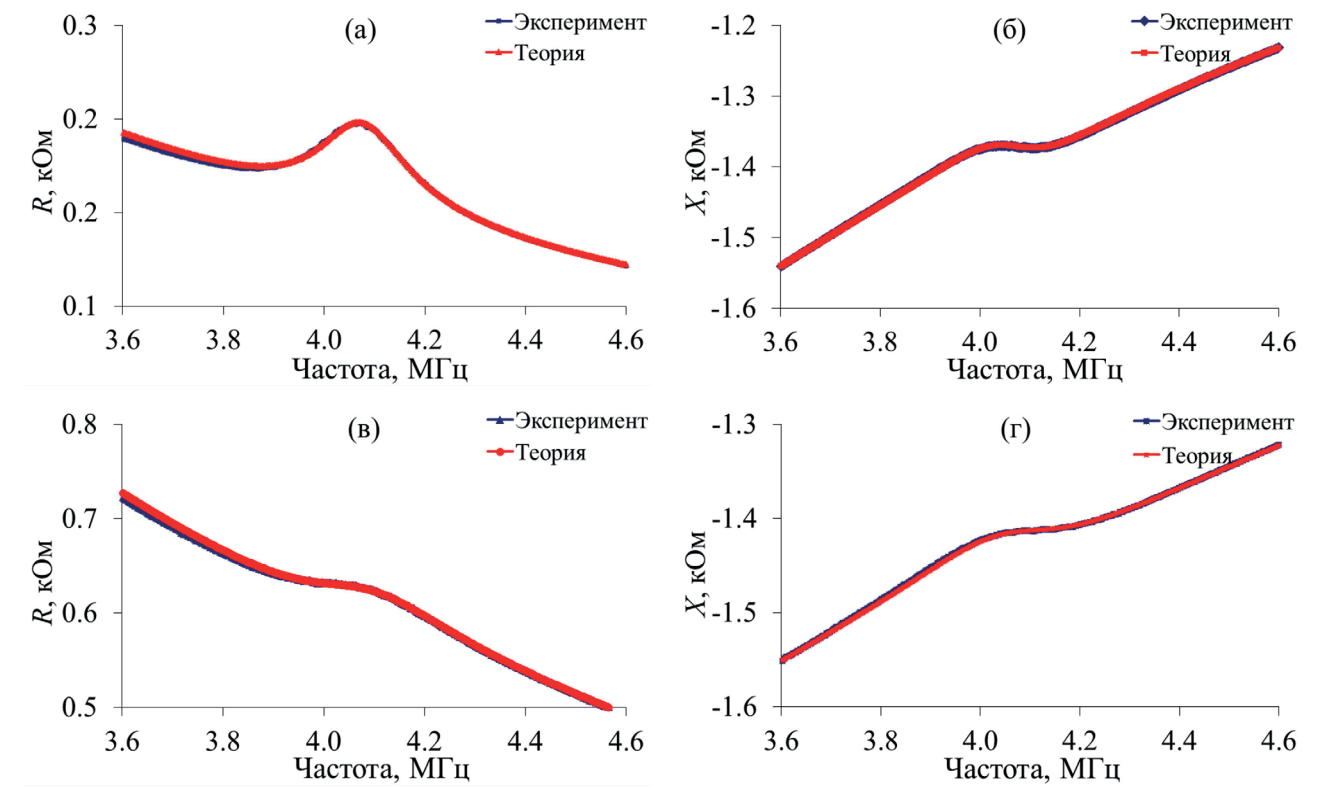


Рис. 7. Частотные зависимости (а, в) – реальной и (б, г) – мнимой частей электрического импеданса резонатора из лангасита, погруженного (а, б) – в воду с проводимостью 27 мкСм/см, (в, г) – в смесь вода-глицерин $\beta=75\%$ с проводимостью 123 мкСм/см (синий цвет – эксперимент, красный цвет – теория).

Таблица 4. Полученные значения материальных констант, скорости продольной акустической волны и добавочного сопротивления для жидкостей на основе воды и глицерина с различной вязкостью и проводимостью.

β , %	ϵ'	ρ' , кг/м ³	σ' , мкСм/см	C_{11}' , 10 ⁹ Па	η_{11}' , Па·с	v_{11}' , м/с (4 МГц)	R_a , МОм
0	80.6	1002	1.4	2	0.007	1413	0.053
			27	2	0.007	1413	0.01275
			55	2.02	0.007	1420	0.00681
			82	2.02	0.006	1420	0.00491
			123	2.02	0.006	1420	0.003192
44	68.7	1100	1.4	3.2	0.1	1705.6	0.11
			27	3.3	0.1	1732	0.01301
			55	3.24	0.1	1716	0.00788
			82	3.22	0.1	1711	0.005364
			123	3.2	0.1	1705.6	0.00381
65	61.5	1167	1.4	3.2	2	1656	0.085
			27	3.26	2	1671.4	0.02004
			55	3.26	2	1671.4	0.01031
			82	3.26	2	1671.4	0.00651
			123	3.26	2	1671.4	0.00421
75	57.1	1191	1.4	3.76	3	1777	0.11
			27	3.85	3	1798	0.02015
			55	3.92	3	1814.3	0.00929
			82	3.92	3	1814.3	0.00604
			123	3.92	3	1814.3	0.00407

Таблица 5. Полученные значения добавочных и измеренных емкостей для исследуемых вязких и проводящих жидкостей.

β , %	ε^l	ρ^l , кг/м ³	σ^l , мкСм/см	C_0^m , пФ	C_0 , пФ	C_0^l , пФ	C_a , пФ	$C_0 + C_0^l + C_a$, пФ	C_0^{lm} , пФ
Свободный резонатор				12.7	11.82	0	0	11.82	
0	80.6	1002	1.4			2.7	13.47	27.99	28.24
			27			2.7	13.41	27.93	28.26
			55	12.7	11.82	2.74	13.44	28	28.27
			82			2.85	13.32	27.99	28.23
			123			2.85	13.35	28.02	28.3
44	68.7	1100	1.4			2.88	10.65	25.35	25.7
			27			2.88	10.63	25.33	25.5
			55	12.7	11.82	2.95	10.6	25.37	25.5
			82			3.02	10.55	25.39	25.55
			123			3.08	10.56	25.46	25.6
65	61.5	1167	1.4			2.43	9.4	23.65	23.7
			27			2.1	9.66	23.58	23.75
			55	12.7	11.82	2.2	9.68	23.7	23.9
			82			2.2	9.65	23.67	23.85
			123			2.45	9.54	23.81	24.05
75	57.1	1191	1.4			2.52	8.78	23.12	23.12
			27			2.5	8.73	23.05	23.12
			55	12.7	11.82	2.59	8.64	23.05	23.18
			82			2.67	8.58	23.07	23.25
			123			2.67	8.65	23.14	23.32

Из табл. 5 можно увидеть, что для каждого образца жидкости сумма рассчитанных значений емкостей резонатора $C_0 + C_0^l + C_a$ в пределах $\pm 1\%$ соответствует измеренному значению емкости C_0^{lm} .

6. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На примере непроводящих жидкостей с различными диэлектрическими свойствами показана возможность определения материальных констант жидкостей и соответствующих им добавочных емкостей и сопротивления в эквивалентной схеме [32] с учетом изменения эффективной площади электродов. Для проведения исследований использовался резонатор с продольным электрическим полем с двумя круглыми электродами на обеих сторонах диска из кристалла лангасита X-среза с диаметром электродов существенно меньше, чем диаметр диска. Установлено, что определение материальных констант жидкостей с учетом эффективной емкости резонатора в процессе фиттинга дает в результате относительное различие справочных C_{11}^{IR} и рассчитанных C_{11}^l значений модуля упругости исследуемых жидкостей до 18%, а справочных ν_{11}^{IR} и рассчитанных ν_{11}^l значений скорости продольной

акустической волны до 10%. Суммарные результирующие значения емкостей резонатора, погруженного в различные жидкости $C_0 + C_0^l + C_a$, где C_0 – собственная емкость свободного резонатора, а C_0^l и C_a – добавочные емкости, практически полностью совпадают с соответствующими измеренными в широком частотном диапазоне значениями C_0^{lm} .

Ранее было сделано предположение о том, что проводимость и диэлектрическая проницаемость жидкости, в которую погружен резонатор, влияют на величину эффективной площади его электродов. В процессе фиттинга авторы ограничились определением эффективной емкости погруженного в жидкость резонатора в первичной цепи его эквивалентной схемы (рис. 4). Было установлено, что добавочная емкость C_0^l существенно выше для таких жидкостей, как вода, этиловый спирт, ацетон и изопропиловый спирт с высокими показателями относительной диэлектрической проницаемости ε^l , чем для жидкостей с низкой ε^l (керосин, вазелиновое масло, уайт-спирит). С ростом диэлектрической проницаемости жидкости ε^l значение краевой добавочной емкости C_a увеличивается (рис. 8).

Отработанная в работе [32] методика была использована для определения значений продольного

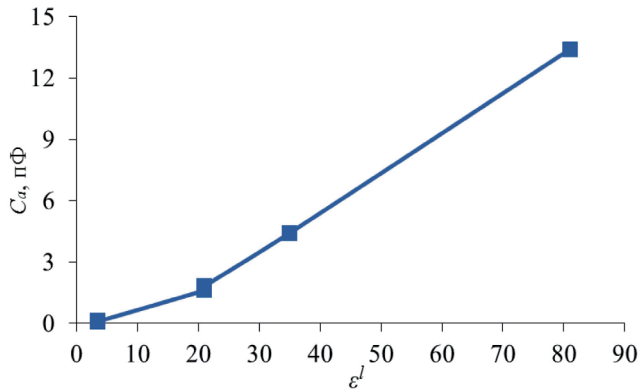


Рис. 8. Зависимость добавочной емкости C_a от экспериментально полученного значения ϵ' для непроводящих жидкостей, представленных в табл. 3.

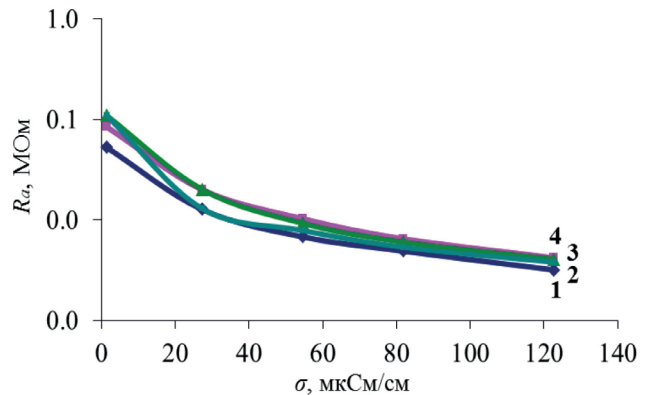


Рис. 10. Зависимости добавочного сопротивления R_a от проводимости жидкостей: 1 — вода, 2 — смесь вода-глицерин $\beta=44\%$, 3 — смесь вода-глицерин $\beta=65\%$, 4 — смесь вода-глицерин $\beta=75\%$.

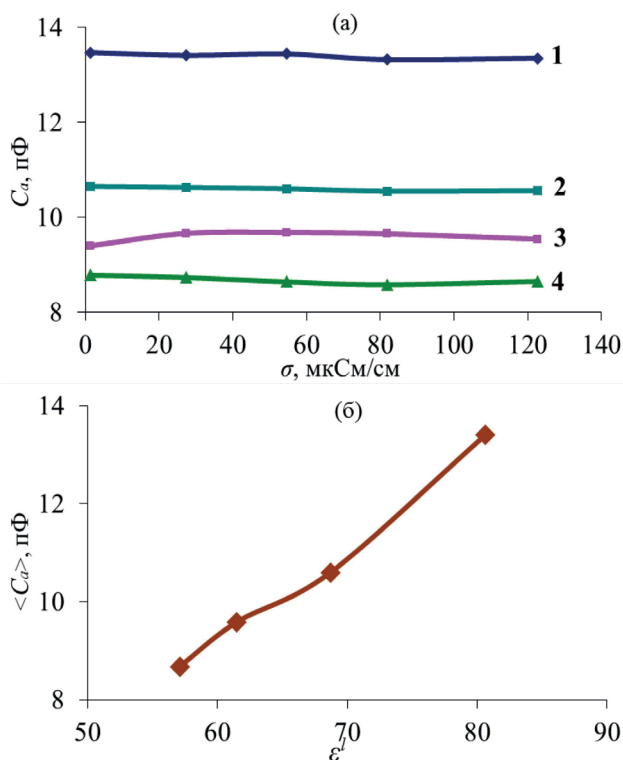


Рис. 9. (а) — Зависимости добавочной емкости C_a от проводимости жидкостей: 1 — вода, 2 — смесь вода-глицерин $\beta=44\%$, 3 — смесь вода-глицерин $\beta=65\%$, 4 — смесь вода-глицерин $\beta=75\%$. (б) — Зависимость арифметически средних по проводимости значений для каждой смеси добавочной емкости $\langle C_a \rangle$ от экспериментально полученного значения ϵ' .

модуля упругости C_{11}^I , коэффициента вязкости η_{11}^I , скорости продольной акустической волны v_{11}^I , а также значений величин добавочных емкостей C_0^I и C_a и добавочного сопротивления R_a для жидкостей с различной вязкостью и проводимостью. В качестве исследуемых жидкостей в работе были

использованы образцы смеси воды и глицерина с объемными концентрациями глицерина в воде 0, 44, 65 и 75% с различными проводимостями. Установлено, что и продольный модуль упругости C_{11}^I и продольный коэффициент вязкости η_{11}^I увеличиваются с ростом концентрации глицерина в воде и в целом слабо изменяются с ростом проводимости для каждой концентрации. Добавочная емкость C_a практически не изменяется с ростом проводимости жидкостей, но при этом уменьшается с ростом объемной концентрации глицерина в воде и, соответственно, с уменьшением ϵ' (рис. 9а). Добавочное сопротивление R_a уменьшается с ростом проводимости жидкостей (рис. 10).

Усредненная по всем значениям проводимости для каждой концентрации глицерина в воде добавочная емкость $\langle C_a \rangle$ увеличивается с ростом экспериментально определенной относительной диэлектрической проницаемости ϵ' (рис. 9б).

Влияние проводимости и диэлектрической проницаемости жидкости, в которую погружен резонатор, на величину добавочной емкости C_0^I , участвующей в возбуждении акустической волны, детально не изучалось в данной работе.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние проводящих и непроводящих жидкостей на характеристики пьезоэлектрического резонатора с продольным электрическим полем, погруженного в жидкость. Представлена дополненная теоретическая модель, основанная на анализе эквивалентной схемы погруженного в жидкость резонатора с продольным электрическим полем, учитывающая возможное изменение площади электродов и, соответственно, собственной емкости резонатора. На примере проводящих и непроводящих жидкостей показана универсальность метода определения их материальных констант, таких

как продольный модуль упругости и продольный коэффициент вязкости, скорость распространения продольной акустической волны, а также добавочных параметров эквивалентной схемы. Результаты проведенных экспериментов показали, что в случае с резонатором с продольным электрическим полем из лангасита, при увеличении проводимости воды и смесей вода–глицерин частоты параллельного и последовательного резонансов практически не изменяются. Максимальные значения реальных частей электрического импеданса и адмиттанса увеличивались с ростом проводимости жидкостей. Установлено, что продольный модуль упругости и продольный коэффициент вязкости увеличиваются с ростом концентрации глицерина в воде и практически не изменяются с ростом проводимости. Проводимость жидкости практически не влияет на краевую добавочную емкость, но при уменьшении относительной диэлектрической проницаемости жидкости, в которую погружен резонатор, ее значение снижается. Добавочное сопротивление уменьшается с ростом проводимости жидкостей для всех концентраций глицерина в воде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант № 23-22-00134)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arlett J.L., Myers E.B., Roukes M.L. Comparative advantages of mechanical biosensors // *Nat. Nanotechnol.* 2011. V. 6. P. 203–215.
2. Barlow A.J., Lamb J., Matheson A.J., Padmini P.R.K.L. and Richter J. Viscoelastic Relaxation of Supercooled Liquids // *I. Proc. R. Soc. Lond. A.* 1967. V. 298. P. 467–480. doi: 10.1098/rspa.1967.0115
3. Lin Q., Cai F., Li F., Zhao D., Xia X., Zhou W., Meng L., Zheng H. The compact acoustic liquid sensor based on the circumferential modes of a cylindrical shell // *Sens. Actuators A.* 2020. V. 304. 111843.
4. Kondoh J., Shiokawa S. SH-SAW taste sensor based on acoustoelectric interaction // *Proc. IEEE Int. Ultrasonics Symposium* 31 October–3 November 1993. USA. MD. Baltimore. P. 421–424.
5. Kondoh J., Shiokawa S. New application of shear horizontal surface acoustic wave sensors to identifying fruit juices // *Jpn. J. Appl. Phys.* 1994. V. 33. P. 3095–3099.
6. Kondoh J., Muramatsu T., Nakanishi T., Shiokawa S. Development of surface acoustic wave liquid sensing system and application for Japanese tea measurements // *Proc. IEEE Int. Ultrasonics Symposium* 7–10 October 2001. USA. GA. Atlanta. P. 497–501.
7. Tada K., Nozawa T., Kondoh J. Real time monitoring of methanol concentration using a shear horizontal surface acoustic wave sensor for direct methanol fuel cell without reference liquid // *Jap. J. Appl. Phys.* 2016. V. 37. 07JD15.
8. Kondoh J., Nakayama K., Kuznetsova I. Study of frequency dependence of shear horizontal surface acoustic wave sensor for engine oil measurement // *Sens. Actuators A Phys.* 2021. V. 325. 112503.
9. Zaitsev B.D., Joshi S.G., Kuznetsova I.E., Borodina I.A. Acoustic waves in piezoelectric plates bordered with viscous and conductive liquids // *Ultrasonics.* 2001. V. 39. P. 45–50.
10. Wu J., Zhu Z. Sensitivity of Lamb wave sensors in liquid sensing // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2002. V. 43. P. 71–72.
11. Anisimkin I.V., Anisimkin V.I. Attenuation of acoustic normal modes in piezoelectric plates loaded by viscous liquids // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2006. V. 53. P. 1487–1492.
12. Anisimkin V.I. Sensing properties of the Anisimkin Jr. acoustic modes in uncoated ST-quartz plates // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2013. V. 60. P. 2204–2207.
13. Voronova N.V., Anisimkin V.I. Three-Parameter Liquid Sensor Based on Surface and Plate Acoustic Waves // *Proc. Joint Conf. of the European Frequency and Time Forum and IEEE Int. Frequency Control Symposium* 9–13 July 2017. France. Besancon. P. 343–344.
14. Caliendo C., Hamidullah M. Guided acoustic wave sensors for liquid environments // *J. Phys. D Appl. Phys.* 2019. V. 52. 153001.
15. Anisimkin V.I., Voronova N.V. New modification of the acoustic Lamb waves and its application for liquid and ice sensing // *Ultrasonics.* 2022. V. 116. 106496.
16. McCann D.F., McCann J.M., Parks J.M., Frankel D.J., Pereira da Cunha M., Vetelino J.F. A lateral-field-excited LiTaO₃ high frequency bulk acoustic wave sensor // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2006. V. 56. P. 779–787.
17. Wark M., Kalanyan B., Ellis L., Fick J., Connel L., Neivandt D., Vetelino J. A lateral field excited acoustic wave sensor for the detection of saxitoxin in water // *Proc. IEEE Int. Ultrasonics Symposium* 28–31 October 2007. USA. NY. New York. P. 1217–1220.
18. Vetelino J.F. A lateral field excited acoustic wave sensor platform // *Proc. IEEE Int. Ultrasonics Symposium* 11–14 October 2010. USA. GA. San Diego. P. 2269–2272.
19. French L.A., FitzGerald, M., Vetelino J.F. An Equivalent Circuit Model for a Liquid Loaded Lateral-Field Excited Acoustic Wave Sensor // *Proc. IEEE Int. Ultrasonics Symposium* 19 October 2011. USA. FL. Orlando. P. 1194–1199.
20. Ma T., Wang J., Du J., Yuan L., Qian Z., Zhang Z., Zhang C. Lateral-field-excited bulk acoustic wave sensors on langasite working on different operation modes // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2013. V. 60. P. 864–867.
21. Zaitsev B.D., Shikhabudinov A.M., Teplykh, A.A., Kuznetsova I.E. Liquid sensor based on a piezoelectric lateral electric field-excited resonator // *Ultrasonics.* 2015. V. 63. P. 179–183.

22. *Borodina I.A., Zaitsev B.D., Teplykh A.A.* Influence of the conductivity of a liquid contacting with a lateral electric field excited resonator based on PZT ceramics on its characteristics // *Ultrasonics*. 2020. V. 102. 106059.
23. *Zhao Z., Wang B., Qian Z., Kuznetsova I., Ma T., Yong Y.K.* Design Considerations for Frequency Shifts in a Laterally Finite FBAR Sensor in Contact With the Newtonian Liquid // *IEEE Trans Ultrason, Ferroelectr. and Freq. Cont.* 2020. V. 67. P. 2402–2412.
24. *Wang M., Shi H., Ma T., Qian Z., Kuznetsova I., Yuan L., Wang J., Du J., Zhang C.* High-frequency vibration analysis of LiTaO₃ piezoelectric plates excited by lateral electric fields produced by surface electrodes under viscous liquid loadings for sensing // *Smart Mater. Struct.* 2020. V. 29. 045004.
25. *Zaitsev B.D., Borodina I.A., Teplykh A.A.* Compact liquid analyzer based on a resonator with a lateral excitation electric field // *Ultrasonics*. 2022. V. 126. 106814.
26. *Kanazava K.K., Gordon J.G. II.* The oscillation frequency of a quartz resonator in contact with a liquid // *Anal. Chim. Acta*. 1985. V. 175. P. 99–105.
27. *Kanazava K.K., Gordon J.G. II.* Frequency of a Quartz Microbalance in Contact with Liquid // *Anal. Chem.* 1985. V. 57. P. 1770–1771.
28. *Nomura T., Watanabe M., West T.S.* Behavior of piezoelectric quartz crystals in solutions with the applications to the determination of iodide // *Anal. Chim. Acta*. 1985. V. 175. P. 107–116.
29. *Josse F., Shana Z.A., Radtke D.E., Haworth D.T.* Analysis of piezoelectric bulk acoustic wave resonators as detectors in viscous conductive liquids // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 1990. V. 37. P. 359–368.
30. *Balantine D.S., White R.M., Martin S.J., Ricco A.J., Frye G.C., Zellers E.T., Wohltjen H.* *Acoustic Wave Sensors: Theory, Design and Physico-Chemical Applications*. USA. NY. New-York: John Wiley & Sons, 1997.
31. *Semyonov A., Zaitsev B., Teplykh A., Borodina I.* Study of the Acoustic Characteristics of Suspensions Based on Glycerol and Synthetic Diamond Microparticles Using a Resonator with a Longitudinal Electric Field // *Acoust. Phys.* 2023. V. 69. № 6. P. 788–797.
32. *Semyonov A., Zaitsev B., Teplykh A., Borodina I.* The effect of the glycerol – Based suspension on the characteristics of resonators excited by a longitudinal electric field // *Sensors*. 2023. V. 23. P. 608.
33. *Semyonov A.P., Zaitsev B.D., Teplykh A.A., Borodina I.A.* Determination of Electrical and Mechanical Properties of Liquids Using a Resonator with a Longitudinal Electric Field // *Sensors*. 2024. V. 24. P. 793. <https://doi.org/10.3390/s24030793>.
34. *Шамсутдинова Е.С., Анисимкин В.И., Фионов А.С., Смирнов А.В., Колесов В.В., Кузнецова И.Е.* Совершенствование методов исследования электрофизических и вязкостных свойств жидкостей // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 1. С. 56–62.
35. *Зайцев Б.Д., Бородина И.А., Теплых А.А., Семёнов А.П.* Определение скорости и затухания акустической волны в жидкостях с различным акустическим импедансом с помощью акустического интерферометра // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 4. С. 438–445.
36. *Кольцова И.С., Хомутова А.С.* Акустоэлектронный метод измерения скорости ультразвуковых волн в жидкостях // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 3. С. 317–321.
37. *Семёнов А.П., Зайцев Б.Д., Теплых А.А., Бородина И.А.* Исследование акустических характеристик суспензий на основе глицерина и микрочастиц синтетического алмаза с помощью резонатора с продольным электрическим полем // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 6. С. 702–712.
38. *Минаков А.В., Пряжников М.И., Дамдинов Б.Б., Немцев И.В.* Исследование объемной вязкости наносуспензий методом акустической спектроскопии // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 2. С. 182–189.
39. *Бородина И.А., Зайцев Б.Д., Алсовэиди А.К.М., Караваяева О.А., Гулий О.И.* Биологический датчик на основе акустической щелевой моды с использованием микробных клеток для определения ампициллина // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 6. С. 583–588.
40. *Royer D., Dieulesaint E.* *Elastic Waves in Solids II. Generation, Acousto-Optic Interaction, Applications*. USA. NY. New York. Germany. Berlin/Heidelberg: Springer, 1999. ISBN 1439–2674
41. *Kuznetsova I.E., Zaitsev B.D., Shikhabudinov A.M.* Elastic and viscosity properties of Nanocomposite Films Based on Low-Density Polyethylene // *Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 2010. V. 57. № 9. 2099.
42. *Kuznetsova I., Zaitsev B., Krasnopolskaya L., Teplykh A., Semyonov A., Avtonomova A., Ziangirova M., Smirnov A., Kolesov V.* Influence of humidity on the acoustic properties of mushroom mycelium films used as sensitive layers for acoustic humidity sensors // *Sensors*. 2020. V. 20. № 9. 2711.
43. *Гананольский В.В., Касаткин Б.А., Легуша Ф.Ф., Прудько Н.И., Пугачев С.И.* *Керамические преобразователи*. Справочник. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.
44. *Chilla E., Flannery C.M., Frohlich H.-J. and Straube U.* Elastic properties of langasite-type crystals determined by bulk and surface acoustic waves // *J. Appl. Phys.* 2001. V. 90. № 12. 6084.
45. *Григорьев И.С., Мейлихов Е.З.* *Физические величины*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

Application of a Piezoelectric Resonator to Determine the Parameters of a Contacting Liquid

A. P. Semyonov^a, B. D. Zaitsev^{a,*}, A. A. Teplykh^a, I. A. Borodina^a

Federal State Budgetary Institution of Science Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Saratov Branch, Saratov, Russia, Saratov, 410019

**e-mail: zai-boris@yandex.ru*

The effect of conducting and non-conducting liquids on the characteristics of a piezoelectric resonator with a longitudinal electric field immersed in a liquid was investigated. The resonator, operating on a longitudinal acoustic mode with a resonant frequency of about 4 MHz, was a disk made of X-cut langasite with round electrodes on both sides. The resonator was fixed at the base of a container filled with the liquid under study. Then, the real and imaginary parts of its electrical impedance were measured as a function of frequency using a vector network analyzer. A modernized electromechanical circuit of such a resonator was constructed, taking into account the effect of conductivity and permittivity of the liquid on the change in the effective area of the electrodes. The possibility of determining the elastic modulus, viscosity coefficient of the studied liquid and the values of additional elements of the equivalent circuit by fitting the calculated frequency dependences of the complex electrical impedance of a resonator immersed in liquid to the measured dependences is demonstrated.

Keywords: piezoelectric resonator excited by a longitudinal electric field, Mason equivalent circuit, electrical impedance and admittance, conductivity, permittivity, viscosity coefficient and elastic modulus of a liquid

УДК 532.5 534.14 534.61

ОСОБЕННОСТИ ЛАЗЕРОИНДУЦИРОВАННОЙ ТЕРМОКАВИТАЦИИ ВОДЫ

© 2024 г. В. И. Юсупов^{a,*}

^aНациональный исследовательский центр “Курчатовский институт”,
пл. Академика Курчатова 1, Москва, 123182 Россия

*e-mail: iouss@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.04.2024 г.

После доработки 08.07.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Исследованы особенности термокавитации воды вблизи торца волокна при ее нагреве непрерывным лазерным излучением с длиной волны 1.94 мкм. Динамические процессы изучались оптическими и акустическими методами. Установлено, что импульсы давления на начальном участке термокавитации, связанные с взрывным вскипанием воды, являются значительно меньшими по сравнению с импульсами давления при схлопывании образующихся парогазовых пузырьков. Спектр генерируемого акустического сигнала простирается свыше 10 МГц, при этом спектральные распределения наиболее низкочастотных и наиболее высокочастотных флуктуаций описываются законом $1/f$. Показано, что пиковые мощности импульсов давления в отдельных актах термокавитации связаны с частотами их повторяемости зависимостью $\sim 1/f^{1.4}$. Вейвлет анализ показал, что при термокавитации наблюдается чередование “случайных” и “каскадных” процессов. В специальном акустическом эксперименте было установлено, что на начальном этапе термокавитации рост давления происходит примерно в течение 250 нс. Относительно длительный рост давления объясняется тем, что взрывное вскипание происходит во многих точках объема перегретой жидкости, а цепная реакция последовательного появления критических зародышей связана с распространением ударных волн.

Ключевые слова: непрерывное лазерное излучение, акустические импульсы, оптическое волокно, взрывное кипение, вейвлет анализ

DOI: 10.31857/S0320791924060035, **EDN:** JUACHJ

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия возрос интерес к изучению термокавитации и гидродинамических процессов вблизи торца лазерного волокна, вызывающих затопленные струи (см. [1–4] и ссылки там). Помимо чисто теоретического аспекта [5], такой интерес связан с актуальными проблемами эффективного охлаждения компонентов микро- и наноэлектроники [6], селективной очистки поверхности [7], лазерной биопечати [4], лазерной инженерии микробиологических систем [8, 9] и медицины: от трансмембранного транспорта в клетках [3, 4], лазерной перфорации, абляции и расслоения биологических тканей [10–12], разрушения камней в почках [13], лазерного лечения заболеваний [14], оптической ультразвуковой визуализации [15] до объяснения необычных акустических эффектов, наблюдаемых во время лазерного лечения заболеваний вен [16].

Под термокавитацией понимается физический процесс образования растущих и схлопывающихся пузырьков в жидкости в результате ее перегрева (нагрева выше температуры кипения при данном давлении) и перехода в метастабильное состояние. Спустя некоторое время после этого происходит переход системы к двухфазному состоянию и в объеме жидкости появляются сжатые до высокого давления паровые микропузырьки. Величина этого времени, а также процент перешедшего в пар вещества зависят от степени перегрева и близости температуры перегретой жидкости к спинодали.

На протяжении последнего времени различными научными группами [1–3, 17–21] проведены детальные экспериментальные и модельные исследования термокавитации, вызванной поглощением непрерывного или импульсного лазерного излучения в объеме жидкости. Важные результаты получены с использованием методов оптоакустики [22, 23].

Так, с помощью оптоакустических методов и скоростной съемки достоверно установлено, что на первом этапе значительный нагрев воды выше температуры кипения ($100\text{ }^{\circ}\text{C}$ при давлении 1 атм) вызывает ее взрывное вскипание [24] с образованием быстрорастущего газового пузыря. Пройдя положение равновесия и достигнув максимального размера, такой пузырь схлопывается с генерацией акустических и ударных волн [19, 21, 25].

Несмотря на многочисленные экспериментальные и теоретические исследования, термокавитация оставляет много нерешенных вопросов. В частности, до сих пор нет ответов на следующие важные вопросы: 1) Как связаны пиковые мощности импульсов давления в отдельных актах термокавитации с частотами их повторяемости? 2) Существует ли связь последующих актов термокавитации с предыдущими? 3) В течение какого времени повышается давление при однократном акте термокавитации? 4) Во взрывном вскипании вблизи торца волокна участвует один зародыш новой фазы или множество? Целью данного исследования является поиск ответов на эти вопросы с использованием методов оптоакустики и скоростной съемки.

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

2.1. Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1а. В экспериментах использовался лазер ЛС-1,9 (“ИРЭ-Полюс”, Россия) с длиной волны $\lambda = 1.94\text{ }\mu\text{м}$, мощностью до 3 Вт с оптоволоком с диаметром светопроводящей кварцевой сердцевины 400 $\mu\text{м}$. Излучение с $\lambda = 1.94\text{ }\mu\text{м}$ очень хорошо поглощается в воде с коэффициентом поглощения $\alpha = 130\text{ см}^{-1}$ [26]. Лазерное

волокно вводилось горизонтально в прозрачную кювету с горизонтальными размерами $20\times 16\text{ см}$ и высотой 12 см, заполненную дистиллированной водой при комнатной температуре $22\text{ }^{\circ}\text{C}$. Для контроля мощности лазерного излучения использовался измеритель мощности FieldMaster с измерительной головкой LM-10HTD (“Coherent”, США).

Динамические процессы, происходящие в жидкости, изучались с помощью скоростной съемки (рис. 1в) и методов оптоакустики. Для этого использовалась скоростная камера Fastcam SA-3 (Photron, Япония) с фронтальной подсветкой (на просвет) со скоростью до 10^5 кадров в секунду. Акустические сигналы в диапазоне частот 0.1 Гц–500 кГц регистрировались широкополосным гидрофоном 8103 (Brüel & Kjær, Дания) с чувствительностью в диапазоне 0.1 Гц–180 кГц -211 дБ отн. 1 В/мкПа и игольчатым гидрофоном диаметром 1 мм (Precision Acoustics, Великобритания) с предусилителем с полосой пропускания 10 кГц–50 МГц (чувствительность -241 дБ относительно 1 В/мкПа). Широкополосный гидрофон устанавливался на расстоянии 25 мм от торца волокна, а игольчатый гидрофон на расстоянии 20 мм. В специальном эксперименте игольчатый гидрофон располагался соосно с оптическим волокном на расстоянии 1.5 мм от его торца.

Для регистрации динамических процессов, кроме того, использовался гелий-неоновый лазер, излучение которого с $\lambda = 632.8\text{ нм}$ фокусировалось длиннофокусной линзой на расстоянии 100 мкм от торца волокна (рис. 1б). Пройдя через воду, это излучение попадало на быстродействующий фотодиод (рис. 1а). Сигналы с гидрофонов и фотодиода записывались на четырехканальный запоминающий осциллограф GDS 72304 (GW Instek, Тайвань) с полосой пропускания 300 МГц.

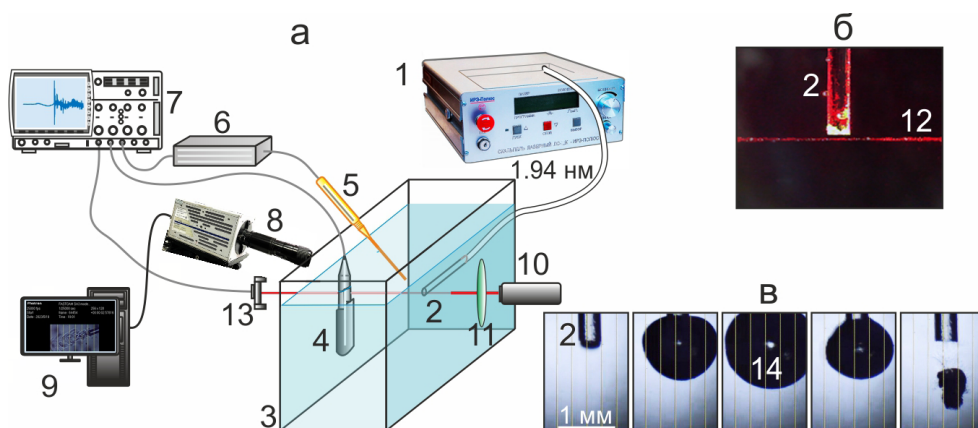


Рис. 1. (а) – Конфигурация установки для исследования термокавитации при непрерывном лазерном воздействии. (б) – Фотография торца волокна с пробным лучом. (в) – Кадры скоростной съемки с образованием и схлопыванием пузырька у торца волокна в результате термокавитации. 1 – лазер, 2 – оптоволоконно, 3 – кювета с водой, 4 – широкополосный гидрофон, 5 – игольчатый гидрофон, 6 – предусилитель, 7 – осциллограф, 8 – скоростная камера, 9 – ПК, 10 – гелий-неоновый лазер, 11 – фокусирующая линза, 12 – пробный луч, 13 – фотодиод, 14 – пузырек.

2.2. Анализ акустических сигналов

Мощность P_{ac} и энергия E_{ac} сигнала акустической эмиссии оценивались в предположении сферичности с помощью выражений:

$$P_{ac} = \frac{4\pi r^2}{\rho c}, E_{ac} = \frac{4\pi r^2}{\rho c} \int p^2 dt, \quad (1)$$

где r — расстояние от точечного источника до гидрофона, ρ — плотность воды, c — скорость звука, p — акустическое давление, t — время. При представлении акустических сигналов давление пересчитывалось для расстояния 1 мм от источника.

Спектральная плотность мощности (СПМ) акустических сигналов вычислялась с помощью метода усовершенствованных периодограмм Уэлча. В отличие от быстрого преобразования Фурье, периодограммы Уэлча позволяют получать лучшую оценку сигнала с нестационарными компонентами [27].

Для анализа акустических сигналов использовалось также непрерывное одномерное вейвлет-преобразование, позволяющее выявлять различные структурные и временные закономерности исследуемых данных [28]. Преобразование состоит в разложении исходного временного ряда по базису, сконструированному посредством масштабных изменений и переносов вдоль оси времени t базового вейвлета $\psi(t)$:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi_{ab}^*(t) dt, \quad \Psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2)$$

где a — масштабный коэффициент, b — параметр сдвига, $*$ — комплексное сопряжение. В качестве базового вейвлета использовался известный вейвлет МНАТ (“мексиканская шляпа” или “сомбреро”) — вторая производная функции Гаусса:

$$\psi = (t^2 - 1) \exp(-t^2/2). \quad (3)$$

Результаты вейвлет-преобразований акустических сигналов представлялись в виде вейвлето-

грамм с частотой по оси ординат и временем по оси абсцисс. По сути, вейвлетограммы напоминают известные спектрограммы, показывающие изменение спектра сигнала со временем. Однако они дают гораздо больше информации благодаря тому, что временное разрешение вейвлетограмм увеличивается пропорционально частоте [28].

Вейвлетограммы позволяют не только, подобно спектрограммам, проследить за эволюцией компонент сигнала с разной частотой во времени, но и выделять участки исходного сигнала с так называемыми “каскадными” и “случайными” процессами [28]. “Каскадные” процессы, в которых имеется определенная связь между различными масштабами, на вейвлетограмме имеют “древовидную” структуру: толстый “ствол” разделяется на более тонкие “ветви”. Каждый этап “каскадного” процесса, каждое дробление масштаба на вейвлетограмме отмечается участком разделения “ветвей”. Для случайного же процесса характерна так называемая “травовидная” структура в виде отдельных возмущений без характерного ветвления.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ДИСКУССИЯ

3.1. Сигнал с фотодиода

Лазерный нагрев воды вблизи торца волокна приводил к ее перегреву и термокавитации с периодическим появлением и схлопыванием парогазовых пузырьков. Следует отметить, что газ в пузырьках появляется из-за выделения ранее растворенного в воде газа при ее нагреве [29]. На рис. 2 показана динамика мощности пробного луча гелий-неонового лазера при начальном и последующих актах термокавитации. В моменты появления пузырька до его схлопывания он почти полностью экранирует пробный луч, в результате чего сигнал с фотодиода падает практически до нуля.

Период между первыми шестью актами термокавитации составляет 14 ± 4 мс. После шестого акта сигнал на некоторое время полностью не восстанавливается, при этом наблюдается

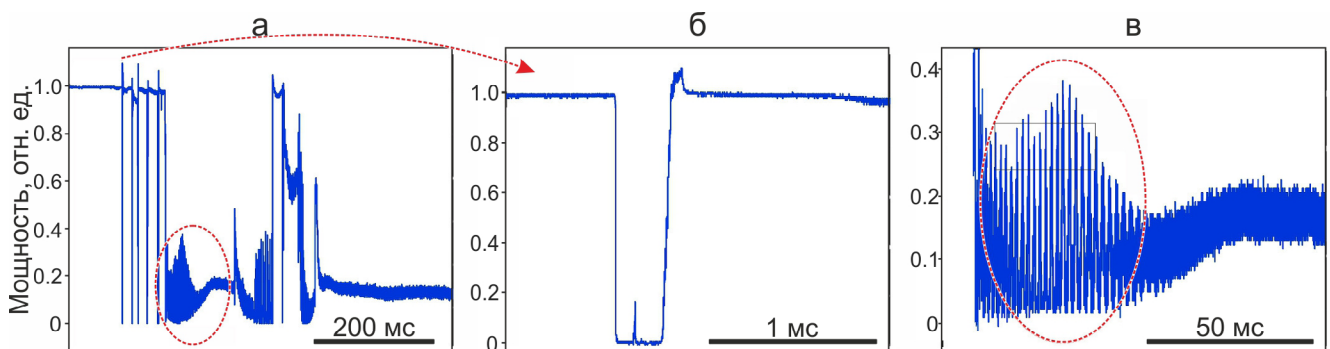


Рис. 2. Динамика мощности пробного луча гелий-неонового лазера при актах термокавитации с $P = 3$ Вт. (а) — Серия актов термокавитации. (б) — Фрагмент сигнала при регистрации первого акта. (в) — Подробная запись участка с флуктуирующим сигналом, обведенного на рис. 2а красным пунктирным эллипсом.

флуктуирующий сигнал с периодом ~ 2 мс (эллипсы на рис. 2а и 2в). Возникновение такого цуга вероятно связано с появлением в объеме жидкости после нескольких актов термокавитации обширных областей, заполненных микропузырьками. Спустя ~ 250 мс после первого акта термокавитации сигнал на короткое время восстанавливается.

Подробная форма сигнала с фотодиода при первом акте термокавитации показана на рис. 2б. При появлении пузырька у торца волокна сигнал быстро падает до нуля, спустя 330 ± 8 мкс возвращается к исходному уровню и далее на некоторое время превышает этот уровень. Можно предположить, что это превышение связано с фокусировкой пробного луча областью с более плотной жидкостью, образующейся при схлопывании пузырька. Наблюдаемый спустя ~ 125 мкс после появления пузырька небольшой локальный максимум, по-видимому, связан с частичным прохождением без отклонения пробного пучка через пузырек при достижении им максимального размера.

3.2. Акустические сигналы с широкополосного гидрофона 8103

На рис. 3а показан акустический сигнал, зарегистрированный гидрофоном 8103 при лазерном нагреве воды непрерывным лазерным излучением. Как видно на детальном фрагменте этого сигнала (рис. 3б), вблизи торца волокна происходит квазипериодическая генерация относительно коротких импульсов с амплитудой давления до 8 атм. Отметим, что структура зарегистрированных гидрофоном коротких импульсов образуется в результате наложения генерирующегося у торца импульса давления и его многочисленных переотражений от боковых стенок и дна кюветы, а также свободной поверхности воды. Из геометрических соображений можно оценить, что импульс, отраженный от поверхности воды, приходит на гидрофон с задержкой ~ 50 мкс, а от дна — с задержкой ~ 70 мкс.

В спектре сигнала отчетливо выделяется мощный узкий пик на частоте ~ 4.5 кГц (рис. 3в). Значительная доля энергии акустического сигнала приходится на диапазоны 1–100 Гц и 2–20 кГц. При этом спектральная плотность мощности наиболее низкочастотных флуктуаций хорошо описывается законом $1/f$ (фликкер-шум), а локальные минимумы СПМ в этом диапазоне ложатся на прямую $1/f^2$.

Динамика мощности акустического сигнала при лазерном нагреве воды показана на рис. 4а. Видно, что сигнал сильно флуктуирует, при этом максимальная пиковая мощность ~ 260 Вт достигается в первом акте термокавитации (красная стрелка на рис. 4а). В данном примере средний период между отдельными актами термокавитации составил 68 мс.

Из графика распределения пиковых мощностей по частотам их повторяемости (рис. 4б) следует, что чем выше пиковая мощность импульсов давления P_{peak} , тем реже они возникают: тренд хорошо описывается зависимостью $P_{\text{peak}} \sim 1/f^{1.4}$. При этом гистограмму распределения актов термокавитации по пиковым мощностям (вставка на рис. 4б) условно можно разбить на два несоприкасающихся участка, в которых сосредоточены самые мощные и все остальные импульсы.

На вейвлетограмме (рис. 4в) наряду со “случайными” (структуры без характерного ветвления) выделяются “каскадные” процессы (“древовидные” структуры, имеющие толстый “ствол”, разделяющийся на “ветви”). Так, судя по вейвлетограмме, самый мощный первый импульс (красная стрелка) относится к “случайному” процессу. В то же время, процесс, связанный с актом термокавитации, отмеченный голубой стрелкой, является “каскадным”. Основание “ствола” располагается в области 0.1 Гц, а первое деление на “ветви” происходит на частоте ~ 0.3 Гц.

Можно предположить, что процесс при первом акте термокавитации идентифицируется на вейвлетограмме (рис. 4в) как “случайный” из-за того, что

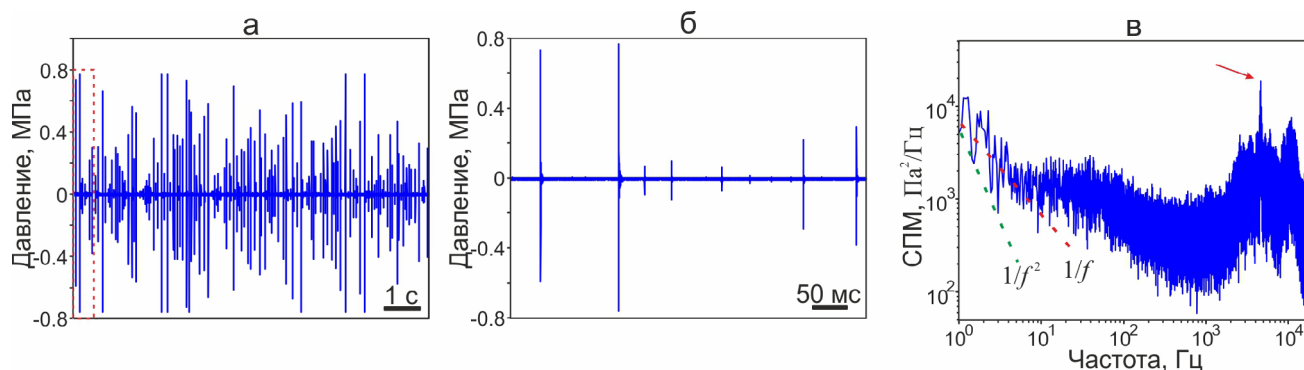


Рис. 3. (а) — Акустический сигнал, зарегистрированный с помощью гидрофона 8103 при лазерном нагреве воды с $P = 1.3$ Вт, (б) — его детальный фрагмент, отмеченный на рис. 3а красным пунктирным прямоугольником, и (в) — спектральная плотность мощности $1/f$ и $1/f^2$.

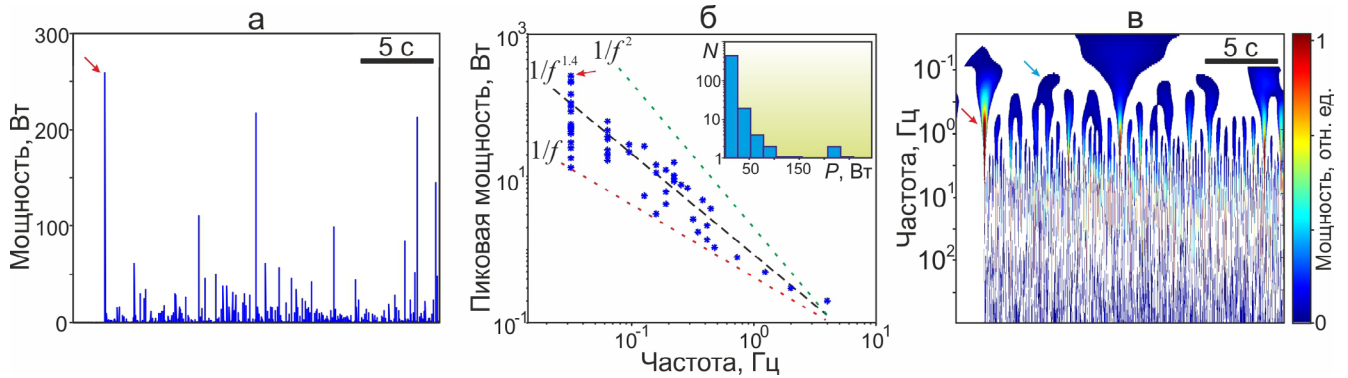


Рис. 4. (а) — Мощность акустического сигнала, зарегистрированного с помощью широкополосного гидрофона 8103 при лазерном нагреве воды с $P = 1.3$ Вт, (б) — распределение пиковых мощностей при актах термокавитации по частотам их повторяемости и (в) — вейвлетограмма мощности. Красной стрелкой отмечен первый акт термокавитации. Голубой стрелкой на рис. 4в отмечена “древовидная” структура. Пунктирными прямыми показаны зависимости $1/f$ и $1/f^2$ и тренд $1/f^{1.4}$. На вставке рис. 4б показана гистограмма распределения актов термокавитации по пиковым мощностям.

он происходит в наименее гидродинамически возмущенной среде. Уже после первого акта взрывного кипения в объеме жидкости развиваются сильные гидродинамические процессы и значительно увеличивается вероятность появления критических зародышей. Возникшие значительные флуктуации показателя преломления приводят даже к частичному перекрытию пробного луча лазера (рис. 2в). Потоки жидкости существенно увеличивают отток тепла из области перед торцом лазерного волокна, что значительно уменьшает частоту актов взрывного кипения. С другой стороны, увеличение крупных зародышей газовой фазы приводит к большой изменчивости амплитуд регистрируемых

акустических импульсов (см. рис. 3а, 3б) из-за того, что отдельные акты термокавитации происходят при разном перегреве воды. Такая определенная связь между отдельными актами может объяснять наблюдаемое на вейвлетограмме появление “каскадных” процессов.

Сопоставим детальную форму акустического сигнала для одного акта термокавитации с кадрами высокоскоростной съемки и сигналом с фотодиода. Как видно из рис. 5а, вблизи торца волокна образуется пузырек, который, достигнув максимального размера с радиусом ~ 0.9 мм, схлопывается. После коллапса происходит отскок пузырька в сторону свободной жидкости, что связано с отсутствием симметрии жестких границ (наличием лазерного волокна с одной стороны) [3, 4, 17, 18, 26, 27]. После такого отскока жидкость вблизи торца замещается на новую, поэтому последующий акт термокавитации проходит практически в тех же условиях.

На рис. 5в видно, что при появлении пузырька он практически мгновенно блокирует пробный луч и сигнал с фотодиода снижается до нуля. Непосредственно перед схлопыванием пузырька, сигнал с фотодиода восстанавливается более плавно. Сравнение полученных результатов с акустическим сигналом (рис. 5б) показывает, что мощный импульс давления генерируется в момент схлопывания пузырька. Отметим, что перед этим мощным импульсом отчетливо регистрируется акустический “предвестник” в виде отрезка синусоиды, в котором первоначально давление возрастает.

Из представленного выше сопоставления (рис. 5) следует, что начало акустического “предвестника” соответствует взрывному вскипанию воды при термокавитации. Интересующая нас динамика этого процесса может быть исследована с помощью значительно более высокочастотного игольчатого гидрофона.

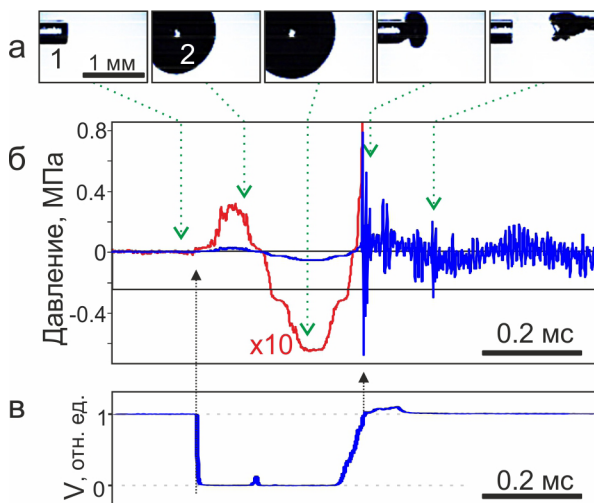


Рис. 5. Сравнение (а) — кадров скоростной съемки с (б) — акустическим сигналом, зарегистрированным с помощью широкополосного гидрофона 8103, и (в) — сигналом с фотодиода во время одного акта термокавитации при лазерном нагреве воды с $P = 3$ Вт. Красная кривая на рис. 5б — часть акустического сигнала, увеличенная по амплитуде в 10 раз.

3.3. Акустические сигналы с игольчатого гидрофона

На рис. 6а представлен пример регистрации акустического сигнала с помощью игольчатого гидрофона. Здесь выделяется первый наиболее мощный импульс с амплитудой ~ 0.25 МПа (красная стрелка) и следующий за ним затухающий пучок высокочастотных колебаний. Более подробно структура этого начального импульса (рис. 6б) показывает, что его полная ширина на полувысоте составляет ~ 0.12 мкс. Однако, следует отметить, что при регистрации импульса давления игольчатым гидрофоном (рис. 6б) при его расположении на удалении 20 мм от торца лазерного волокна искомого акустического “предвестника” не видно.

Энергия акустического сигнала от одного акта термокавитации (рис. 6в) сосредоточена в областях 1–2 кГц и 10–200 кГц. В диапазоне 200–450 кГц СПМ спадает по закону $\sim 1/f^2$, а в диапазоне 0.8–30 МГц $\sim 1/f$. В высокочастотной области отчетливо выделяются два пика ~ 5 МГц и ~ 10 МГц (отмечены стрелками).

Для более детального изучения начального участка термокавитации был проведен специальный эксперимент, в котором акустический сигнал регистрировался игольчатым гидрофоном, расположенным соосно оптическому волокну на расстоянии всего 1.5 мм от торца волокна (рис. 7). В данном случае мощный импульс давления, связанный с схлопыванием пузырька, зашкаливал (рис. 7а), но столь близкое расположение гидрофона к источнику звука позволило детально описать форму акустического сигнала, вызванного взрывным кипением воды в начальный момент термокавитации. Более подробные фрагменты этого сигнала (рис. 7б, 7в) показывают, что на начальном этапе длительностью ~ 250 нс происходит быстрый рост давления со скоростью $\sim 2 \times 10^6$ атм/с.

3.4. Интерпретация полученных акустических измерений

Сравним полученные результаты акустических измерений с известными данными из научной литературы. Как известно, в перегретой жидкости,

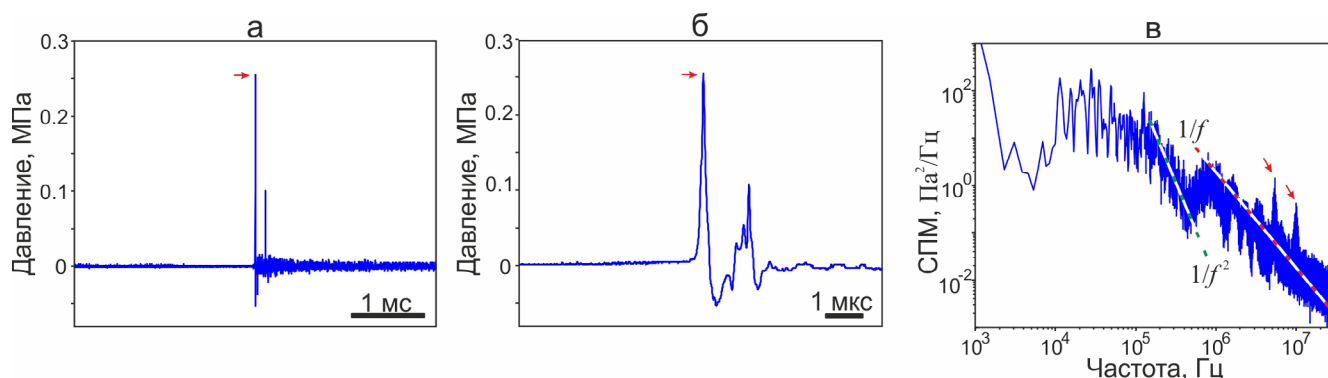


Рис. 6. (а) – Акустический сигнал, зарегистрированный с помощью игольчатого гидрофона при лазерном нагреве воды с $P = 3$ Вт, (б) – детальный фрагмент с наиболее мощным импульсом, отмеченным на рис. 6а красной стрелкой, и (в) – спектральная плотность мощности. Пунктирными прямыми показаны зависимости $1/f$ и $1/f^2$. Красными стрелками на спектре отмечены максимальные пики в области 5.3 и 10 МГц.

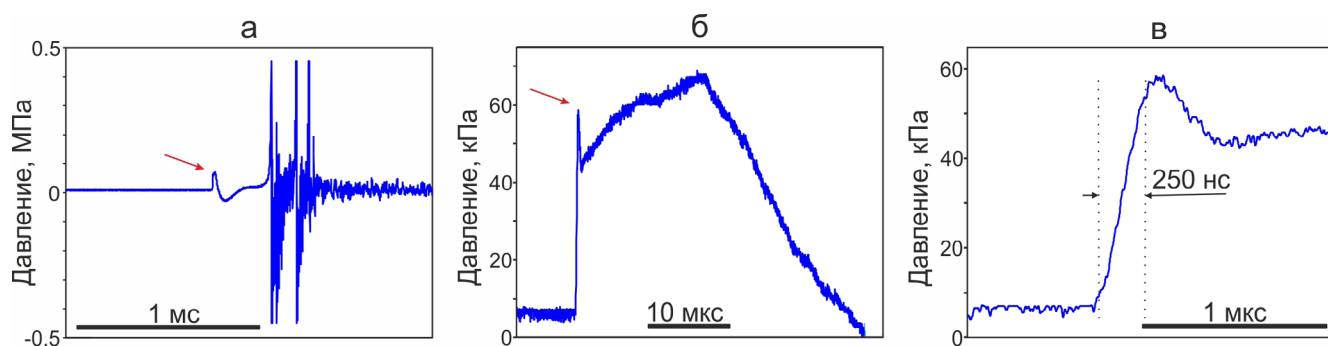


Рис. 7. Акустический сигнал, зарегистрированный с помощью игольчатого гидрофона, расположенного соосно на расстоянии 1.5 мм от торца лазерного волокна. (а) – Акустический сигнал, (б) – детальный фрагмент начального участка, отмеченного красной стрелкой на рис. 6а, (в) – подробный вид начального импульса, отмеченного красной стрелкой на рис. 6б. $P = 3$ Вт.

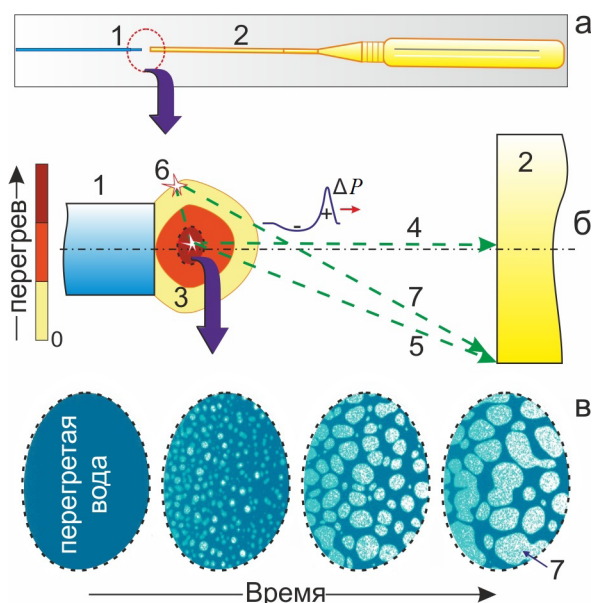


Рис. 8. (а) — Схема специального акустического эксперимента, (б) — возможные траектории распространения ударных и акустических волн и (в) — схематичное представление начальных процессов при термокавитации. 1 — лазерное волокно, 2 — игольчатый гидрофон, 3 — область с перегретой водой, 4, 5, 7 — траектории, 6 — область со взрывным вскипанием, инициированным ударной волной, 7 — микропузырьки, заполненные сжатым паром и микрокаплями воды, образовавшимися при распаде метастабильной жидкости. На рис. 8б условно показана ударная волна со скачком давления ΔP .

находящейся в метастабильном состоянии, взрывное кипение начинается при появлении в ней критических зародышей с радиусом $R_c = 2\sigma/\Delta P$, где σ — поверхностное натяжение, ΔP — разность давлений жидкости и пара. С увеличением перегрева $\Delta T = T - T_s$, где T_s — температура насыщения, R_c быстро уменьшается за счет увеличения давления пара насыщения и уменьшения σ [30]. Так, если при $T = 150^\circ\text{C}$ радиус критического зародыша $R_c = 260$ нм, при $T = 200^\circ\text{C}$ он уменьшается до $R_c = 54$ нм, то при $T = 300^\circ\text{C}$ он составляет всего $R_c = 3.3$ нм.

При включении лазерного источника, излучение, выходящее из волокна, начинает нагревать воду вблизи его торца. Результаты моделирования развивающихся тепловых полей и гидродинамических потоков в аналогичных условиях, выполненного в программе COMSOL Muliphysics, подробно рассмотрены в [31]. Так, было показано, что в этом случае максимальные температуры достигаются в объеме жидкости, а положение максимума T со временем постепенно перемещается от торца и вверх. При этом, значение критической температуры с момента включения лазерного источника достигается всего за 11.5 мс. Скорость образования зародышей быстро возрастает по мере

нагрева и приближения T к спиновальной температуре $T_{sp} = T_c(0.9 + 0.1P/P_c) \approx 585$ К, где $T_c = 647$ К, $P_c = 22.1$ МПа — критические значения для воды, P — атмосферное давление. При появлении критического зародыша происходит взрывное вскипание, при котором перегретая вода, окружающая ядро, частично переходит в сжатый пар. В результате образуется быстро растущий парогазовый пузырек (рис. 5а), и во всех направлениях распространяется импульс давления, который через некоторое время регистрируется гидрофонами (рис. 5б, 7).

Во многих публикациях приводятся данные о временных характеристиках процесса взрывного кипения. При нагреве наночастицы золота в воде непрерывным лазерным излучением парогазовый пузырек образуется за ~ 15 нс [32]. При нагреве воды лазерным излучением с $\lambda = 2.94$ мкм, которое очень хорошо поглощается в воде, характерное время развития процесса взрывного вскипания составляет от единиц [33] до 100 нс [34]. В то же время специальный акустический эксперимент показал, что в процессе начальной фазы термокавитации рост давления происходит примерно за 250 нс (рис. 7в).

Можно предположить, что столь длительный фронт нарастающего давления связан с последовательным образованием вблизи торца лазерного волокна большого количества критических зародышей. Пусть в начальный момент в центре объема сильно перегретой жидкости вблизи торца лазерного волокна образуется критический зародыш (рис. 8). В результате взрывного вскипания воды из этой точки во всех направлениях начнет распространяться волна импульсного давления. Фронт давления максимально быстро достигнет торца игольчатого гидрофона по траектории 4, а наиболее медленно — по траектории 5. В этом случае, учитывая скорость звука в воде ~ 1500 м/с и диаметр торца гидрофона, нетрудно оценить, что задержка между этими сигналами составит ~ 50 нс. Это означает, что при формировании бесконечно короткого импульса давления в точке 1 за счет геометрического фактора длительность акустического сигнала, регистрируемого гидрофоном, составит ~ 50 нс. Заметим, что это уширение не объясняет наш экспериментальный результат: рост давления в течение ~ 250 нс.

Теперь учтем, что первоначальный импульс давления может инициировать взрывное вскипание в других местах перегретой жидкости, как показано в [25, 35, 36]. Таким образом, распространяющиеся ударные волны будут вызывать цепную реакцию появления критических зародышей в объеме перегретой воды. Таким образом, за короткое время возле торца волокна произойдет множество взрывных вскипаний.

Пусть импульс давления, распространяющийся из начальной точки, инициирует взрывное вскипание в точке 6 на краю области с перегретой водой.

Тогда самый длинный путь импульса давления до торца гидрофона будет проходить по траектории 7. Зная геометрические размеры торца волокна, легко оценить, что этот импульс придет на гидрофон с задержкой ~ 240 нс по сравнению с самым первым импульсом (траектория 4). Таким образом, даже в случае генерации очень коротких импульсов при взрывном кипении воды в области отдельных зародышей, фронт сигнала, регистрируемого гидрофоном, растянется на ~ 240 нс. Именно это мы и наблюдаем в эксперименте.

В других работах по изучению взрывного вскипания были получены более короткие времена развития этого процесса. Мы полагаем, что это связано с гораздо меньшим объемом перегретой жидкости, когда взрывное вскипание инициировалось нагретой наночастицей [32], хорошо сфокусированным лазерным импульсом [35] или короткими лазерными импульсами с $\lambda = 2.94$ мкм, которые очень сильно поглощаются в воде [33, 34].

4. ВЫВОДЫ

Статья посвящена изучению особенностей термокавитации воды вблизи торца волокна при ее нагреве непрерывным лазерным излучением с $\lambda = 1.94$ мкм. Динамические процессы изучались с помощью высокоскоростной съемки, с использованием пробного луча лазера с $\lambda = 632.8$ нм, а также методов оптоакустики с использованием широкополосного и игольчатого гидрофонов. В результате удалось получить ответы на поставленные ранее вопросы. Установлено, что импульсы давления на начальном этапе термокавитации, связанные со взрывным вскипанием воды, гораздо меньше, чем при схлопывании образующихся при этом парогазовых пузырьков. Спектр акустического сигнала простирается свыше 10 МГц. Пиковые мощности импульсов давления в отдельных актах термокавитации связаны с частотами их повторяемости зависимостью $\sim 1/f^{1.4}$. Вейвлет анализ показал, что при термокавитации наряду со “случайными” процессами регистрируются “каскадные”, что может объясняться наличием определенных связей между отдельными актами. Показано, что на начальном этапе термокавитации рост давления происходит в течение около 250 нс. Такая относительно большая длительность объясняется тем, что в одном акте взрывного кипения участвует не один, а множество зародышей новой фазы в объеме перегретой жидкости. Полученные результаты могут иметь важное значение для дальнейшего изучения и понимания термокавитационных процессов в жидкостях.

Работа поддержана РНФ (No. 20-14-00286, <https://rscf.ru/en/project/20-14-00286/>) в части изучения динамических процессов, возможных при лазерной биопечати, и проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ “Курчатовский институт” в части изучения термокавитации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chernov A.A., Pil'nik A.A., Levin A.A., Safarov A.S., Adamova T.P., Elistratov D.S. Laser-induced boiling of subcooled liquid: influence of the radiation power on the vapor bubble nucleation and growth // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2022. V. 184. 122298. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122298>
2. Koch M., Rosselló J.M., Lechner C., Lauterborn W., Mettin R. Theory-assisted optical ray tracing to extract cavitation-bubble shapes from experiment // *Exp. Fluids.* 2021. V. 62. P. 1–19. <https://doi.org/10.1007/s00348-020-03075-6>
3. Chudnovskii V.M., Guzev M.A., Yusupov V.I., Fursenko R.V., Okajima J. Study of methods for controlling direction and velocity of liquid jets formed during subcooled boiling // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2021. V. 173. 121250. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121250>
4. Chudnovskii V.M., Yusupov V.I. Submerged jet generation by laser heating of a liquid surface // *Technical Physics Letters.* 2020. V. 46. P. 1024–1031. <https://doi.org/10.1134/S1063785020100211>
5. Sullivan P., Dockar D., Borg M.K., Enright R., Pillai R. Inertio-thermal growth of vapour bubbles // *J. Fluid Mechanics.* 2022. V. 948. A55. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.734>
6. Fan S., Duan F. A review of two-phase submerged boiling in thermal management of electronic cooling // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2020. V. 150. 119324. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119324>
7. Song W.D., Hong M.H., Lukyanchuk B., Chong T.C. Laser-induced cavitation bubbles for cleaning of solid surfaces // *J. Appl. Phys.* 2004. V. 95. P. 2952–2958. <https://doi.org/10.1063/1.1650531>
8. Cheptsov V.S., Tsypina S.I., Minaev N.V., Yusupov V.I., Chichkov B.N. New microorganism isolation techniques with emphasis on laser printing // *Int. J. Bioprinting.* 2019. V. 5. N. 1. <https://doi.org/10.18063/ijb.v5i1.165>
9. Grosfeld E.V., Zhigarkov V.S., Alexandrov A.I., Minaev N.V., Yusupov V.I. Theoretical and experimental assay of shock experienced by yeast cells during laser bioprinting // *Int. J. Mol. Sci.* 2022. V. 23. N. 17. 9823. <https://doi.org/10.3390/ijms23179823>
10. Vogel A., Venugopalan V. Mechanisms of Pulsed Laser Ablation of Biological Tissues // *Chem. Rev.* 2003. V. 103. P. 577–644. <https://doi.org/10.1021/cr010379n>
11. Robles V., Gutierrez-Herrera E., Devia-Cruz L.F., Banks D., Camacho-Lopez S., Aguilar G. Soft material perforation via double-bubble laser-induced cavitation microjets // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. N. 4. 042005. <https://doi.org/10.1063/5.0.007164>
12. Chan K.F., Joshua Pfefer T., Teichman J.M., Welch A.J. A Perspective on Laser Lithotripsy: The Fragmentation Processes // *J. Endourol.* 2001. V. 15. N. 3. P. 257–273.
13. Lekarev V. Yu., Dymov A.M., Vinarov A.Z., Sorokin N.I., Minaev V.P., Minaev N.V., Tsypina S.I.,

- Yusupov V.I.* Mechanism of lithotripsy by superpulse thulium fiber laser and its clinical efficiency // *Appl. Sci.* 2020. V. 10. N. 21. 7480
<https://doi.org/10.3390/app10217480>
14. *Chudnovskii V.M., Yusupov V.I., Dydykin A.V., Nev-ozhai V.I., Kisilev A.Y., Zhukov S.A., Bagratashvili V.N.* Laser-induced boiling of biological liquids in medical technologies // *Quantum Electron.* 2017. V. 47. N. 4. P. 361–370.
<https://doi.org/10.1070/QEL16298>
 15. *Liu H., Wu Y., Hou C., Chen Z., Shen B., Luo Z., Liang H., Ma J., Guan B.O.* Ultrasound pulse generation through continuous-wave laser excited thermo-cavitation for all-optical ultrasound imaging // *APL Photonics.* 2023. V. 8. 046102.
<https://doi.org/10.1063/5.0142684>
 16. *Yusupov V., Chudnovskii V.* The Origin of Loud Claps during Endovenous Laser Treatments // *J. Acoust. Soc. Am.* 2023. V. 153. P. 1525–1533.
<https://doi.org/10.1121/10.0017436>
 17. *Chudnovskii V.M., Levin A.A., Yusupov V.I., Guzev M.A., Chernov A.A.* The formation of a cumulative jet during the collapse of a vapor bubble in a sub-cooled liquid formed as a result of laser heating // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2020. V. 150. 119286.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119286>
 18. *Levin A.A., Safarov A.S., Chudnovskii V.M., Chernov A.A.* Modeling of non-stationary temperature field in the neighborhood of the optical fiber end under laser pulse heating // *Interfacial Phenom. Heat Transf.* 2020. V. 8, N. 1.
<https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020032806>
 19. *Padilla-Martinez J.P., Berrospe-Rodriguez C., Aguilar G., Ramirez-San-Juan J.C., Ramos-Garcia R.* Optic cavitation with CW lasers: A review // *Phys. Fluids.* 2014. V. 26. N. 12. 122007.
<https://doi.org/10.1063/1.4904718>
 20. *Yusupov V.I., Chudnovskii V.M., Bagratashvili V.N.* Laser-induced hydrodynamics in water and biotissues nearby optical fiber tip / in: Schulz H.E. (Ed.), *Hydrodynamics – Advanced Topics*, In Tech. 2011. P. 95–118.
<https://doi.org/10.5772/28517>
 21. *Yusupov V.I., Konovalov A.N., Ul'yanov V.A., Bagratashvili V.N.* Generation of acoustic waves by cw laser radiation at the tip of an optical fiber in water // *Acoust. Phys.* 2016. V. 62. P. 537–544.
<https://doi.org/10.1134/S1063771016050183>
 22. *Воробьев Р.И., Сергеев И.В., Карабутов А.А., Миронова Е.А., Саватеева Е.В., Ахатов И.Ш.* Применение оптоакустического метода для оценки влияния пустот на трещиностойкость конструкционных углепластиков // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 2. С. 148–153.
<https://doi.org/10.31857/S0320791920020161>
 23. *Подымова Н.Б., Карабутов А.А.* Преобразование термооптически возбуждаемых широкополосных импульсов продольных акустических волн в импульсы сдвиговых волн в изотропной твердой пластине в жидкости // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 5. С. 482–492.
<https://doi.org/10.31857/S0320791921040110>
 24. *Rastopov S.F., Sukhodol'sky A.T.* Cluster nucleation in the process of CW laser induced thermocavitation // *Phys. Lett. A.* 1990. V. 149. N. 4. P. 229–232.
[https://doi.org/10.1016/0375-9601\(90\)90334-K](https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90334-K)
 25. *Lauterborn W., Vogel A.* Shock wave emission by laser generated bubbles / *Bubble dynamics and shock waves.* Springer: Berlin/Heidelberg, Germany. 2013. P. 67–103.
 26. *Deng R., He Y., Qin Y., Chen Q., Chen L.* Measuring pure water absorption coefficient in the near-infrared spectrum (900–2500 nm) // *J. Remote Sensing.* 2012. V. 16. N. 1. P. 192–206.
 27. *Welch P.D.* The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short modified periodograms // *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics.* 1967. V. 15. P. 70–73.
<https://doi.org/10.1109/TAU.1967.1161901>
 28. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук.* 1996. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0166.199611a.1145>
 29. *Chudnovskii V.M., Maior A.Y., Yusupov V.I., Zhukov S.A.* Laser-induced boiling of biological fluids. *High Temperature.* 2019. V. 57. N. 4. P. 531–538.
<https://doi.org/10.1134/S0018151X19040035>
 30. *Vargaftik N.B., Volkov B.N., Voljak L.D.* International tables of the surface tension of water // *J. Phys. Chem. Ref. Data.* 1983. V. 12. P. 817–820.
<https://doi.org/10.1063/1.555688>
 31. *Yusupov V.I., Konovalov A.N.* Features of heat/mass transfer and explosive water boiling at the laser fiber tip // *Int. J. Therm. Sci.* 2024. V. 203. 109131.
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2024.109131>
 32. *Hou L., Yorulmaz M., Verhart N.R., Orrit M.* Explosive formation and dynamics of vapor nanobubbles around a continuously heated gold nanosphere // *New J. Phys.* 2015. V. 17. P. 013050.
<https://doi.org/10.1088/1367-2630/17/1/013050>
 33. *Samokhin A.A., Vovchenko V.I., Il'ichev N.N., Shapkin P.V.* Explosive boiling in water exposed to q-switched erbium laser pulses // *Laser Phys.* 2009. V. 19. P. 1187–1191.
<https://doi.org/10.1134/S1054660X09050508>
 34. *Takamizawa A., Kajimoto S., Hobley J., Hatanaka K., Ohta K., Fukumura H.* Explosive boiling of water after pulsed IR laser heating // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2003. V. 5. P. 888–895.
<https://doi.org/10.1039/B210609D>
 35. *Vogel A., Busch S., Parltitz U.* Shock wave emission and cavitation bubble generation by picosecond and nanosecond optical breakdown in water // *J. Acoust. Soc. Am.* 1996. V. 100. P. 148–165.
<https://doi.org/10.1121/1.415878>
 36. *Frost D.L.* Initiation of explosive boiling of a droplet with a shock wave // *Exp. Fluids.* 1989. V. 8. P. 121–128.
<https://doi.org/10.1007/BF00195785>

Features of laser-induced thermocavitation of water

V. I. Yusupov^{a,*}

^aNational Research Center “Kurchatov Institute”,
Moscow, pl. Akademika Kurchatova, 1, 123182

*e-mail: iouss@yandex.ru

The article examines the features of thermocavitation of water near the fiber tip when it is heated by continuous laser radiation with a wavelength of 1.94 μm . Dynamic processes were studied by optical and acoustic methods. It has been established that pressure pulses in the initial section of thermocavitation, associated with the explosive boiling of water, are significantly smaller compared to pressure pulses during the collapse of the vapor-gas bubbles. The spectrum of the generated acoustic signal extends over 10 MHz, while the spectral distributions of the lowest frequency and highest frequency fluctuations are described by the $1/f$ law. It has been shown that the peak powers of pressure pulses in individual acts of thermocavitation are related to their repetition rates by the dependence $\sim 1/f^{1.4}$. Wavelet analysis showed that during thermocavitation an alternation of “random” and “cascade” processes is observed. In a special acoustic experiment, it was found that at the initial stage of thermocavitation, the pressure rise occurs within approximately 250 ns. The relatively long increase in pressure is explained by the fact that explosive boiling occurs at many points in the volume of superheated liquid, and the chain reaction of the sequential appearance of critical nuclei is associated with the propagation of shock waves.

Keywords: continuous laser radiation, acoustic pulses, optical fiber, explosive boiling, wavelet analysis

АКУСТИКА ОКЕАНА.
ГИДРОАКУСТИКА

УДК 534.6.08

ОЦЕНКА АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ИСТОЧНИКА ЗВУКА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ В БАСЕЙНЕ
С ОТРАЖАЮЩИМИ ГРАНИЦАМИ

© 2024 г. В. К. Бахтин^{a,b}, А. Л. Вировлянский^{a,*}, М. С. Дерябин^{a,b}, А. Ю. Казарова^a

^aИнститут прикладной физики Российской Академии наук,
ул. Ульянова 46, 603950 Россия

^bНижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина 23, Нижний Новгород, 603022 Россия

*e-mail: viro@ipfran.ru

Поступила в редакцию 28.03.2024 г.
После доработки 24.07.2024 г.
Принята к публикации 29.10.2024 г.

Приведены результаты лабораторного эксперимента по тестированию метода реконструкции звукового поля, возбуждаемого калибруемым источником в свободном пространстве, по измерениям поля, возбужденного тем же источником в бассейне с отражающими границами. Процедура реконструкции базируется на использовании эталонного акустического монополя и сопоставлении полей, излученных им из специально выбранных точек бассейна, с полем калибруемого источника. Выполнена оценка частотной зависимости интенсивности поля калибруемого источника, усредненной по сфере большого радиуса.

Ключевые слова: излучатель звука, калибровка, бассейн, метод эквивалентных источников

DOI: 10.31857/S0320791924060041, **EDN:** JTWZRD

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционные методы калибровки источников звука в бассейне с отражающими границами базируются на выделении прямых сигналов, т.е. сигналов, приходящих в точки приема без отражений от границ. Для подавления отражений обычно используются поглощающие покрытия стенок бассейна и/или разделение прямых и отраженных сигналов по временам прихода [1, 2]. Оба метода применимы лишь на достаточно высоких частотах. На низких частотах вклады отраженных сигналов подавляются с помощью специальной обработки [3–6]. В работах [7, 8] предложен альтернативный подход, позволяющий осуществить калибровку источника, т.е. реконструировать его диаграмму направленности в свободном пространстве по измерениям в бассейне, без выделения прямых сигналов. Подход основан на предположении о том, что поле калибруемого источника (КИ) и в бассейне, и в свободном пространстве можно представить в виде суперпозиции полей некоторого количества одних и тех же воображаемых акустических монополей, которые называют эквивалентными источниками (ЭИ) [9–14].

Реконструкция поля КИ в свободном пространстве по измерениям в бассейне (она кратко описана в следующем разделе) выполняется с использованием вспомогательного источника, рассматриваемого как эталонный акустический монополь (ЭМ) с известной амплитудно-частотной характеристикой. Процедура реконструкции включает калибровку бассейна, в ходе которой ЭМ поочередно помещается в точки расположения ЭИ и из каждой точки излучает один и тот же сигнал. Волны, излученные ЭМ из каждой точки, регистрируются стационарно установленными приемными гидрофонами. Теми же гидрофонами регистрируется поле КИ, излучившего тот же сигнал. В процессе обработки данных измерений амплитуды ЭИ подбираются таким образом, чтобы суперпозиция возбуждаемых ими полей наилучшим образом аппроксимировала поле КИ в бассейне. После этого поле КИ в свободном пространстве вычисляется аналитически с использованием известной функции Грина свободного пространства и найденных амплитуд ЭИ.

В статье представлены результаты тестирования данного метода в лабораторном эксперименте.

В качестве КИ использован излучатель монопольного типа, интенсивность которого в свободном пространстве слабо зависит от направления распространения. По данным измерений в бассейне восстанавливалась частотная зависимость интенсивности КИ, усредненной по всем направлениям. Результат сопоставлен с оценками амплитудно-частотной характеристики КИ, полученными другими методами.

2. ТЕОРИЯ

Рассматриваемый метод калибровки источника звука базируется на представлении поля u , возбуждаемого им в свободном пространстве на заданной частоте f , в виде суперпозиции полей N ЭИ – акустических монополей, расположенных в точках \mathbf{r}_n , $n = 1, \dots, N$. При этом

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^N G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) A_n, \quad (1)$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор точки наблюдения,

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) = \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{r}_n|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_n|} \quad (2)$$

– поле ЭМ, $k = 2\pi f / c$ – волновое число, c – скорость звука, A_n – подлежащие определению неизвестные амплитуды.

Как отмечено во Введении, наше ключевое предположение заключается в том, что поле \tilde{u} , возбуждаемое калибруемым источником в бассейне с отражающими границами, можно представить в виде суперпозиции тех же ЭИ с теми же амплитудами A_n . Это означает, что

$$\tilde{u}(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^N \tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) A_n, \quad (3)$$

где $\tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n)$ – поле, возбуждаемое в бассейне ЭМ, помещенным в точку \mathbf{r}_n . Функции $\tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n)$, описывающие многократные переотражения волн от границ бассейна, нам неизвестны.

Поле в бассейне регистрируется M приемниками, расположенными в точках \mathbf{R}_m , $m = 1, \dots, M$. Значения комплексных амплитуд \tilde{u} , зарегистрированные этими приемниками, образуют вектор $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}(\mathbf{R}_1), \dots, \tilde{u}(\mathbf{R}_M)]^T$, где символ T означает операцию транспонирования. Согласно (3), связь этого вектора с вектором неизвестных амплитуд $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_N]^T$ выражается соотношением

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{A}, \quad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{G}}$ – матрица размера $M \times N$ с элементами

$$\tilde{G}_{mn} = \tilde{G}(\mathbf{R}_m, \mathbf{r}_n). \quad (5)$$

Эти матричные элементы измеряются в процессе описанной во Введении процедуры калибровки бассейна [7, 8]: ЭМ поочередно помещается во все точки \mathbf{r}_n и поле, возбуждаемое им из каждой точки, регистрируется всеми M приемниками. Матричный элемент \tilde{G}_{mn} – это комплексная амплитуда поля в точке приема \mathbf{R}_m при установке ЭМ в точке \mathbf{r}_n .

Таким образом, измерения в бассейне дают вектор $\tilde{\mathbf{u}}$ и матрицу $\tilde{\mathbf{G}}$. После этого выражение (4) рассматривается как система из M линейных алгебраических уравнений относительно N неизвестных элементов вектора \mathbf{A} . Для решения таких систем имеется ряд известных методов [15, 16]. Мы применяем метод, базирующийся на использовании сингулярного разложения матрицы $\tilde{\mathbf{G}}$ [17]

$$\tilde{\mathbf{G}} = \sum_{q=1}^Q \lambda_q \xi_q \eta_q^H,$$

где λ_q – сингулярные числа ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_Q$), а ξ_q и η_q – сингулярные векторы $\tilde{\mathbf{G}}$, символ H означает эрмитово сопряжение. Ограничиваясь учетом первых $Q_1 \leq Q$ сингулярных чисел, превышающих некоторый заданный порог, и отвечающих им сингулярных векторов, находим оценку вектора \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \sum_{q=1}^{Q_1} \frac{1}{\lambda_q} (\xi_q^H \tilde{\mathbf{u}}) \eta_q. \quad (6)$$

Подстановка найденных таким образом амплитуд ЭИ в (1) дает искомую оценку поля калибруемого источника в свободном пространстве.

В следующем разделе описан пример применения данного метода для калибровки источника звука монопольного типа. Пренебрегая слабой зависимостью амплитуды этого источника от направления на точку приема, мы полагаем, что его поле в свободном пространстве приближенно описывается функцией $u(\mathbf{R}) = b / R$, где b – постоянная величина. Своей целью мы ставим оценку значения $|b|$ по данным измерений в бассейне. Выражение для $|b|$ через реконструированные амплитуды ЭИ A_n найдем, приравняв величину $|b|^2$ к интенсивности поля КИ в свободном пространстве, усредненной по сфере S большого радиуса R :

$$|b|^2 = \frac{R^2}{4\pi} \int_S |u|^2 d\Omega, \quad (7)$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла. Выбирая радиус сферы $R \gg l^2 / \lambda$, где l – характерный размер области, занятой ЭИ, а λ – длина волны, воспользуемся приближением $|\mathbf{R} - \mathbf{r}_n| \simeq R - \mathbf{q}\mathbf{r}_n$, где $\mathbf{q} = \mathbf{R} / R$ и перепишем (1) в виде

$$u(\mathbf{R}) = \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{n=1}^N A_n e^{-ik\mathbf{q}\mathbf{r}_n}.$$

Подставляя это выражение в (7), находим

$$|b|^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^N A_{n_1} A_{n_2}^* \int d\mathbf{r} e^{-ik\mathbf{q}(\mathbf{r}_{n_1}-\mathbf{r}_{n_2})}. \quad (8)$$

Отметим, что поле, возбуждаемое реальным эталонным источником, отличается от (2) некоторым постоянным множителем a . Данное обстоятельство легко учесть, заменяя в приведенных выше формулах G на aG и \tilde{G} на $a\tilde{G}$. При этом элементы вектора \mathbf{A} не зависят от a и результатом реконструкции станет

$$\frac{|u(\mathbf{R})|}{|a|} = \frac{|b|}{|a|R}.$$

С учетом этого замечания постоянную $|b|$ левой части (8) следует заменить на

$$w_{\text{cs}} = \frac{|b|}{|a|}. \quad (9)$$

Для каждого интеграла в правой части (8) введем свою сферическую систему координат (r, θ, φ) с полярным углом θ , отсчитываемым от направления, заданного вектором $\mathbf{r}_{n_1} - \mathbf{r}_{n_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} e^{-ik\mathbf{q}(\mathbf{r}_{n_1}-\mathbf{r}_{n_2})} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty r^2 dr e^{-ik|\mathbf{r}_{n_1}-\mathbf{r}_{n_2}|\cos\theta} = \\ &= 4\pi \frac{\sin(k|\mathbf{r}_{n_1}-\mathbf{r}_{n_2}|)}{k|\mathbf{r}_{n_1}-\mathbf{r}_{n_2}|} \end{aligned}$$

и

$$w_{\text{cs}}^2 = \sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^N A_{n_1} A_{n_2}^* \frac{\sin(k|\mathbf{r}_{n_1}-\mathbf{r}_{n_2}|)}{k|\mathbf{r}_{n_1}-\mathbf{r}_{n_2}|}. \quad (10)$$

3. ЭКСПЕРИМЕНТ

В лабораторном эксперименте, проведенном для тестирования обсуждаемого метода, измерения проводились в бассейне, представляющем собой заполненный водой куб со стороной 1 м. Точки \mathbf{r}_n , в которые поочередно помещался ЭМ, играющий роль ЭИ, образовывали куб размером $3 \times 3 \times 3$ см, показанный в центре рис. 1. Были проведены две серии измерений с кубами, в которых расстояния между соседними точками (шаг кубической решетки) составляли 2 и 3 см. Таким образом, в каждой серии были измерены поля $N = 27$ ЭИ.

Приемные гидрофоны располагались в 32 точках \mathbf{R}_m , удаленных от куба на расстояния около 30 см. Пять из этих гидрофонов оказались неисправными и калибровка выполнялась с использованием $M = 27$ приемников. Схема размещения ЭИ и приемников приведена на рис. 1.

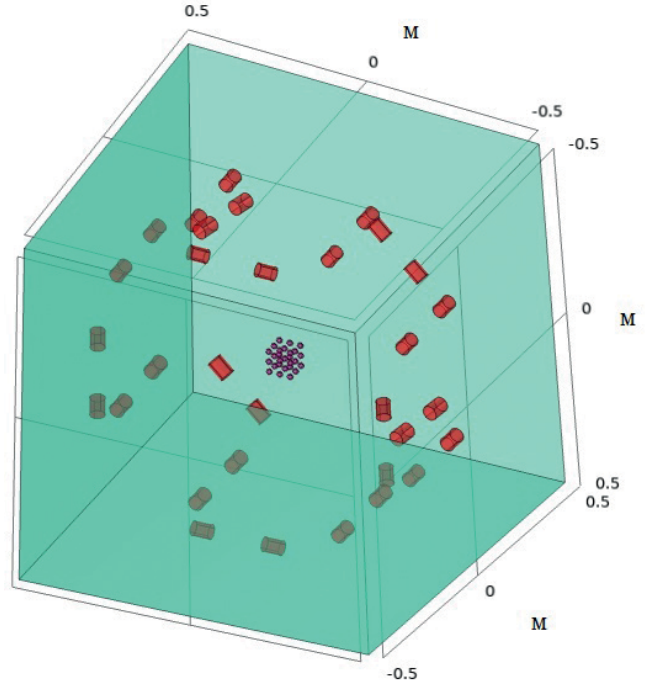


Рис. 1. Позиции ЭИ (точки в центре) и приемных гидрофонов (небольшие цилиндры).

В качестве ЭМ использовался миниатюрный эталонный обратимый гидрофон В&К 8103. В режиме излучения он не имеет резонансов и других особенностей в амплитудно-частотной характеристике в используемом в работе диапазоне частот. Для позиционирования ЭМ использовалась автоматизированная система, обеспечивающая точность перемещения по каждой из трех координат не хуже 0.1 мм. В качестве КИ использовался излучатель простейшей конструкции на основе кольца из пьезокерамики. Размеры кольца: внешний диаметр 50 мм, внутренний диаметр 46 мм, высота 30 мм. Для герметизации пьезокерамический элемент был покрыт воском. Рассматриваемый излучатель существенно меньше характерных длин волн, излучаемых в эксперименте, поэтому имеет характеристику направленности монопольного типа, что было проверено с помощью моделирования методом конечных элементов. Оба источника звука показаны на рис. 2.

В процессе калибровки бассейна из каждой точки куба ЭМ излучал одинаковый ЛЧМ звуковой импульс длительности 1 с с вариацией частоты от 5 до 10 кГц. Возбужденное поле регистрировалось всеми M приемниками. С использованием преобразования Фурье вычислялись комплексные амплитуды зарегистрированных звуковых импульсов на сетке частот f_l , $l = 1, \dots, 2001$, равномерно заполняющих интервал от 5 до 10 кГц с шагом 25 Гц. Таким образом, для каждого куба на каждой частоте были получены значения $M \times N = 729$ комплексных амплитуд a_j , $j = 1, \dots, 729$, представляющие

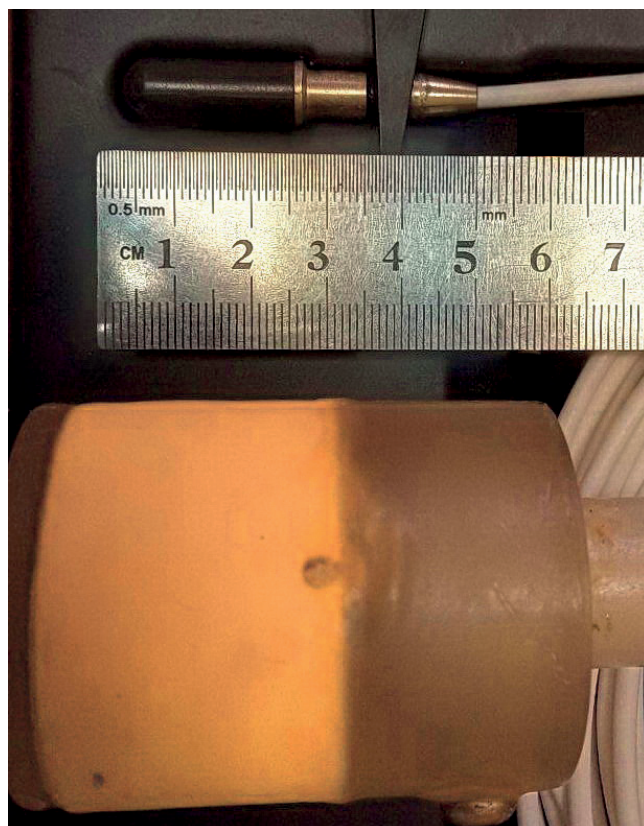


Рис. 2. Вверху: гидрофон В&К 8103, используемый в качестве эталонного монополя. Внизу: калибруемый источник.

значения введенных выше матричных элементов \hat{G}_{mn} (см. (5)) для всех возможных пар $(\mathbf{r}_n, \mathbf{R}_m)$.

Аналогичным образом были измерены поля, возбуждаемые КИ, который последовательно помещался в точки тех же кубов и излучал тот же ЛЧМ импульс. С помощью преобразования Фурье на каждой частоте f_i были найдены значения комплексных амплитуд КИ b_j , $j = 1, \dots, 729$, для тех же пар $(\mathbf{r}_n, \mathbf{R}_m)$.

Фигурирующий в (4) и (6) вектор комплексных амплитуд КИ $\hat{\mathbf{u}}$ на каждой частоте f_i формировался M амплитудами b_j , отвечающими точке \mathbf{r}_n в центре куба. При оценке амплитуд ЭИ A_n по формуле (6) в сумме учитывались лишь те слагаемые, которые отвечали сингулярным числам λ_q , превышающим $\lambda_1 / 300$. Оценки отношений амплитуд КИ и ЭМ w_{es} на каждой частоте f_i были получены подстановкой найденных A_n в (10). Полученные значения w_{es} были сопоставлены с альтернативными оценками того же отношения. Эти оценки были получены на основе следующих соображений.

Если бы калибруемый и эталонный источники были идеальными монополями, на каждой частоте f_i отношения $w_j = |b_j / a_j|$ для всех j принимали бы одно и то же значение, совпадающее с отношением амплитуд данных источников в свободном

пространстве (9). В действительности это не так. На рис. 3 приведены значения w_j , полученные на частоте $f_i = 7000$ Гц для куба с шагом 2 см и (в верхнем левом углу) гистограмма распределения этих значений. Похожее распределение наблюдается на всех частотах для обоих кубов. В качестве оценок отношения амплитуд сравниваемых источников на каждой частоте мы принимаем w_{mean} и w_{median} — среднее и медианное значения измеренных величин w_j . В качестве еще одной оценки принимаем

$$w_{\text{rms}} = \left(\sum_{j=1}^{729} |b_j|^2 / \sum_{j=1}^{729} |a_j|^2 \right)^{1/2}$$

— отношение среднеквадратичных значений амплитуд КИ и ЭМ для всех 729 пар $(\mathbf{r}_n, \mathbf{R}_m)$.

Таким образом, мы имеем четыре оценки отношений амплитуд КИ и ЭМ: w_{es} , w_{mean} , w_{median} и w_{rms} . На рис. 4 представлены полученные с их помощью оценки отношений мощности калибруемого источника I_c к мощности эталонного источника I_e . Значения I_c / I_e выражены в децибеллах: они представлены величинами $20 \lg w$, где в качестве w берутся описанные выше оценки отношений амплитуд, сглаженные по частоте с интервалом

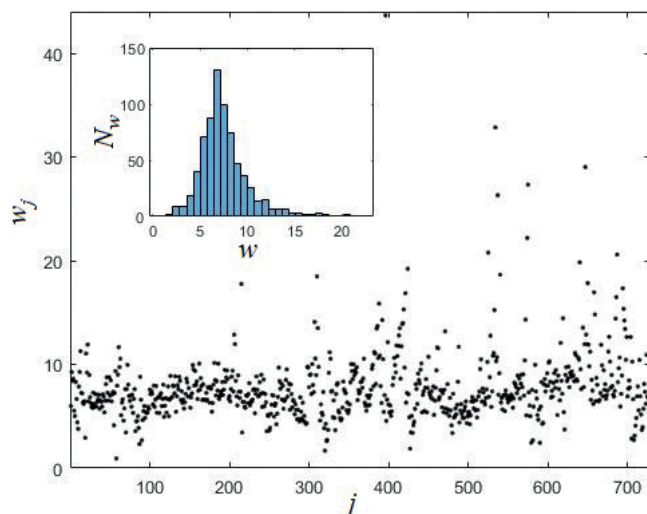


Рис. 3. Точки показывают отношения амплитуд КИ и ЭМ для всех 729 пар $(\mathbf{r}_n, \mathbf{R}_m)$ на частоте 7 кГц. В левом верхнем углу показана гистограмма распределения этих отношений.

300 Гц. Отметим, что значения каждой из четырех сравниваемых оценок, полученные для кубов с шагом 2 и 3 см, почти совпадают на всех частотах. Поэтому на рис. 4 представлены лишь результаты, полученные для куба с шагом 2 см.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсуждаемый метод позволяет реконструировать диаграмму направленности КИ в свободном пространстве, а также оценивать амплитуды сферических гармоник возбужденного им поля [8]. Однако в данной работе для демонстрации работоспособности метода мы ограничиваемся реконструкцией частотной зависимости интенсивности источника, который приближенно можно считать монопольным. Дело в том, что при работе с таким источником найденную оценку отношений КИ и ЭМ w_{es} мы можем сопоставить с альтернативными оценками того же отношения w_{mean} , w_{median} и w_{rms} , полученными на основе тех же измерений. На рис. 4 мы видим, что все четыре оценки, как и должно быть, дают близкие результаты. Разброс их значений на каждой из рассмотренных частот не превышает 2.5 дБ. Практическое применение обсуждаемого подхода для реконструкции диаграммы направленности более сложного мультипольного КИ и разложения его поля по сферическим гармоникам мы планируем рассмотреть в последующих работах.

Следует отметить, что возможности метода ЭИ, а поэтому и возможности нашего подхода, заметно ограничиваются отсутствием обоснованных общих рекомендаций по выбору количества ЭИ и точек их размещения, гарантирующих эффективность моделирования поля произвольного

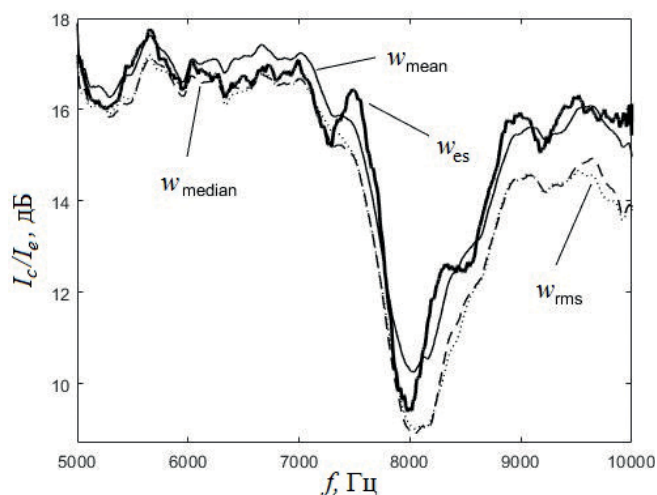


Рис. 4. Оценки отношения интенсивностей КИ и ЭМ, полученные с использованием оценок отношения амплитуд этих источников w_{es} (жирная сплошная кривая), w_{mean} (тонкая сплошная кривая), w_{median} (пунктир) и w_{rms} (точки).

источника звука [10, 14]. Несмотря на то, что в работе [8] сформулированы некоторые критерии для выбора точек расположения приемников и точек, в которые помещается ЭМ (эти критерии учитывались при планировании эксперимента), окончательный выбор количества таких точек и их координат приходится выполнять эмпирически. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проект FFUF-2024-0041).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bobber R.J. Underwater electroacoustic measurement. CA: Peninsula Press, Los Altos, 1988.
2. Robinson S.P. Review of methods for low frequency transducer calibration in reverberant tanks. NPL Report CMAM 034. 1999.
3. Robinson S.P., Hayman G., Harris P.M., Beamiss G.A. Signal-modeling methods applied to the free-field calibration of hydrophones and projectors in laboratory test tanks // Meas. Sci. Technol. 2018. 29:085001.
4. Исаев А.Е., Матвеев А.Н. Градуировка гидрофонов по полю при непрерывном излучении в реверберирующем бассейне // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 727–736.
5. Исаев А.Е., Матвеев А.Н. Применение метода скользящего комплексного взвешенного усреднения для восстановления неравномерной частотной характеристики приемника // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 5. С. 651–654.
6. Исаев А.Е., Николаенко А.С., Черников И.В. Подавление реверберационных искажений сигнала приемника с использованием передаточной функции бассейна // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 165–174.

7. Virovlyansky A.L., Deryabin M.S. On the use of the equivalent source method for free-field calibration of an radiator in a reverberant tank // *J. Sound. Vibr.* 2019. V. 455. P. 69–81.
8. Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Любавин Л.Я. Реконструкция диаграммы направленности источника звука в свободном пространстве по измерениям его поля в бассейне // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 5. С. 509–516.
9. Koopmann G.H., Song L., Fahnlne J.B. A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 86. № 6. P. 2433–2438.
10. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Общие свойства и принципиальные погрешности метода эквивалентных источников // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41. № 5. С. 737–750.
11. Johnson M.E., Elliott S.J., Baek K.-H., Garcia-Bonito J. An equivalent source technique for calculating the sound field inside an enclosure containing scattering objects // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104. № 3. P. 1221–1231.
12. Mao J., Wang Z., Liu J., Song D. A Forward- Backward Splitting Equivalent Source Method Based on S-Difference // *Appl. Sci.* 2024. V. 14. № 3. P. 1086.1–1086.17.
13. Gounot Y.J.R., Musafir R.E. Simulation of scattered fields: some guidelines for the equivalent source method // *J. Sound. Vibr.* 2011. V. 330. № 15. P. 3698–3709.
14. Lee S. Review: the use of equivalent source method in computational acoustics // *J. Comput. Acoustics.* 2017. V. 25. № 1. 1630001.
15. Fernandez-Grande E., Xenaki A., Gerstoft P. A sparse equivalent source method for near-field acoustic holography // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 1. P. 532–542.
16. He T., Mo S., Fang E., Wang M., Zhang R. Modeling three-dimensional underwater acoustic propagation over multi-layered fluid seabeds using the equivalent source method // *J. Acoust. Soc. Am.* 2021. V. 150. № 4. P. 2854–2864.
17. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix computations. Baltimore: The John Hopkins University Press, 1989.

ESTIMATION OF THE AMPLITUDE-FREQUENCY RESPONSE OF A SOUND SOURCE FROM MEASUREMENTS IN A TANK WITH REFLECTING BOUNDARIES

V.K. Bakhtin^{a,b}, A.L. Virovlyansky^{a,*}, M.S. Deryabin^{a,b}, A.Yu. Kazarova^a

^a*Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences,
603950 N. Novgorod, Ul'yanov str., 46*

^b*Lobachevsky State University, 603022 N. Novgorod, Gagarin Ave., 23*

The results of a laboratory experiment testing a method for reconstructing a sound field excited by a calibrated source in free space from measurements of a field excited by the same source in a tank with reflecting boundaries are presented. The reconstruction procedure is based on the use of an etalon acoustic monopole and comparison of the fields emitted by it from specially selected points of the tank with the field of the calibrated source. In the experiment, the frequency dependence of the field intensity of the calibrated source averaged over a sphere of large radius was evaluated.

Keywords: sound source, calibration, tank, equivalent source method

АКУСТИКА ОКЕАНА.
ГИДРОАКУСТИКА

УДК 534.231

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗВУКА, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ СОЛИТОНОВ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ASIAEX

© 2024 г. В. А. Григорьев^{a,b,*}

^aВоронежский государственный университет,
Университетская пл. 1, Воронеж, 394018 Россия

^bИнститут общей физики им. А.М. Прохорова Российской Академии Наук,
ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

*e-mail: grig4@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.05.2024 г.

После доработки 08.07.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Рассматривается один из эпизодов эксперимента ASIAEX 2001 (Южно-Китайское море), в котором вдоль двух стационарных акустических трасс длиной 32 и 19 км двигался крупный солитон внутренних волн, и наблюдались связанные с этим флуктуации интенсивности низкочастотного звука (224 и 300 Гц). В ходе исследования было обнаружено явление постоянства доминирующей частоты флуктуаций с течением времени. Например, при шестичасовом движении солитона вдоль длинной трассы, где глубина моря изменялась в три раза (с 350 до 120 м), а скорость солитона — в два раза (с 2 до 1 м/с), доминирующая частота флуктуаций оставалась приблизительно постоянной и равной 1.5 ц/ч с точностью 10%. В работе анализируются причины данного явления. Для этого солитон рассматривается в рамках двухслойной модели водной среды, а распространение звука — в рамках модовой и лучевой теорий. Согласно лучевой теории, доминирующая частота флуктуаций определяется отношением скорости солитона к циклу луча, ответственному за доминирующие флуктуации. В модовой теории получено аналогичное выражение, где роль цикла луча играет комбинация пространственных периодов биения нескольких пар мод. Показано, что при изменении глубины моря скорость солитона и цикл луча изменяются практически пропорционально, в результате чего доминирующая частота флуктуаций остается постоянной. Описанное явление может иметь универсальный характер и не ограничиваться акваторией ASIAEX. Постоянство доминирующей частоты позволяет, в частности, определить переменную скорость солитона как функцию времени или расстояния, что успешно продемонстрировано в работе и может быть использовано для акустического мониторинга солитонов.

Ключевые слова: ASIAEX, солитон внутренних волн, флуктуации интенсивности звука, доминирующая частота флуктуаций, определение скорости солитона

DOI: 10.31857/S0320791924060059, **EDN:** JTVQVT

ВВЕДЕНИЕ

Эксперимент ASIAEX (Asian Seas International Acoustics Experiment) проводился международной группой ученых в апреле-августе 2001 г. в северной части Южно-Китайского моря (рис. 1) [1]. Одной из целей эксперимента было исследование распространения звука в условиях высокой неустойчивости водной среды в районе бровки континентального шельфа, связанной с прохождением солитонов внутренних волн рекордных амплитуд (более 100 м).

Солитоны северной части Южно-Китайского моря являются крупнейшими из зарегистрированных в Мировом океане [2, 3]. Для иллюстрации на

рис. 2 показан уединенный солитон амплитудой 150 м при глубине моря 350 м, зафиксированный 09.05.2001 в эксперименте ASIAEX с помощью вертикальной термисторной цепочки E1 (красная точка на рис. 1). Амплитуда солитона на рис. 2 измеряется по изотермам, максимально смещенным вниз (20–24 °C). Заметим, что наибольшая амплитуда солитона, измеренная в ASIAEX, равнялась 160 м [4] (08.05.2001 на цепочке E1). В других экспериментах в Южно-Китайском море отмечались солитоны амплитудой 200 м [5]. Такие солитоны фиксировались в глубоководной части моря при глубине 2700 м в точке, отмеченной звездочкой на рис. 1.

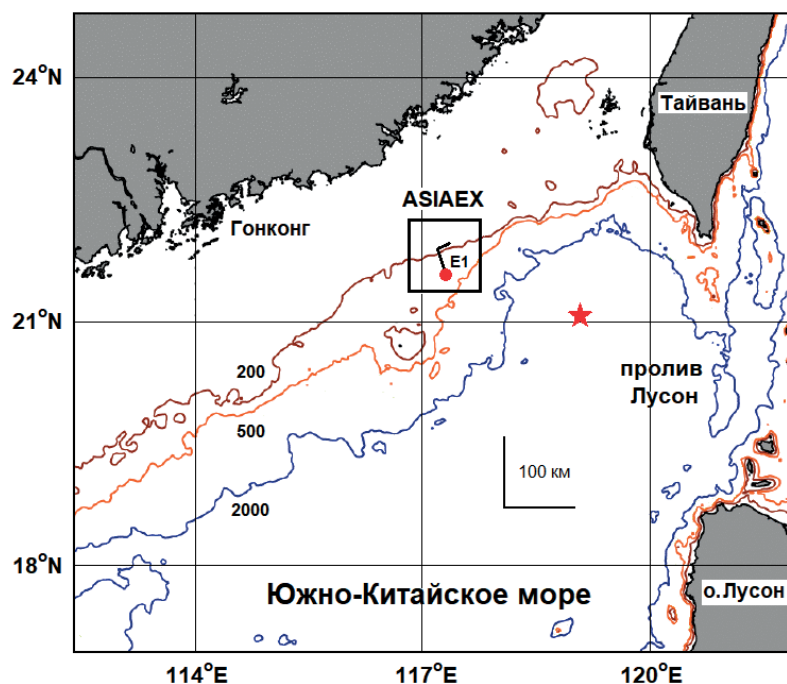


Рис. 1. Район проведения эксперимента ASIAEX с указанием батиметрии. Показаны глубины 200, 500, 2000 м. Солитоны рождались в проливе Лусон и через двое суток, пройдя глубоководную часть моря, наблюдались в районе ASIAEX.

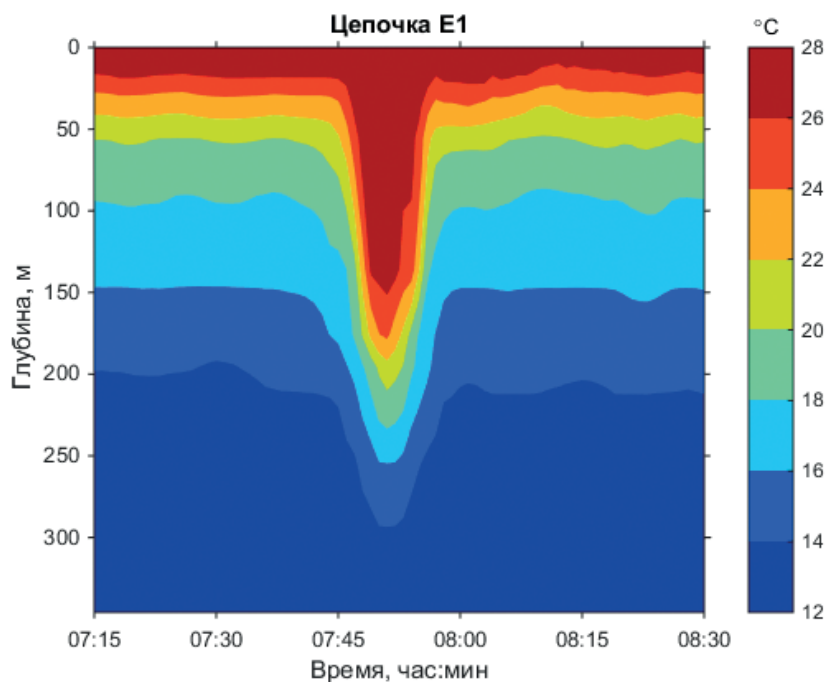


Рис. 2. Солитон амплитудой 150 м при глубине моря 350 м, зарегистрированный 09.05.2001 в эксперименте ASIAEX с помощью термисторной цепочки E1.

В горизонтальной плоскости солитоны представляют собой протяженные (сотни километров) фронты,двигающиеся со скоростями $v_{\perp} \sim 1$ м/с перпендикулярно фронту. Фронты солитонов наблюдаются визуально по изменению

поверхностного волнения моря (сулойные полосы), а также фиксируются на радарных и спутниковых снимках [3, 6]. На рис. 3 приведен типичный спутниковый снимок солитона, сделанный 05.05.2001 в момент прохождения акустических

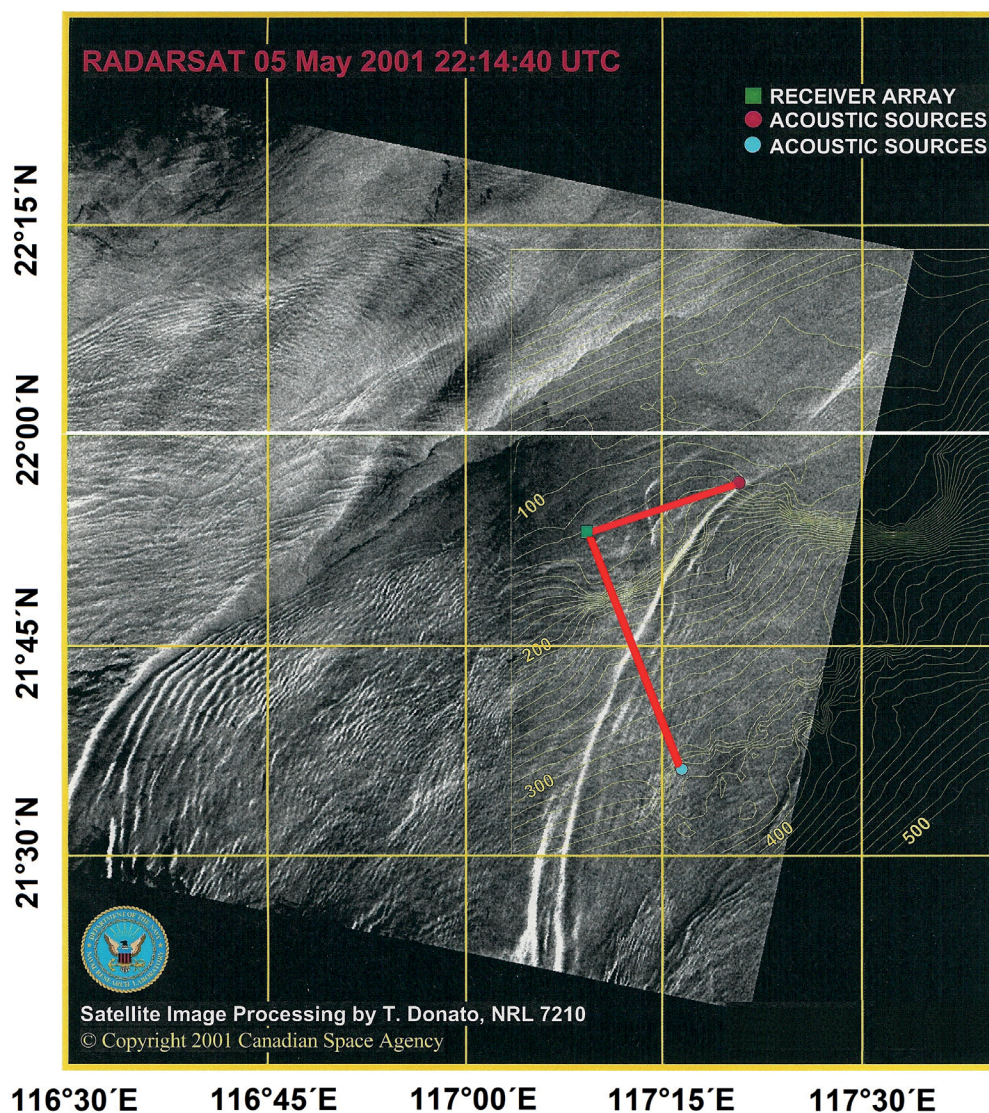


Рис. 3. Типичный спутниковый снимок солитона, сделанный 05.05.2001 в момент прохождения акустических трасс ASIAEX. Трассы выделены красным цветом. Белая линия, пересекающая трассы, — это фронт солитона.

трасс ASIAEX. Трассы выделены красным цветом. Белая линия, пересекающая трассы, — это фронт солитона.

Исследования показывают [6–8], что генерация солитонов, регистрируемых в ASIAEX, происходит в центральной части пролива Лусон, почти в 500 км от района ASIAEX (рис. 1). Пролив Лусон находится между островами Тайвань и Лусон. Острова соединяются подводным хребтом, который в ряде мест выходит на поверхность моря в виде мелких островов. Два раза в сутки под действием приливных течений на подводном хребте возбуждаются интенсивные внутренние волны с амплитудами первых десятков метров,двигающиеся в западном направлении. Первоначально данные волны не содержат солитонов и описываются

как динамично меняющийся нелинейный внутренний прилив [7]. По мере удаления от пролива Лусон в глубоководную часть моря с глубинами около 3000 м в структуре интенсивных внутренних волн появляются устойчивые солитоны с максимальными амплитудами до 200 м [5].

К району ASIAEX, а точнее к изобате 350 м, где была установлена самая глубоководная термисторная цепочка E1 (рис. 1), солитоны приходят через двое суток от момента породившего их прилива в проливе Лусон [7]. Еще 6 часов солитоны двигаются по акватории ASIAEX до изобаты 120 м. На мелководье крупные солитоны уменьшают свою амплитуду и разбиваются на несколько мелких, формируя пакет (или цуг) солитонов. Уменьшается также скорость солитонов. При перемещении над

континентальным склоном, где глубина моря меняется от 3000 до 350 м, скорость солитонов уменьшается от $v_{\perp} \approx 3$ м/с до $v_{\perp} \approx 2$ м/с. На изобате 120 м, которая лежит в зоне шельфа, скорость солитонов составляет $v_{\perp} \approx 1$ м/с.

Подчеркнем, что солитоны имеют предельно большие амплитуды внутренних волн, возможные для данной акватории (глубоководной или мелководной). Это делает солитоны ключевыми участниками многих процессов, происходящих в океане, и вызывает повышенный интерес к их изучению. Например, благодаря солитонам усиливается вертикальное перемешивание вод океана, что приводит к глубокой аэрации водной толщи и развитию жизни на больших глубинах. В шельфовой зоне океана турбулентные потоки воды, связанные с солитонами, достигают дна и формируют течения, обеспечивающие перенос донных осадков. Эти же течения и потоки (горизонтальные и вертикальные) угрожают движению подводных судов и создают проблемы при эксплуатации объектов подводной инженерии.

С точки зрения акустики солитоны представляют собой существенные неоднородности скорости звука в воде, которые приводят к значительному перераспределению акустического поля в пространстве и его флуктуациям во времени. Характер флуктуаций поля в фиксированной точке приема определяется ориентацией фронта солитона относительно акустической трассы. Если угол между фронтом и трассой равен нулю или составляет первые единицы градусов, то на приемнике наблюдаются фокусировка и дефокусировка акустического поля по мере движения солитонов [9, 10]. Данное явление объясняется горизонтальной рефракцией звука. При большем угле наклона фронта к трассе, вплоть до 90° , флуктуации акустического поля хорошо описываются взаимодействием мод в вертикальной плоскости вдоль линии трассы, а горизонтальной рефракцией можно пренебречь. Например, в [11] при анализе флуктуаций звука на солитонах Атлантического шельфа США было показано значительное преобладание механизма взаимодействия мод над механизмом горизонтальной рефракции при угле наклона фронта к трассе равном 9° . На рассмотренные выше механизмы флуктуаций, которые зависят от угла наклона фронта к трассе, может накладываться третий механизм — адиабатический. Адиабатические флуктуации возникают при прохождении солитонов через источник или приемник, и они не зависят от наклона фронта к трассе.

В эксперименте ASIAEX акустические трассы были наклонены к фронтам движущихся солитонов под достаточно большими углами, при которых основным механизмом флуктуаций являлось взаимодействие мод.

Теория флуктуаций звука, обусловленных взаимодействием мод на движущихся вдоль акустической трассы солитонах, разрабатывалась в авторском цикле работ, среди которых отметим следующие [11–20].

Работы [11–18] основывались на экспериментах SWARM (Shallow Water Acoustics in a Random Medium, 1995) [21] и SW06 (Shallow Water 2006) [22]. Данные эксперименты проводились на плато Атлантического шельфа США в условиях приблизительного постоянства глубины моря и скорости солитонов.

Работы [19, 20] посвящены эксперименту ASIAEX. В отличие от SWARM и SW06, в данном эксперименте рассматривалась неоднородная трасса, пересекающая бровку шельфа, где глубина моря изменялась приблизительно в три раза, а скорость солитонов — в два раза.

Несмотря на существенные различия в условиях проведения экспериментов SWARM, SW06 и ASIAEX, было обнаружено общее свойство. Флуктуации интенсивности звука, наблюдаемые на приемнике при перемещении солитона по трассе, имели постоянную доминирующую частоту, характерную для данной трассы. В случае однородной трассы и неизменной скорости солитона, постоянство доминирующей частоты являлось ожидаемым результатом. Однако для неоднородной трассы и переменной скорости солитона, этот факт, впервые обнаруженный в эксперименте ASIAEX [19], оказался неожиданным. Помимо обработки эксперимента в [19] было проведено детальное моделирование флуктуаций поля в рамках модового подхода и взаимодействия мод. В результате были получены очень похожие экспериментальные и теоретические спектрограммы флуктуаций, которые характеризовались приблизительно постоянной доминирующей частотой.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [19], и направлена на изучение стабильности доминирующей частоты флуктуаций в рамках эксперимента ASIAEX. При этом в отличие от [19] рассматриваются две трассы, существующие в эксперименте (рис. 4). Результаты исследований указывают на то, что явление сохранения доминирующей частоты может иметь универсальный характер и не ограничиваться акваторией ASIAEX. Интересным практическим приложением, основанным на постоянстве доминирующей частоты, является возможность определения переменной скорости солитона как функции времени или расстояния вдоль трассы. Эта методика успешно продемонстрирована в работе и может быть использована для акустического мониторинга солитонов.

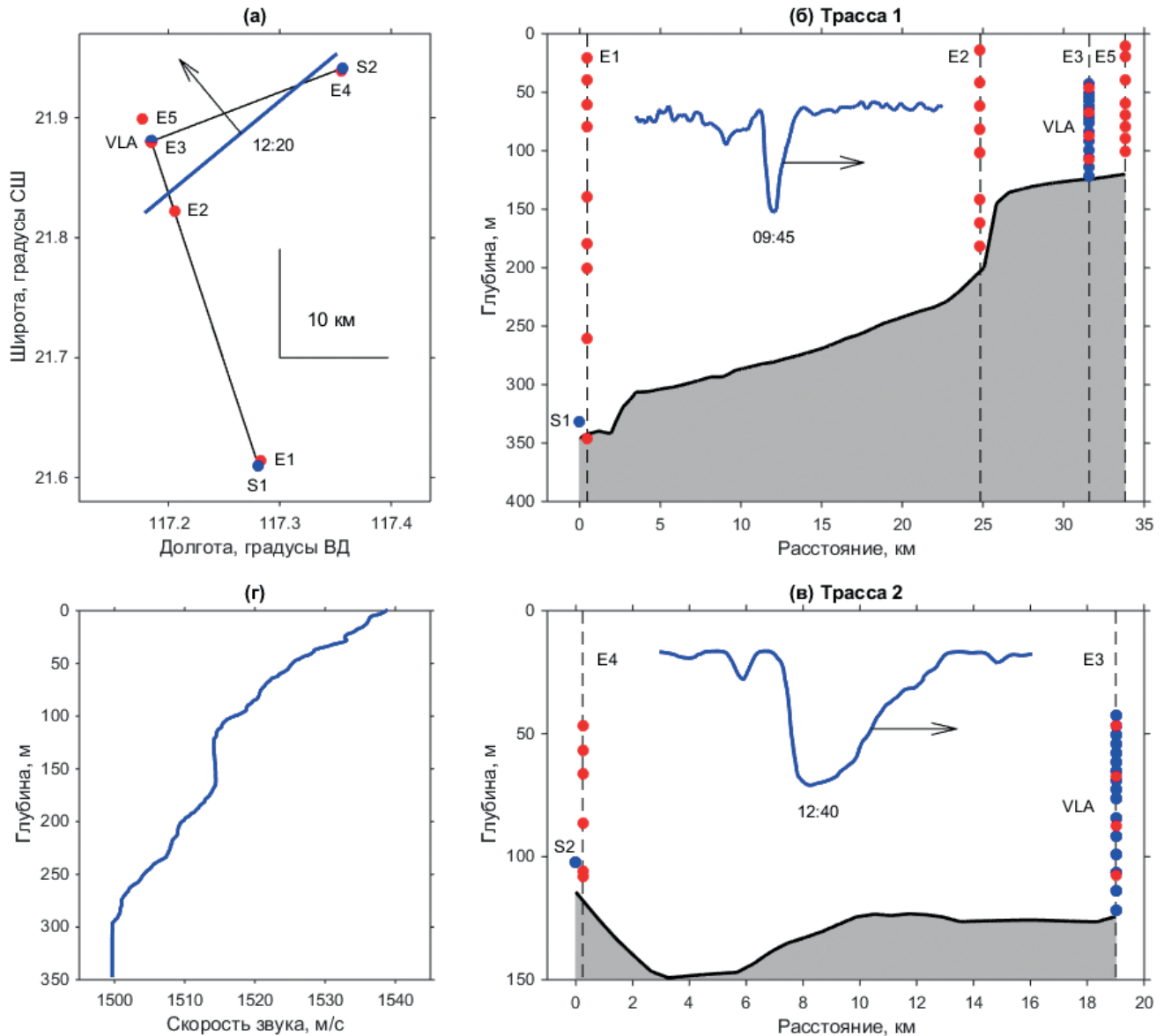


Рис. 4. Эксперимент ASIAEX (07.05.2001): (а) — вид сверху, (б) и (в) — вид сбоку на трассу 1 (S1–VLA) и трассу 2 (S2–VLA), (г) — невозмущенный профиль скорости звука в воде [19]. Синяя линия на рис. 4а — фронт солитона в момент времени 12:20. Синяя линия на рис. 4б и 4в — изолинии скорости звука (1525 и 1535 м/с), соответствующие максимальной амплитуде солитона (100 и 55 м), в моменты времени 09:45 и 12:40 (горизонтальный и вертикальный масштабы соблюдены). Красные точки — термисторные цепочки E1–E5. Синие точки — приемная антенна VLA, источники S1, S2. Расположение всех элементов соответствует реальным координатам.

1. ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

В данном разделе приведены основные теоретические сведения, необходимые для лучшего понимания последующих разделов.

Рассмотрим однородный мелководный волновод глубиной H , в котором расположены точечные источник и приемник на расстоянии $R \gg H$ друг от друга. Предположим, что на трассе между источником и приемником движется солитон с постоянной скоростью вдоль трассы, равной $v = v_{\perp} / \sin \alpha$, где v_{\perp} — скорость солитона, перпендикулярная

его фронту, α — угол между трассой и фронтом ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$).

Полагаем угол α достаточно большим, чтобы можно было пренебречь горизонтальной рефракцией звука на солитоне. Тогда возмущение акустического поля на приемнике, вызванное присутствием солитона на трассе, описывается взаимодействием мод в вертикальной плоскости, проходящей через источник и приемник.

Удобно начать с высокочастотного приближения модовой теории, когда распространение звука

описывается на лучевом языке. В этом случае в процессе движения солитона вдоль акустической трассы на приемнике будут наблюдаться временные флуктуации интенсивности звука с доминирующей частотой

$$F_D = \frac{v}{D} = \frac{v_{\perp}}{D \sin \alpha}, \quad (1)$$

где D — цикл луча, ответственного за доминирующие флуктуации.

Цикл D можно найти из анализа лучевой схемы в волноводе в отсутствие солитона. А именно, среди лучей, связывающих источник и приемник, нужно найти те, которые: 1) несут максимальную энергию в соответствующей лучевой трубке; 2) проходят значительный путь в той области глубин, которую занимает солитон при его появлении на трассе. Данные условия выделяют узкую группу лучей с примерно одинаковым циклом D , которые испытывают максимальную рефракцию на солитоне и вносят максимальный вклад во флуктуации звука.

Описанный выше лучевой анализ, а также моделирование флуктуаций в рамках лучевого подхода, были проведены в [14] для волновода с ярко выраженным термоклином, как в экспериментах SWARM и SW06. Результаты моделирования показали, что цикл D соответствует критическим лучам, имеющим точку поворота вблизи верхней границы термоклина. Флуктуации интенсивности в точке приема с доминирующей частотой (1) тогда объясняются следующим образом. Когда солитон движется по трассе, то он “цепляет” точки поворота критических лучей с частотой (1). В результате дополнительной рефракции критических лучей на солитоне, эти лучи то уходят, то приходят на приемник, обеспечивая тем самым наблюдаемые колебания интенсивности.

Аналогичный лучевой анализ проведен в разделе 2.7 для условий эксперимента ASIAEX. Здесь рассматривается неоднородная трасса (трасса 1 на рис. 4) и линейный профиль скорости звука (без термоклина). Обнаружено, что в данных условиях также выделяется узкая группа лучей, имеющих практически одинаковый угол выхода из источника и определяющих доминирующие флуктуации. Однако в условиях неоднородной трассы и переменной скорости солитона аналог выражения (1) должен иметь вид

$$F_D(r) = \frac{v(r)}{D(r)}, \quad (2)$$

где все величины зависят от r — расстояния от источника до солитона.

Далее, будем опираться на результаты работы [19], а также на результаты раздела 2, где

показано, что $F_D(r) \approx \text{const}$ при неравномерном движении солитона вдоль неоднородной трассы ASIAEX. Данный вывод основан на эксперименте и теоретическом анализе, при котором солитон описывается в рамках двухслойной модели водной среды, а распространение звука — в рамках модовой и лучевой теорий.

Важно отметить, что флуктуации интенсивности звука, возникающие на приемнике с постоянной частотой F_D , теоретически являются периодическими, но несинусоидальными. Это означает, что спектр флуктуаций, полученный за ограниченное время наблюдений, содержит не одну доминирующую частоту флуктуаций F_D , а гармоники nF_D ($n = 1, 2, 3, \dots$). Амплитуда гармоник максимальна при $n = 1$ и уменьшается при возрастании номера n гармоники.

Наличие гармоник имеет важное прикладное значение для повышения точности измерения величины F_D в эксперименте. Например, в [12, 15, 16] при обработке эксперимента SW06 было обнаружено, что спектральный пик, соответствующий доминирующей частоте, сильно зашумлен. Тогда для определения F_D была использована хорошо видимая четвертая гармоника. При этом на трассах, наклоненных под различными углами к фронту солитона, четвертая гармоника давала разные значения доминирующей частоты в полном соответствии с (1) (подробнее о данном эффекте ниже).

Выделение гармоник, включая доминирующую частоту, является непростой задачей на практике. Это связано с тем, что ширина спектральных пиков сопоставима с расстоянием между ними. В результате частичного перекрытия пиков их локальные максимумы смещаются, что приводит к значительным погрешностям измерений. Однако если доминирующая частота остается постоянной при движении солитона, то путем вычисления спектров флуктуаций в различные моменты времени можно получить гистограмму распределения положений локальных максимумов. В разделе 2.4 метод гистограмм впервые предложен и успешно применен для анализа спектров в ASIAEX. Показано, что максимумы в гистограммах достаточно хорошо соответствуют искомым гармоникам.

Рассмотрим две трассы, наклоненные под углами α_1 и α_2 к прямолинейному фронту солитона. Пусть за время, в течение которого определяются доминирующие частоты F_{D1} и F_{D2} на этих трассах, выполняются условия $v_{\perp} = \text{const}$ и $D = \text{const}$. Тогда из (1) следует

$$F_{D1} \sin \alpha_1 = F_{D2} \sin \alpha_2. \quad (3)$$

Подтверждение данного равенства было впервые получено на плато Атлантического шельфа в эксперименте SW06 [12, 15, 16]. В разделе 2.5 представлены результаты успешной проверки (3)

вблизи внешнего края континентального шельфа в эксперименте ASIAEX. Выражение (3) может быть использовано для акустического мониторинга солитонов.

Перейдем от лучевого описания к модовому. Сначала рассмотрим движение солитона в однородном волноводе. Как показано в [11, 13, 17–19], применение теории взаимодействия мод на движущемся солитоне дает полный спектр частот временных флуктуаций интенсивности на приемнике в виде

$$F_{m,m+n}(\omega) = \frac{v}{\Lambda_{m,m+n}(\omega)}, \quad (4)$$

где $\Lambda_{m,m+n}(\omega) = 2\pi/q_m(\omega) - q_{m+n}(\omega)$ – пространственный период биения мод с номерами m и $m+n$, q_m и q_{m+n} – реальная часть собственных чисел для указанных мод, $\omega = 2\pi f$ – частота звука.

Зависимости $F = F_{m,m+n}(\omega)$ представляют собой линии в системе координат (F, ω) – (частота флуктуаций, частота звука). Вычисления и эксперименты показывают, что амплитуда в спектре флуктуаций распределяется по этим линиям неравномерно. А именно, максимальные значения амплитуд практически не зависят от частоты звука и лежат в окрестности линий $F = nF_D$. Данный факт является следствием высокочастотных пределов:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F_{m,m+n}(\omega) = nF_D, \quad (5)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Lambda_{m,m+n}(\omega) = D/n, \quad (6)$$

причем пределы не зависят от номера m . Самые крупные значения амплитуд в спектре флуктуаций соответствуют $n = 1$, т.е. доминирующей частоте F_D , и лежат на линиях $F = F_{m,m+1}(\omega)$, что физически соответствует максимальному взаимодействию мод соседних номеров.

Рассмотрим линии максимальных флуктуаций $F = F_{m,m+1}(\omega)$. Как показывают расчеты, с увеличением частоты звука линии сближаются и стремятся к значению F_D . При достаточно высоких частотах звука распределение амплитуды флуктуаций по линиям является примерно равномерным для первых M мод. Поэтому оценку доминирующей частоты можно найти усреднением

$$F_D \approx \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} F_{m,m+1}(\omega). \quad (7)$$

Заметим, что в идеале оценка не должна зависеть от частоты звука.

Перейдем к анализу неравномерного движения солитона в неоднородном волноводе. Будем рассматривать флуктуации интенсивности на фиксированной частоте звука $\omega = \text{const}$, как это будет при обработке ASIAEX. В этом случае, в выражении (4) уберем зависимость от частоты звука, а

зависимость от координаты солитона на неоднородной трассе добавим:

$$F_{m,m+n}(r) = \frac{v(r)}{\Lambda_{m,m+n}(r)}. \quad (8)$$

Зависимости $F = F_{m,m+n}(r)$ будем называть дисперсионными кривыми n -го порядка. Они представляют собой линии в системе координат (r, F) – (расстояние от источника до солитона, частота флуктуаций). Наибольшие значения амплитуды в спектре флуктуаций распределены на дисперсионных кривых первого порядка: $F = F_{m,m+1}(r)$.

Оценка доминирующей частоты в соответствии с (7) имеет вид

$$F_D(r) \approx \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} F_{m,m+1}(r), \quad (9)$$

где добавлена возможная зависимость доминирующей частоты от положения солитона на трассе.

Подставляя (8) в (9), получаем формулу (2) из лучевой теории: $F_D(r) = v(r)/D(r)$, где цикл луча связан с пространственными периодами биений мод выражением

$$D(r) = \left[\frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{\Lambda_{m,m+1}(r)} \right]^{-1}. \quad (10)$$

Вычисления, выполненные согласно (9) для условий эксперимента ASIAEX, показывают, что $F_D(r) \approx \text{const}$ (раздел 2.3). Это свидетельствует о том, что изменение глубины волновода при движении солитона приводит к пропорциональному изменению скорости солитона и цикла луча. Принципиально, что при расчетах (9) используется (8), где скорость солитона рассматривается как теоретическая: $v(r) = v'(r)$. Теоретическая скорость солитона зависит от глубины моря и находится с использованием двухслойной модели водной среды (раздел 2.2).

Если постулировать равенство $F_D = \text{const}$ для данной трассы, то появляется возможность определения переменной скорости солитона акустическим способом (раздел 2.6). Действительно, если в акустическом эксперименте измерена доминирующая частота F_D и вычислен согласно (10) цикл луча $D(r)$, то из (2) скорость солитона равна

$$v(r) = F_D D(r). \quad (11)$$

Полученную скорость солитона, как функцию расстояния $v(r)$, можно пересчитать в функцию времени $v(T)$, где T – время. Для этого нужно исключить переменную r из пары функций: $v(r)$ и $T(r) = T_0 + \int_0^r v^{-1}(r) dr$, где T_0 – время прохождения точки $r = 0$. Далее можно вычислить

координаты солитона в любой момент времени. Действительно, если $r(T)$ – расстояние от источника до пика солитона в момент времени T , то

$$r(T) = \int_{T_0}^T v(T) dT.$$

2. ЭКСПЕРИМЕНТ ASIAEX

2.1. Океанографическая ситуация

На рис. 4 показана схема эксперимента ASIAEX, в котором были установлены две стационарные акустические трассы, называемые далее: трасса 1 и трасса 2. Трассы образованы источниками звуковых сигналов S1, S2 и вертикальной приемной антенной VLA.

Трасса 1 (S1–VLA) длиной 32 км была ориентирована примерно перпендикулярно бровке шельфа и состояла из двух участков: глубоководного участка (длиной 25 км с плавным изменением глубины от 350 до 200 м при средней глубине 280 м) и мелководного участка (длиной 6 км с плавным изменением глубины от 150 до 120 м при средней глубине 130 м). Граница между глубоководным и мелководным участками длиной 1 км (край бровки шельфа) характеризовалась резким изменением глубины от 200 до 150 м.

Трасса 2 (S2–VLA) длиной 19 км проходила по верхнему краю бровки шельфа и имела в среднем постоянную глубину, равную 130 м.

Вдоль рассматриваемых трасс были установлены пять вертикальных термисторных цепочек E1–E5. Цепочки изображены красными точками на рис. 4, расположение всех элементов соответствует реальным координатам. Как видно из рис. 4, число элементов в цепочках варьируется от 4 до 9, а их расположение по вертикали неравномерное. Цепочка E3 и антенна VLA находятся на одной вертикали. Цепочка E2 установлена на нижнем крае бровки шельфа и практически идеально совпадает с линией трассы 1. Цепочки E1 и E4 расположены на расстоянии 590 и 290 м от источников S1 и S2 соответственно. Однако ориентация этих цепочек относительно

источников такова, что фронт солитона практически одновременно проходит через точки (E1, S1) и (E4, S2). Расхождение составляет около 1 мин. Поэтому в дальнейшем удобно считать, что термисторные цепочки E1 и E4 фиксируют показания температуры на вертикали источников S1 и S2.

На рис. 5 показаны записи, полученные на цепочках E1–E4 в течение времени 04:00–16:00, 07.05.2001. При этом значения температуры пересчитаны в скорость звука согласно методике, изложенной в [19]. На всех записях хорошо виден солитон, последовательно приходящий на цепочки после относительного затишья. Сначала солитон приходит на цепочку E1 в момент времени 07:54. Затем он движется по трассе 1 и в 11:50 приходит на цепочку E2. Почти одновременно, в 11:53, солитон заступает на трассу 2 (на цепочку E4) другим концом своего фронта. В дальнейшем солитон перемещается по обеим трассам и в 13:48 проходит точку соединения трасс 1 и 2 (цепочку E3). Таким образом, полное время движения солитона составляет почти 6 часов (5 часов 54 мин) по трассе 1, и почти 2 часа (1 час 55 мин) по трассе 2. В процессе движения по трассе 1 амплитуда солитона непрерывно уменьшается. Она принимает значения 125, 85, 55 м в точках E1, E2, E3. На трассе 2 амплитуда солитона постоянна и равна 55 м.

В табл. 1 приведены основные параметры эксперимента. Используя географические координаты и формулу Винсенти (Vincenty) [23], найдем расстояния с точностью до метра, которые необходимы для дальнейших расчетов:

$R_1 = 31597$ м – длина трассы 1 (S1–VLA),

$R_2 = 19006$ м – длина трассы 2 (S2–VLA),

$R_{12} = 24838$ м – расстояние S1–E2,

$R_{23} = 6759$ м – расстояние E2–VLA.

Вычислим среднюю экспериментальную скорость солитона на двух участках трассы 1 и на трассе 2:

$$\bar{v}_1(r) = R_{12}/(T_2 - T_1) \approx 1.75 \text{ м/с}, \quad 0 \leq r \leq R_{12},$$

$$\bar{v}_1(r) = R_{23}/(T_3 - T_2) \approx 0.95 \text{ м/с}, \quad R_{12} \leq r \leq R_1,$$

Таблица 1. Основные параметры эксперимента (07.05.2001).

	Широта	Долгота	Глубина моря, м	Солитон	
				Время прихода, час:мин	Амплитуда, м
S1	21°36.570'N	117°16.858'E	345.8	$T_1 = 07:54$	125
E1	21°36.871'N	117°16.975'E	350		125
S2	21°56.486'N	117°21.388'E	114.3	$T_4 = 11:53$	55
E4	21°56.357'N	117°21.290'E	111.7		55
E2	21°49.346'N	117°12.328'E	202	$T_2 = 11:50$	85
E3, VLA	21°52.8168'N	117°11.0755'E	124.5	$T_3 = 13:48$	55
E5	21°53.944'N	117°10.619'E	120	$T_5 = 14:28$	55

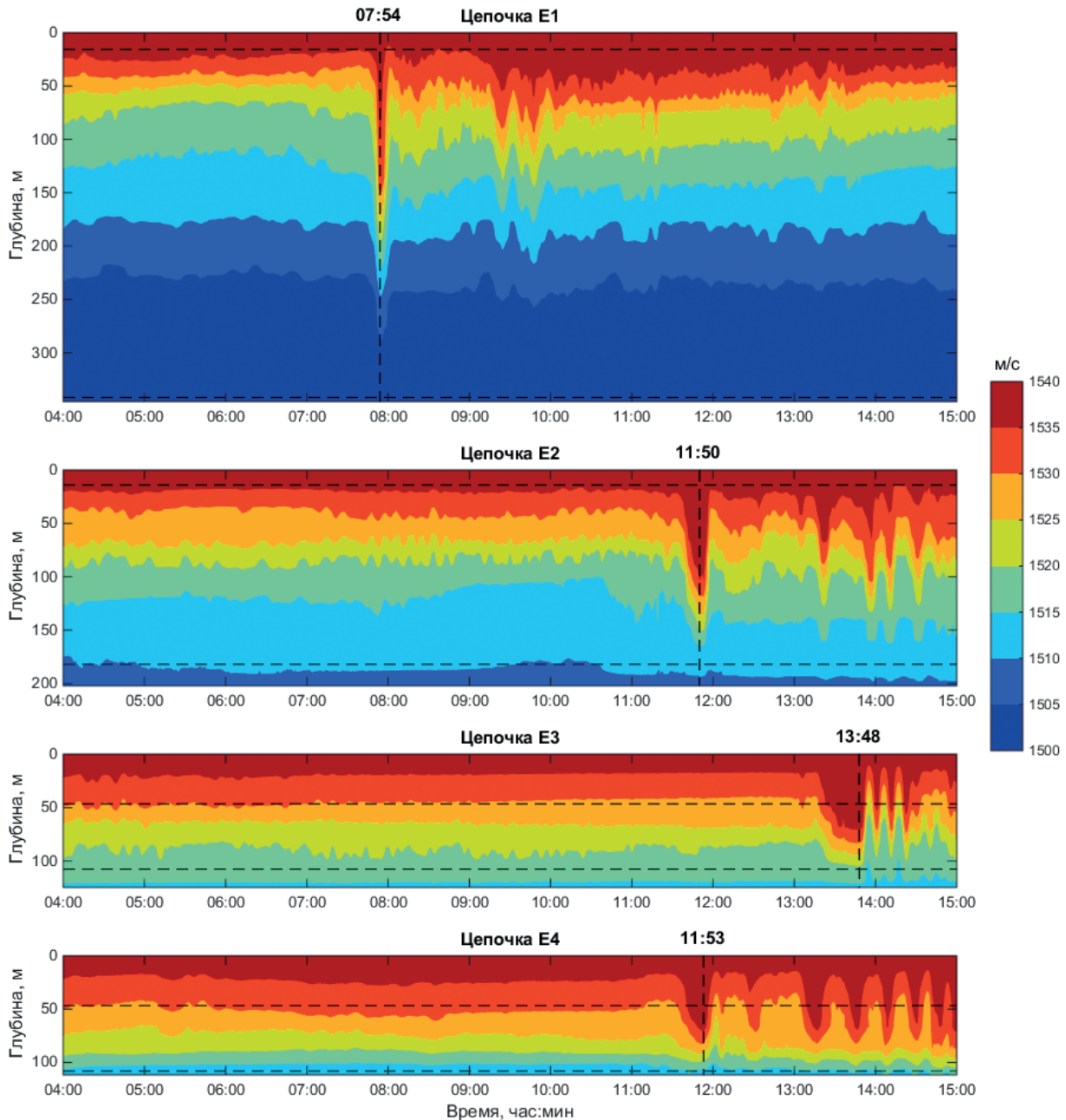


Рис. 5. Записи на термисторных цепочках E1–E4 (07.05.2001), пересчитанные в скорость звука. Каждая панель по вертикали соответствует глубине моря. Горизонтальные пунктиры показывают границы цепочек. Значения выше и ниже этих границ восстановлены по невозмущенному профилю скорости звука (рис. 4г). Вертикальные пунктиры показывают времена прихода солитона на цепочки.

$$\bar{v}_2(r) = R_2 / (T_3 - T_4) \approx 2.75 \text{ м/с}, \quad 0 \leq r \leq R_2,$$

где r — расстояние от источника до солитона на данной трассе.

Отметим, что уменьшение средней глубины на двух участках трассы 1 примерно в 2 раза привело к уменьшению средней экспериментальной скорости солитона в 1.8 раза.

2.2. Теоретическая скорость солитона

Получим теоретическую скорость солитона на трассах $v'_{1,2}(r)$, необходимую для дальнейших расчетов. Для этого воспользуемся зависимостью скорости солитона от глубины $H(r)$, которая получена в рамках двухслойной модели водной среды (два слоя разной плотности) [24]. Опуская нижний индекс, характеризующий номер трассы, имеем

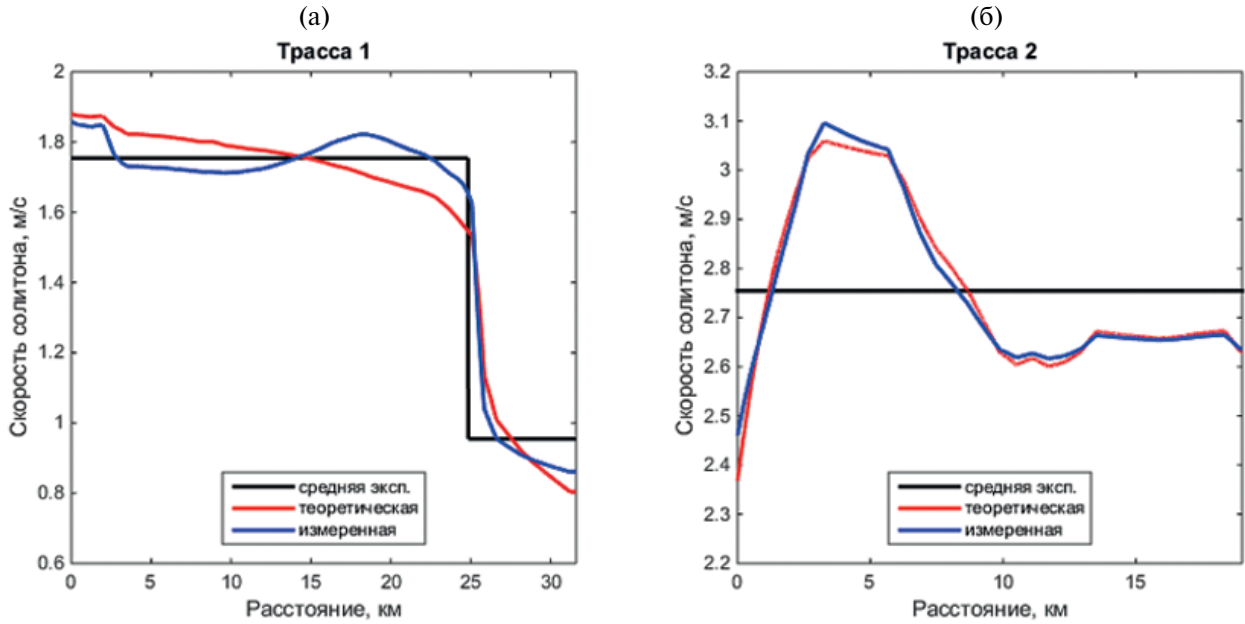


Рис. 6. Средняя экспериментальная, теоретическая и измеренная скорости солитона на трассах 1 и 2.

$$v'(r) = \sqrt{\frac{g'h(H(r) - h)}{H(r)}}, \quad (12)$$

где h — толщина верхнего слоя, $g' = \cos^{-2} \alpha' \cdot g \Delta \rho / \rho$ — уменьшенное значение ускорения свободного падения, α' — угол между вектором скорости фронта солитона и направлением трассы источник-приемник, $g = 10 \text{ м/с}^2$, $\Delta \rho / \rho$ — относительное отличие плотности слоев воды. Заметим, что в отличие от [24] в коэффициент g' введен множитель $\cos^{-2} \alpha'$, поскольку нас интересует скорость солитона вдоль трассы.

Применим эту модель к нашему случаю, считая h и g' подгоночными коэффициентами, подлежащими определению. Определение коэффициентов для трассы 1 будем строить на минимизации невязки

$$\sigma_1(h, g') = \sqrt{(T_{12} - T'_{12})^2 + (T_{23} - T'_{23})^2}, \quad (13)$$

где $T_{12} = T_2 - T_1$ и $T_{23} = T_3 - T_2$ — экспериментальное время прохождения расстояний между цепочками Е1–Е2 и Е2–Е3; $T'_{12} = \int_0^{R_{12}} [v'_1(r)]^{-1} dr$ и $T'_{23} = \int_{R_{12}}^{R_2} [v'_1(r)]^{-1} dr$ — теоретическое время прохождения тех же расстояний, вычисленное с использованием (12) при заданных h и g' . Для трассы 2 минимизируем невязку

$$\sigma_2(h, g') = |T_{34} - T'_{34}|, \quad (14)$$

где $T_{34} = T_3 - T_4$ — экспериментальное время прохождения расстояния между цепочками Е3–Е4, $T'_{34} = \int_0^{R_2} [v'_2(r)]^{-1} dr$ — теоретическое время прохождения того же расстояния.

Вычисления дают минимумы невязок при следующих коэффициентах:

трасса 1: $h = 108.88 \text{ м}$, $g' = 0.04735 \text{ м/с}^2$;

трасса 2: $h = 84.728 \text{ м}$, $g' = 0.25567 \text{ м/с}^2$.

При этом расхождения между экспериментальными и теоретическими временами прихода на цепочки составляют менее одной секунды.

Стоит отметить, что локализация минимума при использовании трех цепочек на трассе 1 гораздо лучше, чем при использовании двух цепочек на трассе 2. Заметим также, что в [19], где впервые была применена данная методика для расчета теоретической скорости солитона на трассе 1, вместо цепочки Е3 использовалась цепочка Е5. Полученные при этом коэффициенты h и g' отличаются от приведенных выше незначительно, а значения скорости $v'_1(r)$, вычисленные согласно (12), практически не отличаются.

На рис. 6 для трасс 1 и 2 изображены средние экспериментальные $\bar{v}_{1,2}(r)$ и теоретические $v'_{1,2}(r)$ скорости солитона (соответственно черные и красные линии). Видно, что теоретические зависимости близки к средним экспериментальным и примерно повторяют глубинную зависимость $H(r)$ (рис. 4б и 4в). Синими линиями на рис. 6 изображены измеренные скорости солитона $v_{1,2}^a(r)$. Эти скорости будут получены акустическим методом, о чем пойдет речь в разделе 2.6.

2.3. Флуктуации интенсивности звука

Приведем основные характеристики импульсных источников звука S1, S2 и приемной антенны VLA, используемых в эксперименте.

S1 — источник фазоманипулированных сигналов (М-последовательностей), излучающий в полосе 224 ± 8 Гц. Длительность одного импульса ≈ 2 мин (118.125 с), период следования 5 мин. Глубина источника 331.3 м при глубине моря 345.8 м.

S2 — источник линейно-частотно-модулированных (ЛЧМ) сигналов, излучающий в полосе 300 ± 30 Гц. Длительность одного импульса 2.048 с, период следования 4.096 с. Глубина источника 102.3 м при глубине моря 114.3 м.

VLA — вертикальная приемная антенна, состоящая из $J = 16$ гидрофонов. При нумерации гидрофонов сверху вниз: глубина верхнего гидрофона $z_1 = 42.75$ м, глубина нижнего гидрофона $z_{16} = 121.5$ м при глубине моря 124.5 м. Шаг между гидрофонами 1–10 равен 3.75 м. Шаг между гидрофонами 10–16 равен 7.5 м.

Обработка принятых сигналов на трассах 1 и 2 проводилась по одной и той же схеме. Пусть ΔT — интервал следования импульсов, T — “большое” время, отсчитываемое через интервалы ΔT , t — “малое” время в диапазоне $0 \leq t \leq \Delta T$. Тогда каждый принятый на глубине z импульс звукового давления запишется в виде $p(t, z, T)$. Анализ импульсов проводился на центральной частоте: $f = 224$ Гц для S1 и $f = 300$ Гц для S2. Сначала находилась комплексная амплитуда аналитического сигнала на данной частоте:

$P(z, T) = 2 \int_0^{\Delta T} p(t, z, T) \exp(i2\pi ft) dt$. Затем вычислялась интенсивность звука

$$I(z, T) = (2\rho\bar{c})^{-1} |P(z, T)|^2, \quad (15)$$

где $\rho = 1$ г/см³ — плотность воды, $\bar{c} = 1520$ м/с — средняя по VLA скорость звука в воде.

Полученные функции интенсивности $I(z, T)$ являются исходными данными для последующего анализа. Эти зависимости флуктуируют во времени, что на модовом языке объясняется периодическим характером взаимодействия мод при движении солитона.

Рассмотрим спектральный состав флуктуаций. Для этого определим спектрограмму флуктуаций интенсивности в виде

$$G(\Omega, T) = \sum_{j=1}^J \left| \int_{T-0.5\tau}^{T+0.5\tau} \tilde{I}(z_j, T', T) w(T') \exp(i\Omega T') dT' \right|, \quad (16)$$

где τ — ширина скользящего окна Фурье, $w(T')$ — оконная функция, $\Omega = 2\pi F$ — частота флуктуаций,

$\tilde{I}(z_j, T', T) = I(z_j, T') - \tau^{-1} \int_{T-0.5\tau}^{T+0.5\tau} I(z_j, T') dT'$ — переменная составляющая интенсивности на глубине z_j в окне τ как функции текущего времени T' при положении центра окна, равном T . При вычислении спектров Фурье (интегралов в (16)) использовалась оконная функция Хемминга

(hamming в MATLAB) для подавления амплитуды боковых лепестков в спектрах. Суммирование амплитудных спектров в (16) по элементам вертикальной антенны проводится с целью исключения зависимости спектров от глубины.

Полученные спектрограммы для трасс 1 и 2 изображены на рис. 7 с помощью цветовой шкалы. Картины нормированы на максимум на каждой вертикали. Желтая полоса на каждом рисунке соответствует доминирующим флуктуациям.

Спектрограмма для трассы 1 (рис. 7а, 7б) имеет длительность 4 часа 54 мин (08:24–13:18). При ширине скользящего окна $\tau = 1$ час это соответствует полному времени прохождения солитона по трассе 1, равному 5 часов 54 мин (07:54–13:48).

Спектрограмма для трассы 2 (рис. 7в, 7г) имеет длительность 1 час (12:10–13:10). При ширине скользящего окна $\tau = 20$ мин это соответствует времени прохождения солитона по трассе 2, равному 1 час 20 мин (12:00–13:20). Указанный интервал меньше полного времени прохождения по трассе 2 (1 час 55 мин, 11:53–13:48), что было связано с лагунами в данных. Уменьшение величины τ на трассе 2 в три раза по сравнению с трассой 1 стало возможным благодаря тому, что при одновременном движении солитона по обоим трассам средняя скорость солитона на трассе 2 примерно в три раза превышает среднюю скорость солитона на трассе 1.

Черными линиями на рис. 7а, 7в показаны дисперсионные кривые $F = F_{m,m+n}(T)$, рассчитанные на основе теоретической формулы (8):

$$F_{m,m+n}(T) = \frac{v'(T)}{\Lambda_{m,m+n}(T)}. \quad (17)$$

При этом в (17), в отличие от (8), для каждой трассы используются теоретическая скорость солитона $v'(T)$ и пространственный период биений мод $\Lambda_{m,m+n}(T)$ как функции времени, пересчитанные из функций расстояния: $v'(r)$ и $\Lambda_{m,m+n}(r)$. Пересчет расстояния во время проводился по формулам: $T = T_1 + \int_0^r [v'_1(r)]^{-1} dr$ для трассы 1 и $T = T_4 + \int_0^r [v'_2(r)]^{-1} dr$ для трассы 2. Пространственный период $\Lambda_{m,m+n}(r) = 2\pi / |q_m(r) - q_{m+n}(r)|$ вычислялся для каждой трассы путем решения задачи Штурма-Лиувилля для невозмущенного волнового уравнения [19].

Дисперсионные кривые $F = F_{m,m+n}(T)$ рассчитывались по первым $M = 7$ модам на обеих трассах. Ниже будет показано, что при таком числе мод теоретические и экспериментальные значения доминирующих частот максимально близки.

На рис. 7а и 7в подписаны номера $n = 1, 2, 3$ и $n = 1, 2, \dots, 6$, которые обозначают группы дисперсионных кривых n -го порядка. Этим группам

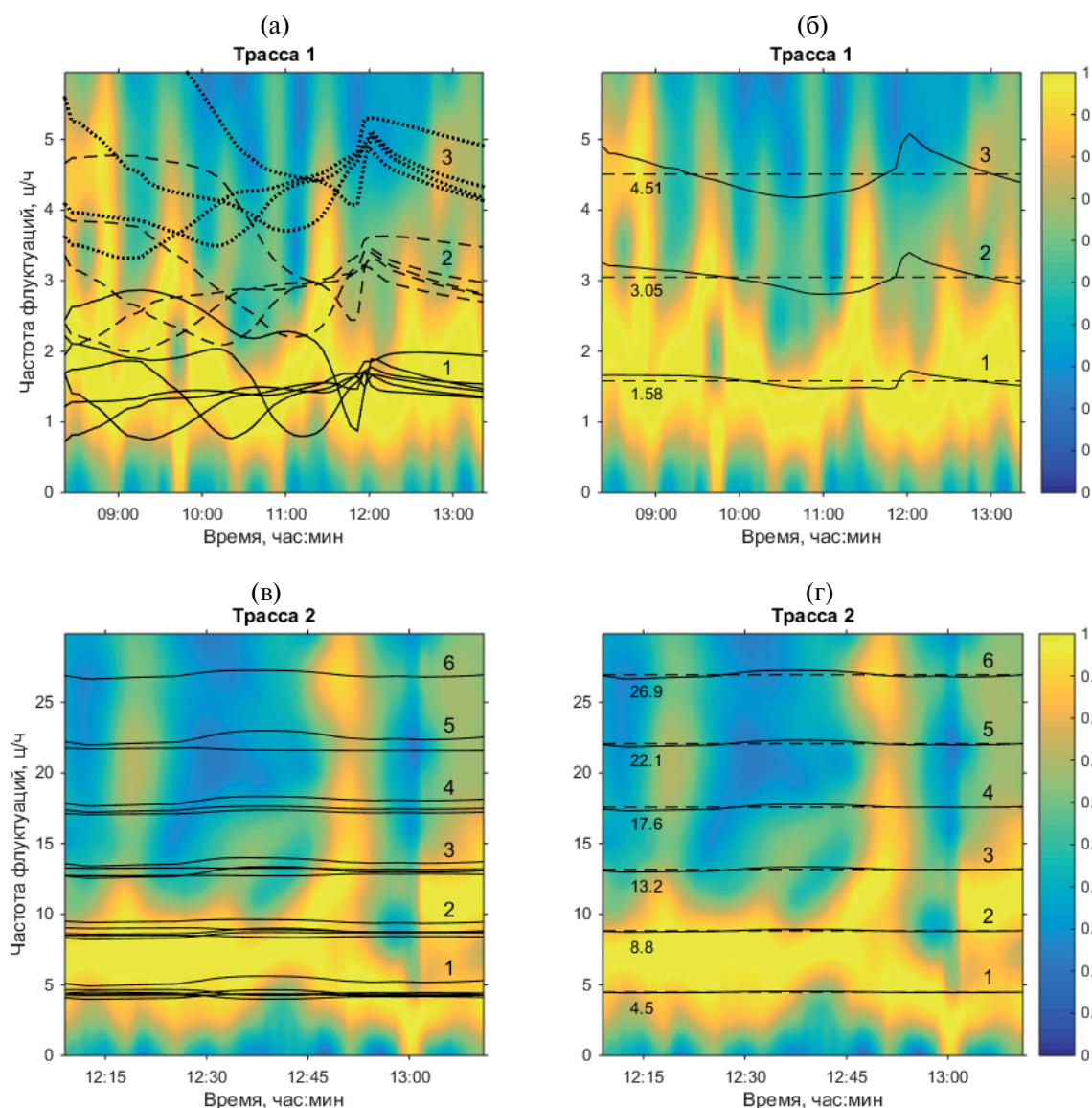


Рис. 7. С помощью цветовой шкалы показаны экспериментальные спектрограммы флуктуаций интенсивности на трассах 1 и 2. Картины нормированы на максимум на каждой вертикали. Желтая полоса соответствует доминирующим флуктуациям. Черные линии – теоретические дисперсионные кривые 1–3 и 1–6 порядков для трасс 1 и 2.

соответствуют номера $m = 1, \dots, M - n$. Например, дисперсионным кривым первого порядка $F = F_{m,m+1}(T)$ на трассе 1 (рис. 7а) соответствуют номера: $n = 1, m = 1, 2, \dots, 6$.

Рассмотрим подробно рис. 7а. Сравнивая спектрограмму и наложенные на нее дисперсионные кривые, можно сделать следующие выводы.

1. Доминирующие флуктуации спектрограммы (желтая полоса) сосредоточены на дисперсионных кривых первого порядка $F = F_{m,m+1}(T)$. В рамках модового подхода это объясняется максимальным взаимодействием мод на соседних модах, номера которых отличаются на единицу.

2. Теоретические дисперсионные кривые первого порядка и экспериментальная желтая полоса ориентированы в целом горизонтально в районе доминирующей частоты $F_D \sim 1.5$ ц/ч. Это указывает на то, что доминирующая частота слабо зависит от скорости солитона и глубины волновода. (Вдоль трассы 1 скорость солитона изменяется в два раза, а глубина волновода – в три раза.)

3. Дисперсионные кривые порядков 1, 2, 3 располагаются в целом эквидистантно по оси частот флуктуаций, что соответствует гармоникам $F_D, 2F_D, 3F_D$. При этом на спектрограмме явно не просматриваются гармоники второго и третьего

порядков. Но они будут хорошо видны на гистограммах (об этом ниже).

Факт постоянства доминирующей частоты для трассы 1 был впервые отмечен в [19]. Там же было выдвинуто предположение, что это явление может носить универсальный характер и не ограничиваться акваторией ASIAEX.

Для подтверждения постоянства доминирующей частоты на трассе 1 проведем анализ дисперсионных кривых. Усредним дисперсионные кривые на рис. 7а между собой для каждого из трех порядков в отдельности:

$$F_n(T) = \frac{1}{M-n} \sum_{m=1}^{M-n} F_{m,m+n}(T). \quad (18)$$

Результат усреднения представлен на рис. 7б сплошными линиями 1, 2, 3. Пунктирные линии показывают результат последующего усреднения по времени

$$F_{D,n} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(T) dT, \quad (19)$$

где $\tau_{1,2}$ – временные границы спектрограммы. Полученные численные значения $F_{D,n}$ (гармоники) приведены на рис. 7б под соответствующими пунктирными линиями. Как видно, сплошные линии близки к горизонтальным пунктирным линиям, что указывает на постоянство теоретического значения доминирующей частоты: $F_n(T) \approx F_{D,n} \approx nF_D$.

Вычислим среднее значение доминирующей частоты на трассе 1 по $N = 3$ гармоникам:

$$F_D = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{F_{D,n}}{n}. \quad (20)$$

Получаем: $F_D = 1.54 \pm 0.10$ ц/ч, где доверительный интервал вычислен с доверительной вероятностью 0.95 по критерию Стьюдента.

Для трассы 2 (рис. 7в и 7г) дисперсионные кривые с самого начала близки друг к другу и к прямым линиям. Это объясняется большей частотой звука и меньшей глубиной волновода по сравнению с трассой 1. Заметим, что на трассе 1 после примерно 12:00 дисперсионные кривые тоже сближаются, поскольку солитон выходит на мелководный шельф. Повторяя аналогичные расчеты доминирующей частоты на трассе 2 по $N = 6$ гармоникам, получаем: $F_D = 4.43 \pm 0.05$ ц/ч.

Обратим внимание, что определение доминирующей частоты изначально базировалось на усреднении (18). Например, для трассы 1 усреднялись первые шесть дисперсионных линий первого порядка. Все эти линии лежат на желтой полосе, т.е. им соответствуют доминирующие флуктуации. Другие дисперсионные линии первого порядка,

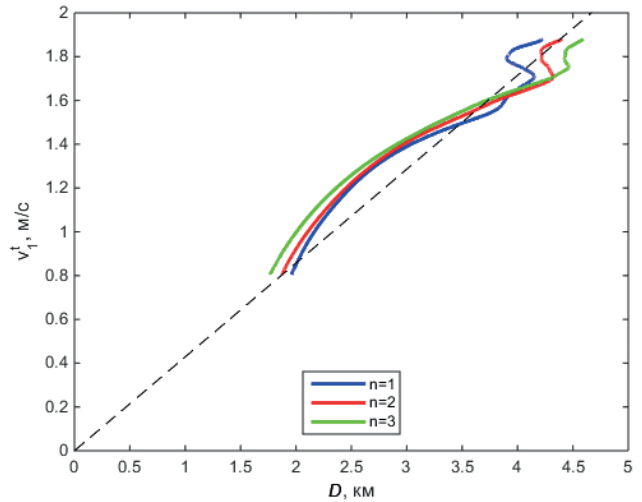


Рис. 8. Проверка пропорциональности между теоретической скоростью солитона и циклом луча на трассе 1. Цикл луча вычислен в рамках модовой теории на основе дисперсионных кривых 1, 2 и 3 порядков.

выходящие за первые шесть номеров, выходят за пределы желтой полосы (смещаются в целом выше на рис. 7а). Их учет привел бы к систематической ошибке в определении доминирующей частоты. В разделе 1 похожая ситуация описывалась при обсуждении выражения (7).

Рассмотрим другой способ анализа дисперсионных кривых, иллюстрирующий постоянство доминирующей частоты на примере трассы 1. Подставим (17) в (18). Учитывая, что на первой трассе скорость солитона $v'_1(T)$, получаем

$$F_n(T) = \frac{v'_1(T)}{D_n(T)}, \quad (21)$$

$$D_n(T) = \left[\frac{1}{M-n} \sum_{m=1}^{M-n} \frac{1}{\Lambda_{m,m+n}(T)} \right]^{-1}. \quad (22)$$

Сравнивая с формулами лучевой теории (раздел 1), можем записать приближенные равенства: $F_n(T) \approx nF_D(T)$, $D_n(T) \approx D(T)/n$, где $D(T)$ – цикл луча, определяющий доминирующие флуктуации. Если имеет место постоянство доминирующей частоты $F_D(T) = \text{const}$, то значения $v'_1(T)$ должны быть пропорциональны значениям $D(T) = nD_n(T)$ при каждом T . В последнем равенстве величина $D(T)$ получена на основе (22) и является модовым аналогом цикла луча, определяющего доминирующие флуктуации. Для краткости будем употреблять термин “цикл луча” также для этой величины.

На рис. 8 изображены зависимости теоретической скорости солитона v'_1 от цикла луча D , полученные по приведенным выше формулам при

разных n за все время движения солитона по трассе 1 (за 5 часов 54 мин, 07:54–13:48), что на 1 час больше интервала спектрограммы. Пунктирная линия описывается уравнением прямой: $v_1' = F_D D$, где $F_D \approx 1.54$ ц/ч рассчитано согласно (20) за полное время 07:54–13:48. Из рис. 8 можно сделать вывод о достаточно близкой пропорциональности между скоростью солитона и циклом луча, что указывает на постоянство доминирующей частоты.

2.4. Метод гистограмм

Перейдем к анализу экспериментальных спектрограмм. Цветные изображения на рис. 7 дают очень грубое представление о спектре доминирующих частот. Например, на спектрограмме для трассы 1 визуально не наблюдаются вторая и третья гармоники. А на спектрограмме для трассы 2 первая и вторая гармоники визуально сливаются в одну желтую полосу. Вместе с этим, детальный анализ спектров на каждой вертикали спектрограмм показывает, что в спектрах существуют слабо выраженные локальные максимумы, соответствующие гармоникам.

Уточним, как находятся локальные максимумы в спектрах. Под спектрами $G_k(\Omega) = G(\Omega, T_k)$ здесь понимаются сечения спектрограммы (16) вдоль оси частот Ω при каждом фиксированном времени $T = T_k$, $k = 1, 2, \dots, K$. Спектрограмма для трассы 1 (рис. 7а, 7б) имеет шаг по времени $\delta T = T_{k+1} - T_k = 5$ мин и состоит из $K = 61$ спектров. Спектрограмма для трассы 2 (рис. 7в, 7г) имеет шаг по времени $\delta T = 1$ мин и состоит из $K = 63$ спектров. Заметим, что для трассы 1 шаг δT совпадает с периодом

следования акустических импульсов источника S1, а для трассы 2 шаг δT приблизительно в 15 раз больше периода следования акустических импульсов источника S2. Иными словами, на трассе 1 обрабатывался каждый принимаемый импульс, а на трассе 2 – каждый пятнадцатый. Из-за использования в (16) оконной функции Хемминга все полученные спектры $G_k(\Omega)$ представляют собой плавные функции, имеющие ряд локальных максимумов при неких частотах Ω_{ks} , $s = 1, 2, \dots, S$.

Положение и количество локальных максимумов в спектрах $G_k(\Omega)$ варьируется с течением времени, что объясняется взаимодействием спектральных пиков на дисперсионных кривых. Если в статистическом смысле доминирующая частота и ее гармоники остаются постоянными при движении солитона, то, вычисляя гистограмму распределения локальных максимумов по всем спектрам в спектрограмме за достаточно продолжительный промежуток времени, можно выделить гармоники по соответствующим максимумам гистограммы.

На рис. 9 приведены гистограммы распределения локальных максимумов для трасс 1 и 2. Как видно, максимумы гистограмм явно указывают на положение кратных частот флуктуаций (экспериментальных гармоник) в отличие от исходных цветных спектрограмм. Значения частот флуктуаций, соответствующие максимумам гистограмм, подписаны возле каждого пика. Для сравнения пунктирными линиями показаны положения теоретических гармоник $F_{D,n}$, вычисленных согласно (19). Возле пунктирных линий подписаны значения $F_{D,n}$.

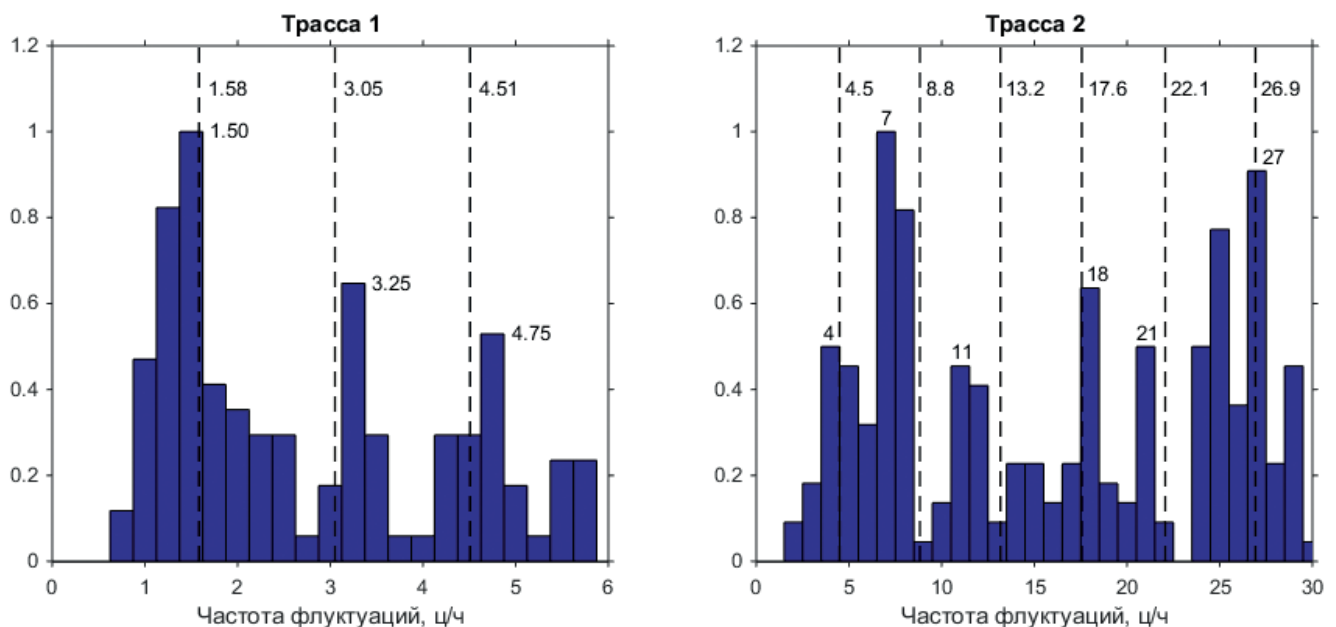


Рис. 9. Гистограммы распределения локальных максимумов, определяемых на каждой вертикали в спектрограммах.

Таблица 2. Значения доминирующих частот на трассах 1 и 2.

	Теория, ц/ч	Эксперимент, ц/ч
Трасса 1	1.54 ± 0.10	1.57 ± 0.16
Трасса 2	4.43 ± 0.05	4.06 ± 0.44

В табл. 2 приведены средние значения экспериментальных и теоретических доминирующих частот вместе с их доверительными интервалами. Наблюдается хорошее соответствие результатов на обеих трассах.

Напомним, что теоретический расчет доминирующей частоты проводился путем усреднения дисперсионных кривых, полученных для первых $M = 7$ мод. Данное число мод было выбрано в результате сравнения экспериментальных доверительных интервалов доминирующей частоты с теоретическими, полученными при разном числе мод. Как видно из рис. 10, при $M = 7$ экспериментальные и теоретические доверительные интервалы максимально близки на обеих трассах.

Интересно отметить, что первые 7 мод, взаимодействие между которыми определяет доминирующие флуктуации на обеих трассах, не являются в равной степени энергонесущими модами. Это следует из рис. 11, где приведены значения модулей амплитуд мод $|A_m(r)|$ на трассах 1 и 2 в отсутствие солитона. При этом комплексная амплитуда звукового поля выражается через амплитуды мод $A_m(r)$ равенством

$$P = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_m A_m(r) \psi_m(r, z), \quad (23)$$

где $\psi_m(r, z)$ — собственные функции мод. Расчетное выражение для $A_m(r)$ следует из формулы (21) работы [19].

2.5. Угловая зависимость флуктуаций

Рассмотрим прямолинейный фронт солитона, движущийся с постоянной скоростью v_\perp в однородном волноводе и пересекающий две акустические трассы под углами α_1 и α_2 . Тогда выполняется равенство (3), характеризующее угловую зависимость доминирующей частоты флуктуаций.

Проверим выполнимость описанных выше условий для трасс 1 и 2 в эксперименте ASIAEX. Спутниковые снимки показывают, что фронт солитона можно считать приблизительно прямолинейным (рис. 3). В интервале 11:53–13:48 (1 час 55 мин) солитон перемещается одновременно по обеим трассам. При этом фронт солитона находится внутри треугольника E2–E3–E4 (рис. 4а). Большая часть площади этого треугольника представляет собой зону шельфа со сглаженным рельефом и средней глубиной 130 м. Исключение составляет километровая окрестность точки E2 (край бровки шельфа), где глубина моря резко возрастает до 200 м в точке E2. Пренебрегая влиянием этой окрестности, будем считать, что в треугольнике E2–E3–E4 солитон имеет постоянную скорость v_\perp перпендикулярно фронту и постоянный угол β наклона фронта к оси долгот ($-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$). Зная координаты точек E2, E3, E4 и время прихода T2, T3, T4 на них солитона (табл. 1), можно рассчитать величины v_\perp и β . Затем, зная координаты начала и

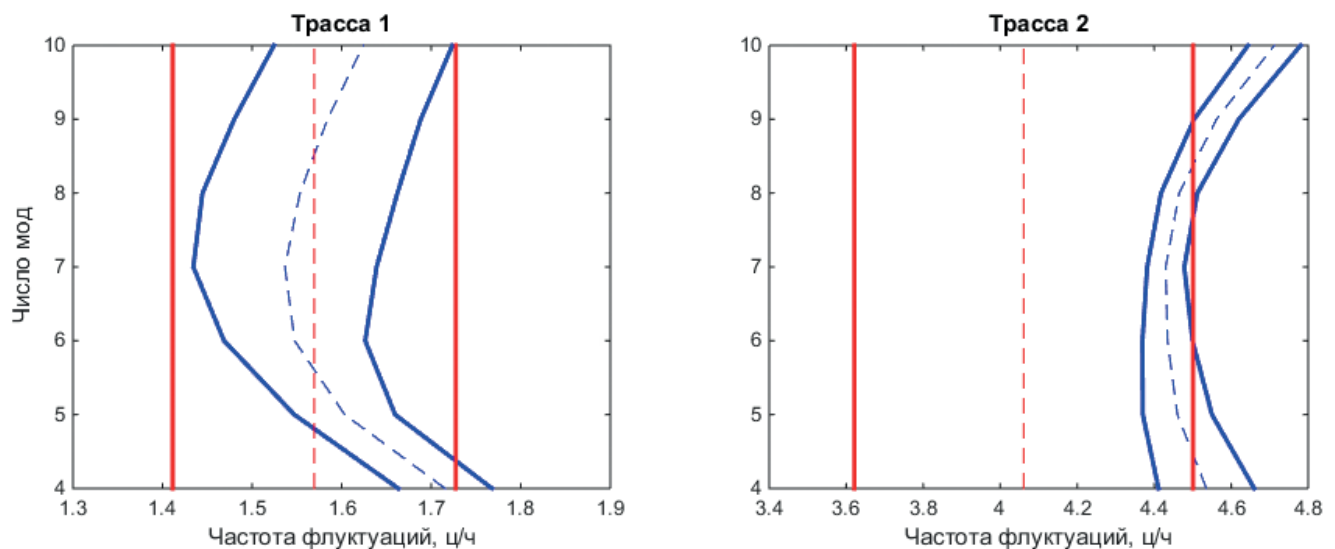


Рис. 10. Красные сплошные линии — границы экспериментальных доверительных интервалов доминирующей частоты. Синие сплошные линии — границы теоретических доверительных интервалов доминирующей частоты, полученные при заданном числе M мод. Интервалы максимально близки при $M = 7$ на обеих трассах.

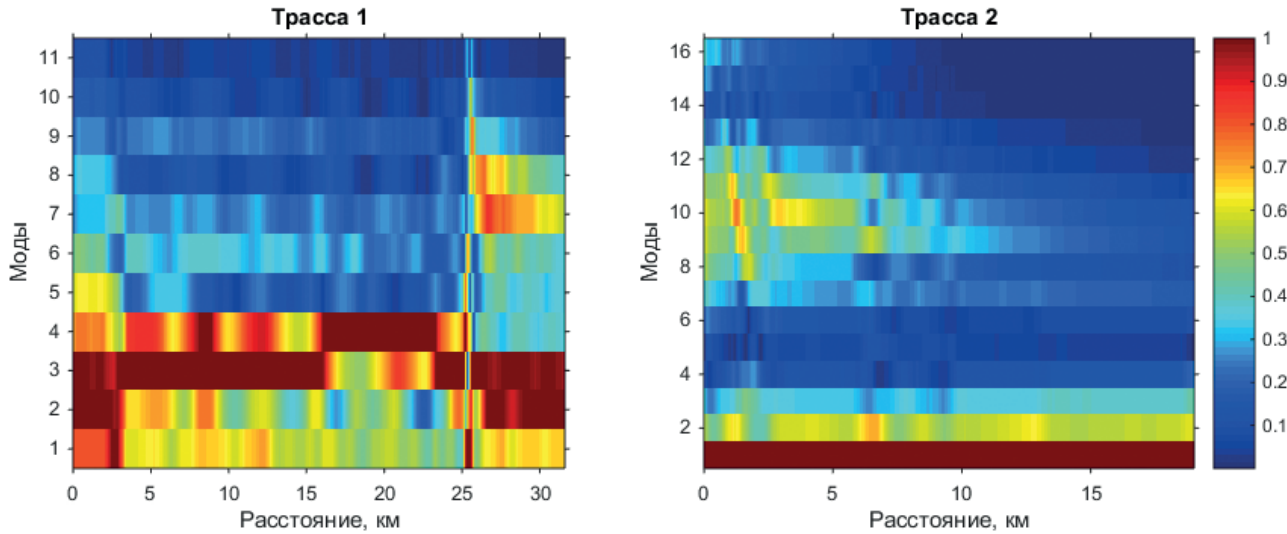


Рис. 11. Зависимость модулей амплитуд мод от расстояния на трассах 1 и 2. Картины нормированы на максимум на каждой вертикали.

конца акустических трасс 1 и 2, можно найти углы α_1 и α_2 наклона фронта солитона к этим трассам.

Приведем решение задачи в общем виде. Пусть точки 1, 2, 3 образуют треугольник; ϕ_k и θ_k ($k = 1, 2, 3$) — долгота и широта точек в радианах, t_k — времена прихода солитона на точки. Введем декартову систему координат с центром в точке (ϕ_0, θ_0) , которую предполагаем расположенной недалеко от заданного треугольника. Ось x направим по оси долгот, ось y — по оси широт. Тогда декартовы координаты точек 1, 2, 3 равны:

$$\begin{aligned} x_k &= (\phi_k - \phi_0) R_E \cos \theta_0, \\ y_k &= (\theta_k - \theta_0) R_E, \end{aligned} \quad (24)$$

где $R_E = 6364$ км — радиус Земли. Обозначим: $\Delta x_{lk} = x_l - x_k$, $\Delta y_{lk} = y_l - y_k$, $\Delta t_{lk} = t_l - t_k$. В введенных обозначениях решение задачи на поиск v_\perp и β имеет вид

$$\beta = \arctg \frac{\Delta y_{12} \Delta t_{13} - \Delta y_{13} \Delta t_{12}}{\Delta x_{12} \Delta t_{13} - \Delta x_{13} \Delta t_{12}}, \quad (25)$$

$$v_\perp = \frac{\Delta y_{12} - \Delta x_{12} \tg \beta}{\Delta t_{12}}. \quad (26)$$

Если $\Delta t_{12} = 0$, то нужно поменять местами нумерацию точек 2 и 3.

Для треугольника E2–E3–E4 получаем значения: $v_\perp = 0.89$ м/с, $\beta = 39.7^\circ$. Для иллюстрации на рис. 4а изображен восстановленный фронт солитона в рассматриваемом треугольнике в момент времени 12:20. Интересно отметить, что если предположить прямолинейность и равномерность движения фронта солитона в треугольнике E1–E2–E4, то получаем значения: $v_\perp = 1.62$ м/с, $\beta = 39.3^\circ$. Таким

образом, угол наклона фронта солитона практически не меняется при переходе из одного треугольника в другой, а меняется только его скорость. Это объясняется тем, что фронт солитона практически параллелен линии E2–E4, которая в свою очередь приблизительно совпадает с линией бровки шельфа.

Пусть (x_{S1}, y_{S1}) и (x_{S2}, y_{S2}) — декартовы координаты источников S1 и S2 при расположении начала координат в точке VLA. Тогда углы наклона фронта солитона к трассам 1 и 2 находятся по формулам:

$$\alpha_1 = 180^\circ - \beta + \arctg \frac{y_{S1}}{x_{S1}}, \quad (27)$$

$$\alpha_2 = \beta - \arctg \frac{y_{S2}}{x_{S2}}. \quad (28)$$

Численные значения углов равны: $\alpha_1 = 68.6^\circ$, $\alpha_2 = 18.7^\circ$.

Экспериментальные значения доминирующих частот на трассах 1 и 2 равны: $F_{D1} = 1.57 \pm 0.16$ ц/ч, $F_{D2} = 4.06 \pm 0.44$ ц/ч (табл. 2). Отсюда:

$$\begin{aligned} F_{D1} \sin \alpha_1 &= 1.46 \pm 0.15 \text{ ц/ч}, \\ F_{D2} \sin \alpha_2 &= 1.30 \pm 0.14 \text{ ц/ч}. \end{aligned}$$

Теоретические значения доминирующих частот на трассах 1 и 2 равны: $F_{D1} = 1.54 \pm 0.10$ ц/ч, $F_{D2} = 4.43 \pm 0.05$ ц/ч (табл. 2). Отсюда:

$$\begin{aligned} F_{D1} \sin \alpha_1 &= 1.43 \pm 0.09 \text{ ц/ч}, \\ F_{D2} \sin \alpha_2 &= 1.42 \pm 0.02 \text{ ц/ч}. \end{aligned}$$

Полученные доверительные интервалы в обоих случаях пересекаются, что подтверждает угловую

зависимость (3) доминирующих частот в эксперименте ASIAEX.

Напомним, что аналогичная проверка впервые была проведена в эксперименте SW06 [12, 15, 16]. Равенство $F_D \sin \alpha = \text{const}$ может быть использовано для акустического мониторинга солитонов.

Согласно (1) цикл луча, ответственного за доминирующие флуктуации, равен: $D = v_{\perp} / (F_D \sin \alpha)$. Принимая для треугольника E2–E3–E4 скорость солитона $v_{\perp} = 0.89$ м/с, среднее экспериментальное значение $F_D \sin \alpha = 1.38$ ц/ч, получаем: $D = 2.32$ км. Для среднего теоретического значения, равного $F_D \sin \alpha = 1.425$ ц/ч, получаем близкую величину: $D = 2.25$ км.

2.6. Измеренная скорость солитона

Постоянство доминирующей частоты дает возможность измерить переменную скорость солитона на трассах 1 и 2 как функцию расстояния или времени косвенным акустическим методом. Полученную таким образом скорость солитона будем называть измеренной в отличие от средней экспериментальной и теоретической скоростей солитона, которые были определены в разделах 2.1 и 2.2.

Измеренная скорость солитона как функция расстояния определяется выражением (11): $v^a(r) = F_D D(r)$, где F_D – экспериментальная доминирующая частота, $D(r)$ – цикл луча, определяющий доминирующие флуктуации и связанный с пространственными периодами биений мод выражением (10) при $M = 7$. Для иллюстрации на рис. 12а изображены пространственные периоды биений мод $\Lambda_{m,m+1}(r)$ для трассы 1, а на рис. 12б

красной линией показан сформированный из них цикл луча $D(r)$.

Если для определения измеренной скорости солитона $v^a(r)$ в качестве F_D использовать экспериментальный доверительный интервал (табл. 2), то получим интервальное значение $v^a(r)$. Покажем, как можно получить оптимальную точечную оценку $v^a(r)$, которая в общем случае будет лучше, чем точечная оценка, полученная при использовании центрального значения экспериментальной доминирующей частоты.

Для этого воспользуемся дополнительной информацией о времени прихода солитона на термисторные цепочки. Будем перебирать различные значения F_D в окрестности центрального значения экспериментальной доминирующей частоты с шагом 0.01 ц/ч. При каждом значении F_D будем вычислять скорость $v^a(r)$, а также невязки $\sigma_1(F_D)$ и $\sigma_2(F_D)$ для трасс 1 и 2 между реальными и измеренными временами прихода, аналогично тому, как это делалось в разделе 2.2 при нахождении теоретической скорости солитона. По минимуму невязки определяется оптимальная доминирующая частота F_D^* на каждой трассе, с помощью которой определяется искомая измеренная скорость солитона.

На рис. 6 синими линиями показаны зависимости измеренной скорости солитона на обеих трассах. Полученные зависимости хорошо согласуются со средней экспериментальной и теоретической скоростями. На трассе 1 измеренная скорость солитона получена при оптимальной доминирующей частоте $F_D^* = 1.58$ ц/ч, на трассе 2 – при $F_D^* = 4.49$ ц/ч. Расчетные времена прихода

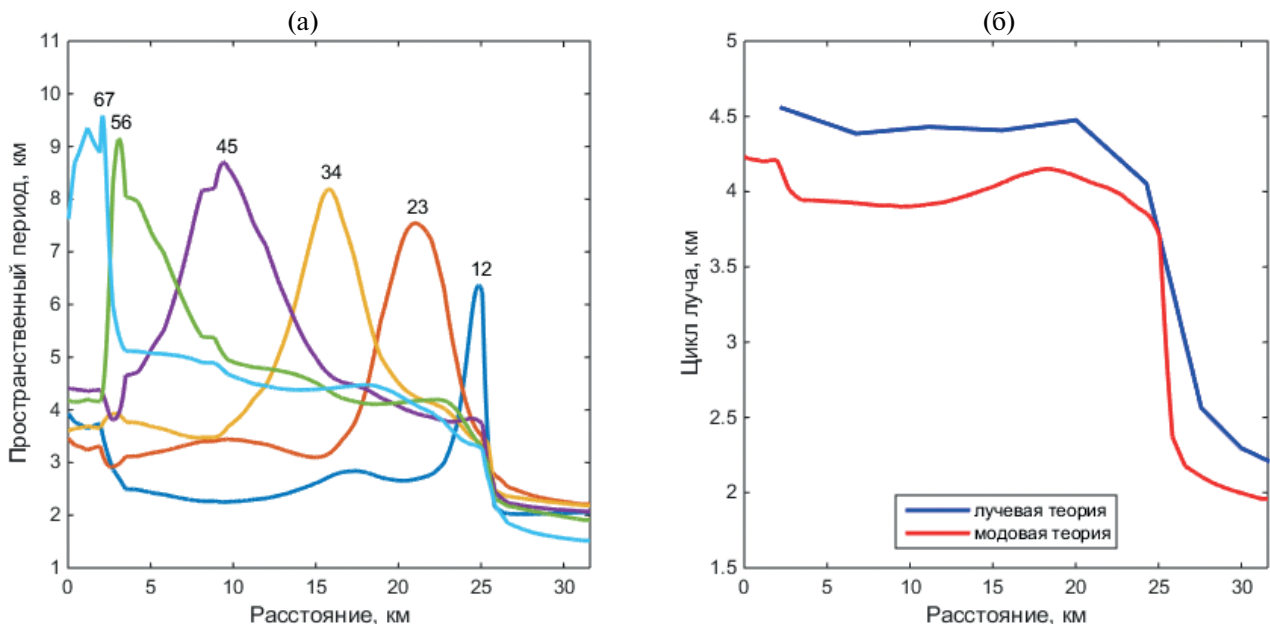


Рис. 12. (а) – Пространственные периоды биений мод с номерами m и $m+1$ для трассы 1. (б) – Цикл луча, определяющий доминирующие флуктуации, полученный в рамках модовой и лучевой теорий для трассы 1.

солитона на цепочки E2 и E3 при использовании измеренной скорости солитона отличаются от реальных времен прихода менее, чем на 0.5 мин.

Заметим, что центральные значения экспериментальной доминирующей частоты для трасс 1 и 2 равны 1.57 и 4.06 ц/ч (табл. 2). Наибольшее расхождение с оптимальными частотами F_D^* наблюдается для трассы 2. Если для расчета измеренной скорости солитона на трассе 2 использовать значение 4.06 ц/ч, то синий график на рис. 6б смещается вниз. В результате расчетное время движения солитона по трассе 2 увеличивается почти на 12 мин. При использовании оптимального значения $F_D^* = 4.49$ ц/ч, как видно из рис. 6б, синяя линия почти идеально совпадает с красной линией, т.е. с теоретической скоростью солитона.

Подчеркнем, что расчеты теоретической скорости солитона $v^t(r)$ и измеренной скорости солитона $v^a(r)$ проводятся совершенно разными методами. В первом (гидродинамическом) методе используется гидродинамическая модель солитона, как двухслойной среды. Во втором (акустическом) методе используется модовый аналог цикла луча (как некоторая комбинация пространственных периодов биения мод) и постоянство доминирующей частоты флуктуаций интенсивности акустического поля. Общими параметрами в этих методах являются глубина моря и полное время движения солитона по трассе. Причем второй параметр для акустического метода не принципиален (достаточно точного измерения экспериментальной доминирующей частоты и знания параметров волновода). Несмотря на различие методов, полученные значения скорости солитона оказываются близки, что подтверждает адекватность обоих методов. При этом особенно близки результаты для трассы 2 (рис. 6б), где вариации глубины не настолько значительны по сравнению с трассой 1.

Вышесказанное позволяет выдвинуть следующие предположения: 1) постоянство доминирующей частоты тем точнее, чем меньше вариации глубины; 2) постоянство доминирующей частоты носит универсальный характер и не является особенностью акватории ASIAEX.

2.7. Анализ лучей

Проведем анализ лучей в идеализированной модели трассы 1 с целью выделения лучей, определяющих доминирующие флуктуации. Идеализация модели заключается в следующем:

1. Реальный профиль скорости звука в канале в отсутствие солитона (рис. 4г) заменяем на близкий к нему линейный профиль: $c(z) = 1540 - (40/350)z$, где z — глубина (м), $c(z)$ — скорость звука в воде (м/с).

2. Ход лучей рассматриваем для источника и приемника, расположенных на дне (как в

работе [14]). Расстояние между источником и приемником равно длине трассы 1.

3. Экспериментальный профиль глубины $H(r)$ сглаживаем окном 1 км, чтобы получать достаточно регулярные отражения лучей от дна.

Далее, как в [14], рассмотрим узкую лучевую трубку, выходящую из источника и ограниченную в вертикальной плоскости углами скольжения к горизонтали, равными χ и $\chi + \Delta\chi$. Найдем такой угол χ , при котором соответствующая лучевая трубка накрывает точечный приемник. Иными словами, найдем один из так называемых собственных лучей, для которого решена задача прицеливания. Пусть в окрестности приемника лучевая трубка найденного собственного луча имеет угол скольжения $\chi' > 0$ и по горизонтали занимает расстояние Δr . Тогда интенсивность звука в точке приема, создаваемая данным собственным лучом, с точностью до несущественного постоянного множителя будет равна [14]

$$J = \frac{\Delta\chi \cos \chi}{\Delta r \sin \chi'} \prod_{l=1}^L |V_l|^2, \quad (29)$$

где $V_l = (a - b)/(a + b)$ — коэффициент отражения от дна, L — число отражений от дна до момента попадания лучевой трубки на приемник, $a = (\rho_b/\rho) \sin \chi_l$, $b = \sqrt{n_l^2 - \cos^2 \chi_l}$, $n_l = [c(H_l)/c_b](1 + i\beta_\lambda/54.6)$ — комплексный показатель преломления в точке отражения на глубине H_l , χ_l — угол скольжения в точке отражения по отношению к касательной к поверхности дна, $\rho_b/\rho = 1.6$ — отношение плотности дна к плотности воды, $c_b = 1600$ м/с — скорость звука в дне, $\beta_\lambda = 0.8$ дБ/λ — потери в дне. Численные значения последних трех параметров взяты из [19].

На рис. 13а показана вычисленная согласно (29) зависимость $J = J(\chi)$ — угловой спектр интенсивности всех собственных лучей, связывающих источник и приемник. Данный спектр можно разделить на три области:

1. $\chi < 0.1$ рад — лучи распространяются вблизи дна. При наличии солитона на трассе эти лучи проходят под солитоном и слабо взаимодействуют с ним.

2. $0.1 < \chi < 0.2$ рад — лучи проходят через область, занимаемую солитоном, и при этом интенсивность некоторых лучей из этой области ($\chi = 0.17$ и 0.19 рад) принимает максимальные значения.

3. $\chi > 0.2$ рад — лучи проходят через область, занимаемую солитоном, но сильно затухают из-за многократных отражений от дна.

Таким образом, доминирующие флуктуации интенсивности при движении солитона на трассе будут определяться лучами в диапазоне $0.17 - 0.19$ рад. На рис. 13б показана траектория среднего

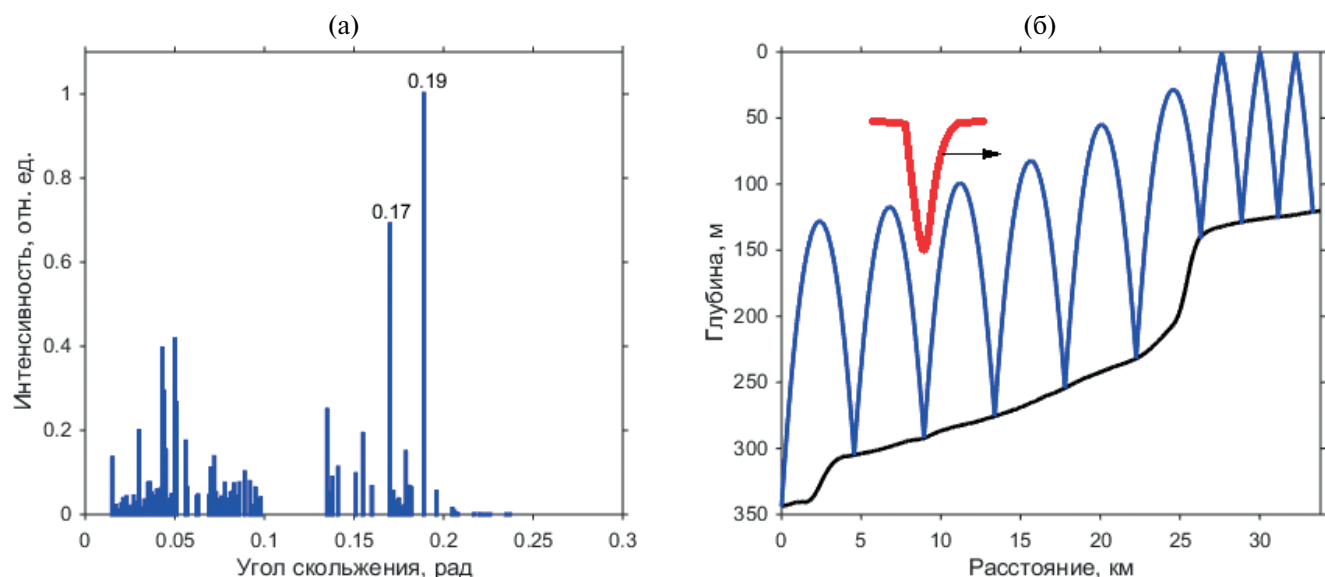


Рис. 13. Анализ лучей на трассе 1. (а) – Угловой спектр интенсивности собственных лучей, связывающих источник и приемник, в зависимости от угла выхода из источника. (б) – Траектория луча, ответственного за доминирующие флуктуации (угол скольжения на выходе из источника равен 0.18 рад).

луча при $\chi = 0.18$ рад. Цикл этого луча $D(r)$ будет определять доминирующие флуктуации. Найдем значения $D(r)$ по расстояниям между соседними минимумами в траектории луча на рис. 13б и присвоим полученные значения средним точкам между минимумами. В итоге получается зависимость, изображенная синей линией на рис. 12б. Как видно, синяя линия близка к красной, т.е. к циклу луча, полученному в рамках модовой теории. Вычисление доминирующей частоты с использованием полученного цикла луча приводит к результату $F_D = v'_1(r)/D(r) = 1.41 \pm 0.05$ ц/ч. Это значение отличается на 10% от значений для трассы 1, приведенных в табл. 2, что можно объяснить упрощением профиля скорости звука в воде в лучевой модели. Но относительная малость доверительного интервала указывает на постоянство доминирующей частоты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение перечислим основные результаты, полученные в работе.

1. Проанализированы причины постоянства доминирующей частоты флуктуаций интенсивности звука при неравномерном движении солитона в акустическом волноводе переменной глубины. Для этого солитон рассматривается в рамках двухслойной модели водной среды, а распространение звука – в рамках модовой и лучевой теорий. Согласно лучевой теории, доминирующая частота флуктуаций определяется отношением скорости солитона к циклу луча, ответственному за доминирующие флуктуации. В модовой теории получено аналогичное выражение, где роль цикла луча

играет комбинация пространственных периодов биения нескольких пар мод. Показано, что при изменении глубины моря скорость солитона и цикл луча изменяются практически пропорционально, в результате чего доминирующая частота флуктуаций остается постоянной. Описанное явление может иметь универсальный характер и не ограничиваться акваторией ASIAEX.

2. Постоянство доминирующей частоты позволяет определить переменную скорость солитона как функцию времени или расстояния, что успешно продемонстрировано в работе и может быть использовано для акустического мониторинга солитонов.

3. Для обработки эксперимента предложен и апробирован метод гистограмм, который тоже основан на постоянстве доминирующей частоты с течением времени. Метод гистограмм позволяет выделить гармоники доминирующей частоты, знание которых повышает точность измерения доминирующей частоты. В свою очередь от точности последней зависит точность акустического мониторинга солитонов, в частности, определение их скорости и угла наклона фронта к трассе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-10121, <https://rscf.ru/project/22-72-10121/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Newhall A., Costello L., Duda T., Dunn J., Gawarkiewicz G., Irish J., Kemp J., McPhee N., Liberatore S., Lynch J., Ostrom W., Schroeder T., Trask R., Keith von der Heydt. Preliminary acoustic and oceanographic observations from the ASIAEX 2001 South China Sea

- experiment // Woods Hole Oceanog. Inst. 2001. Tech. Rep. WHOI-2001–12.
2. *Apel J.R., Ostrovsky L.A., Stepanyants Y.A., Lynch J.F.* Internal solitons in the ocean // Woods Hole Oceanog. Inst. 2006. Tech. Rep. WHOI-2006–04.
3. *Jackson C.R., Apel J.R.* An atlas of internal solitary-like waves and their properties. Global Ocean Associates. 2nd Edition. 2004. <http://www.internalwaveatlas.com>
4. *Duda T.F., Lynch J.F., Irish J.D., Beardsley R.C., Ramp S.R., Chiu C.-S., Tang T.Y., Yang Y.-J.* Internal tide and nonlinear internal wave behavior at the continental slope in the northern South China Sea // IEEE J. Oceanic Eng. 2004. V. 29. № 4. P. 1105–1130.
5. *Huang X., Zhao W., Tian J., Yang Q.* Mooring observations of internal solitary waves in the deep basin west of Luzon Strait // Acta Oceanol. Sin. 2014. V. 33. № 3. P. 82–89.
6. *Серебряный А.Н.* Исследование особенностей внутренних волн в проливе Лусон Южно-Китайского моря по их поверхностным проявлениям с помощью судового радиолокатора // Шестая всероссийская открытая ежегодная конференция “Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса”. Москва, ИКИ РАН, 10–14 ноября 2008. http://d33.infospace.ru/d33_conf/2008_conf_pdf/L/Serebreniu.pdf
7. *Ramp S.R., Yang Y.J., Bahr F.L.* Characterizing the nonlinear internal wave climate in the northeastern South China Sea // Nonlin. Processes Geophys. 2010. V. 17. № 5. P. 481–498.
8. *Ramp S.R., Tang T.Y., Duda T.F., Lynch J.F., Liu A.K., Chiu C.-S., Bahr F.L., Kim H.-R., Yang Y.-J.* Internal solitons in the northeastern South China Sea. Part I: sources and deep water propagation // IEEE J. Oceanic Eng. 2004. V. 29. № 4. P. 1157–1181.
9. *Кацнельсон Б.Г., Переселков С.А.* Горизонтальная рефракция низкочастотного звукового поля, вызванная солитонами внутренних волн в мелководном волноводе // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 6. С. 779–788.
10. *Кацнельсон Б.Г., Бади М., Линч Дж.* Горизонтальная рефракция звука в мелком море и ее экспериментальные наблюдения // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 3. С. 362–376.
11. *Grigorev V.A., Katsnelson B.G., Lynch J.F.* Bottom attenuation estimation using sound intensity fluctuations due to mode coupling by nonlinear internal waves in shallow water // J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 140. № 5. P. 3980–3994.
12. *Katsnelson B., Grigorev V., Lynch J.F.* Intensity fluctuations of mid-frequency sound signals passing through moving nonlinear internal waves // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V. 124. № 3. Pt. 2. P. EL78–EL84.
13. *Katsnelson B.G., Grigorev V., Badiy M., Lynch J.F.* Temporal sound field fluctuations in the presence of internal solitary waves in shallow water // J. Acoust. Soc. Am. 2009. V. 126. № 1. P. EL41–EL48.
14. *Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г.* Флуктуации интенсивности высокочастотных акустических импульсов, вызванные движением солитонов внутренних волн в мелком море // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 1. С. 47–55.
15. *Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Lynch J.F.* Угловая зависимость флуктуаций интенсивности высокочастотных сигналов, пересекающих фронт движущихся интенсивных внутренних волн // Доклады XII научной школы-семинара им. акад. Л.М. Бреховских “Акустика океана”, совмещенной с XXI сессией Российского Акустического Общества. М.: ГЕОС, 2009. С. 63–66.
16. *Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Lynch J.F.* Флуктуации энергии высокочастотных звуковых сигналов в мелком море в присутствии нелинейных внутренних волн // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 4. С. 485–493.
17. *Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г.* Флуктуации звука, обусловленные взаимодействием мод на движущихся нелинейных внутренних волнах в мелком море // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 3. С. 262–271.
18. *Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Lynch J.F.* Флуктуации интенсивности звука, обусловленные взаимодействием мод на движущихся нелинейных внутренних волнах в мелком море // Ученые записки физического факультета МГУ. 2014. № 6. 146333.
19. *Jiang Y., Grigorev V., Katsnelson B.* Sound field fluctuations in shallow water in the presence of moving nonlinear internal waves // J. Mar. Sci. Eng. 2022, 10(1), 119.
20. *Katsnelson B., Grigorev V., Jiang Y.* Intensity fluctuations due to mode coupling in the presence of moving internal waves in shallow water and estimation of bottom parameters // Proc. of the 29th Int. Congress on Sound and Vibration. Edited by Eleonora Carletti. Prague, 9–13 July 2023. P. 1–5.
21. *Apel J.R., Badiy M., Ching-Sang Chiu, Finette S., Headrick R., Kemp J., Lynch J.F., Newhall A., Orr M.H., Pasewark B.H., Tielbuerger D., Turgut A., Keith von der Heydt, Wolf S.* An overview of the 1995 SWARM shallow-water internal wave acoustic scattering experiment // IEEE J. Oceanic Eng. 1997. V. 22. № 3. P. 465–500.
22. *Newhall A.E., Duda T.F., Keith von der Heydt, Irish J.D., Kemp J.N., Lerner S.A., Liberatore S.P., Ying-Tsong Lin, Lynch J.F., Maffei A.R., Morozov A.K., Shmelev A., Sellers C.J., Witzell W.E.* Acoustic and oceanographic observations and configuration information for the WHOI moorings from the SW06 experiment // Woods Hole Oceanog. Inst. 2007. Tech. Rep. WHOI-2007–04.
23. *Vincenty T.* Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations // Survey Review. 1975. V. 23. № 176. P. 88–93. <http://www.movable-type.co.uk/scripts/latlong-vincenty.html>
24. *Pelinovsky E., Talipova T., Didenkulova I., Didenkulova (Shurgalina) E.* Interfacial long traveling waves in a two-layer fluid with variable depth // Stud. Appl. Math. 2018. P. 1–15.

SOUND INTENSITY FLUCTUATIONS CAUSED BY THE MOTION OF INTERNAL WAVE SOLITONS IN THE ASIAEX EXPERIMENT

V. A. Grigoriev^{a,b,*}

^a*Voronezh State University, Universitetskaya sq. 1, Voronezh, 394018 Russia*

^b*A.M. Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, st. Vavilova 38, Moscow, 119991 Russia*

**e-mail: grig4@yandex.ru*

One of the episodes of the ASIAEX 2001 experiment (South China Sea) is considered, in which a large soliton of internal waves moved along two stationary acoustic paths 32 and 19 km long, and associated fluctuations in the intensity of low-frequency sound (224 and 300 Hz) were observed. During the study, the phenomenon of constancy of the dominant frequency of fluctuations over time was discovered. For example, during a six-hour soliton motion along a long path, where the sea depth changed three times (from 350 to 120 m), and the soliton velocity – two times (from 2 to 1 m / s), the dominant frequency of fluctuations remained approximately constant and equal to 1.5 c / h with an accuracy of 10%. The paper analyzes the causes of this phenomenon. For this purpose, the soliton is considered within the framework of a two-layer model of the aquatic environment, and sound propagation – within the framework of the mode and ray theories. According to the ray theory, the dominant frequency of fluctuations is determined by the ratio of the soliton velocity to the ray cycle responsible for the dominant fluctuations. In the mode theory, a similar expression is obtained, where the role of the ray cycle is played by a combination of spatial beat periods of several pairs of modes. It is shown that with a change in the sea depth, the soliton velocity and the ray cycle change almost proportionally, as a result of which the dominant frequency of fluctuations remains constant. The described phenomenon may be universal and not limited to the ASIAEX water area. The constancy of the dominant frequency allows, in particular, to determine the variable soliton velocity as a function of time or distance, which is successfully demonstrated in the work and can be used for acoustic monitoring of solitons.

Keywords: ASIAEX, internal wave soliton, sound intensity fluctuations, dominant frequency of fluctuations, determination of soliton velocity

УДК 534.222.1

АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, ОБРАЗУЮЩЕГОСЯ НАД ПЛОСКОЙ ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2024 г. И. В. Беляев^а, В. Ф. Копьев^{а,*}, М. А. Миронов^{а,**}

^аФАУ ЦАГИ, Научно-исследовательский московский комплекс ЦАГИ,
ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия

*e-mail: vkopiev@mktsagi.ru

**e-mail: mironov_ma@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2024 г.

После доработки 29.08.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Изложена последовательная теория генерации звука в турбулентном пограничном слое, развивающемся над плоской гладкой границей при малых числах Маха. Основным источником звука и длинноволновой части пульсаций давления на обтекаемой границе являются приходящие сдвиговые (вязкие) волны, генерируемые Лайтхилловскими квадрупольями в пристенной области турбулентного пограничного слоя. Показано, что при увеличении числа Рейнольдса (уменьшении вязкости) роль вязкости в генерации звука не уменьшается, а увеличивается. Даны количественные оценки спектра удельной звуковой мощности, генерируемой в турбулентном пограничном слое.

Ключевые слова: аэроакустика, турбулентный пограничный слой, вязкость

DOI: 10.31857/S0320791924060067, **EDN:** JTPWKV

ВВЕДЕНИЕ

Описание генерации звука турбулентными течениями было впервые предложено в фундаментальных работах Лайтхилла [1, 2] применительно к безграничной среде и малым скоростям потока. При этом исходные уравнения динамики сплошной среды сведены к волновому уравнению, в правой части которого имеются слагаемые, квадратичные по пульсационным компонентам скорости движения среды. Согласно теории Лайтхилла, эти слагаемые и рассматриваются как источник звука (т.н. акустическая аналогия [3–5]). Как следствие, нестационарное, нелинейное, турбулентное движение среды с точки зрения акустики оказывается аналогичным волновому линейному процессу, возбуждаемому источниками звука специального вида.

В соответствии с теорией Лайтхилла турбулентность, как источник звука, аналогична распределенной системе квадрупольей, т.е. пар сил, равных по величине и противоположных по направлению. Точки приложения сил в каждой паре находятся друг от друга на расстоянии, много меньшем длины волны излучаемого звука. Акустические поля сил в каждом квадруполье почти полностью взаимно уничтожаются из-за противоположной

направленности сил, поэтому свободная турбулентность при малых скоростях потока является неэффективным источником звука. Работы Лайтхилла являются основой как теории шума турбулентности в отсутствие границ, так и расчетных методик и интерпретации экспериментов [3–5].

Далее естественно возникает вопрос о влиянии границы на генерацию аэродинамического шума турбулентными течениями. Границы обтекаемого тела играют двойную роль в процессе излучения звука турбулентностью. Во-первых, граница изменяет течение и, собственно говоря, порождает турбулентность. Во-вторых, наличие границы может изменить излучаемый звук уже имеющейся турбулентности. Обобщение теории Лайтхилла на случай течения вблизи границ впервые было выполнено в работе Кёрла [6], где показано, что граница акустически эквивалентна системе дипольей, т.е. сил, распределенных по ней и равных силам, фактически действующим со стороны границы на среду. Акустические поля этих сил, в отличие от сил, входящих в квадрупольи в свободном пространстве, не уничтожаются друг другом, поэтому турбулентность вблизи границы, вообще говоря, должна излучать звук более эффективно, чем свободная турбулентность.

Этот эффект можно рассматривать и с точки зрения теории рассеяния. Поля квадрупольей, присутствующих в турбулентном потоке, рассеиваются на границе тела, что эквивалентно добавлению внешней силы [7–10]. Для акустически компактных тел (характерный размер тела меньше длины волны) такой подход позволяет искать форму тела, обеспечивающего снижение амплитуды индуцированных квадрупольными источниками диполей и тем самым снижать шум обтекания этого тела потоком [7, 11].

Что будет, если размеры тела большие? На первый взгляд, кажется, что дипольные источники существуют независимо от того, большое тело или маленькое: турбулентность действует на тело, по третьему закону Ньютона тело действует на среду и излучается дипольный звук. Естественно, на самом деле не все так просто. Решающую роль играет пространственная корреляция сил.

В работе Крейчнана [12] рассмотрен предельный случай очень большого тела — жесткой плоскости, около которой имеется турбулентный поток — турбулентный пограничный слой (ТПС). Со стороны плоскости на среду действуют нормальные и касательные силы. В работе [12] показано, что плоскость выступает в роли зеркала, которое отражает звук, излучаемый объемной турбулентностью (это приводит к дополнительному квадрупольному излучению), но кроме того плоскость действительно создает излучающие дипольные силы, не сводящиеся к эффекту отражения. Эти силы направлены по касательной к границе и вызваны вязкими напряжениями. Если пренебречь вязкостью для течений с большими числами Рейнольдса, то плоская граница является зеркальным отражателем. Аналогичные расчеты в том же году были выполнены Филлипсом [13].

Более выпукло этот анализ дал Пауэлл [14]. Пауэлл очень определенно утверждал, что эти касательные силы, хотя, в принципе, и могут существовать (речь идет, конечно, о переменной компоненте касательных сил, а не о постоянной силе сопротивления), но должны быть очень малы для течений с большими числами Рейнольдса, так как по данным многочисленных измерений пульсационные касательные напряжения на порядок меньше по амплитуде, чем пульсационные нормальные напряжения (см. напр. [15]). Поэтому в работе [14] был сделан вывод, что на плоской границе турбулентность излучает только квадрупольно, а дипольного излучения нет. Впоследствии этот вывод стал называться теоремой Крейчнана-Филлипса, которую можно математически сформулировать следующим образом: “Для несжимаемого, однородного, турбулентного течения над плоской, жесткой границей частотно-волновой спектр пульсаций давления на поверхности $p(k, \omega) \rightarrow 0$ для волнового числа $k \rightarrow 0$ при условии, что частота $\omega \neq 0$ ” [16].

Вопрос о том, следует ли принимать касательные напряжения во внимание при практических оценках, имеет принципиальное значение для течений со скоростями, малыми по сравнению со скоростью звука. Простые оценки с использованием анализа размерностей показывают [4], что излучаемая мощность в течениях с диполями в $1/M^2$ раз больше, чем в течениях без диполей ($M = U/c$ — отношение характерной скорости течения к скорости звука). Если M — малая величина, то наличие дипольных источников должно существенно увеличивать интенсивность излучаемого звука. В результате, как отмечено уже в [12], большая эффективность излучения касательных диполей может компенсировать малость амплитуды дипольных источников и обеспечить их значительный вклад в суммарное акустическое поле пристенной турбулентности.

В 1971 г. (а фактически года на полтора раньше) К.А. Наугольных и С.А. Рыбак [17] дали очень веский теоретический аргумент в пользу дипольного излучения для турбулентного течения над пластиной. Идея заключалась в том, чтобы более детально учесть вязкость среды вблизи плоской границы. Взаимодействие турбулентности с границей было сведено к отражению плоских сдвиговых (вязких, вихревых) волн от границы. При отражении возникала, помимо сдвиговой волны, продольная волна, которую можно интерпретировать как звук (обратный эффект Константинова; прямой эффект Константинова поглощения звука при распространении акустических волн вблизи твердых границ рассмотрен в [18–20]). Иллюстрация этого механизма [17] приведена на рис. 1.

Зависимость от скорости звука в среде получалась дипольной, а интенсивность звука — большой. Предложенный подход оказался очень неожиданным и, как показало время, нетривиальным. Сила и одновременно слабость предложенного подхода была в его оригинальности — он совершенно не был связан с предшествующей идеей Крейчнана и Пауэлла и при этом апеллировал к физическому эффекту (обратный эффект Константинова), а не к математическим теоремам. Настоящая работа развивает идею Наугольных–Рыбака в части



Рис. 1. Генерация звука при отражении сдвиговой волны от плоской границы (обратный эффект Константинова) [18].

происхождения вязких волн в турбулентном пограничном слое.

Фактически, результаты Крейчнана—Пауэлла и Наугольных—Рыбака не противоречат друг другу. Они оба правильны. Первый утверждает, что, формально, на плоской границе под ТПС могут существовать касательные диполи, излучающие звук. Далее можно задаваться параметрами касательных диполей, в частном случае, считать, что амплитуда диполей равна нулю. Второй подход указывает на конкретный путь возникновения звука — преобразование вязких волн в продольные на границе. Далее можно постулировать параметры этих вязких волн. Таким образом, основной вопрос заключается в количественной оценке роли вязкости (касательных диполей на поверхности границы) при излучении звука ТПС. Однако проведение этой оценки оказывается нетривиальной задачей.

Значимость дипольного излучения шума ТПС была показана в фундаментальной работе Ланда [22]. Здесь касательные напряжения связываются с так называемыми всплесками (взрывами, bursts) в пристенной области ТПС и делается вывод, что дипольный звук возникает из-за поверхностных флуктуаций касательных напряжений, которые, в свою очередь, порождаются рейнольдсовыми напряжениями (т.е. лайтхилловскими квадрупольми) в процессе всплесков и транслируются к границе посредством вязкой диффузии. Под вязкой диффузией естественно понимать вязкие волны. Отличие этой концепции от теории [17] заключается в явном определении источника вязких волн, именно, процессов всплесков. На основе подхода Ланда [22] в работе [23] была предложена расчетная формула для оценки интенсивности звука, излучаемого касательными напряжениями ТПС.

С другой стороны, Хау в статье [24] пришел к выводу, что учет вязкости приводит не к увеличению звука, излучаемого ТПС, а, наоборот, к его снижению. В [24] рассматривается задача отражения плоской поверхностью звуковых волн, создаваемых квадрупольными источниками в турбулентном потоке. Вязкость и вязкие волны при этом учитываются с помощью условия прилипания на границе, так что при падении плоской звуковой волны кроме отраженной звуковой волны порождается еще вязкая волна (рис. 2), т.е. имеет место прямой эффект Константинова [18–20]. Вязкая волна изменяет фазовое соотношение между скоростью и давлением в звуковой волне, что приводит к уменьшению амплитуды отраженной звуковой волне. Таким образом, в работе [24] был сделан вывод, что учет вязкости среды и касательных напряжений на границе приводит не к генерации звука, а к его частичному поглощению.

Расхождение выводов работ [17] и [24] может быть объяснено тем обстоятельством, что в [24] в качестве исходного пункта взято уравнение

Лайтхилла: волновое уравнение с правой частью — лайтхилловскими квадрупольми. Оно не содержит среди своих решений сдвиговых волн, падающих на границу. В результате в данной постановке на границу падают только акустические волны, которые приводят к появлению сдвиговых волн, уходящих от границы. Как следствие, учет вязкости среды при отражении звука от жесткой поверхности, естественно, приводит только к уменьшению общей излучаемой мощности. Таким образом, подход работы [24] оказывается, как минимум, непоследовательным при учете роли вязкости среды.

Тем не менее, подход Хау [24] получил широкое распространение в литературе [25]. В работе [26] этот подход был обобщен на случай, когда толщина пограничного слоя не мала по сравнению с длиной звуковой волны и был сделан вывод о том, что вязкость (касательные диполи) вносит хотя и ненулевой, но незначительный вклад в шум ТПС по сравнению с квадрупольными источниками.

В работе Смольякова [27] проанализирована роль вязкости и вязких волн с использованием исходной системы уравнений вязкой сжимаемой среды. Здесь обращено внимание (по-видимому, впервые в журнальной литературе) на то, что турбулентность может генерировать не только потенциальное поле (звук и длинноволновые пульсации давления), но и вихревое поле (вязкие волны). Определено влияние вязкости на частотно-волновой спектр длинноволновых нормальных напряжений на поверхности пластины и найдено соотношение между спектрами касательных и нормальных напряжений при малых волновых числах. В целом автор был согласен с аргументом Крайчнана—Пауэлла о малости вязких эффектов при больших числах Рейнольдса [28]. Как будет показано в настоящей работе, и это является одним из основных ее результатов, при стремлении вязкости к нулю влияние вязкости на касательные напряжения и излучаемый ими звук не стремится к нулю.

Последовательный анализ проблемы вязкости дан в работах Чейза [29, 30]. В них подробно, но формально математически, рассматривается

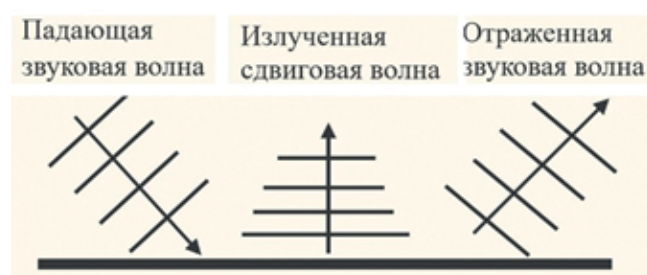


Рис. 2. Генерация сдвиговой волны при отражении от плоскости звуковой волны (прямой эффект Константинова) [18].

влияние вязкости и условия прилипания на обтекаемой границе на длинноволновую часть спектров давления и касательных напряжений. При этом в явном виде вязкие волны не формулируются. Устанавливается связь между произведениями флуктуирующей скорости, рассматриваемых в качестве источников (фактически, лайтхилловских квадруполь), и частотно-волновыми спектрами флуктуирующего давления и напряжения сдвига на границе (стенке). На этой основе исследуется результирующая спектральная плотность обычного “невихревого” вклада в давление на стенку и вклада вихревого поля как в давление на стенку, так и в напряжение сдвига, которое возникает в результате применения условия прилипания на стенке. Осторожно утверждается, что, вопреки некоторым предыдущим оценкам (в том числе и самого автора), вклад вихревого поля может доминировать в турбулентном давлении на стенке при малых волновых числах. В этих работах даже говорится о некорректности теоремы Крайчана—Филлипса об отсутствии касательных источников. Аналогичный вывод делается в обзорных работах [12, 31, 32].

В работе [33] рассмотрено преобразование вихревых волн в звуковые на границе жидкости и упругого полупространства. Оказалось, что замена недеформируемой границы на деформируемую может существенно изменить (уменьшить) амплитуду излучаемого звука. Этот эффект был рассмотрен также в работе [34].

С появлением возможностей численного анализа турбулентных течений проблема поверхностных источников под ТПС рассматривалась в ряде работ. Статья [35] посвящена физическим и численным оправданиям реального существования касательных источников под ТПС. В работе [36] обсуждалась текущая ситуация с ролью касательных диполей и возможностью численных подходов к решению этой проблемы. Отмечается, что обоснованность использования диполей вязких напряжений в качестве источника звука остается спорной. При этом если касательные источники действительно существуют, то они должны давать доминирующий вклад в излучаемый ТПС звук.

Для практических количественных оценок звука и вибрации оболочек, порождаемых ТПС, используют эмпирические модели частотно-волновых спектров пульсаций давления на обтекаемой поверхности. Они, в основном, приведены в [37–39]. Авторы всех моделей отмечают неопределенность моделируемого спектра давлений именно в области малых волновых чисел, ответственных за излучение звука и вибрации. Однако, за последние 10–15 лет появилось много работ по экспериментальному и численному исследованию касательных напряжений в пограничном слое и в течениях в канале [40–44]. В этих работах не рассматривается излучение звука касательными напряжениями, и

недостаточно данных для прямых вычислений излучаемого звука.

Основная идея настоящей работы состоит в доказательстве физического существования касательных диполей как источников звука в ТПС. Разрабатываемая теория представляет собой обобщение теории Лайтхилла, в котором учитывается также генерация вязких волн. В неограниченной среде эти вязкие волны не играют никакой роли в генерации звука, т.к. они экспоненциально быстро затухают при удалении от места генерации, однако если в пределах достижимости вязких волн есть жесткая граница, возникает новый источник звука. Разработанная теория позволяет учесть этот источник звука и получить количественные оценки спектра удельной звуковой мощности, генерируемой ТПС.

ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН КВАДРУПОЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Для выяснения принципиальной роли касательных сил на поверхности тела в генерации звука средним потоком можно пренебречь. Разумеется, при практическом приложении к высокоскоростной аэродинамике скоростью и средним сдвигом пренебрегать нельзя, однако ценность низкоскоростного приближения и низкоскоростных измерений заключается в том, что здесь касательные источники существуют (или не существуют) в чистом виде.

На рис. 3 изображена система объемных квадруполь и поверхностных диполей.

Геометрия постановки задачи и обозначения показаны на рис. 4. Ось x направлена по потоку, ось y — по нормали к обтекаемой плоскости, ось z — поперек потока. $p(x, y, z)$ — поле давления, u_x, u_y, u_z — проекции поля скорости \mathbf{u} на оси координат. Иногда ниже вместо обозначения координат (x, y, z) используются обозначения (x_1, x_2, x_3) , а проекции скоростей обозначаются (u_1, u_2, u_3) .

Исходная система уравнений — это система уравнений вязкой сжимаемой среды, в которой

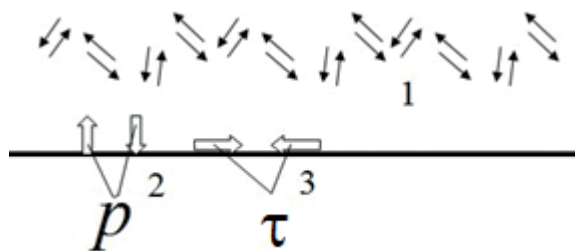


Рис. 3. Источники поля скорости в ТПС: 1 — лайтхилловские квадруполь, 2 — нормальные поверхностные диполи, 3 — касательные поверхностные диполи.

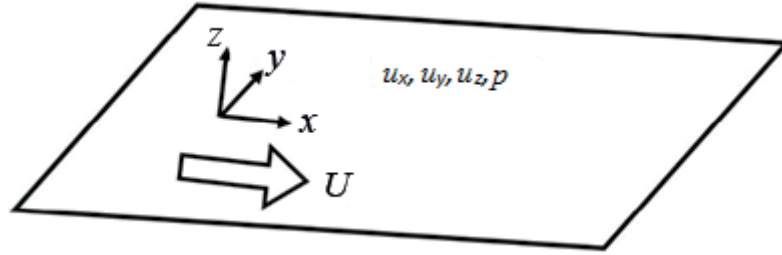


Рис. 4. Система координат, поле давления и проекции поля скорости.

нелинейное слагаемое — конвективное ускорение — перенесено в правую часть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) &= \quad (1) \\ &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle), \end{aligned}$$

p — флуктуации давления; u — флуктуации скорости; ρ_0 — средняя плотность среды; c — скорость звука; μ — коэффициент динамической вязкости,

$$F_i = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} \quad (2)$$

— поле лангмювских пульсационных напряжений, вызванное конвективным ускорением.

Система (1) — это система линейных неоднородных уравнений, описывающих как потенциальные, так и вихревые поля, порождаемые сторонними силами F . Если применить к первому уравнению дифференцирование по времени, а ко второму — оператор дивергенции, и вычесть второе из первого, то получим уравнение Лангмювского для поля давления:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \nabla F \left(= -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} \right). \quad (3)$$

При переходе от исходных уравнений (1) к уравнению Лангмювского (3) теряются вихревые волны, генерируемые лангмювскими источниками F . Они были в (1), но их нельзя получить из (3) ни добавлением в тензор напряжений T_{ij} вязких напряжений, ни с помощью учета вязких волн, порождаемых при отражении звука от границы [16]. Однако, как обсуждалось выше во Введении, без учета вихревых волн нельзя получить и касательные диполи на обтекаемой границе, излучающие звук.

Система уравнений (1) в качестве решений содержит как потенциальные, так и вихревые волны. Полное поле скорости \mathbf{u} является суммой потенциального \mathbf{u}_p и вихревого полей \mathbf{u}_r :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_r,$$

$$\text{rot } \mathbf{u}_p = 0; \text{div } \mathbf{u}_r = 0.$$

Применяя к уравнению импульса системы (1) операцию rot , получаем уравнение для вихревого поля

$$\frac{\partial \text{rot } \mathbf{u}_r}{\partial t} - \nu \text{rot } \mathbf{u}_r = \text{rot} [\mathbf{u} \text{rot } \mathbf{u}], \quad (4)$$

где $\nu = \mu / \rho_0$ — коэффициент кинематической вязкости.

Это уравнение можно назвать уравнением Лангмювского для вихревого поля. Правая часть этого уравнения является источником вихревого поля. Простейшее решение однородного уравнения (4) — плоская поперечная гармоническая волна с частотой ω и волновым числом $k_z = \sqrt{i\omega} / \nu$, распространяющаяся вдоль оси z от плоскости $z = z_0$ с поляризацией вдоль оси x :

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{xr}(z_0) \exp[+ik_z(z - z_0) - i\omega t].$$

Система (1), или пара уравнений для потенциального (3) и вихревого (4) полей, дополняется граничным условием на обтекаемой границе — условием прилипания

$$(u_x, u_y, u_z)_{y=0} = 0. \quad (5)$$

Касательные напряжения на границе определяются через нормальные производные касательных проекций скорости:

$$\tau_x = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}, \tau_y = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z}. \quad (6)$$

Важный результат относительно роли вязкости в излучении звука поверхностными источниками получается еще до вычисления поля давления и скорости. Непосредственно из условия (5) и уравнения импульсов на границе получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x_3^2}. \quad (7)$$

Закон сохранения массы (в приближении несжимаемой среды) после выражения производной

вертикальной скорости u_3 через горизонтальные производные горизонтальных проекций скорости примет вид:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и учитывая (6), получаем простую связь между нормальными и касательными напряжениями:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Как отметил еще Крейчнан [12], это соотношение ясно демонстрирует роль вязкости в структуре напряжений на обтекаемой границе. Если пренебрегать касательными напряжениями, полагая $\tau_1 = \tau_2 = 0$, то вертикальный градиент давления на границе равен нулю. Для невязкой среды это соответствует очевидному условию равенства нулю нормальной скорости.

Соотношение (9) позволяет получить фундаментальную связь волновых спектров нормальных и касательных напряжений на границе. Представляя поле в пристенной области ТПС – вязком подслое [45] – в виде набора свободных плоских волн, и переходя к частотно-волновым спектрам напряжений, получаем из (9) соотношение для спектров:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\omega, k_x, k_y) &= \frac{k_x}{q_z} \tilde{\tau}_x(\omega, k_x, k_y) + \\ &+ \frac{k_y}{q_z} \tilde{\tau}_y(\omega, k_x, k_y). \end{aligned} \quad (10)$$

k_x, k_y – волновые числа в плоскости $z=0$, $q_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2}$ – вертикальное волновое число потенциальной волны. Знак тильды обозначает Фурье-образ соответствующей величины. Из формулы (10) непосредственно следует, что при $k_x, k_z = 0$, спектр давления точно равен нулю, независимо от равенства или неравенства нулю спектра касательных напряжений:

$$\tilde{p}(\omega, 0, 0) = 0. \quad (11)$$

Далее будут выписаны выражения для спектров давления и касательных напряжений через спектры компонент тензора рейнольдсовых (лайтхилловских) напряжений. Для компонент спектра тензора напряжений введем обозначения:

$$\begin{aligned} \rho u_1 u_1 &= g_1; \rho u_2 u_2 = g_2; \rho u_3 u_3 = g_3; \\ \rho u_1 u_2 &= g_4; \rho u_1 u_3 = g_5; \rho u_2 u_3 = g_6. \end{aligned} \quad (12)$$

Свертки этих компонент с экспонентами, соответствующими потенциальным и вихревым волнам, обозначаются через $g_{i\alpha}, g_{i\beta}$:

$$g_{i\alpha} = \int_{-\infty}^0 g_i(z) \exp(-\alpha z) dz, \quad (13)$$

$$g_{i\beta} = \int_0^{\infty} g_i(z) \exp(-\beta z) dz. \quad (14)$$

Здесь обозначено:

$$\alpha = \sqrt{k^2 - i\omega/v}, \quad (15)$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 / \left(1 - \frac{2i\omega v}{c^2}\right)}, \quad (16)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Технически громоздкая, но принципиально понятная процедура решения дает следующий ответ для частотно-волновых спектров нормальных и касательных напряжений на стенке (знаки преобразования Фурье \approx над спектрами $p, \tau_x, y, g_{i\alpha}, g_{i\beta}$ и источников опущены):

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho_0} &= \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{5\beta} + ik_z g_{6\beta} + \beta g_{3\beta}) + \\ &+ i \frac{\alpha k_x}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{1\beta} + ik_z g_{4\beta} + \beta g_{5\beta}) + \\ &+ i \frac{\alpha k_z}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{4\beta} + ik_z g_{2\beta} + \beta g_{6\beta}) + \\ &+ i \frac{k^2}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{5\alpha} + ik_z g_{6\alpha} + \alpha g_{3\alpha}) - \\ &- i \frac{\alpha k_x}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{1\alpha} + ik_z g_{4\alpha} + \alpha g_{5\alpha}) - \\ &- i \frac{\alpha k_z}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{4\alpha} + ik_z g_{2\alpha} + \alpha g_{6\alpha}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_x}{\rho_0} &= \frac{\alpha^2 \beta k_x}{\alpha\beta - k^2} \frac{v}{\omega} (ik_x g_{5\beta} + ik_z g_{6\beta} + \beta g_{3\beta}) + \\ &+ \frac{\alpha^2 k_x}{\alpha\beta - k^2} \frac{v}{\omega} (ik_x g_{1\beta} + ik_z g_{4\beta} + \beta g_{5\beta}) + \\ &+ \frac{\alpha^2 k_x k_z}{\alpha\beta - k^2} \frac{v}{\omega} (ik_x g_{4\beta} + ik_z g_{2\beta} + \beta g_{6\beta}) - \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &- \left(\alpha \frac{v}{\omega} k_x - i \frac{k^2 \alpha k_z}{\alpha\beta - k^2} \frac{v}{\omega} \right) (ik_x g_{5\alpha} + ik_z g_{6\alpha} + \alpha g_{3\alpha}) - \\ &- \left(1 + ik_x^2 \frac{v}{\omega} + i \frac{\alpha^2 k_x^2}{\alpha\beta - k^2} \frac{v}{\omega} \right) (ik_x g_{4\alpha} + ik_z g_{6\alpha} + \alpha g_{5\alpha}) - \\ &- \left(ik_x k_z \frac{v}{\omega} + i \frac{\alpha^2 k_x k_z}{\alpha\beta - k^2} \frac{v}{\omega} \right) (ik_x g_{4\alpha} + ik_z g_{2\alpha} + \alpha g_{6\alpha}). \end{aligned}$$

Формула для τ_y получается из формулы (18) заменой $k_x \leftrightarrow k_y$ и $u_1 \leftrightarrow u_2$ в (12).

Несмотря на громоздкость этих расчетных формул, они имеют простую физическую интерпретацию. В правых частях (17), (18) все слагаемые можно разделить на две группы: слагаемые, содержащие $g_{i\beta}$, и слагаемые, содержащие $g_{i\alpha}$. Первая группа определяет вклад потенциальных волн в нормальные и касательные напряжения на границе. Вторая группа определяет вклад вихревых волн в нормальные и касательные напряжения на границе. В работах [6, 12, 13] нормальные и касательные напряжения вводились формально, не связывая их с объемными пульсациями. В работе [14] не учитывались вихревые волны, приходящие к границе. Существенность вихревых волн, приходящих к границе, впервые показана в [17], при этом последовательного вывода амплитуд этих волн в этой работе не дано.

Формулы (17), (18) являются математически точной связью спектра поверхностных и объемных (лайтхилловских) напряжений и позволяют анализировать роль вязкости и вязких волн в генерации длинноволновой части поля давления. Под длинными волнами понимается часть частотно-волнового спектра с волновыми числами, характерными для звука и вибрационных волн, распространяющихся по границе.

ОЦЕНКИ ВКЛАДА РАЗЛИЧНЫХ КОМПОНЕНТ

Формулы (17), (18) выражают частотно-волновые спектры нормальных и касательных напряжений на границе через частотно-волновые спектры рейнольдсовых напряжений, распределенных по всему ТПС. Спектры напряжений являются суммой слагаемых, каждое из которых соответствует собственным волнам — продольным и вихревым, приходящим к границе и отраженным от границы. При отражении от границы происходит частичное преобразование продольных волн в сдвиговые, и сдвиговых волн в продольные. Именно преобразование сдвиговых волн в продольные порождает звуковое дипольное излучение. Этот механизм предложен К.А. Наугольных и С.А. Рыбаком в [17].

Сначала проанализируем слагаемые в спектре давления (17), порождаемые потенциальными волнами. Это слагаемые, содержащие индексы β . Отметим, что слагаемые с индексом α равны нулю, если формально положить вязкость равной нулю. Действительно, при $\nu = 0$ действительная часть α

$$\operatorname{Re}(\alpha) = \operatorname{Re}\left(\sqrt{k^2 - \frac{i\omega}{\nu}}\right) = +\infty,$$

соответственно все $g_{i\alpha}$ обращаются в нуль. Выражение (17) тогда примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{p_\beta}{\rho_0} = & (ik_x g_{5\beta} + ik_z g_{6\beta} + \beta g_{3\beta}) + \\ & + i \frac{k_x}{\beta} (ik_x g_{1\beta} + ik_z g_{4\beta} + \beta g_{5\beta}) + \\ & + i \frac{k_z}{\beta} (ik_x g_{4\beta} + ik_z g_{2\beta} + \beta g_{6\beta}). \end{aligned} \quad (19)$$

Чтобы получить оценку длинноволновой части этого спектра, учтем, что толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с длинами звуковых волн: $|\beta\delta| \ll 1$. Тогда выражение (14) можно записать, считая, что экспоненциальный множитель равен 1, в виде

$$g_{i\beta} = \int_{-\infty}^0 g_i(y) \exp(-\beta y) dy = h g_0, \quad (20)$$

где h — характерный вертикальный масштаб, а g_0 — характерная амплитуда спектра турбулентных напряжений (оба параметра зависят от частоты). Подставив (20) в (19), получим:

$$\frac{p_\beta}{\rho_0} = (ik_x + ik_y + \beta) \left(1 + i \frac{ik_x + k_y}{\beta}\right) h g_0. \quad (21)$$

Для определенности положим $k_z = 0$:

$$\frac{p_\beta}{\rho_0} = \left\{ \sqrt{k_x^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} + ik_x \left[2 + \frac{ik_x}{\sqrt{k_x^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}} \right] \right\} h g_0. \quad (22)$$

При $k_x = 0$ получим $\frac{p_\beta}{\rho_0} = \frac{i\omega h}{c} g_0$. При $k_x \gg \frac{\omega}{c}$ $\frac{p_\beta}{\rho_0} = 2ik_x h g_0$.

При $k_x = \omega / c$, т.е. при скользющем угле, функция (22) имеет сингулярность, которая объясняется тем, что звук собирается с бесконечной площади генерирующей звук турбулентности. Бесконечность устраняется при учете конечности обтекаемой поверхности, или при учете влияния поглощения в среде (добавления мнимой компоненты к скорости звука).

Если положить скорость звука бесконечной (несжимаемая среда), то спектр давления (22) равен нулю при $k_x = 0$, а вблизи нуля он пропорционален k_x . Таким образом, формула (17) полностью воспроизводит результаты [2, 6, 12], полученные при пренебрежении вязкостью.

Учет вязкости выражается, с одной стороны, изменением слагаемых, пропорциональных $g_{i\beta}$, с другой стороны добавлением слагаемых,

пропорциональных $g_{i\pm}$. Первое изменение соответствует изменению вклада потенциальных волн в спектр давления. Второе изменение соответствует вкладу вихревых волн. Что касается первого, то вязкость подавляет бесконечность при $k_x = \omega/c$. Действительно, поведение спектра вблизи волнового числа звука описывается множителем $\frac{\alpha}{\alpha\beta - k^2}$, общим для всех слагаемых, содержащих $g_{i\beta}$. В отсутствие вязкости именно этот множитель дает бесконечность в спектре давления. Подставляя из уравнений (15) и (16) величины α , δ в этот множитель, получим:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta - k^2} = \left[\sqrt{k^2 - \frac{(\omega/c)^2}{1 - 2(i\omega v/c^2)}} - \frac{k}{\sqrt{1 - (i\omega/vk^2)}} \right]^{-1}. \quad (23)$$

При $v \neq 0$ это выражение конечно при всех вещественных k . Физически это объясняется поглощением звука, генерируемого турбулентными объемными напряжениями, распространяющимся вдоль границы. Два слагаемых в правой части (23), содержащих v , описывают два принципиально разных механизма поглощения. Комбинация $2i\omega v/c^2$ описывает объемное поглощение, которое существует и в отсутствие границы. Комбинация $i\omega/(vk^2)$ описывает поглощение, вызванное частичным переходом потенциальных волн в вихревые при отражении их от границы. Именно второй эффект учтен в работе Хау [16]. Итак, учет вязкости не увеличивает вклад потенциальных волн в длинноволновую часть спектра давления на обтекаемой границе.

Далее рассматривается вклад вихревых волн. Он описывается слагаемыми в (17), содержащими $g_{5\alpha}$. Учитывая, что $|\alpha| \gg k$, можно выделить наибольшие слагаемые:

$$\frac{p_\alpha}{\rho_0} = -i \frac{\alpha^2 k_x}{\alpha\beta - k^2} g_{5\alpha} - i \frac{\alpha^2 k_y}{\alpha\beta - k^2} g_{6\alpha}. \quad (24)$$

Для численной оценки необходимо учесть, что под интегралами в (13) для $g_{i\alpha}$ стоит быстро затухающая экспонента. Вследствие этого вклад в этот интеграл дает только ближайшая к границе область, занятая турбулентностью. Это переходная область, отстоящая от границы на расстояние порядка толщины вязкого подслоя δ_* . Внутри вязкого подслоя источники волн отсутствуют: $g(y)_{i\alpha}|_{z < \delta_*} = 0$. Допустим, что вне вязкого подслоя спектр источников постоянен: $g(y)_{i\alpha}|_{z > \delta_*} = g_{i0}$.

Выражение для $g_{i\alpha}$ записывается в виде:

$$g_{i\alpha} = \frac{1}{\alpha} g_{i0} \exp(-\alpha\delta_*). \quad (25)$$

Соответственно спектр давления равен

$$\frac{p_\alpha}{\rho_0} = -i \frac{\alpha k_x}{\alpha\beta - k^2} g_{50} - i \frac{\alpha k_y}{\alpha\beta - k^2} g_{60}. \quad (26)$$

Рассмотрим для примера случай $k_y = 0$:

$$\frac{p_\alpha}{\rho_0} = - \frac{ik_x}{\sqrt{k^2 - (\omega/c)^2 - k^2/\alpha}} g_{50} \exp(-\alpha\delta_*). \quad (27)$$

При $k_x = 0$ спектр давления (27) равен нулю, независимо от величины скорости звука. Площадь корреляции поля давления, создаваемого вихревыми волнами и пропорциональная квадрату p_α , равна нулю. Максимум спектра, расположенный при $k = \omega/c$, образуется при перерассеянии вихревых волн в потенциальные [17]. Наличие экспоненциального множителя $\exp(-\alpha\delta_*)$ показывает зависимость спектра давления от соотношения между толщиной вязкого подслоя и глубиной проникновения вихревой волны, равной $\frac{1}{\text{Re}\alpha} = \sqrt{2\nu/\omega}$. При $\delta_* < \sqrt{2\nu/\omega}$ экспонента равна примерно 1, вихревая волна не меняет своей амплитуды и $\left| \frac{p_\alpha}{\rho_0} \right| \approx |g_{50}|$.

При $\delta_* > \sqrt{2\nu/\omega}$ амплитуда вихревой волны экспоненциально затухает при распространении по вязкому подслою, соответственно, амплитуда спектра давления экспоненциально спадает при увеличении частоты $\left| \frac{p_\alpha}{\rho_0} \right| \approx \left| g_{50} \exp\left(-\delta_* \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \right|$.

Спектр касательных напряжений также представляется в виде суммы вкладов потенциальных и вихревых волн (для сокращения формул далее выписываются только x -компоненты касательных напряжений):

$$\tau_x = \tau_{x\beta} + \tau_{x\alpha}. \quad (28)$$

Вклад от потенциальных волн обозначается индексом β . Это три первых слагаемых в (18). Вклад от вихревых волн обозначается индексом α . Это три последних слагаемых в (18). Сопоставление вклада потенциальных волн в спектр касательных напряжений с вкладом потенциальных волн в спектр давления показывает:

$$|\tau_{x\beta}/p_\beta| \approx |k/\alpha| \ll 1.$$

Касательные напряжения, создаваемые потенциальными волнами, малы по сравнению с давлением, создаваемым потенциальными волнами.

Вклад вихревых волн в спектр касательных напряжений определяется слагаемым $g_{5\alpha}$. С учетом (25) получаем

$$\tau_{x\alpha} = -\exp(-\delta_* \cdot \alpha) g_{50}. \quad (29)$$

Если выполняется условие $\text{Re}(\delta_* \alpha) < 1$, то спектр касательных напряжений равен g_{50} :

$$|\tau_{x\alpha}| = |g_{50}|. \quad (30)$$

В работе Ландала [22] получена именно такая связь между касательными напряжениями и

пристенными “взрывными” структурами в ТПС. Если выполняется противоположное условие: $Re(\delta_*\alpha) > 1$, затухание вихревой волны приводит к экспоненциальному спадаению спектра касательных напряжений. Экспоненциальное затухание вихревых волн в [22] не учтено.

Основной вывод из анализа слагаемых в формулах (17), (18) для спектров давления и касательных напряжений на обтекаемой границе формулируется следующим образом. Длинноволновая часть этих спектров генерируется одними и теми же источниками – турбулентностью пристенной области ТПС. Поэтому они жестко связаны между собой. Эта связь дается следующей простой формулой (ср. (27) и (29)):

$$p(\omega, k_x) = \frac{ik_x}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} - k^2 / \alpha} \tau_x(\omega, k_x). \quad (31)$$

Эта формула позволяет, в частности, использовать результаты измерений, или численного счета касательных напряжений на обтекаемой границы, для расчетов шума и вибраций, генерируемых ТПС.

Формула (31) разъясняет существующее разногласие относительно поведения спектра давления при малых волновых числах в районе $k \sim \omega/c$. Из нее следует, что, независимо от учета или неучета вязкости, при $k = 0$ спектр давления равен нулю. При $k \gg \omega/c$ спектр давления практически совпадает со спектром касательных напряжений. В ряде работ измеренные значения спектра давления при $k \gg \omega/c$ экстраполируются на область $k < \omega/c$. Отсюда возникает ошибка при определении диаграммы направленности излучаемого звука. Выражение (31) соответствует дипольному излучению с максимумом, направленным вдоль обтекаемой плоскости. Излучение в направлении перпендикулярно плоскости отсутствует. Экстраполяция значений спектра при $k \gg \omega/c$ на область $k < \omega/c$, в частности, на $k = 0$, приводит к эффективному излучению звука по нормали [38].

ОЦЕНКИ ИЗЛУЧЕНИЯ ШУМА ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Для получения численных оценок шума ТПС на основе выражения (29) необходимы данные о пульсационных касательных напряжениях τ_x . Из полученных выше выражений для касательных напряжений, создаваемых вязкими волнами, видно, что зависимость энергетического спектра $|\tau_x|^2$ от частоты ω имеет вид

$$|\tau_x|^2 \sim \exp\left[-2\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\delta_*\right]. \quad (32)$$

Такая частотная зависимость очень близка к результатам численного эксперимента работы [40].

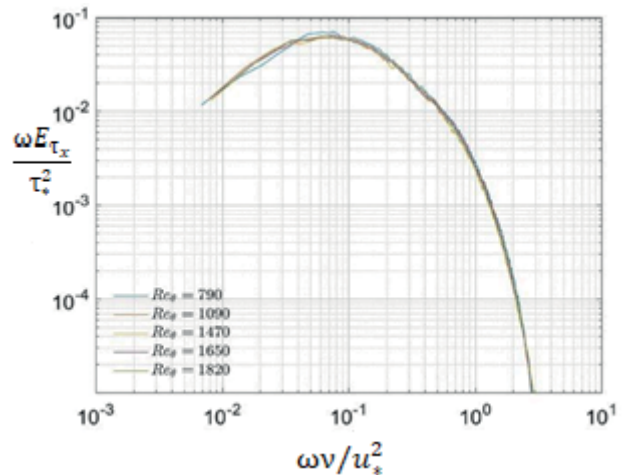


Рис. 5. Энергетический спектр касательных напряжений на основе численного моделирования [40].

В [40] получены энергетические спектры касательных напряжений для турбулентного пограничного слоя над плоской границей при числах Рейнольдса $Re_\theta = 790, 1090, 1470, 1650, 1820$. Результаты показаны на рис. 5.

По оси ординат на рис. 5 отложен нормированный на квадрат среднего касательного напряжения τ_*^2 и умноженный на частоту ω энергетический спектр пульсаций касательного напряжений $|\tau(\omega)|^2$, а по оси абсцисс – нормированная частота $\omega\nu/u_*^2$. При такой нормировке спектры для пяти чисел Рейнольдса практически совпадают. Их можно представить в виде функции:

$$\frac{\omega|\tau(\omega)|^2}{\tau_*^2} = F(\Omega), \Omega = \omega\nu/u_*^2. \quad (33)$$

Используя теоретическую зависимость (32), мы получаем, что зависимость $F(\Omega)$ должна иметь вид

$$F(\Omega) \sim A(\Omega)\Omega \exp[-C\sqrt{\Omega}], C = \text{const}. \quad (34)$$

$A(\Omega)$ – слабо зависящая от частоты функция. Подбор дает следующую частотную зависимость (34):

$$F(\Omega) = 10 \frac{\Omega}{0.016 + \Omega} \Omega e^{-8.2\sqrt{\Omega}}. \quad (35)$$

Сравнение результатов численного моделирования и теоретической функции (35) приведено на рис. 6. Видно, что соответствие между формами спектров действительно очень хорошее.

Рассмотрим выражение (35) более подробно. Запишем показатель экспоненты в виде произведения:

$$8.2\sqrt{\Omega} = 2 \times 4.1\sqrt{2} \frac{\nu}{u_*} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}.$$

Первый множитель ν/u_* – это внутренний (вязкий) масштаб ТПС. Второй множитель $\sqrt{\omega/2\nu}$ –

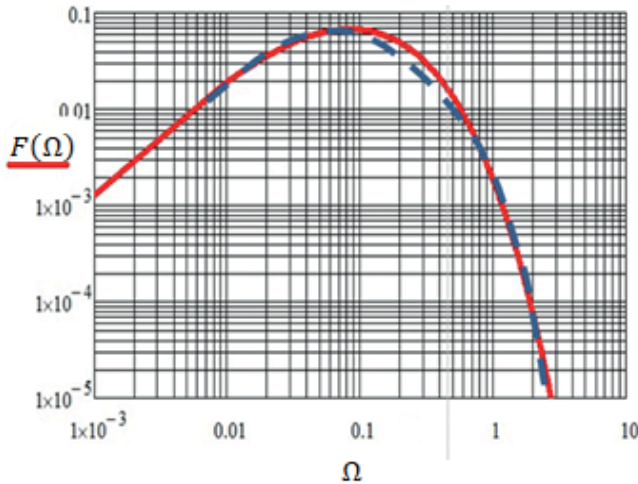


Рис. 6. Сравнение результатов теоретической модели и численного счета [40]: пунктир – численный эксперимент, красная кривая – теория.

это вещественная часть волнового числа вязкой волны. Примем, что толщина вязкого подслоя (область, где отсутствует турбулентность), равна $\delta_* = 5 \frac{\nu}{u_*}$. Последняя формула запишется в виде:

$$8.2\sqrt{\Omega} = 2 \times 1.16\delta_* \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \quad (36)$$

Видно, что расстояние от области турбулентности до границы действительно равно примерно толщине вязкого подслоя δ_* .

Выражение (33) с учетом (35) можно переписать в виде

$$\frac{|\tau(\omega)|^2}{\rho^2 u_*^2 \nu} = 10 \frac{\omega \nu / u_*^2}{0.016 + \omega \nu / u_*^2} e^{-8.2\sqrt{\omega \nu / u_*^2}}. \quad (37)$$

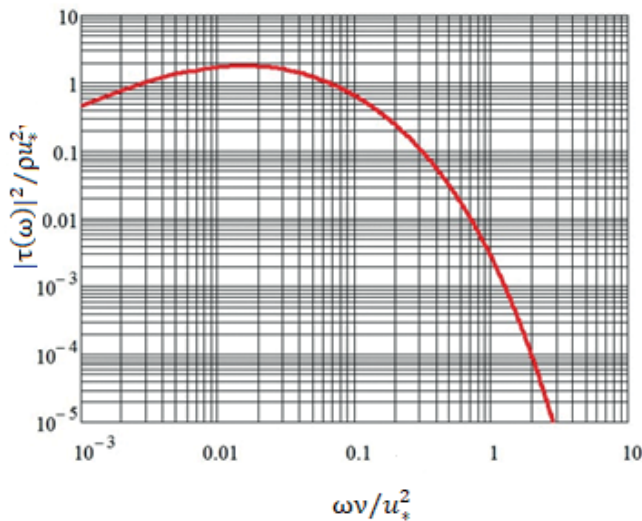


Рис. 7. Теоретический спектр касательных напряжений с нормировкой на внутренние масштабы.

Следует еще раз подчеркнуть, что эта зависимость точно описывает результат численного эксперимента [40]. График зависимости (37) показан на рис. 7.

Излучение звука касательными диполями зависит не только от касательных напряжений, но и от площади корреляции касательных напряжений $\sigma(\omega)$. Мощность, излучаемая с единицы площади, равна

$$J(\omega) = \frac{1}{12\pi r c} k^2 \tau(\omega)^2 \sigma(\omega), \quad (38)$$

$k = \omega/c$, c – скорость звука.

К сожалению, в [40] не приводятся конкретных данных по площади корреляции. В работе [15] приведены экспериментальные данные по взаимной продольной корреляции касательных напряжений. Нормированные на внутренний масштаб пограничного слоя $\frac{\nu}{u_*}$ зависимости характерного масштаба от числа Рейнольдса $\text{Re} = \frac{\delta u_*}{\nu}$ (δ – толщина пограничного слоя) и частоты $\Omega = \frac{\omega \nu}{u_*^2}$ удовлетворительным образом описываются следующей формулой:

$$\Lambda(\Omega, \text{Re}) = \frac{20}{1200 \text{Re}^{-1.4} + \Omega^{1.3}}. \quad (39)$$

При увеличении числа Рейнольдса продольный масштаб увеличивается, при увеличении частоты – уменьшается. Поперечный масштаб корреляции, согласно [15], примерно в 10 раз меньше. С учетом (39), площадь корреляции касательных напряжений записывается следующим образом

$$\sigma(\omega) = \Lambda(\Omega, \text{Re})^2 \left(\frac{\nu}{u_*} \right)^2 10^{-1}. \quad (40)$$

На рис. 8 в качестве примера построен размерный спектр излучаемой мощности, соответствующий выражению (40). Параметры, входящие в расчетные формулы, имеют значения:

$$\rho = 1.2 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, \\ c = 340 \text{ м/с}, \quad \delta = 0.03 \text{ м}.$$

Зависимости построены для двух скоростей: $u_* = 3.3 \text{ м/с}$ и $u_* = 10 \text{ м/с}$. По оси абсцисс отложена частота f , Гц, по оси ординат спектр уровня звуковой мощности, излучаемой с квадратного метра плоскости в дБ относительно базового уровня 10^{-12} Вт .

Интегрируя по частоте спектра мощности, получаем суммарную излучаемую мощность как функцию скорости u_* . На рис. 8 эта зависимость показана для толщины пограничного слоя $\delta = 0.03 \text{ м}$.

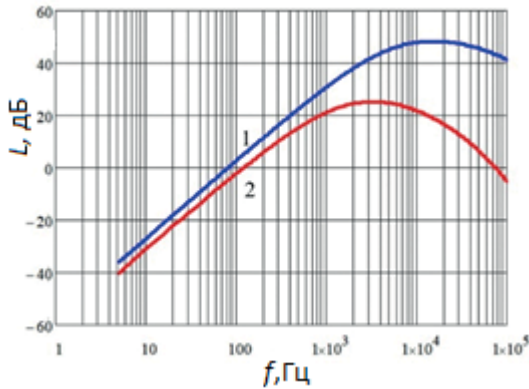


Рис. 8. Примеры спектра уровня излучаемой мощности: 1 – $u_* = 3.3$ м/с, 2 – $u_* = 10$ м/с.

Рассмотрим подробнее зависимость излучаемого звука от коэффициента кинематической вязкости. Связь между скоростью течения вдали от границы U_0 и касательным напряжением τ_x задается следующим выражением:

$$\tau_x = C_F \frac{1}{2} \rho U_0^2, \quad (41)$$

где коэффициент трения C_F для турбулентного пограничного слоя без продольного градиента давления известен и равен (см. напр. [45]):

$$C_F = \frac{0.027}{\text{Re}_x^{1/7}}, \text{Re}_x = \frac{U_0 x}{\nu}, \quad (42)$$

где x – расстояние вдоль потока от точки перехода ламинарного пограничного слоя к турбулентному. Приравняв выражения (41) и (42), получим

$$\tau_x = 0.0135 \rho U_0^2 \left(\frac{U_0 x}{\nu} \right)^{-1/7}. \quad (43)$$

Как уже обсуждалось выше при анализе вклада сдвиговых волн, основной вклад в (13) дает переходная область, отстоящая от границы на расстояние порядка толщины вязкого подслоя δ_* , тогда как внутри вязкого подслоя источники волн отсутствуют. В качестве толщины вязкого подслоя обычно берется значение $5\delta_*$ (см. напр. [45]), так что расстояние, на котором должны находиться лайтхилловские квадрупольные для эффективного излучения шума за счет обратного эффекта Константинова, равно

$$h = 5\delta_* = \frac{5\nu}{\sqrt{\tau_x / \rho_0}} = \frac{\nu}{U_0} \frac{5}{\sqrt{0.0135}} \left(\frac{U_0 x}{\nu} \right)^{1/14}. \quad (44)$$

Полученные соотношения позволяют получить оценку верхней частотной границы, выше которой происходит резкий спад спектра касательных напряжений. Действительно, приравняв глубину проникновения вихревых (вязких) волн толщине вязкого подслоя, получим:

$$\sqrt{2\nu / \omega_*} = 5 \frac{\nu}{u_*},$$

откуда

$$\omega_* = \frac{2\nu}{(5\nu)^2} u_*^2 = 0.04 \frac{u_*^2}{\nu} = 0.02 C_F \frac{U_0^2}{\nu}. \quad (45)$$

Подставляя выражение (44) в (45), получим, что показатель экспоненты равен

$$h \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = \frac{\nu}{U_0} \frac{5}{\sqrt{0.0135}} \left(\frac{U_0 x}{\nu} \right)^{1/14} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \sim \nu^{3/7}. \quad (46)$$

Из этого следует важный вывод: при уменьшении вязкости (и, следовательно, при увеличении числа Рейнольдса) $\nu \rightarrow 0$ показатель экспоненты (46) уменьшается, так что затухание сдвиговых волн при уменьшении вязкости уменьшается. Соответственно, эффективность переизлучения сдвиговых волн в звуковые волны увеличивается.

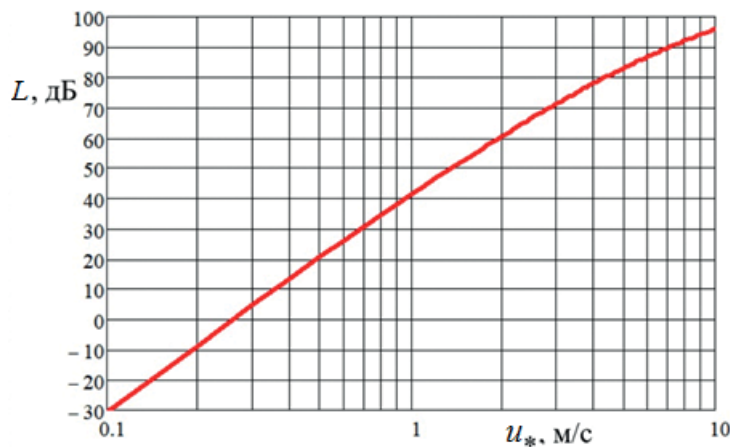


Рис. 9. Зависимость уровня излучаемой мощности с единичной площади от скорости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изложена последовательная теория источников звука в турбулентном пограничном слое (ТПС), развивающемся над плоской гладкой границей при малых числах Маха. Основным источником звука и длинноволновой части пульсаций давления на обтекаемой границе являются приходящие сдвиговые (вязкие) волны, генерируемые лайтхилловскими квадрупольями в пристенной области ТПС. Даны количественные оценки спектра удельной звуковой мощности, генерируемой ТПС. Показано, что при увеличении числа Рейнольдса (уменьшении вязкости) роль вязкости в генерации звука не уменьшается, а увеличивается. На необходимость учета вязких волн впервые указали К.А. Наугольных и С.А. Рыбак в работе [17].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 23-41-00023.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically I. General theory // *Proc. Royal Society A*. 1952. V. 211. P. 564–586.
2. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically: II. Turbulence as a source of sound. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1954. V. 222. 1–32.
3. *Голдстейн М.Е.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981. 294 с.
4. *Мунин А.Г., Кузнецов В.М., Леонтьев Е.А.* Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981. 288 с.
5. *Blake W.K.* Mechanics of flow-induced sound and vibrations. Academic Press, 1986
6. *Curle N.* The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1955. V. 231. P. 505–514.
7. *Kopiev V., Zaitsev M., Karavosov R.* Experimental investigation of azimuthal structure of dipole noise for rigid cylinder inserted in turbulent jet. // 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA Paper 2004–2927. 2004.
8. *Gloerfelt X., Pérot F., Bailly C., Juvé D.* Flow-induced cylinder noise formulated as a diffraction problem for low Mach numbers // *J. Sound Vibration*. 2005. V. 287(1–2). P. 129–151.
9. *Остриков Н.Н.* Излучение звука распределенными квадрупольными источниками вблизи твердых тел // *Акуст. журн.* 2021. Т. 58(4). С. 525–525.
10. *Zamponi R., Avallone F., Ragni D., Schram, C., Van Der Zwaag S.* Relevance of quadrupolar sound diffraction on flow-induced noise from porous-coated cylinders // *J. Sound Vibration*. 2024. V. 583. 118430.
11. *Kopiev V., Belyaev I., Zaytsev M., Zhao K.* Experimental study of truncated-cylinder struts for noise reduction of large-scale landing gears // *J. Sound Vibration*. 2021. V. 511. 116362.
12. *Kraichnan R.H.* Pressure fluctuation in turbulent flow over a flat plate // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. V. 28. N. 3. P. 378–390.
13. *Phillips O.M.* On the aerodynamic surface sound from a plane turbulent boundary layer // *Proc. Royal Society of London*. 1956. V. 234. P. 327–335.
14. *Powell A.* Aerodynamic noise and the plane boundary // *J. Acoust. Soc. Am.* 1960. V. 32. N. 8. P. 982–990.
15. *Ефимцов Б.М., Кузнецов В.Б., Сысоев В.А.* Турбулентные пульсации касательного напряжения на стенке // *Ученые записки ЦАГИ*. 1983. Т. 14. № 2. С. 67–75.
16. *Howe M.S.* A note on the Kraichnan – Phillips theorem // *J. Fluid Mechanics*. 1992. V. 234, January. P. 443–448.
17. *Наугольных К.А., Рыбак С.А.* Об излучении звука турбулентным пограничным слоем // *Труды Акустического института*. 1971. № 16. С. 129–134. Повторение в *Акуст. журн.* 1980. Т. 26. № 6. С. 890–894.
18. *Константинов Б.П.* О поглощении звуковых волн при отражении от твердой границы // *Журн. техн. физ.* 1930. Т. 9. С. 3.
19. *Савельев А.Я.* Эффект Константинова в некоторых задачах акустики // *Акуст. журн.* 1973. Т. 29. № 2. С. 231–239.
20. *Легуша Ф.Ф.* Эффект Константинова и поглощение звука в неоднородных средах // *Успехи физ. наук*. 1984. Т. 144. Вып. 3. С. 509–522.
21. *Morfe C.L.* The role of viscosity in aerodynamic sound generation (in honour of Alan Powell) // *Int. J. Aeroacoustics*. 2003. V. 2. No 3 & 4. P. 225–240.
22. *Landahl M.T.* Wave mechanics of boundary layer turbulence and noise // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 57. No 4. P. 824–831.
23. *Реутов В.П., Рыбушкина Г.В.* О дипольном излучении турбулентных всплесков в пограничном слое // *Акуст. журн.* 1987. Т. 33. № 1. С. 152–153.
24. *Howe M.S.* The role of surface shear stress fluctuations in the generation of boundary layer noise // *J. Sound Vibration*. 1979. V. 65 (2). P. 159–164.
25. *Crighton D.G., Dowling A.P., Williams J.F., Heckl M.A., Leppington F.A.* Modern methods in analytical acoustics: lecture notes. Springer Science & Business Media, 2012.
26. *Hariri H.H., Akylas T.R.* The wall shear stress contribution to boundary layer noise // *Physics of Fluids*. 1985. V. 28(9). P. 2727–2729.
27. *Смольяков А.В.* Длинноволновые компоненты спектра нормальных напряжений на поверхности пластины в вязком потоке // *Акуст. журн.* 1989. Т. 35. Вып. 3. С. 506–514.
28. *Смольяков А.В.* Новая модель взаимного и частотно-волнового спектров турбулентных пульсаций давления в пограничном слое // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 3. С. 393–400.

29. *Chase D.M.* Fluctuations in wall-shear stress and pressure at low streamwise wavenumbers in turbulent boundary-layer flow // *J. Fluid Mech.* 1991, April. V. 225. P. 545–555.
30. *Chase D.M.* Fluctuating wall-shear stress and pressure at low streamwise wavenumbers in turbulent boundary-layer flow at low Mach numbers // *J. Fluids and Structures.* 1992. No 6. P. 395–413.
31. *Leehey P.* Structural excitation by a turbulent boundary layer: an overview // *J. Vibration Stress and Reliability in Design.* 1988. V. 110. P. 220–225.
32. *Dowling A.P.* Underwater flow noise // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics.* 1998. V. 10(1). P. 135–153.
33. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* Преобразование поперечных волн в продольные на границе раздела двух сред и проблема генерации звука турбулентностью // *Акуст. журн.* 1985. Т. 31. № 4. С. 527–528.
34. *Chase D.M.* Generation of fluctuation normal stress in a viscoelastic layer by surface shear stress and pressure as in turbulent boundary-layer flow // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 89. No 6. P. 2589–2596.
35. *Hu Z., Morfey C.L., Sandham N.D.* Sound radiation in turbulent channel flows // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 475. P. 269–302; *Hu Z., Morfey C.L. and Sandham N.D.* Sound radiation from a turbulent boundary layer // *Physics of Fluids.* 2006. V. 18. 098101.
36. *Wang M., Freund J.B., Lele S.K.* Computational Prediction of Flow-Generated Sound // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. 38. P. 483–512.
37. *Corkos G.M.* Resolution of pressure in turbulence // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1963. V. 35. № 2. P. 192–199.
38. *Tam C.K.W.* Intensity, spectrum, and directivity of turbulent boundary layer noise // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 57. No 1. P. 25–34.
39. *Ефимцов В.М.* Характеристики поля пристеночных турбулентных пульсаций давления при больших числах Рейнольдса // *Акуст. журн.* 1982. Т. 28. № 4. С. 491–497.
40. *Diaz-Daniel C., Laizet S., Vassilicos J.C.* Wall shear stress fluctuations: Mixed scaling and their effects on velocity fluctuations in a turbulent boundary layer // *Phys. Fluids.* 2017. V. 29. 055102.
41. *Cheng Cheng, Weipeng Li, Adrian Lozano-Duran, Yitong Fan, and Hong Liu.* On the structure of streamwise wall-shear stress fluctuations in turbulent channel flows // *Fourth Madrid Summer School on Turbulence J. Phys.: Conf. Ser.* 2020. V. 1522, 012010.
42. *Örlü R., Schlatter P.* On the fluctuating wall-shear stress in zero pressure-gradient turbulent boundary layer flows // *Phys. Fluids.* 23:021704, 2011.
43. *Yang X.I.A. and Lozano-Durán A.* A multifractal model for the momentum transfer process in wall bounded flows // *J. Fluid Mech.* 824: R2, 2017.
44. *Gloerfelt X., Berland J.* Turbulent boundary layer noise: direct radiation at Mach number 0.5 // *J. Fluid Mechanics.* 2014. V. 723. P. 318–351.
45. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

ACOUSTIC RADIATION OF A TURBULENT BOUNDARY LAYER FORMED ABOVE A FLAT SMOOTH BOUNDARY

I. V. Belyaev^a, V. F. Kopyev^{a,*}, M. A. Mironov^{a,**}

^aFAU TsAGI, Moscow Research Complex TsAGI, st. Radio 17, Moscow, 105005 Russia

*e-mail: vkopiev@mktsagi.ru

**e-mail: mironov_ma@mail.ru

A consistent theory of sound generation in a turbulent boundary layer developing over a flat smooth boundary at low Mach numbers is presented. The main source of sound and the long-wave part of pressure pulsations on the boundary in a streamline are incoming shear (viscous) waves generated by Lighthill quadrupoles in the near-wall region of the turbulent boundary layer. It is shown that with an increase in the Reynolds number (decrease in viscosity), the role of viscosity in sound generation does not decrease, but increases. Quantitative estimates of the spectrum of specific sound power generated in a turbulent boundary layer are given.

Keywords: aeroacoustics, turbulent boundary layer, viscosity

УДК 534.23, 534.874.1, 534.6.08

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СОБСТВЕННОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ЗВУКОВОГО ПОЛЯ АЭРОАКУСТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ

© 2024 г. О. П. Бычков^а, Г. А. Фараносов^{а,*}

^аФАУ ЦАГИ, Москва, Россия

*e-mail: georgefalt@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.03.2024 г.

После доработки 07.07.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Предложено использовать метод собственного ортогонального разложения в частотной области (SPOD) для идентификации мультипольной структуры аэроакустических источников по изменениям в дальнем звуковом поле. Метод протестирован на примерах с модельными точечными мультиполями, а также проверен в эксперименте применительно к анализу шума обтекания цилиндра и шума турбулентной струи.

Ключевые слова: мультиполи, азимутальные моды, SPOD

DOI: 10.31857/S0320791924060075, **EDN:** JTMLQG

ВВЕДЕНИЕ

В задачах аэроакустики часто приходится иметь дело с источниками различной мультипольности. Согласно одной из общих формулировок акустической аналогии [1], пульсации массового расхода соответствуют монопольному излучению, пульсации силы — дипольному, пульсации рейнольдсовских напряжений — квадрупольному. В некоторых течениях значимыми могут быть и мультиполи более высокого порядка [2]. Таким образом, идентификация различных мультипольных компонент шума, излучаемого исследуемым источником, может быть полезна с точки зрения бесконтактной диагностики физической природы самого источника. Такая идентификация не всегда возможна, поскольку в случае произвольного пространственного распределения источников различной мультипольности задача определения их типа, положения и интенсивности не имеет однозначного решения [3–5]. Тем не менее, в некоторых практически реализуемых случаях постановка подобной задачи может быть не лишена смысла. Так, для относительно медленных дозвуковых течений аэроакустические источники часто являются компактными [3] (во всех или в выделенных направлениях), что существенно упрощает задачу их исследования. Примерами компактных источников являются вихревые кольца [6, 7], тела, обтекаемые дозвуковым потоком [8–10], турбулентные дозвуковые струи [2, 11, 12], плазменные актуаторы на умеренных частотах [13, 14].

При этом, проводя анализ мультипольной структуры акустического излучения сложных источников, следует различать эффекты, связанные с процессами генерации шума, и эффекты, обусловленные особенностями распространения шума. Как известно [15], решение волнового уравнения в безграничной неподвижной среде на сферической поверхности, окружающей источник звука, может быть представлено в виде разложения по полной системе сферических функций $Y_l^n = e^{in\varphi} P_l^{|n|}(\cos\theta)$, где φ и θ — соответственно азимутальный и полярный углы сферической системы координат (r, θ, φ) , $P_l^{|n|}(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра, $l \geq |n|$. Для акустически компактных неподвижных источников, расположенных в области начала сферической системы координат, имеет место однозначное соответствие между его “физическими” мультипольными компонентами, связанными с теми или иными механизмами генерации шума, и сферическими функциями, т.е. значение l соответствует порядку физического мультиполя: $l = 0$ — монопольное излучение, содержащее только осесимметричную азимутальную компоненту $n = 0$; $l = 1$ — дипольное, состоящее из двух азимутальных компонент $|n| = 0, 1$; $l = 2$ — квадрупольное, содержащее три азимутальные компоненты $|n| = 0, 1, 2$ и т.д. [9, 16].

Такая однозначная связь нарушается в случае, если источник смещен относительно начала координат [9, 17, 18] (при этом смещение, разумеется,

должно быть сравнимо или больше длины излучаемой волны), повернут [19], находится в движении [2] (эффекты конвекции) и/или излучает в неоднородную движущуюся среду [20, 21] (эффекты рефракции). В этом случае представление направленностей физических мультиполей через исходные сферические функции, хотя и остается справедливым, перестает быть достаточно наглядным в тем большей степени, чем сильнее выражены эффекты смещения, движения и поворота, поскольку физические мультиполи “распределяются” по различным сферическим гармоникам.

Часто в задачах аэроакустики указанные трансляционные эффекты (не включающие поворот) носят одномерный характер, т.е. имеется выделенное направление, вдоль которого источник может быть смещен, может двигаться и/или вдоль которого движется среда. Обычно это направление совпадает с направлением набегающего потока. В таком случае, если совместить полярную ось системы координат с этим выделенным направлением так, чтобы она при этом проходила через область источников, азимутальная структура звукового поля физических мультиполей не поменяется, а изменится лишь их полярная направленность. Отметим, что влияние на диаграмму направленности источника его сдвига вдоль выделенного направления всегда может быть сделано пренебрежимо малым при достаточном удалении от источника, поэтому главными эффектами распространения, которые могут исказить (по сравнению с излучением в покоящейся среде) вид физических мультиполей, являются эффекты конвекции и рефракции. Таким образом, наглядность мультипольного разложения с точки зрения его связи с физическими механизмами генерации шума можно сохранить, перейдя от системы функций $e^{in\varphi} P_l^{(n)}(\cos\theta)$ к системе $e^{in\varphi} f_l^{(n)}(\theta, M_s, M)$, где функция $f_l^{(n)}(\theta, M_s, M)$ описывает полярную диаграмму направленности базисных физических мультиполей с учетом эффектов конвекции/рефракции, величины M_s и M обозначают числа Маха движения источника и среды соответственно, и выполняется $f_l^{(n)}(\theta, M_s, M) \rightarrow P_l^{(n)}(\cos\theta)$ при $M_s, M \rightarrow 0$. Это означает, что направленности отдельных азимутальных компонент звукового поля, определенных относительно оси, направленной вдоль среднего течения и проходящей через область источников, могут отражать особенности механизмов генерации шума, если их интерпретировать в указанном выше смысле.

Именно такая интерпретация азимутальных компонент звукового поля аэроакустических источников легла в основу метода азимутальной декомпозиции (МАД), разработанного в ЦАГИ [11, 22]. Вид “деформированных” эффектами распространения направленностей базисных мультиполей в некоторых случаях может быть оценен

теоретически [2, 20, 21, 23, 24], что позволяет проводить детальное сравнение моделей источников шума и результатов измерений [2, 11, 20, 22, 24]. Таким образом, определение азимутального состава звукового поля аэроакустических источников является мощным инструментом анализа физических механизмов генерации шума.

Измерения азимутального состава звукового поля обычно проводятся с помощью азимутальных решеток микрофонов [11, 22, 25–27], причем число микрофонов в каждом сечении должно быть не меньше, чем число значимых азимутальных компонент, хотя в случае звуковых полей, излучаемых осесимметричными в среднем течениями, необходимое число микрофонов может быть уменьшено вдвое [28]. Альтернативным методом является использование метода азимутального разложения корреляционной функции, для чего достаточно пары микрофонов, один из которых неподвижен и является опорным, а второй — может двигаться по азимутальной координате вокруг источника [29, 30]. В этом случае можно разрешить большее число азимутальных мод, чем при использовании нескольких неподвижных микрофонов, однако измерительная система оказывается более сложной для реализации из-за наличия подвижного датчика, а полученные результаты позволяют говорить лишь об энергетическом составе суммарного поля (фазовые характеристики мод не разрешаются).

В некоторых случаях, из-за ограничений экспериментальной установки и/или измерительной системы, ни один из указанных выше способов азимутальной декомпозиции не может быть реализован. Такие ограничения могут возникать и в лабораторных условиях из-за различных геометрических ограничений (загромождение оборудованием, близость отражающих поверхностей и др.), и, например, при акустических измерениях натуральных объектов на больших установках [28], когда шум в дальнем поле можно измерять только под заданным азимутальным углом или в узком азимутальном секторе. В таком случае становится актуальным вопрос о том, возможно ли оценить мультипольную структуру источника, используя измерительную систему, расположенную в одной азимутальной плоскости (по сути — обычный массив микрофонов, распределенных по дуге окружности вокруг источника).

В последнее время в аэроакустике активно развиваются методы локализации источников шума, основанные на использовании многомикрофонных решеток, в том числе нацеленные на идентификацию мультипольной структуры источника [5, 31–33]. Такие методы отличаются тем, что в них необходимо априори закладывать определенную модель источника шума, которая не всегда может быть адекватной исследуемому явлению, поэтому разработка методов, использующих простые

распределения микрофонов и при этом позволяющих определять структуру источника в результате измерений, является актуальной задачей.

В настоящей работе для такой оценки предлагается использовать метод собственного ортогонального разложения в частотной области (так называемый метод SPOD — spectral proper orthogonal decomposition). Метод SPOD в последнее десятилетие занял прочное место в ряду инструментов, использующихся для анализа турбулентных течений, позволяя, например, идентифицировать в таких течениях пространственно-временные когерентные структуры, проводить детальное сопоставление теоретических моделей с результатами физических или численных экспериментов, строить модели пониженного порядка для сложных течений с целью реализации активного управления ими (см., например, обзор [34] и соответствующие ссылки в нем). Детальное описание метода SPOD приведено в [35], где также обсуждается его связь со ставшим уже классическим в гидродинамике методом собственного ортогонального разложения (POD — proper orthogonal decomposition) [36], который, в свою очередь, восходит к методу главных компонент, предложенному Пирсоном [37]. Применительно к задачам аэроакустики метод SPOD зачастую используется для выделения когерентных структур в турбулентной области течения и, в некоторых случаях, последующей оценке звукового излучения от таких структур [38, 39]. В настоящей работе, в отличие от указанных исследований, предлагается построить метод SPOD для анализа структуры излучения акустически компактных источников в дальнем поле так, чтобы в результате измерений можно было сделать вывод о типе мультипольного источника и оценить интенсивности его отдельных мультипольных компонент.

Работа структурирована следующим образом. В разделе 1 описана идея метода на базе SPOD-разложения и оценка его работоспособности на модельных примерах, в разделе 2 представлено описание измерений, проведенных в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ и результатов применения разработанного метода к анализу полученных экспериментальных данных. В Заключение сформулированы основные результаты работы.

1. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ SPOD К АНАЛИЗУ СТРУКТУРЫ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ КОМПАКТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Приведем краткое описание метода SPOD, следуя [35]. Пусть $u(x, t)$ — одномерное стационарное случайное поле с нулевым средним. Во многих задачах, особенно в тех, где имеет место пространственный перенос возмущений, удобно оперировать со спектральным представлением данного поля в виде $\hat{u}(x, f)$ и следить за поведением

отдельных гармоник, сравнивая его с различными теоретическими моделями.

Метод SPOD позволяет найти оптимальное разложение случайной величины $\hat{u}(x, f)$ по системе детерминированных ортогональных функций $\psi_j(x, f)$, упорядоченных по убыванию энергии, так что

$$\hat{u}(x, f) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) \psi_j(x, f), \quad (1)$$

причем оптимальность понимается в том смысле, что при взятии N первых членов разложения (1) точность приближения $\hat{u}(x, f)$ для любого другого набора базисных функций будет ниже. Для формулировки и решения задачи вводится скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle_{x,t} = \iint v^*(x, t) W(x) u(x, t) dx dt, \quad (2)$$

определяющее понятие нормы и ортогональности рассматриваемых функций. Здесь $*$ обозначает комплексное сопряжение (и транспонирование — для матриц), $W(x)$ — неотрицательная весовая функция, выбирающаяся из физических соображений, как, например, это будет показано ниже. Для стационарных случайных полей все утверждения об оптимальности, наилучшем приближении и т.д. понимаются в среднем, т.е. в смысле математического ожидания соответствующих случайных величин.

Можно показать [35, 36], что в частотной области задача определения функций $\psi_j(x, f)$ сводится к следующей задаче на собственные значения

$$\int S(x, x', f) W(x') \psi(x', f) dx' = \lambda(f) \psi(x, f), \quad (3)$$

где $S(x, x', f) = \int C(x, x', \tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau$ — Фурье-образ тензора взаимных корреляций $C(x, x', t - t') = E\{u(x, t) u^*(x', t')\}$, где $E\{g\}$ обозначает математическое ожидание случайной величины g и использована гипотеза о стационарности рассматриваемых случайных процессов. Можно показать, что в указанной постановке для задачи (3) существует счетное множество собственных мод, т.е. пар $\{\psi_j, \lambda_j\}$, которые могут быть ранжированы по величине (неотрицательных) собственных чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$. Собственные функции $\psi_j(x, f)$ — SPOD-моды — являются взаимно ортогональными в смысле пространственного скалярного произведения

$$\langle \psi_j, \psi_k \rangle_x = \int \psi_j^*(x, f) W(x) \psi_k(x, f) dx = \delta_{jk}, \quad (4)$$

где δ_{jk} — дельта Кронекера. Кроме того, все базисные гармоники $\psi_j(x, f) e^{i2\pi f t}$ взаимно ортогональны и в смысле исходного пространственно-временного

скалярного произведения (2). Таким образом, спектр $\hat{u}(x, f)$ каждой отдельной реализации рассматриваемого случайного поля может быть оптимальным образом представлен в виде (1), где коэффициенты $a_j = \langle \hat{u}, \psi_j \rangle_x$ являются проекциями исходного поля на базисные функции, причем эти коэффициенты взаимно некоррелированы и $E\{a_j a_k^*\} = \lambda_j \delta_{jk}$, а значит, взаимная спектральная плотность $S(x, x', f)$ представляется в диагональной форме

$$S(x, x', f) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(f) \psi_j(x, f) \psi_j^*(x', f). \quad (5)$$

Такого рода представление случайного поля будет полезно в том случае, если в выражение (5) вносит вклад малое число мод. Это позволяет строить низкопорядковые модели исходного явления, а также пытаться сопоставить отдельным модам конкретные физические механизмы.

Рассмотрим далее, каким образом можно адаптировать указанный метод для оценки мультипольной структуры акустически компактного источника шума, используя измерительную систему, расположенную в одной азимутальной плоскости.

Пусть в начале координат расположены некоррелированные мультиполи порядка l . Тогда дальнейшее звуковое поле может быть представлено в виде

$$p(r, \theta, \varphi, t) \approx \frac{1}{r} \sum_{n=0}^l (a_n(t - r/c) \cos n\varphi + b_n(t - r/c) \sin n\varphi) P_l^n(\cos \theta), \quad (6)$$

где функции a_n и b_n взаимно некоррелированы. В частотной области (6) приобретает вид

$$\hat{p}(r, \theta, \varphi, f) \approx \frac{e^{-i2\pi f r/c}}{r} \sum_{n=0}^l \left(\hat{a}_n(f) \cos n\varphi + \hat{b}_n(f) \sin n\varphi \right) P_l^n(\cos \theta).$$

Для точек наблюдения, расположенных в одной азимутальной плоскости $\varphi = \text{const}$, без потери общности можно написать

$$\hat{p}(r, \theta, 0, f) \equiv \tilde{p}(r, \theta, f) \approx \frac{e^{-i2\pi f r/c}}{r} \sum_{n=0}^l \hat{a}_n(f) P_l^n(\cos \theta). \quad (7)$$

Взаимная спектральная плотность для двух любых точек в этой плоскости в дальнем поле, с учетом взаимной некоррелированности отдельных мультиполей, будет выражаться как

$$\hat{S}(r, \theta, r', \theta', f) \approx \sum_{n=0}^l A_n(f) P_l^n(\cos \theta) \frac{e^{-i2\pi f r/c}}{r} P_l^n(\cos \theta') \frac{e^{i2\pi f r'/c}}{r'}, \quad (8)$$

где A_n соответствует интенсивности источников, т.е. $E\{\hat{a}_n \hat{a}_m^*\} = A_n \delta_{nm}$. Отметим сходство выражений (8) и (5). Рассмотрим, каким образом можно поставить задачу SPOD-разложения звукового поля в заданной азимутальной плоскости, чтобы SPOD-моды были близки функциям $P_l^n(\cos \theta) e^{-i2\pi f r/c} / r$, характеризующим источник шума. Для простоты положим, что точки наблюдения лежат на дуге окружности $r = R$, как это обычно имеет место в акустических экспериментах. В этом случае (8) сводится к

$$S(\theta, \theta', f) \approx \sum_{n=0}^l A_n(f) P_l^n(\cos \theta) P_l^n(\cos \theta'). \quad (9)$$

В соответствии с (4), (5) функции $P_l^n(\cos \theta)$ будут SPOD-модами, если для них будет выполняться условие ортогональности

$$\langle P_l^n, P_l^m \rangle_{\theta} = \int_0^{\pi} P_l^m(\cos \theta) W(\theta) P_l^n(\cos \theta) d\theta = \delta_{nm}. \quad (10)$$

Как известно, присоединенные полиномы Лежандра не являются взаимно ортогональными, ортогональны только некоторые их подмножества [40]. В рассматриваемой задаче мы интересуемся возможностью выделения отдельных компонент мультиполей заданной степени l . Для такого подмножества $l = \text{const}$ имеет место ортогональность вида

$$\int_{-1}^1 P_l^m(q) P_l^n(q) \frac{dq}{1-q^2} = \begin{cases} \delta_{mn} \frac{(l+n)!}{(l-n)!n!}, & n > 0, \\ \infty, & n = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $q = \cos \theta$ и формально показано, что при $n = 0$ соответствующий интеграл расходится. В строгой постановке расходящийся интеграл может быть проблемой, однако мы далее сосредоточимся на случаях, реализуемых в физических или численных экспериментах, в которых приходится иметь дело с дискретным набором координатных точек, в нашем случае – углов наблюдения $\{\theta_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Положим, что углы распределены равномерно с шагом $\Delta\theta$ в секторе $0 < \theta_1 < \dots < \theta_N < \pi$. Тогда условие (11) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^N P_l^m(\cos \theta_i) P_l^n(\cos \theta_i) \frac{\Delta\theta}{\sin \theta_i} \approx \delta_{mn} g_{ln}, \quad (12)$$

где $g_{ln} > 0$ – набор положительных чисел, которые при достаточно мелком разбиении отрезка $[0, \pi]$ близки к $(l+n)! / ((l-n)!n!)$ при $n > 0$ и к $\int_{\cos \theta_1}^{\cos \theta_N} (P_l^0(q))^2 (1-q^2)^{-1} dq$ – при $n = 0$. Если понизить условие ортогональности в смысле (12), т.е. определить весовую функцию как

$$W(\theta) = \frac{\Delta\theta}{\sin\theta}, \quad (13)$$

то соответствующие SPOD-моды, ортогональные в смысле так сконструированного скалярного произведения

$$\langle \Psi_j, \Psi_k \rangle_\theta = \sum_{i=1}^N \Psi_k^*(\theta_i, f) W(\theta_i) \Psi_j(\theta_i, f) = \delta_{jk}, \quad (14)$$

будут близки к соответствующим присоединенным полиномам Лежандра (с точностью до множителей g_{ln} и ошибки, связанной с дискретизацией по углу θ), а спектральная плотность излучения в каждом направлении

$$S(\theta, \theta, f) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(f) |\Psi_j(\theta, f)|^2 \quad (15)$$

будет, таким образом, разложена по базисным мультипольным компонентам в порядке убывания энергии. Отметим, что при этом неважно, будут ли коэффициенты g_{ln} отнесены к собственному числу или к собственной функции, поскольку интенсивность излучения каждого мультиполя характеризуется произведением $\lambda_j(f) |\Psi_j(\theta, f)|^2$. Число значимых собственных чисел в таком SPOD-разложении должно быть равно $l+1$ – числу базисных мультиполей заданной степени, дающих вклад в излучение в фиксированной азимутальной плоскости.

Задача (3), решением которой являются собственные числа и собственные функции, в дискретной форме для каждой частотной компоненты f принимает следующий вид [35]

$$\mathbf{S}_f \mathbf{W} \Psi_f = \Psi_f \Lambda_f, \quad (16)$$

где все матрицы имеют размер $N \times N$ и состоят из следующих элементов: $\Psi_{fij} = \Psi_j(\theta_i, f)$, $\Lambda_{fij} = \lambda_j(f) \delta_{ij}$, $\mathbf{W}_{ij} = \Delta\theta / \sin\theta_i \delta_{ij}$, \mathbf{S}_{fij} – элементы матрицы взаимных спектров для частоты f . Для определения \mathbf{S}_{fij} используется стандартный метод Уэлча [41] в виде, предложенном в [35] и кратко описанном ниже.

Пусть общая длина реализации случайного процесса, зафиксированного в точках наблюдения, составляет M дискретных отсчетов с шагом по времени Δt . Соответствующий набор сигналов для N точек наблюдения удобно сформировать в матрицу $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_M]$ размером $N \times M$, в строках которой записаны временные реализации в соответствующих точках наблюдения, а в столбцах – мгновенные “слепки” случайного поля на наборе точек наблюдения. Далее полная временная реализация разбивается на N_b блоков длиной N_f каждый, и для каждого блока с номером n формируется матрица $\mathbf{Q}^{(n)} = [\mathbf{q}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{q}_{N_f}^{(n)}]$ размером $N \times N_f$, состоящая из соответствующих столбцов матрицы \mathbf{Q} . Затем матрицы $\mathbf{Q}^{(n)}$

переводятся в частотное пространство путем применения к их строкам дискретного преобразования

$$\text{Фурье } \hat{\mathbf{q}}_k^{(n)} = N_f^{-1/2} \sum_{j=1}^{N_f} \mathbf{q}_j^{(n)} \exp(-i2\pi f_k(j-1)\Delta t),$$

где $f_k = (k-1)/(N_f \Delta t)$, $k = 1, \dots, N_f$ (при необходимости, преобразование может выполняться с весовой функцией), в результате чего формируются соответствующие $\mathbf{Q}^{(n)}$ матрицы $\hat{\mathbf{Q}}^{(n)} = [\hat{\mathbf{q}}_1^{(n)}, \dots, \hat{\mathbf{q}}_{N_f}^{(n)}]$. Тогда взаимная спектральная матрица оценивается осреднением по N_b блокам и для данной частотной компоненты f_k может быть представлена в виде

$$\mathbf{S}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}_{f_k} \hat{\mathbf{Q}}_{f_k}^*, \quad \text{где } \hat{\mathbf{Q}}_{f_k} = \sqrt{\Delta t / N_b} [\mathbf{q}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{q}_k^{(N_b)}] - \text{матрица, состоящая из } k\text{-х столбцов матриц } \mathbf{Q}^{(n)}.$$

Поскольку матрица $\tilde{\mathbf{S}}_{f_k} = \mathbf{S}_{f_k} \mathbf{W}$ является эрмитовой, для нее существует разложение по ортогональному базису $\tilde{\mathbf{S}}_{f_k} = \mathbf{U}_{f_k} \Lambda_{f_k} \mathbf{U}_{f_k}^*$, которое можно выполнить стандартными алгоритмами, откуда следует

$$\Psi_{f_k} = \mathbf{W}^{-1/2} \mathbf{U}_{f_k}, \quad (17)$$

что решает задачу SPOD-разложения. При этом найденные так собственные векторы ортогональны в смысле введенного скалярного произведения $\Psi_{f_k}^* \mathbf{W} \Psi_{f_k} = \mathbf{I}$ (матричная форма выражения (14)), а для взаимной спектральной плотности имеет место разложение

$$\mathbf{S}_{f_k} = \Psi_{f_k} \Lambda_{f_k} \Psi_{f_k}^*, \quad (18)$$

являющееся матричным аналогом выражения (15). В практическом смысле соотношение (18) означает, что интенсивность акустического излучения на заданной частоте f_k (диагональные элементы матрицы \mathbf{S}_{f_k}), полученная в дискретном наборе точек θ_i , представляется в виде суперпозиции N слагаемых

$$s_{f_k} = \sum_{j=1}^N \lambda_{f_k j} |\Psi_{f_k j}|^2, \quad (19)$$

где \mathbf{s}_{f_k} – вектор, составленный из диагональных элементов матрицы \mathbf{S}_{f_k} , $\lambda_{f_k j}$ – найденные собственные числа – диагональные элементы матрицы Λ_{f_k} , $\Psi_{f_k j}$ – найденные собственные векторы – столбцы матрицы Ψ_{f_k} . В соответствии с построенной процедурой старшие слагаемые в (19) определяют направленности и интенсивности базисных мультипольных источников. В качестве меры интенсивности каждого мультиполя можно принять величину в максимуме его излучения

$$w_{f_k j} = \lambda_{f_k j} \max_j [\Psi_{f_k j}^* \Psi_{f_k j}]. \quad (20)$$

При необходимости, после установления принадлежности найденных собственных векторов соответствующим азимутальным модам, можно вычислить полную акустическую мощность для каждого мультиполя.

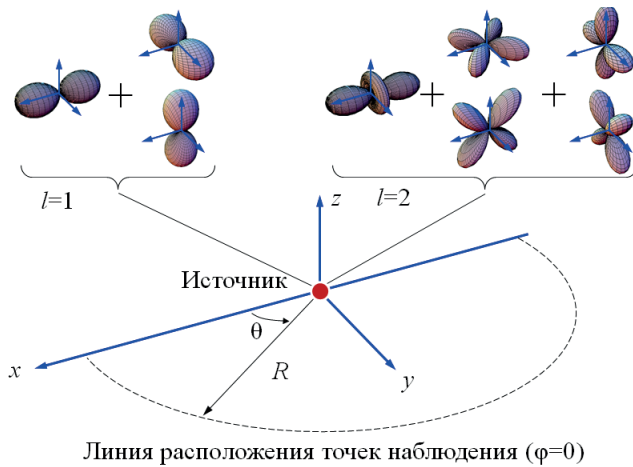


Рис. 1. Модельные источники из некоррелированных диполей ($l=1$) или квадрупольей ($l=2$).

Рассмотрим несколько модельных примеров с типичными параметрами лабораторных аэроакустических экспериментов. Пусть в начале координат задано три базисных диполя (т.е. степень мультиполя $l=1$) с направленностями излучения, характеризующимися функциями $P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta$, $P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi = \sin\theta\cos\varphi$ и $P_1^1(\cos\theta)\sin\varphi = \sin\theta\sin\varphi$, с одинаковыми амплитудами, некоррелировано излучающих на частоте $f_0 = 1$ кГц (рис. 1). Некоррелированность в данном случае означает, что в каждой временной реализации конечной длительности начальные фазы каждого источника являются случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке $[0, 2\pi)$, а математическое ожидание остальных случайных величин, представляющих интерес, вычисляется с помощью осреднения по реализациям случайного процесса. Рассмотрим точки наблюдения в дальнем поле, лежащие на дуге окружности радиуса $R=1$ м в плоскости, соответствующей азимутальному углу $\varphi = 0$ (рис. 1). Для указанных наблюдателей принимаемый сигнал в каждой временной реализации будет иметь вид

$$\hat{p}_{f_0}(R, \theta, 0, t) \approx \frac{e^{i2\pi f_0(t-R/c)}}{R} \times (a_0 e^{-i\alpha_0} \cos\theta + a_1 e^{-i\alpha_1} \sin\theta), \quad (21)$$

где a_0 , a_1 — амплитуды источников, α_0 , α_1 — фазы источников (различные в разных реализациях).

Аналогичный модельный источник может быть построен из квадрупольей, излучение которых при $\varphi = 0$ будет описываться выражением

$$\hat{p}_{f_0}(R, \theta, 0, t) \approx \frac{e^{i2\pi f_0(t-R/c)}}{R} \left(a_0 e^{-i\alpha_0} \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) + a_1 e^{-i\alpha_1} \frac{3}{2} \sin 2\theta + a_2 e^{-i\alpha_2} 3\sin^2\theta \right). \quad (22)$$

В модельных примерах с дипольными источниками рассмотрено три случая с различными соотношениями их амплитуд: $a_0 = 2$ и $a_1 = 1$, $a_0 = 1$ и $a_1 = 2$, $a_0 = 1$ и $a_1 = 1$. Отметим, что случай, когда амплитуды источников примерно равны, и суммарное их излучение практически изотропно, представляет наибольший интерес для анализа, поскольку в противном случае (явное доминирование определенного источника) характер мультиполя может быть определен непосредственно из формы диаграммы направленности излучения.

Сигналы задавались дискретно с шагом $\Delta t = 10^{-5}$ с, длина каждой реализации составляла $N_f = 1024$, число реализаций $N_b = 100$. Число точек наблюдения N было выбрано равным от 10 до 30, что типично для аэроакустических экспериментов. Результаты работы SPOD-алгоритма приведены на рис. 2. На рис. 2а, 2б и 2в показаны результаты для различных амплитуд источников при $N = 10$. Линиями представлены направленности исходно заданных источников и направленности суммарного шума, символами показаны SPOD-моды. Видно, что для всех случаев имеет место хорошее соответствие между SPOD-модами и исходными источниками как по амплитуде, так и по форме направленности. Число значимых SPOD-мод равно числу мультиполей данного порядка (остальные моды много меньше по амплитудам), старшая мода соответствует более интенсивному источнику. Увеличение числа наблюдателей приводит к улучшению соответствия (рис. 2г).

Для квадрупольных источников рассматривался случай, когда их суммарное излучение в среднем изотропно, что имеет место при $a_1 = 2a_2 = a_0 / \sqrt{3}$, $a_0 = 2/3$. Результаты SPOD-разложения представлены на рис. 3 для случаев $N = 10$ и $N = 30$. Как видно, при малом числе точек наблюдения амплитуды излучения каждой моды восстанавливаются достаточно точно, однако детали направленностей SPOD-мод в зонах, удаленных от их максимумов, могут отличаться от направленностей исходных источников. Это объясняется тем, что при увеличении степени мультиполей, а значит, числа лепестков в их направленностях, условие ортогональности в дискретной форме (14), записанное для фиксированного числа точек наблюдения N , будет все хуже аппроксимировать исходное условие (10). Это, в свою очередь, означает, что SPOD-моды, для которых, по построению, условие (14) выполняется строго, будут все более отличаться от направленностей исходных источников. Эту проблему решает уменьшение шага дискретизации по пространству (рис. 3б).

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА МЕТОДА

Для экспериментальной проверки разработанного алгоритма в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ

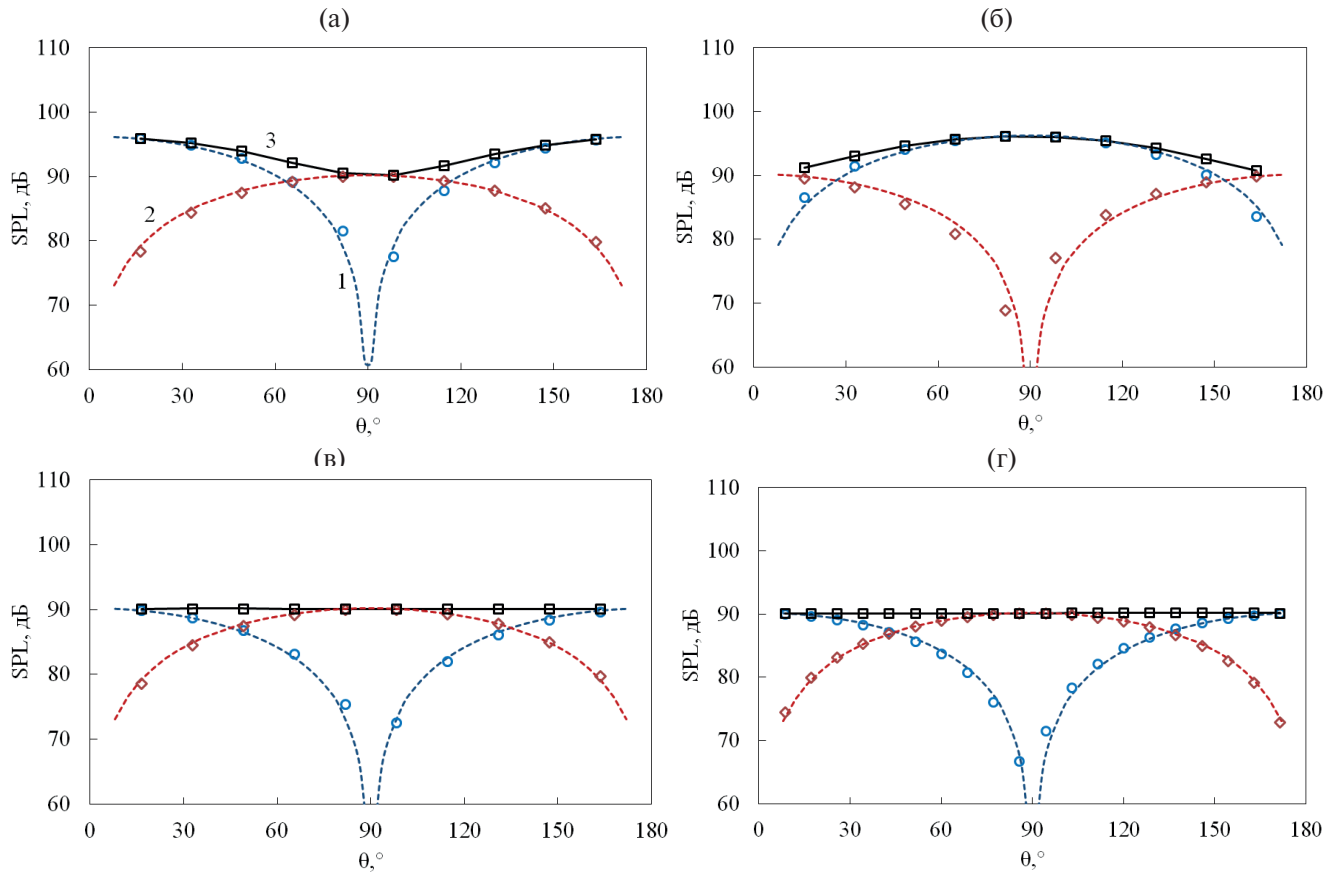


Рис. 2. Направленности излучения исходных дипольных источников (линии) и SPOD-мод (маркеры): 1 – осесимметричный диполь ($n = 0$); 2 – поперечный диполь ($n = 1$); 3 – суммарный шум. \circ – SPOD-мода $j = 1$; \diamond – SPOD-мода $j = 2$; \square – суммарная интенсивность SPOD-мод. (а) – $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $N = 10$; (б) – $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $N = 10$; (в) – $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $N = 10$; (г) – $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $N = 20$.

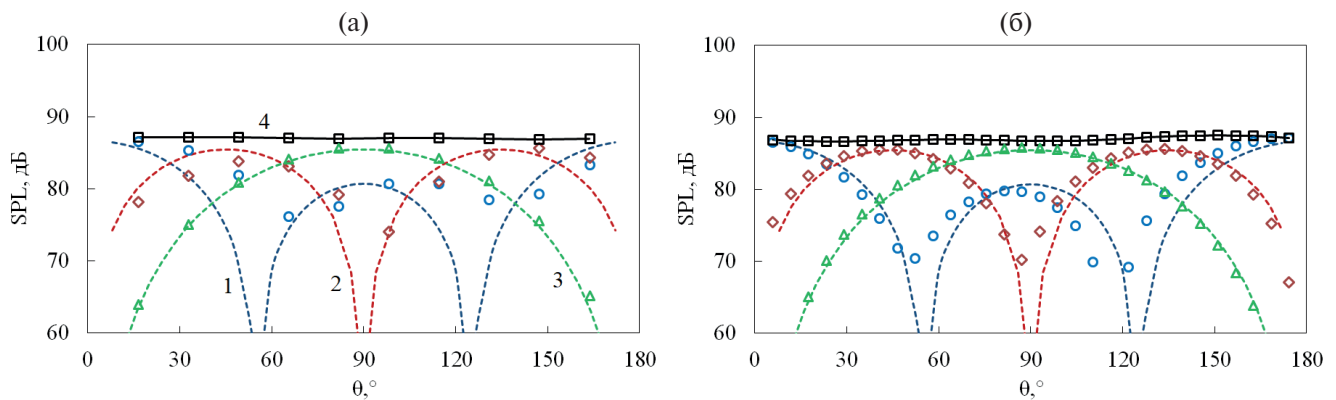


Рис. 3. Направленности излучения исходных квадрупольных источников (линии) и SPOD-мод (маркеры) для (а) – $N = 10$ и (б) – $N = 30$; 1 – осесимметричный квадруполь ($n = 0$); 2 – квадруполь ($n = 1$); 3 – квадруполь ($n = 2$); 4 – суммарный шум. \circ – SPOD-мода $j = 1$; \diamond – SPOD-мода $j = 2$; Δ – SPOD-мода $j = 3$; \square – суммарная интенсивность SPOD-мод.

были проведены измерения шума обтекания цилиндра, при котором, как известно [1, 8–10], реализуются компактные источники дипольного типа, причем в шуме проявляются две дипольных компоненты, ортогональные оси цилиндра: так называемые диполи подъемной силы и силы сопротивления.

Стальной цилиндр диаметром $d = 5$ мм помещался в турбулентную струю, истекающую из круглого сопла диаметром $D = 40$ мм со скоростью $V_j = 100$ м/с. Цилиндр располагался в зоне турбулентного течения на расстоянии 250 мм вниз по потоку от среза сопла (рис. 4). Данная конфигурация

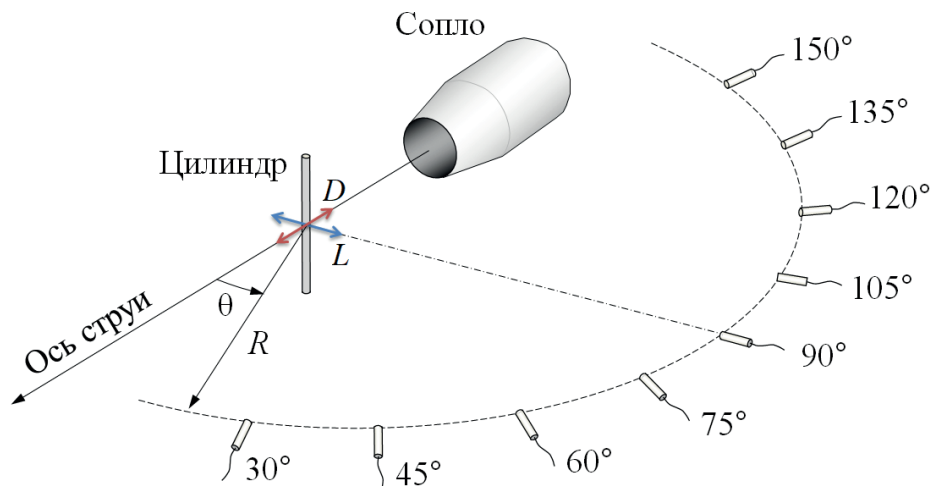


Рис. 4. Схема эксперимента. Стрелками показаны ориентации дипольных моментов шума обтекания цилиндра: диполя подъемной силы (L) и диполя силы сопротивления (D).

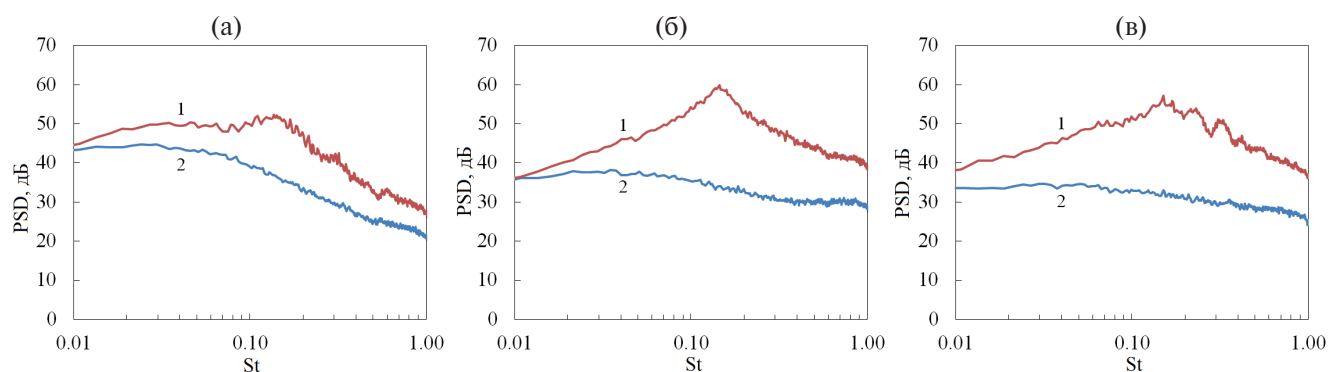


Рис. 5. Измеренные спектры шума: (а) — $\theta=30^\circ$; (б) — $\theta=90^\circ$; (в) — $\theta=150^\circ$. 1 — цилиндр в струе; 2 — струя без цилиндра.

соответствовала эксперименту, описанному в [33], что позволило провести сравнение результатов идентификации источников, полученных различными методами.

Шум измерялся с помощью 9 микрофонов Brüel&Kjær (тип 4189), равномерно распределенных с шагом $\Delta\theta = 15^\circ$ по дуге окружности радиуса $R = 1.08$ м с центром в точке пересечения цилиндра с осью струи, как показано на рис. 4. Измерения проводились как для свободной струи, так и для струи с цилиндром. Цилиндр ориентировался так, чтобы его ось была ортогональна плоскости расположения микрофонов (рис. 4). В таком случае дипольные моменты, связанные с пульсациями подъемной силы и силы сопротивления (показаны стрелками на рис. 4), лежат в плоскости микрофонов, и на массиве микрофонов реализуется звуковое поле, близкое к полю, описываемому выражением (21).

При наличии цилиндра в общем шуме такой системы доминирует именно шум цилиндра, как показано на рис. 5, поскольку шум струи носит

квадрупольный характер, и в низкоскоростных течениях его интенсивность мала по сравнению с интенсивностью дипольных источников [1]. На спектрах на рис. 5 число Струхала рассчитано по диаметру цилиндра и скорости струи $St = fd / V_j$. Максимум шума цилиндра соответствует числу Струхала около $St = 0.14$, что соответствует результатам измерений работы [33].

На рис. 6 приведены спектры собственных чисел SPOD-разложения звукового поля при наличии цилиндра в струе (моды упорядочены по убыванию энергии, число мод равно числу микрофонов). Как видно, практически во всем частотном диапазоне доминируют первые две SPOD-моды, что косвенно указывает на дипольный характер шума. Интересно отметить, что при $St \approx 0.06$ интенсивности двух мод сравниваются, и спектр первой моды практически непрерывно переходит в спектр второй моды и наоборот. Данный эффект также указывает на то, что SPOD-моды, определенные по предложенному в настоящей работе алгоритму, соответствуют физическим объектам, связанным с определенными механизмами шумообразования.

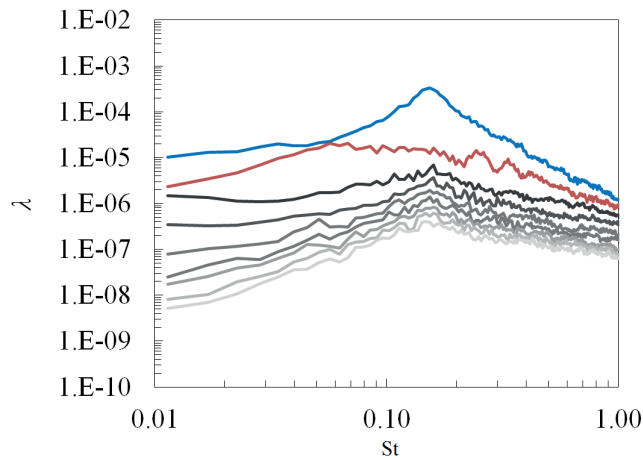


Рис. 6. Спектры собственных чисел SPOD-разложения звукового поля при наличии цилиндра в струе.

Связь SPOD-мод с физическими мультиполями подтверждается и структурой их направленности, изображенной на рис. 7 для различных полос частот. Показаны только две доминирующие моды. Видно, что одна из них имеет однолепестковую структуру, другая — двухлепестковую (причем

соседние лепестки всегда находятся в противофазе), что соответствует различным компонентам дипольного излучения, доминирование которого ожидается в шуме обтекания цилиндра. В низкочастотной области $St < 0.06$ доминирует излучение продольного диполя, связанного с пульсациями силы сопротивления (рис. 7а), а на частотах выше $St = 0.06$, в том числе, в области спектрального пика, определяющим становится поперечный диполь, соответствующий пульсациям подъемной силы (рис. 7б-7г). Отклонения форм направленностей от “идеальных” диполей могут быть связаны с эффектами конвекции и рефракции, “деформирующими” направленности исходных базисных источников, что может приводить к некоторому сдвигу положений минимумов направленностей в силу условия взаимной ортогональности SPOD-мод (рис. 7а), а также с малостью амплитуды одного из источников, находящейся на границе динамического диапазона, в результате чего характеристики его направленности восстанавливаются с заметной погрешностью (рис. 7в, 7г). При этом отметим, что конвективное усиление суммарного шума вниз по потоку, хорошо заметное в общем шуме (рис. 7а), в целом достаточно корректно переносится алгоритмом SPOD на соответствующие

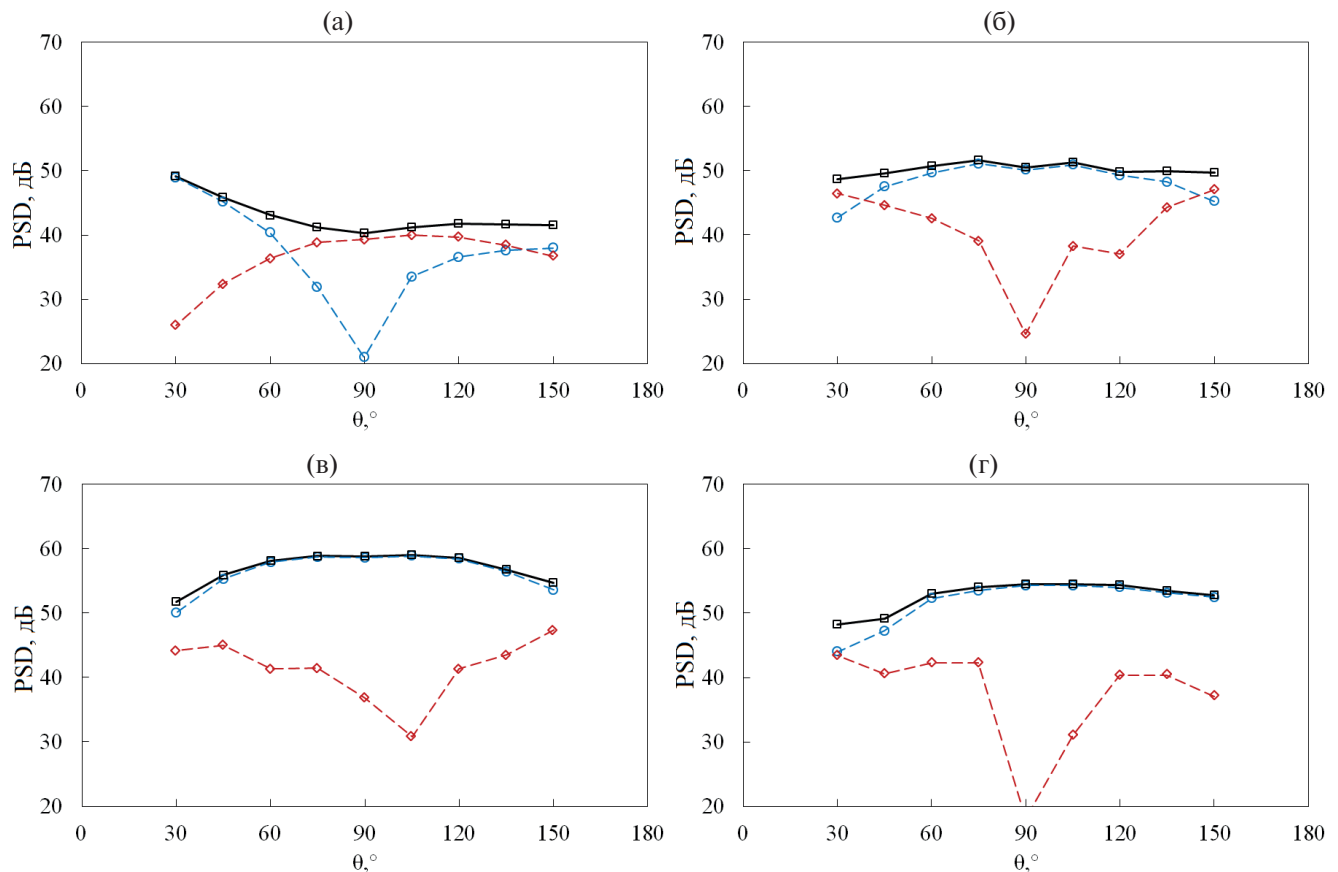


Рис. 7. Направленности излучения в полосах частот для цилиндра в струе: (а) — $St = 0.017$; (б) — 0.08 ; (в) — 0.14 ; (г) — 0.2 . Сплошная линия — измерения; \circ — SPOD-мода $j = 1$; \diamond — SPOD-мода $j = 2$; \square — суммарная интенсивность SPOD-мод.

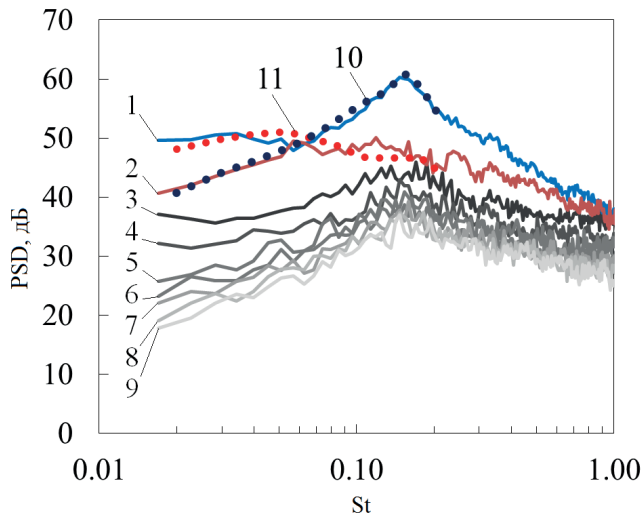


Рис. 8. Спектральные плотности интенсивности излучения отдельных SPOD-мод (1-9), вычисленные по формуле (20), и спектральные плотности излучения поперечного (10) и продольного (11) диполей, определенные с помощью метода азимутальной декомпозиции [33] (данные приведены к расстоянию 1 м от источника).

дипольные компоненты, по крайней мере, в зоне максимумов направленности.

Количественной мерой излучения каждой компоненты, как отмечалось выше, можно считать ее интенсивность в максимуме излучения (для SPOD-мод это определение соответствует формуле (20)). Аналогичная величина была выбрана в работе [33], что позволяет провести прямое сравнение выделения спектральных характеристик интенсивности дипольных источников, полученных в [33] методом азимутальной декомпозиции, и методом SPOD-разложения, предложенным в настоящей работе. Такое сравнение приведено на рис. 8, и оно демонстрирует совпадение результатов оценки интенсивностей дипольных компонент, полученных

различными методами. При этом метод на основе SPOD-разложения использует одномерный массив микрофонов, расположенный в одной азимутальной плоскости, что в некоторых случаях делает его проще реализуемым по сравнению с методом азимутальной декомпозиции или методом плоского бимформинга [33].

На рис. 9 приведены результаты SPOD-разложения для звукового поля свободной струи. Отметим, что для анализа шума струи используется, как это обычно принято, число Струхала $St_j = fD / V_j$, рассчитанное по скорости струи и диаметру сопла. Данная струя является низкоскоростной, и максимум спектра ее излучения приходится на частотный диапазон 300–600 Гц, что соответствует $St_j = 0.1 \dots 0.2$. В области максимального излучения, как видно из спектров собственных чисел SPOD-разложения, показанных на рис. 9а, в звуковое поле вносят вклад три моды, что указывает на квадрупольный характер излучения [11]. Отметим, что предложенный в настоящей работе вариант SPOD-метода предполагает, что источник звука является компактным и расположен в центре дуги, на которой находятся микрофоны. При этом, как известно [3], характерное положение источников шума в турбулентных струях зависит от частоты их излучения так, что более высокочастотные источники располагаются ближе к соплу. Поэтому для использованной в эксперименте дуги микрофонов, центрированной на точке, удаленной от среза сопла на расстояние $6.25D$, пространственные формы отдельных SPOD-мод будут близки к физическим мультиполям для той частоты, которой соответствует расположение источников в области центра микрофонного массива. Для указанного расстояния от среза сопла характерные частоты излучения соответствуют как раз максимуму шума струи, т.е. частотному диапазону $St_j = 0.1 \dots 0.2$ [3, 24]. При этом, поскольку источники шума струи даже для узкого диапазона частот не являются компактными

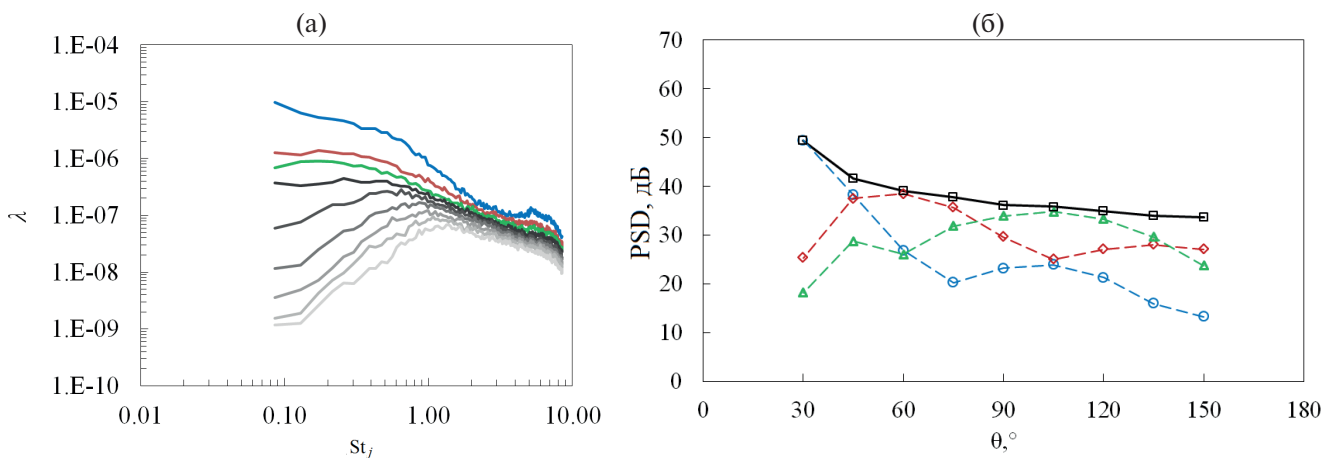


Рис. 9. (а) — Спектры собственных чисел SPOD-разложения звукового поля свободной струи; (б) — направленности излучения доминирующих SPOD-мод для $St_j = 0.1$; обозначения кривых как на рис. 3.

в продольном направлении [24], соответствие направленностей SPOD-мод направленностям точечных квадрупольных будет не вполне точным. Это видно из рис. 9б, на котором приведены направленности излучения доминирующих SPOD-мод для $St_j = 0.1$. Видно, что качественно формы SPOD-мод соответствуют квадрупольным различного азимутального порядка, формы которых могут быть с высокой точностью получены с помощью метода азимутальной декомпозиции [11, 27], с некоторым отличием в расположении минимумов, связанным с конвективно-рефракционным усилением излучения вниз по потоку [20] (обсуждавшимся выше применительно к шуму цилиндра), а также в величине амплитуд тех лепестков, которые находятся на границе динамического диапазона метода (~10 дБ ниже доминирующей моды), что отчасти связано с некомпактностью источников. Тем не менее, общая структура SPOD-мод позволяет вполне определенно отнести их к соответствующим квадрупольным источникам, т.е. адекватно оценить доминирующий механизм генерации шума исследуемым течением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложено использовать метод собственного ортогонального разложения в частотной области (SPOD) для идентификации мультипольной структуры аэроакустических источников по измерениям в дальнем звуковом поле. Преимуществом SPOD-метода является то, что он может быть реализован в рамках линейного микрофонного массива, располагаемого в одной азимутальной плоскости, в то время как метод азимутальной декомпозиции, с помощью которого такая задача может быть решена наиболее точно, требует использования азимутальных круговых микрофонных массивов, замещающих существенную долю телесного угла, в который излучается шум. Показано, что при условии компактности источника определенного (заранее неизвестного) мультипольного порядка, и расположении его в центре кругового микрофонного массива, замещающего сектор, близкий к 180° , можно построить такую процедуру SPOD-разложения за счет выбора скалярного произведения, в которой доминирующие SPOD-моды соответствуют физическим мультипольным компонентам излучения.

Метод протестирован на примерах с модельными точечными мультиполями, а также проверен в эксперименте применительно к анализу шума обтекания цилиндра и шума струи. Эффекты конвекции и рефракции снижают точность восстановления направленностей отдельных мультиполей, однако при малых числах Маха потока корректность определения интенсивностей доминирующих мультипольных компонент сохраняется.

При наличии теоретических моделей влияния конвекции и рефракции на диаграмму направленности излучения базисных мультиполей скалярное произведение в методе SPOD можно скорректировать, повысив тем самым точность восстановления мультипольной структуры.

Отметим в заключение отличие разработанного метода на базе SPOD от метода бимформинга, использованного, например, в работах [31–33] для идентификации дипольных источников шума. Оба подхода связаны с анализом матрицы взаимных спектров, измеряемой некоторым массивом микрофонов. В методах типа бимформинга такая матрица моделируется с помощью исходно выбранных моделей источников заданной мультипольности. В таком подходе корректность результата зависит от адекватности набора источников, заложенных в алгоритм. Преимуществом его является возможность определения заранее неизвестного местоположения источников шума, недостатком — необходимость априори определять тип источников. В предложенном методе типа SPOD матрица взаимных спектров раскладывается по эмпирическому ортогональному базису, что всегда оказывается возможным, и при определенных условиях компоненты этого базиса могут соответствовать физически осмысленным мультиполям. Преимуществом данного метода является возможность определения порядка мультипольности источника в результате измерений, недостатком — необходимость априорного знания положения источника. Ограничением SPOD-метода является также требование компактности источников шума: чем хуже выполняется условие компактности, тем сложнее интерпретируются результаты.

Таким образом, предложенный метод, метод бимформинга, а также метод азимутальной декомпозиции являются взаимодополняющими инструментами и могут использоваться по-отдельности или одновременно для анализа сложных аэроакустических систем.

Экспериментальные данные, использованные в работе, получены в УНУ “Заглушенная камера с потоком АК-2” ФАУ “ЦАГИ”, модернизированной при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 19-71-10064).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Curle N.* The Influence of Solid Boundaries on Aerodynamic Sound // *Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A.* 1955. V. 231. № 1187. P. 505–514.
2. *Kopiev V.F., Zaitsev M. Yu., Chernyshev S.A., Ostrikov N.N.* Vortex ring input in subsonic jet noise // *Int. J. Aeroacoust.* 2007. V. 6. N. 4. P. 375–405.

3. Мунин А.Г., Кузнецов И.М., Леонтьев Е.А. Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981. С. 248.
4. Rienstra S.W., Hirschberg A. An Introduction to Acoustics // Eindhoven University of Technology, 2004.
5. Демьянов М.А. Корреляционный метод идентификации акустических источников с помощью микрофонных измерений // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 6. С. 638–646.
6. Kopiev V.F., Chernyshev S.A. Vortex ring eigen-oscillations as a source of sound // J. Fluid Mech. 1997. V. 341. P. 19–57.
7. Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Котова А.Н. Представление звукового поля турбулентного вихревого кольца суперпозицией квадрупольей // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 793–801.
8. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
9. Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф. Механизм генерации звука турбулентностью вблизи твердого тела // Изв. РАН МЖГ. 2008. № 1. С. 98–109.
10. Баженова Л.А., Семенов А.Г. О влиянии числа Рейнольдса на интенсивность вихревого звука при обтекании цилиндрического профиля // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 5. С. 586–595.
11. Kopiev V.F. Azimuthal decomposition of turbulent jet noise and its role for diagnostics of noise sources // VKI Lecture Series 2004–05. Advances in Aeroacoustics and Applications, 2004. P. 1–23.
12. Бычков О.П., Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Фараносов Г.А., Чернышев С.А. О двух подходах к моделированию шума низкоскоростных дозвуковых струй // Докл. Росс. Акад. наук. Физика, Техн. Науки. 2022. Т. 506. № 1. С. 16–25.
13. Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Копьев В.А., Остриков Н.Н., Фараносов Г.А. Использование акустических характеристик коронного разряда для диагностики его свойств // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 4. С. 424–430.
14. Sergeev S., Lissek H., Howling A., Furno I., Plyushchev G., Leyland P. Development of a plasma electroacoustic actuator for active noise control applications // J. Physics D: Applied Physics. 2020. V. 53. N. 49. P. 495202.
15. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. С. 544.
16. Бобровицкий Ю.И. Физическая модель и характеристики ближнего поля мультиполя // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 1. С. 11–20.
17. Остриков Н.Н. Излучение звука распределенными квадрупольными источниками вблизи твердых тел // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 525–534.
18. Faranosov G., Belyaev I., Kopiev V., Bychkov O. Azimuthal structure of low-frequency noise of installed jet // AIAA Journal. 2019. V. 57. N. 5. P. 1885–1898.
19. Бычков О.П., Фараносов Г.А. Исследование влияния угла установки крыла на характеристики рассеяния ближнего гидродинамического поля турбулентной струи // Докл. Росс. Акад. наук. Физика, Техн. науки. 2022. Т. 506. № 1. С. 57–67.
20. Kopiev V., Chernyshev S. Correlation model of quadrupole noise sources in turbulent jet: effect of refraction // AIAA paper. 2015. 2015–3130.
21. Goldstein M.E. The low frequency sound from multipole sources in axisymmetric shear flows, with applications to jet noise // J. Fluid Mech. 1975. V. 70. No 3. P. 595–604.
22. Kopiev V.F., Zaitsev M. Yu., Chernyshev S.A., Kotova A.N. The role of large-scale vortex in a turbulent jet noise // AIAA paper. 1999. 99–1839.
23. Mani R. The influence of jet flow on jet noise. Part 1. The noise of unheated jets // J. Fluid Mech. 1976. V. 73. No 4. P. 753–778.
24. Kopiev V., Chernyshev S.A., Faranosov G. On defining the jet noise source quadrupole structure on the basis of multi-array acoustic data and correlation theory // AIAA paper. 2016. 2016–2806.
25. Cavalieri A.V., Jordan P., Colonius T., Gervais Y. Axisymmetric superdirectivity in subsonic jets // J. Fluid Mech. 2012. V. 704. P. 388–420.
26. Suzuki T. Identification of multipole noise sources in low Mach number jets near the peak frequency // J. Acoust. Soc. Am.. 2006. V. 119. No 6. P. 3649–3659.
27. Копьев В.Ф., Фараносов Г.А. Обобщение метода азимутальной декомпозиции звукового поля компактного источника на случай измерений вблизи жесткой поверхности // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 65–75.
28. Faranosov G., Belyaev I., Kopiev V., Zaitsev M., Alekseyentsev A., Bersenev Y., Chursin V., Viskova T. Adaptation of the azimuthal decomposition technique to jet noise measurements in full-scale tests // AIAA Journal. 2017. V. 55. No 2. P. 572–584.
29. Armstrong R.R., Michalke A., Fuchs H.V. Coherent structures in jet turbulence and noise // AIAA Journal. 1977. V. 15. No 7. P. 1011–1017.
30. Juve D., Sunyach M., Comte-Bellot G. Filtered azimuthal correlations in the acoustic far field of a subsonic jet // AIAA Journal. 1979. V. 17. No 1. P. 112–114.
31. Jordan P., Fitzpatrick J., Valiere J.-Ch. Measurement of an aeroacoustic dipole using a linear microphone array // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 111. № 3. P. 1267–1273.
32. Liu Y., Quayle A., Dowling A., Sijtsma P. Beamforming correction for dipole measurement using two-dimensional microphone arrays // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V. 124. No 1. P. 182–191.
33. Бычков О.П., Демьянов М.А., Фараносов Г.А. Локализация дипольных источников шума плоскими микрофонными решетками // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 675–687.
34. Taira K., Brunton S.L., Dawson S., Rowley C.W., Colonius T., McKeon B.J., Schmidt O.T., Gordeyev S., Theofilis V., Ukeiley L.S. Modal Analysis of Fluid Flows: An Overview // AIAA Journal. 2017. V. 55. No 12. P. 4013–4041.
35. Towne A., Schmidt O.T., Colonius T. Spectral proper orthogonal decomposition and its relationship to dynamic mode decomposition and resolvent analysis // J. Fluid Mechanics. 2018. V. 847. P. 821–867.

36. *Lumley J.L.* The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows // *Atmospheric Turbulence and Radio Propagation*, edited by Yaglom A.M., and Tatarski V.I., Nauka, Moscow, 1967, pp. 166–178.
37. *Pearson K.* On lines and planes of closest fit to systems of points in space // *The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science*. 1901. V. 2. No 11. P. 559–572.
38. *Nekkanti A., Schmidt O.T.* Modal analysis of acoustic directivity in turbulent jets // *AIAA Journal*. 2021. V. 59. No 1. P. 228–239.
39. *Fiore M., Parisot-Dupuis H., Etchebarne B., Gojon R.* Spectral proper orthogonal decomposition of coupled hydrodynamic and acoustic fields: Application to impinging jet configurations // *Computers & Fluids*. 2022. V. 241. P. 105484.
40. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
41. *Welch P.* The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms // *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*. 1967. V. 15. N. 2. P. 70–73.

APPLICATION OF SPECTRAL PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION TO THE ANALYSIS OF SOUND FIELD OF AEROACOUSTIC SOURCES

O. P. Bychkov^a, G. A. Faranosov^{a,*}

^a*FAU TsAGI, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: georgefalt@rambler.ru*

Spectral proper orthogonal decomposition (SPOD) is proposed for the identification of the multipole structure of aeroacoustic noise sources from far-field measurements. The method is verified via tests with point multipoles and validated using experimental data on flow-induced cylinder noise and turbulent jet noise.

Keywords: multipoles, azimuthal modes, SPOD

УДК 534.2

ВОЛНЫ В ТЯЖЕЛОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ГАЗЕ: ПОДЗАДАЧИ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ И ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

© 2024 г. С. П. Кшевецкий^{a,b,c,*}, Ю. А. Курдяева^{d,**}, Н. М. Гаврилов^{c,***}

^aБалтийский федеральный университет им. И. Канта, ул. А. Невского 14, Калининград, 236041 Россия

^bИнститут физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, Москва, 119017, Россия

^cСанкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034 Россия

^dКалининградский филиал Института Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
им. Н. В. Пушкова РАН, ул. Пионерская 61, Калининград, 236035 Россия

*E-mail: spkshev@gmail.com

**E-mail: yakurdyeva@gmail.com

***E-mail: n.gavrilov@spbu.ru

Поступила в редакцию 09.04.2024 г.

После доработки 16.07.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Рассматриваются двумерные линеаризованные гидродинамические уравнения, описывающие распространение волн в стратифицированном тяжелом газе. Система гидродинамических уравнений переформулирована как одно операторное уравнение типа Шредингера. Рассматриваются волны, у которых $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$, где l_z и l_x – характерные вертикальный и горизонтальный масштабы, соответственно, и изучается асимптотика решений при $\beta \rightarrow 0$. Показано, что множество решений по зависимости от β образует два непересекающихся класса. Для решений из каждого из выделенных классов предложена своя, асимптотическая при $\beta \rightarrow 0$, приближенная система уравнений. Выделенные классы решений – это акустические и внутренние гравитационные волны. Показано, что у акустических и гравитационных волн гидродинамические переменные связаны некоторыми стационарными соотношениями, различными для каждого класса. Это позволяет поставить задачу о выделении вкладов акустических и гравитационных волн в начальном условии. Показано существование решения этой задачи о разделении волн. Приведены примеры решения задачи о разделении общей задачи на подзадачи о распространении акустических и гравитационных волн. Получены оценки разделения энергии начального возмущения по типам волн.

Ключевые слова: уравнения гидродинамики, длинные волны, асимптотические решения, операторное уравнение, Гильбертово пространство, акустические волны, внутренние гравитационные волны, дисперсионное соотношение

DOI: 10.31857/S0320791924060085, EDN: JTLPNU

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование гидродинамических уравнений, описывающих распространение волн в стратифицированной среде, является важным направлением как современной математики, так и геофизики. Понятие стратифицированной среды подразумевает, что коэффициенты уравнений зависят только от одной из координат, при этом коэффициенты могут варьироваться в широких пределах. Волновые возмущения всегда присутствуют в океане и атмосфере. В данной работе обсуждаются уравнения гидродинамики, описывающие атмосферные

процессы. Модельные и аналитические исследования вертикального распространения таких волн в различных средах, например как в работах [1, 2], необходимы для развития новых представлений и углубленного понимания физических процессов.

Частный случай стратификации, когда плотность $\rho_0(z)$ атмосферного газа убывает с высотой z строго экспоненциально, $\rho_0(z) = \rho_0(0)e^{-\frac{z}{H}}$, $H = \text{const}$, называется изотермической атмосферой. В то время как все остальные стратификации объединяют общим термином “неизотермическая

атмосфера”. Реальная атмосфера Земли существенно неизотермическая, плотность зависит от высоты z по закону $\rho_0(z) = \rho_0(0) \frac{H(0)}{H(z)} e^{-\int_0^z \frac{dz}{H(z)}}$ и функция $H(z)$ изменяется с высотой на порядок. Стратификация плотности газа в атмосфере изменчива и зависит от широты, гелиогеофизических условий, сезона.

В случае изотермической атмосферы коэффициенты уравнений имеют простой вид, и уравнения решаются аналитически. Это позволяет получить из уравнений дисперсионное соотношение [3, 4], которое показывает, что существуют две волновые ветви решений. Частные решения линейаризованных гидродинамических уравнений, соответствующие одной ветви дисперсионного соотношения, называются акустическими волнами (АВ), для частот ω_A волн этой ветви справедливо соотношение

$$\Omega_A \leq |\omega_A| < \infty, \quad (1)$$

где предельная граничная частота Ω_A называется частотой акустической отсечки. Частные решения, соответствующие другой ветви дисперсионного соотношения, называются внутренними гравитационными волнами (ВГВ), для частот ω_G волн этой ветви справедливо соотношение

$$0 < |\omega_G| \leq \Omega_B, \quad (2)$$

где Ω_B называется частотой Вьяйсяля-Брендта. Справедливо $\Omega_B < \Omega_A$, т.е. между граничными частотами имеется окно. Значения Ω_B , Ω_A определяются значением H , также адиабатической постоянной газа и ускорением свободного падения.

Описанные выше понятия АВ и ВГВ применяются в геофизической литературе и к волнам в неизотермической атмосфере, но на физическом уровне строгости, ибо в общем случае написать дисперсионное уравнение не удается. Обычно это делается следующим образом. В окрестности высоты z неизотермическая стратификация локально аппроксимируется изотермической, и по значению $H(z)$ вычисляются локальные значения $\Omega_B(z)$, $\Omega_A(z)$. Далее применяются неравенства (1), (2), в которых, однако, используются локальные значения $\Omega_B(z)$, $\Omega_A(z)$.

В случае изотермической стратификации за полосами частот (1), (2) стоят частные решения линейаризованных гидродинамических уравнений, учитывающие физические особенности волн каждого типа. Недостаток локального применения неравенств (1), (2) в случае неизотермической стратификации атмосферы состоит в том, что одно и то же частное решение гидродинамических уравнений может попасть в класс АВ на одних высотах и в класс ВГВ на других высотах.

В [6] изучен спектр эволюционного оператора задачи о распространении волн в атмосфере

с неизотермической стратификацией, в которой функция $H(z)$ достигает максимума на бесконечности. Показано, что спектр частот волн ω непрерывный, вещественный. Как и в случае изотермической стратификации, спектр частот волн состоит из двух неперекрывающихся полос $\Omega_A(\infty) \geq |\omega_1| < \infty$ и $0 < |\omega_2| \leq \Omega_B(\infty)$; и $\Omega_A(\infty) > \Omega_B(\infty)$. Численные значения $\Omega_A(\infty)$, $\Omega_B(\infty)$ определяются значением $H(\infty)$, которое зависит от того, как определена функция $H(z)$ для больших высот z , и не имеет физического смысла. Поэтому, хотя структура спектра частот волн для неизотермической стратификации аналогична структуре спектра частот для изотермической стратификации, интерпретировать две указанные полосы частот как полосы частот АВ и ВГВ вряд ли физически разумно.

В данной работе рассматриваются двумерные линейаризованные гидродинамические уравнения, описывающие распространение волн в тяжелом газе, в котором масштаб стратификации $H(z)$ изменяется с высотой (общий случай неизотермической стратификации атмосферы). В динамике атмосферы большое значение имеют такие волны, у которых $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$, где l_z и l_x — характерные вертикальный и горизонтальный масштабы волн, соответственно. Важной задачей является построение асимптотики решений гидродинамических уравнений при $\beta \rightarrow 0$.

Будет показано, что, по зависимости решений от параметра β , частные решения гидродинамических уравнений делятся на два непересекающихся класса. В случае изотермической стратификации один из выделенных классов решений совпадает с АВ, которые обсуждались выше, а другой с ВГВ. Следовательно, выделенные классы решений можно отождествлять с АВ и ВГВ и в случае неизотермической стратификации.

Для АВ и ВГВ выписаны приближенные уравнения, справедливые при $\beta^2 \ll 1$, и показано, как по начальным данным исходной задачи вычислить начальные условия для подзадач для АВ и ВГВ.

В Разделе 2 рассмотрена задача о распространении волн в стратифицированной, неизотермической атмосфере. Система линейаризованных гидродинамических уравнений записана как одно операторное уравнение, в котором эволюционный оператор — матрично-дифференциальный, действующий во введенном гильбертовом пространстве h . В таком образом переформулированной задаче эволюционный оператор является самосопряженным и операторное уравнение является уравнением типа Шредингера. Для уравнений типа Шредингера существование решений известно. Таким образом, попутно доказано существование решения волновой задачи для случая стратификации общего вида. Решение гидродинамических уравнений можно рассматривать как кривую в h , параметризованную временем t .

В Разделе 3 производится анализ зависимости решений от параметра β . Строится асимптотика при $\beta \rightarrow 0$. Предложены две различные упрощенные системы уравнений, описывающие асимптотические при $\beta \rightarrow 0$ решения. Доказано существование решений этих двух предложенных различных асимптотических систем уравнений и существование у общей системы уравнений решений, которые при $\beta \rightarrow 0$ переходят в асимптотические. Таким образом, выделено два класса решений полной системы уравнений, которые характеризуются различной зависимостью от параметра β . В частном случае изотермической стратификации атмосферы один класс решений совпадает с внутренними гравитационными волнами, а другой с акустическими. Поэтому разумно считать что и в общем случае неизотермической стратификации выделенные два класса решений соответствуют акустическим и гравитационным волнам.

Раздел 4 посвящен расщеплению при $\beta \rightarrow 0$ общей задачи о распространении двумерных волн в бесконечной атмосфере на подзадачи о распространении внутренних гравитационных и акустических волн. Ставится задача о выделении в начальном условии общей гидродинамической задачи вкладов, ответственных за генерацию акустических и гравитационных волн, по отдельности. Идея выделения вкладов волн различных типов основана на том, что у волны каждого типа гидродинамические переменные связаны парой стационарных соотношений, зависящих от типа волны. Доказано существование решения поставленной задачи о разделении вкладов акустических и гравитационных волн. Для некоторых типов начальных условий получены явные формулы для начальных условий для акустической и гравитационной подзадач, также выведены формулы для распределения волновой энергии начального возмущения между волнами различных типов. Показано, что в ряде случаев распределение энергии начального возмущения между волнами различных типов не зависит от формы начального возмущения.

В Разделе 5.1 обсуждается расщепление двумерной гидродинамической задачи о распространении волн малой амплитуды в тяжелом стратифицированном газе над плоской Землей на подзадачи о распространении акустической и гравитационной волн. Изучается влияние отражающей поверхности на свойства волн.

Все доказательства основных утверждений вынесены в приложения.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему линеаризованных гидродинамических уравнений для газа в поле тяжести:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 u}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_0 w}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial z} + \rho_0 g \psi = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_0 \phi}{\partial t} + (\gamma - 1) \left(\frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} \right) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 w = 0.$$

Здесь t — время; x и z — горизонтальная и вертикальная координаты, соответственно. $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ — постоянная адиабаты; $\alpha = \gamma - 1 + \gamma \frac{\partial H}{\partial z}$; $H(z) = \frac{RT_0(z)}{g\mu}$ — масштаб стратификации, называемый шкалой высот; g — ускорение свободного падения, $T_0(z)$ — распределение температуры невозмущенной атмосферы с высотой, которое считается произвольным, но $\alpha(z) > 0$. Плотность газа $\rho_0(z)$ выражается через $H(z)$ формулой $\rho_0(z) = \frac{\rho_0(z)H(0)}{H(z)} \exp\left(-\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right)$, $\gamma = \text{const}$. Плотность может изменяться скачком, но так, чтобы выполнялось условие статической устойчивости $\alpha(z) > 0$. Требование $\alpha(z) > 0$ приводит, в частности, к тому, что плотность $\rho_0(z)$ падает с высотой.

Функции $\phi(x, z, t)$, $\psi(x, z, t)$ выражаются через температуру $T(x, z, t)$ и плотность $\rho(x, z, t)$ возмущенного газа формулами

$$\begin{aligned} T(x, z, t) &= T_0(z)(1 + \phi(x, z, t)), \\ \rho(x, z, t) &= \rho_0(z)(1 + \psi(x, z, t)), \end{aligned} \quad (4)$$

$u(x, z, t)$, $w(x, z, t)$ — локальные массовые скорости атмосферного газа вдоль горизонтальной оси x и вертикальной оси z , соответственно.

Пусть $X = \begin{pmatrix} \psi \\ u \\ w \\ \phi \end{pmatrix}$. Квадратичный функционал [8]

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{R^2} \rho_0(z) \left[\frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{gH}{2\gamma} (\phi + \psi)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{gH}{2\gamma\alpha} (\phi - (\gamma - 1)\psi)^2 \right] d\Omega, \quad d\Omega = dx dz, \end{aligned} \quad (5)$$

является интегралом волновой энергии для уравнений (3). Конструкция $\sqrt{2E(X)}$ удовлетворяет аксиомам нормы: $\|X\| = \sqrt{2E(X)}$. Согласно теореме о поляризации [17], по этой норме можно построить скалярное произведение

$$\begin{aligned} \{X_1, X_2\} &= \int_{R^2} \rho_0(z) \left[u_1^* u_2 + w_1^* w_2 + \frac{gH}{\gamma} (\phi_1 + \psi_1)^* \times \right. \\ &\quad \left. \times (\phi_2 + \psi_2) + \frac{gH}{\alpha\gamma} (\phi_1 - (\gamma - 1)\psi_1)^* (\phi_2 - (\gamma - 1)\psi_2) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Дополним уравнения (3) начальными условиями:

$$\begin{aligned} X(x, z, t = 0) &= X_0(x, z), \\ \|X_0\| &= \sqrt{2E(X_0)} < \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия для задачи о распространении волн в безграничной атмосфере не требуются. Будем искать решение задачи (3), (7) как параметризованный временем t элемент гильбертова пространства h , скалярное произведение в котором определяется формулой (6). Условие принадлежности решения гильбертову пространству h играет роль граничных условий; оно эквивалентно требованию конечности волновой энергии.

Существование решения сформулированной задачи (3), (7) показано в Приложении А. В этом же приложении дан краткий обзор математического исследования задачи о распространении волн, описываемых системой уравнений (3).

3. ДЛИННЫЕ ВДОЛЬ ГОРИЗОНТАЛИ ВОЛНЫ

В динамике атмосферы большую роль играют длинные вдоль горизонтали волны, для которых $\beta = \frac{l_z}{l_x} = \beta \ll 1$, где l_x и l_z характерные горизонтальные и вертикальные масштабы волны соответственно. Вследствие стратификации среды вертикальный масштаб l_z волн не может превосходить масштаб стратификации H , $l_z \lesssim H$, и в частном случае, когда $l_z \sim H$, условие выглядит так: $\frac{H}{l_x} \ll 1$.

Частный случай стратификации плотности газа, когда плотность убывает с высотой z строго экспоненциально, $\rho_0(z) = \rho_0(0)e^{-\frac{z}{H}}$, $H = \text{const}$, называется изотермической атмосферой. Система уравнений (3) в случае изотермической атмосферы решается аналитически, и хорошо изучена [8, 5, 3, 4]. Общее решение уравнений (3) в этом случае является суммой внутренних гравитационных волн и акустических волн.

Удобно записать систему уравнений (3) в безразмерных переменных. Поскольку параметры изучаемых волн могут существенно различаться, используем различные безразмерные переменные. Для волн одного типа будут использованы безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} u_G &= \sqrt{gH_0}u'_G, \quad w_G = \beta\sqrt{gH_0}w'_G, \\ \psi_G &= \psi'_G, \quad \phi_G = \phi'_G, \\ t' &= \beta\sqrt{\frac{g}{H_0}}t, \quad x' = \frac{x}{H_0}\beta, \quad z' = \frac{z}{H_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $H(z) = H_0\eta(z)$, $H_0 = \max\{H(z)\}$ и штрихи помечают вводимые новые безразмерные переменные. Для волн другого типа новые, безразмерные переменные вводятся иначе

$$\begin{aligned} u_A &= \beta\sqrt{gH_0}u''_A, \quad w_A = \sqrt{gH_0}w''_A, \\ \psi_A &= \psi''_A, \quad \phi_A = \phi''_A, \\ t'' &= \sqrt{\frac{g}{H_0}}t, \quad x'' = \frac{x}{H_0}\beta, \quad z'' = \frac{z}{H_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь новые вводимые безразмерные переменные помечены двумя штрихами.

Понятия акустической и внутренней гравитационной волн для неизотермической стратификации строго не определены; эти термины используются в физической литературе применительно к неизотермической стратификации на физическом уровне строгости. Мы будем использовать безразмерные переменные (8), (9) при анализе системы уравнений (3).

Для введенных безразмерных функций (8), (9) можно записать две эквивалентные системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 \psi'_G}{\partial t'} + \frac{\partial \rho_0 u'_G}{\partial x'} + \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial z'} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 u'_G}{\partial t'} + \frac{\partial (\rho_0 \eta (\psi'_G + \phi'_G))}{\partial x'} &= 0, \\ \beta^2 \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial t'} + \frac{\partial (\rho_0 \eta (\psi'_G + \phi'_G))}{\partial z'} + \rho_0 \psi'_G &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 \phi'_G}{\partial t'} + (\gamma - 1) \left[\frac{\partial \rho_0 u'_G}{\partial x'} + \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial z'} \right] + \frac{\alpha}{\eta} \rho_0 w'_G &= 0; \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 \psi''_A}{\partial t''} + \beta^2 \frac{\partial \rho_0 u''_A}{\partial x''} + \frac{\partial \rho_0 w''_A}{\partial z''} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 u''_A}{\partial t''} + \frac{\partial \rho_0 \eta (\psi''_A + \phi''_A)}{\partial x''} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 w''_A}{\partial t''} + \frac{\partial \rho_0 \eta (\psi''_A + \phi''_A)}{\partial z''} + \rho_0 \psi''_A &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 \phi''_A}{\partial t''} + (\gamma - 1) \left[\beta^2 \frac{\partial \rho_0 u''_A}{\partial x''} + \frac{\partial \rho_0 w''_A}{\partial z''} \right] + \frac{\alpha}{\eta} \rho_0 w''_A &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

различающиеся только используемыми переменными.

Уравнения (10), (11) содержат члены с малыми параметрами. После пренебрежения слагаемыми пропорциональными β^2 в (10), (11), приходим к упрощенным уравнениям динамики волн. Будем называть упрощенные уравнения усеченными.

3.1. Усеченные уравнения для волн первого типа

Приближенные уравнения получим из (10), отбрасывая слагаемые пропорциональные β^2 . В третьем уравнении системы (10) отбросим член

вертикального ускорения $\beta^2 \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial t'}$. Дифференцируя по t' полученное приближенное уравнение и исключая ϕ'_G и ψ'_G через первое и четвертое уравнения системы (10), можно получить еще одно упрощенное уравнение.

Приближение, в котором членом вертикального ускорения $\beta^2 \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial t'}$ в третьем уравнении системы (10) пренебрегают, называют в геофизической литературе квазистатическим [15].

Полученных два приближенных уравнения, второе и первое (или четвертое) уравнения системы (10) образуют вместе замкнутую систему уравнений. Используя размерные переменные, упрощенную замкнутую систему уравнений, следующую из (10), можно записать в удобном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_G}{\partial t} + \gamma g H \left[\frac{\partial \rho_0 \bar{u}_G}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_G}{\partial z} \right] + \\ + \alpha g \rho_0 \bar{w}_G = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \bar{u}_G}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}_G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{P}_G}{\partial z} + \rho_0 g \bar{\psi}_G = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma H \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_G}{\partial x} + \gamma H \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_G}{\partial z} + \alpha \rho_0 \bar{w}_G \right] + \\ + \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_G}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_G}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\bar{P}_G = \rho_0 g H (\bar{\psi}_G + \bar{\phi}_G) = P_0 (\bar{\psi}_G + \bar{\phi}_G)$ — волновая добавка к фоновому давлению $P_0(z) = \rho_0(z) g H(z)$. Черточки над символами, обозначающими физические величины, помещены чтобы напоминать о различии между точными решениями уравнений (3) и приближенными решениями, получаемыми из (12).

Обозначим $\bar{\lambda}_G(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{P}_G(x, z, t) \\ \bar{u}_G(x, z, t) \end{pmatrix}$. Интеграл энергии для (12) имеет вид

$$\begin{aligned} E_G(\lambda_G) = \frac{1}{2} \int_{R^2} \rho_0(z) \left[\bar{u}_G^2 + \frac{\bar{P}_G^2}{\gamma g H \rho_0(z)} + \right. \\ \left. + \frac{(\bar{P}_G + \gamma H(z) \partial \bar{P}_G / \partial z)^2}{\gamma \alpha \rho_0(z) g H} \right] d\Omega < \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Необходимо дополнить уравнения (12) начальными условиями, которые должны соответствовать протяженному вдоль оси Ox начальному возмущению. Пусть функции $\bar{P}_0(x, z)$, $\bar{u}_0(x, z)$ описывают некоторое начальное возмущение, имеющее конечную энергию: $E_G(\lambda_{G,0}) < \infty$, где $\lambda_{G,0} = \begin{pmatrix} \bar{P}_0(x, z) \\ \bar{u}_0(x, z) \end{pmatrix}$.

При этом, пусть функции $\bar{P}_0(x, z)$, $\bar{u}_0(x, z)$ таковы, что их типичные пространственные масштабы l_{0x}, l_{0z} (где $l_{0z} \lesssim H$) вдоль осей Ox и Oz совпадают: $\frac{l_{0z}}{l_{0x}} = O(1)$. Тогда начальные условия, соответствующие требованию $\beta \ll 1$, можно выразить через функции $\bar{P}_0(x, z)$, $\bar{u}_0(x, z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{P}_G(x, z, t = 0) &= \sqrt{\beta} \bar{P}_0(\beta x, z), \\ \bar{u}_G(x, z, t = 0) &= \sqrt{\beta} \bar{u}_0(\beta x, z). \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) коэффициент β , предшествующий x , производит растяжение функций $\bar{P}_0(x, z)$, $\bar{u}_0(x, z)$ вдоль оси x . Таким образом, для характерных масштабов функций $\bar{P}_G(x, z, t = 0)$, $\bar{u}_G(x, z, t = 0)$ вдоль x и z осей справедлива оценка $\frac{l_z}{l_x} = \frac{l_{0z}}{\beta^{-1} l_{0x}} = \beta O(1)$.

Множитель $\sqrt{\beta}$ введен в (14) для удобства, чтобы энергия E начального возмущения не зависела от β . Вследствие линейности уравнений, этот множитель не влияет на результат.

Дополним уравнения (12) начальными условиями (14), требованием конечности интеграла волновой энергии и дополнительными условиями

$$\int_{R^2} \rho_0 \bar{w}_G^2 d\Omega < \infty, \quad \int_{R^2} \rho_0 \left(\frac{\partial \bar{w}_G}{\partial z} \right)^2 d\Omega < \infty. \quad (15)$$

Теорема 1. Искомое решение задачи (12),

$$(14), (15) \text{ обозначим } \bar{X}_G(x, z, t, \beta) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_G \\ \bar{u}_G \\ \bar{w}_G \\ \bar{\phi}_G \end{pmatrix}. \text{ Пусть}$$

$X_G(x, z, t, \beta)$ — решение уравнений (3) для начальных условий $X_G(x, z, t = 0, \beta) = \bar{X}_G(x, z, t = 0, \beta)$.

Пусть начальные условия (14) квазистатической задачи (12), (15) удовлетворяют условию $E_G(\bar{\lambda}_G(x, z, 0)) < \infty$ и соотношениям

$$\begin{aligned} E_G \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x} \right) < \infty, \\ E_G \left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x^2} \right) < \infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда решения обеих задач (полной и усеченной) существуют, и для любого $t \leq t_0 < \infty$ асимптотически при $\beta \rightarrow 0$ совпадают, т. е.

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left\| \bar{X}_G(x, z, t, \beta) - X_G(x, z, t, 0) \right\| = 0. \quad (17)$$

Первое из условий (16) Теоремы 1 важно для существования решения усеченных уравнений. Второе важно для существования предельного

перехода от решений полной задачи к решениям усеченных уравнений.

Теорема 1 показывает, что система уравнений (3) обладает классом частных решений, удовлетворяющих свойству (17), и этот признак можно использовать для определения внутренних гравитационных волн как в случае изотермической, так и неизотермической стратификации атмосферы.

Внутренние гравитационные волны с $\beta = \frac{H}{l_x} \ll 1$ называют длинными.

Более точные усеченные уравнения для линейных длинных внутренних гравитационных волн можно формально вывести с любой точностью с помощью итерационной процедуры по параметру β . Теорема 1 дает условия применимости квазистатического приближения при моделировании распространения длинных линейных внутренних гравитационных волн в атмосфере.

3.2. Усеченные уравнения для волн второго типа

Рассмотрим систему уравнений (11). Опустим в (11) слагаемые, пропорциональные β^2 .

В отличие от ранее рассмотренного случая гравитационных волн, полученная таким образом упрощенная система уравнений, состоящая из второго и третьего уравнений системы (11) и из упрощенных первого и четвертого уравнений системы (11), является системой четвертого порядка по времени. Это означает, что эта система не только описывает интересующие нас волны второго типа, но и имеет какие-то другие решения, не представляющие интереса и которые нужно исключить.

Исключим $\rho_0 w_A''$ из упрощенных первого и четвертого уравнений системы (11) и проинтегрируем полученное уравнение по t'' и придем к формуле

$$\frac{\partial}{\partial z''} \left[\rho_0 \phi_A'' \frac{\eta}{\alpha} - (\gamma - 1) \frac{\eta}{\alpha} \rho_0 \phi_A'' \right] - \rho_0 \psi_A'' = F_1(x'', z''). \quad (18)$$

Здесь $F_1(x'', z'')$ — некоторая функция, возникшая при интегрировании уравнения. Функцию $F_1(x'', z'')$ можно определить исходя из следующих соображений. Очевидно, волновые уравнения должны иметь нулевое решение, ибо можно рассматривать волну с нулевой амплитудой. Следовательно, можно положить $F_1(x'', z'') \equiv 0$.

Из формулы (18) и из третьего уравнения системы (11) следует другая формула, которая связывает динамические переменные:

$$\frac{\partial}{\partial z''} \left[\frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 u_A''}{\partial z''} - \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 w_A''}{\partial x''} \right] + \frac{\partial}{\partial z''} \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \rho_0 u_A'' \right) - \frac{\partial \rho_0 w_A''}{\partial x''} = F_2(x'', z''). \quad (19)$$

По тем же причинам, что описаны выше, положим $F_2(x'', z'') = 0$.

В размерных переменных замкнутая система уравнений для волн второго типа выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial t} + \rho_0 \bar{w}_A &= 0, \quad \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} - \rho_0 \bar{\psi}_A = 0, \quad (20) \\ \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[g \alpha \left(\bar{f}_A + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right) + g \bar{f}_A \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_A}{\partial z} - \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_A}{\partial x} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \rho_0 \bar{u}_A \right) - \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_A}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

где $\bar{f}_A = \frac{H}{\alpha} \rho_0 [\bar{\phi}_A - (\gamma - 1) \bar{\psi}_A]$. Черточки над буквами помещены для того, чтобы не путать точные решения уравнений (3) с приближенными, получаемыми из (20).

Сформулируем начальные условия для (20).

Обозначим $\bar{\lambda}_A(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{f}_A(x, z, t) \\ \bar{w}_A(x, z, t) \end{pmatrix}$. Функционал энергии для (20) имеет вид

$$\begin{aligned} E_A(\bar{\lambda}_A) &= \frac{1}{2} \int_{R^2} \left[\rho_0 \bar{w}_A^2 + \frac{\bar{f}_A^2}{\rho_0 \gamma H} \alpha g + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g \alpha^2}{\rho_0 \gamma H} \left(\bar{f}_A + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega < \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть функции $\bar{f}_0(x, z)$, $\bar{w}_0(x, z)$ описывают некоторое начальное возмущение с конечной энергией: $E(\bar{\lambda}_{A,0}) < \infty$, где $\bar{\lambda}_{A,0} = \begin{pmatrix} \bar{f}_0(x, z) \\ \bar{w}_0(x, z) \end{pmatrix}$, и пусть

$\frac{l_{0z}}{l_{0x}} = O(1)$, где l_{0x} , l_{0z} — характерные пространственные масштабы вдоль осей x , z для функций $\bar{f}_0(x, z)$, $\bar{w}_0(x, z)$, соответственно. Начальные условия для (20), соответствующие требованию $\beta \ll 1$, можно записать через функции $\bar{f}_0(x, z)$, $\bar{w}_0(x, z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{f}_A(x, z, t = 0) &= \sqrt{\beta} \bar{f}_0(\beta x, z), \\ \bar{w}_A(x, z, t = 0) &= \sqrt{\beta} \bar{w}_0(\beta x, z). \end{aligned} \quad (22)$$

Для единственности решения четвертого уравнения системы (20) добавим требования:

$$\int_{R^2} \rho_0 \bar{u}_A^2 d\Omega < \infty, \quad \int_{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \rho_0 \bar{u}_A \right)^2 \frac{1}{\rho_0} d\Omega < \infty. \quad (23)$$

Теорема 2. Решение задачи (20), (23) для началь-

ных условий (22) обозначим $\bar{X}_A(x, z, t, \beta) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_A \\ \bar{u}_A \\ \bar{w}_A \\ \bar{\phi}_A \end{pmatrix}$, а

$X_A(x, z, t, \beta)$ пусть решение уравнений (3) для начальных условий $X_A(x, z, t = 0, \beta) = \bar{X}_A(x, z, t = 0, \beta)$.

Пусть начальные условия (22) удовлетворяют условию $E_A(\bar{\lambda}_A(x, z, 0)) < \infty$, где $\bar{\lambda}_A(x, z, 0) = \begin{pmatrix} \bar{f}_A(x, z, 0) \\ \bar{w}_A(x, z, 0) \end{pmatrix}$, и соотношениям

$$E_A\left(\frac{\partial \bar{\lambda}_A(x, z, 0)}{\partial x}\right) < \infty, \quad E_A\left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_A(x, z, 0)}{\partial x^2}\right) < \infty. \quad (24)$$

Тогда решения обеих, усеченной и общей задач, существуют, и на конечных временах асимптотически совпадают, т.е.

$$\|\bar{X}_A(x, z, t, \beta) - X_A(x, z, t, \beta)\| \rightarrow 0 \quad (25)$$

при $\beta \rightarrow 0$, $0 \leq t \leq t_0 < \infty$.

Первое из ограничений Теоремы 2 накладывается для существования и единственности решения усеченной задачи. Второе условие важно для существования предельного перехода от решения полной задачи к решению усеченной.

Уравнения (20) описывают квазивертикальное распространение волн и, возможно, колебания волн в атмосферном резонаторе, если таковой существует. Мы говорим о квазивертикальном распространении волн потому, что x — координата содержится в эволюционных уравнениях только как параметр.

В частном случае изотермической атмосферы, когда $\rho_0(z) = \rho_0(0)e^{-\frac{z}{H}}$, $H = \text{const}$, система уравнений (3) решается аналитически, и в такой модели акустические волны выделяют по ветви дисперсионного соотношения для этих волн [3, 4]. Теорема 2 показывает, что система уравнений (3) обладает классом частных решений, удовлетворяющих свойству (25), и этот признак можно положить в основу определения акустических волн в неизо-термической атмосфере.

Подобные уравнениям (20) усеченные уравнения для длинных акустических волн формально можно вывести с любой желаемой точностью с помощью итерационной процедуры по параметру β . Уравнения последующих приближений учитывают горизонтальное распространение акустических волн.

4. РАСЩЕПЛЕНИЕ НА ПОДЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ И АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

В случае изотермической стратификации волновые решения системы уравнений (3)

классифицированы. Они являются либо внутренними гравитационными, либо акустическими волнами. Волны этих двух типов различают по ветвям дисперсионного соотношения, которым волны соответствуют [3, 4].

Реальная атмосфера неизо-термическая, и коэффициенты уравнений (3) зависят от координаты z и могут варьироваться в широких пределах. Анализ показал, что у системы уравнений (3) существуют решения двух типов, которые различаются по функциональной зависимости от горизонтального масштаба возмущения, и у волны каждого типа динамические переменные связаны парой характерных только для волн данного типа стационарных соотношений.

Эти стационарные соотношения, связывающие гидродинамические переменные у волн каждого типа, вычислены асимптотически при $\beta \rightarrow 0$. В динамике атмосферы большую роль играют волны, у которых $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$. Поэтому выведенные стационарные соотношения конструктивны.

Мы получили, что частные решения системы уравнений (3), которые при $\beta \rightarrow 0$ асимптотически удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0 g \Psi = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma H \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \gamma H \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} + \alpha \rho_0 w \right] + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0,$$

можно ассоциировать с внутренними гравитационными волнами. Частные решения системы уравнений (3), которые при $\beta \rightarrow 0$ асимптотически удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \rho_0 \Psi = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 u}{\partial z} - \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \rho_0 u \right) - \frac{\partial \rho_0 w}{\partial x} = 0,$$

можно ассоциировать с акустическими волнами.

Соотношения (26), (27) не содержат время t явно. Первое из соотношений (26) совпадает с квазистатическим приближением, широко используемым при моделировании крупномасштабных и среднемасштабных атмосферных и океанических процессов [7, 9, 10, 11]. Второе уравнение в (26) — следствие первого. Оно выводится из первого с помощью уравнений для плотности и температуры. Это уравнение часто называют диагностическим [11].

Уравнения (27) выведены в [12]. Ниже покажем, что в случае бесконечной атмосферы множество решений уравнений (27) дает ортогональное дополнение к множеству решений уравнений (26) до полного функционального пространства. Следовательно, формулы (27) важны.

Формулы (27), (26) выведены для волн с $\beta^2 = \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \ll 1$. Однако применимость этих формул шире. Рассмотрим короткие волны, переход к пределу которых соответствует $\frac{l_z}{H}, \frac{l_x}{H} \rightarrow 0$. Из (27) в этом пределе получаются классические для акустики формулы [14]

$$P_A = c_s^2 \rho_0 \Psi_A, \quad \frac{\partial u_A}{\partial z} - \frac{\partial w_A}{\partial x} = 0. \quad (28)$$

Здесь $P_A(x, z, t) = P_0(z)(\Psi_A(x, z, t) + \Phi_A(x, z, t))$ — волновая добавка к фоновому давлению; $\rho_0 \Psi_A$ — массовая плотность возмущения; c_s — скорость звука. Таким образом, формулы (27) можно рассматривать как уточнение формул классической акустики. Аналогичное замечание касается внутренних

гравитационных волн: формулы (26) выведены для волн с $\beta^2 \ll 1$, но применимы и к коротким волнам.

Соотношения (26), (27) можно использовать для выделения в начальных условиях вкладов, ответственных за возникновение акустических и гравитационных волн, по отдельности. Рассмотрим

такие 4-столбцы $X_G(x, z) = \begin{pmatrix} \Psi_G(x, z) \\ u_G(x, z) \\ w_G(x, z) \\ \Phi_G(x, z) \end{pmatrix} \in h$, ком-

поненты $\Psi_G(x, z), u_G(x, z), w_G(x, z), \Phi_G(x, z)$ которых удовлетворяют соотношениям (26). Пусть h_G обозначает подмножество гильбертова пространства h , состоящее из таких столбцов $X_G \in h$. Пространство h было введено ранее. Каждый элемент $X_G \in h_G$ можно записать следующим образом:

$$X_G(x, z) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P_G(x, z)}{\partial z} \frac{1}{\rho_0 g H} \\ u_G(x, z) \\ -\int_{-\infty}^z \frac{\partial u_G(x, \xi)}{\partial x} d\xi - \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial u_G(x, \eta)}{\partial x} d\eta d\xi \\ \left(P_G(x, z) - \frac{\partial P_G(x, z)}{\partial z} \right) \frac{1}{\rho_0 g H} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

В формулах (29) функции Ψ_G, Φ_G, w_G выражены через P_G, u_G с использованием соотношений (26).

Будем искать $(h_G)_\perp \subset h$. Элементы $X_{G\perp} \in (h_G)_\perp \subset h$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\{X_G, X_{G\perp}\} = 0 \quad (30)$$

для каждого $X_G \in h_G$. Скалярное произведение $\{\cdot, \cdot\}$ в (30) понимается в смысле (6).

Если подставить (29) в (30) и проинтегрировать по частям, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{R^2} \frac{P_G}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \Phi_{G\perp} \frac{H}{\alpha} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\gamma - 1) \frac{H}{\alpha} \rho_0 \Psi_{G\perp} \right) - \rho_0 \Psi_{G\perp} \right] d\Omega + \\ & + \int_{R^2} \rho_0 u_G \left[u_{G\perp} - \frac{1}{\rho_0(z)} \int_{-\infty}^z \rho_0(\xi) \frac{\partial}{\partial x} w_{G\perp}(x, \xi) d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial}{\partial x} w_{G\perp}(x, \eta) d\eta d\xi \right] d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Первая часть формулы (31) получается просто. Вторая часть выводится сначала для функций $X_G \in C_0^\infty$. Затем, используя непрерывность скалярного произведения и то, что C_0^∞ всюду плотно в h , получаем остальную часть формулы (31). Вследствие произвольности функций $P_G(x, z), u_G(x, z)$ из (31) следует:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} f_{G\perp} - \rho_0 \Psi_{G\perp} = 0, \\ & \rho_0 u_{G\perp} - \int_{-\infty}^z \rho_0(\xi) \frac{\partial}{\partial x} (w_{G\perp}(x, \xi)) d\xi + \\ & + \rho_0(z) \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial}{\partial x} (w_{G\perp}(x, \eta)) d\eta d\xi = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где $f_{G\perp} \equiv \frac{\rho_0 H}{\alpha} (\Phi_{G\perp} - (\gamma - 1) \Psi_{G\perp})$. Первая формула в (32) совпадает по форме с первым уравнением в (27). Вторая формула после двойного дифференцирования дает некоторое выражение, аналогичное второму уравнению в (27). Таким образом,

$$(h_G)_\perp = h_A, \quad h_A \cup h_G = h, \quad (33)$$

где h_A — множество столбцов $X_A(x, z, t) \in h$. Компоненты столбцов X_A удовлетворяют соотношениям (27).

Вследствие (33) каждое начальное условие $X(x, z, t = 0)$ гидродинамической задачи можно однозначно представить в виде суммы:

$$X(x, z, t = 0) = X_G(x, z, t = 0) + X_A(x, z, t = 0). \quad (34)$$

Любой момент времени может быть выбран в качестве начального; поэтому $X_G(x, z, t) \in h_G$, $X_A(x, z, t) \in h_A$ и эти волны можно рассматривать как параметризованные временем t кривые в h_A , h_G , и $\{X_A(x, z, t), X_G(x, z, t)\} = 0$.

Свойства (33) доказывают полноту предложенного раздельного описания внутренних гравитационных и акустических волн, т.е. никакие иные решения не существуют ни при какой стратификации.

Чтобы вычислить начальные условия для акустической и гравитационной подзадач, составим замкнутую систему уравнений, состоящую из (26), (27) и естественного условия (34).

На основании (33), решение системы уравнений (26), (27), (34) существует и единственно. Здесь в качестве неизвестных функций подразумеваются компоненты вектор-функций $X_A(x, z, t = 0)$, $X_G(x, z, t = 0)$.

На основе полученных результатов построим следующую теорему:

Теорема 3. Пусть начальные условия

$$X(x, z, t = 0) = \sqrt{\beta} X_0(\beta x, z) \quad (35)$$

для системы (3) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} X_0(x, z) \in h, \quad \frac{\partial}{\partial x} X_0(x, z) \in h, \\ \frac{\partial}{\partial z} X_0(x, z) \in h, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_0(x, z) \in h. \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда при $t \leq t_0 < \infty$ решение $X(x, z, t, \beta)$ задачи (3) можно асимптотически представить в виде суммы

$$X(x, z, t, \beta) \rightarrow \bar{X}_A(x, z, t, \beta) + \bar{X}_G(x, z, t, \beta) \quad (37)$$

при $\beta \rightarrow 0$

решений усеченных уравнений (12), (20). Решения всех выписанных задач существуют. Начальные условия для (12), (20) могут быть получены решением замкнутой системы уравнений (26), (27), (34).

Мы здесь не касаемся методов решения системы уравнений (26), (27), (34).

4.1. Распределение энергии начального возмущения между волнами различных типов

Пусть E — энергия начального возмущения, и E_A , E_G — энергии акустической и гравитационной

волн. Из физических соображений ясно, что $E = E_A + E_G$. Формулы (33) позволяют доказать это соотношение для произвольной стратификации; доказательство очевидное и здесь не приводится.

Соотношения (26), (27) можно использовать для получения количественной оценки энергий E_A , E_G . Для иллюстрации рассмотрим случай

$$\begin{aligned} u(x, z, t = 0) = w(x, z, t = 0) = \\ = \psi(x, z, t = 0) \equiv 0, \\ \phi(x, z, 0) = \phi_0(x, z). \end{aligned} \quad (38)$$

Рассмотрим простой случай, когда атмосфера изотермическая, $H = \text{const}$. Решение уравнений (26), (27), (34) дает начальные условия для акустических и гравитационных волн:

$$\begin{aligned} u_A(x, z, 0) = u_G(x, z, 0) = \\ = w_A(x, z, 0) = w_G(x, z, 0) = 0, \\ \phi_A(x, z, 0) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \phi_0(x, z), \\ \phi_G(x, z, 0) = \frac{1}{\gamma} \phi_0(x, z), \\ \psi_A(x, z, 0) = -\psi_G(x, z, 0) = \\ = \left(\phi_0(x, z) - \int_{-\infty}^z \phi_0(x, z) dz \frac{1}{H} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Для энергий E_A , E_G получаем формулы:

$$E_{A,G} = gH \int_{R^2} \rho_0(z) \left(\frac{\phi_{A,G}^2}{\gamma - 1} + \psi_{A,G}^2 \right) d\Omega. \quad (40)$$

Нет необходимости вычислять интегралы в (40), поскольку можно воспользоваться дополнительной формулой

$$E = E_A + E_G = gH \int_{R^2} \rho_0(z) \phi_0^2(x, z) d\Omega. \quad (41)$$

В результате совместного рассмотрения формул (39), (40), (41) получаем:

$$E_A = \frac{\gamma - 1}{\gamma} E, \quad E_G = \frac{E}{\gamma}, \quad \frac{E_A}{E_G} = \gamma - 1. \quad (42)$$

Такие формулы применимы и к трехмерному случаю.

В [13] были рассчитаны энергии внутренних гравитационных и акустических волн, возникающих в результате нагрева среды падающим метеором. Зависимость нагрева среды от времени задавалась δ -функцией. Задача с таким источником может быть переформулирована в задачу Коши с начальным возмущением поля температуры. Можно

сравнить формулу (42) и формулу из работы [13]. Сравнение формул показывает, что они совпадают. В [13] зависимость нагрева от координат задавалась функцией Гаусса, и при этом предположение $l_z \ll l_x$ не использовалось. При выводе (42) функциональная зависимость начального возмущения от координат не конкретизировалась, но использовалось предположение $l_z \ll l_x$. Поскольку результаты совпали, то можно сделать предположение, что отношение $\frac{E_A}{E_G}$ не зависит от формы начального возмущения температуры и определяется только газовой постоянной γ .

В случае, когда $\psi(x, z, 0) \neq 0$, но все другие компоненты начального условия равны нулю, энергии E_A , E_G вычисляются аналогично. Отношение $\frac{E_A}{E_G}$ также не зависит от формы начального возмущения: $\frac{E_A}{E_G} = 1/(\gamma - 1)$.

Случаи, когда начальные возмущения заданы для функций u , w , более трудны для анализа. Отношение $\frac{E_A}{E_G}$ в этом случае зависит от формы начального возмущения. Используя теорию возмущений с малым параметром β , можно показать, что $\frac{E_A}{E_G} = O(\beta^{-2})$ при

$$\begin{aligned} u(x, z, 0) &= \phi(x, z, 0) = \\ &= \psi(x, z, 0) \equiv 0, \quad w(x, z, 0) \neq 0, \end{aligned} \quad (43)$$

и $\frac{E_A}{E_G} = O(\beta^2)$ при

$$\begin{aligned} w(x, z, 0) &= \phi(x, z, 0) = \\ &= \psi(x, z, 0) \equiv 0 \quad u(x, z, 0) \neq 0. \end{aligned} \quad (44)$$

4.2. Начальные условия для акустических и внутренних гравитационных волн в случае начального температурного возмущения

Известно, что горизонтальная компонента групповой скорости внутренних гравитационных волн больше вертикальной [8, 15], для большинства наблюдаемых в атмосфере гравитационных волн она значительно больше. Поэтому атмосферные внутренние гравитационные волны распространяются почти горизонтально. Существует представление о том, что, если источник волн находится в нижней атмосфере, на высотах до 15 км, то гравитационные волны достигают высот 80–500 км только спустя большое время. Ниже будет показано, что в некоторых случаях внутренние гравитационные и акустические волны могут возникать практически во всей толще атмосферы выше начального возмущения мгновенно.

Предположим, задано начальное температурное возмущение (38). На Рис. 1 для примера

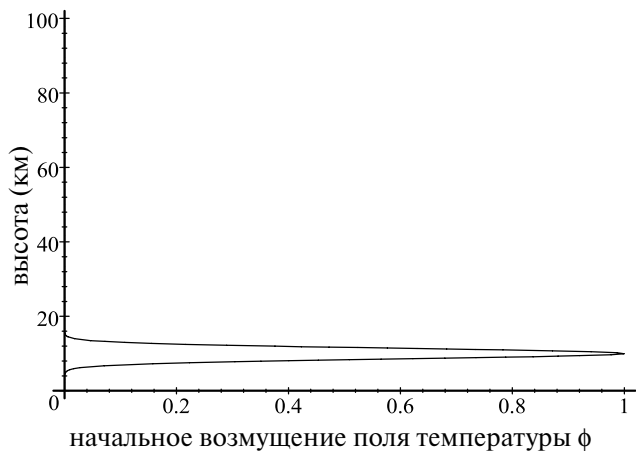


Рис. 1. Вертикальный профиль начального температурного возмущения $\phi(x, z, 0)$.

изображена зависимость начального возмущения поля температуры от высоты для случая, когда тепловой источник задан гауссовой функцией с максимумом на высоте 10 км, и имеет полуширину 4 км.

Формулы (39) дают начальные условия для акустической и гравитационной волн. Амплитуда начального возмущения температуры для акустической волны будет равна $\frac{1}{3}$ от амплитуды начального возмущения, а амплитуда начального возмущения температуры для гравитационной волны будет равна $\frac{2}{3}$ от амплитуды начального возмущения. У внутренней гравитационной и акустической волн начальные возмущения плотности отличны от нуля, несмотря на то, что в начальном условии (38) начальное возмущение плотности газа отсутствует (рис. 2, рис. 3).

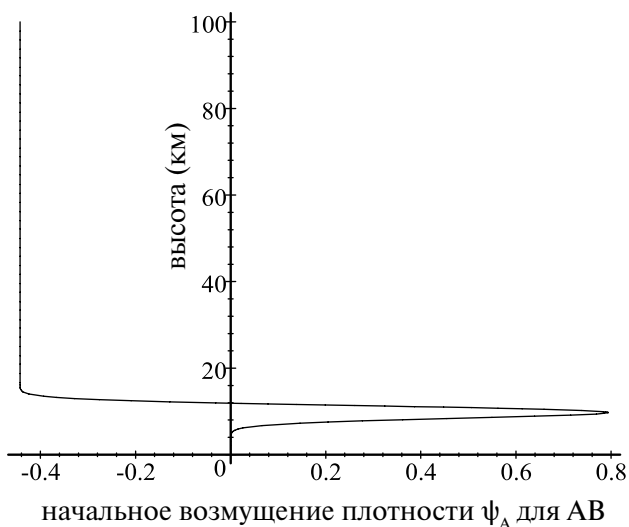


Рис. 2. Вертикальный профиль возмущения плотности $\psi_A(x = 0, z, t = 0)$.

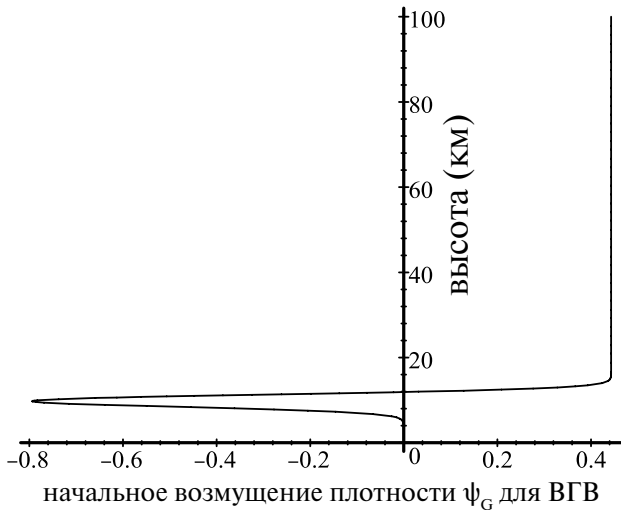


Рис. 3. Вертикальный профиль возмущения плотности $\psi_G(x=0, z, t=0)$.

Рис. 3 показывает, что внутренние гравитационные и акустические волны при $t > 0$ возникли на всех высотах выше начального возмущения.

Общая волна равна сумме акустической и гравитационной волн и сумме возмущений плотности, соответствующих акустической и гравитационной волнам, при $t = 0$ равна нулю. Таким образом, при $t = 0$ возмущения плотности, производимые гравитационной и акустической волнами полностью компенсируют друг друга, и результирующее, суммарное возмущение плотности отсутствует. При $t > 0$ эта взаимная компенсация волн нарушается, главным образом за счет распространения более быстрых, акустических волн. Поэтому можно обнаружить гравитационные волны на тех высотах, на которые они не могли бы проникнуть за столь малое время за счет вертикального распространения. Получается эффект, будто гравитационные волны распространяются вверх со скоростью звука.

5. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЛНАХ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ НА ПОДЗАДАЧИ О ВОЛНАХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Технику расщепления задачи об атмосферных волнах на отдельные подзадачи о распространении акустических и гравитационных волн можно обобщить на случай распространения волн над плоской Землей. Естественно, уравнения (12), (20), (34) справедливы в этом случае вплоть до границы области, и их нужно дополнить граничными условиями на поверхности Земли.

Накладываем стандартное граничное условие $w(x, z=0, t) = 0$, где $z = 0$ соответствует уровню поверхности Земли. Учитывая независимость волновых ветвей, из него получаем

$$\bar{w}_G(x, z=0, t) = 0, \quad \bar{w}_A(x, z=0, t) = 0. \quad (45)$$

Граничное условие (45) для w_G может быть использовано непосредственно, в то время как для акустической подзадачи кроме условия (45) требуется граничное условие на поверхности для величины u_A .

Поступая так же, как при выводе (32), получаем

$$\rho_0 \bar{u}_A + \gamma H (\rho_0 \bar{u}_A)_z = \gamma H (\rho_0 \bar{w}_A)_x + \alpha \rho_0(z) \int_0^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} (\rho_0(\eta) w_A(x, \eta, t))_x d\eta d\xi.$$

Полагая $z = 0$, и используя (45) для w_A , получаем искомое граничное условие для акустической подзадачи

$$\left[\rho_0 \bar{u}_A + \gamma H (\rho_0 \bar{u}_A)_z \right]_{z=0} = 0. \quad (46)$$

Для единственности решения наложим еще одно граничное условие на поверхности Земли. Его можно вывести из уравнения для вертикального импульса в (20).

Полагая в этом уравнении $z = 0$ и используя (45), получаем

$$\left[\frac{\partial \rho_0 g H (\psi_A + \phi_A)}{\partial z} + \rho_0 g \psi_A \right]_{z=0} = 0. \quad (47)$$

Уравнения (12), (20), (34) вместе с граничными условиями (45), (46), (47) дают полную математическую постановку задачи для определения $\bar{X}_A(x, z, t = 0)$, $\bar{X}_G(x, z, t = 0)$.

5.1. Влияние отражающей поверхности на волны

Предположим, что при $t = 0$ имеем локализованную нагретую область, и поле возмущений температуры описывается функцией $\phi(x, z, 0)$. Будем также считать, что $u(x, z, 0) \equiv 0$, $w(x, z, 0) \equiv 0$. В случае безграничной среды, начальные условия для акустической и гравитационной волн описываются формулами в (39).

Если же рассматриваются волны в полубесконечной среде, над плоской земной поверхностью, то необходимо учесть граничное условие (47). Тогда начальные возмущения температуры и плотности для акустической и гравитационной волн будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \phi_A(x, z, 0) &= \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \phi(x, z, 0) + A(x) e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}, \\ \psi_A(x, z, 0) &= \frac{1}{\gamma} \left(\phi(x, z, 0) - \frac{1}{H} \int_0^z \phi(x, z, 0) dz \right) - \\ &\quad - \frac{b(x)}{H \rho_0(z)} * e^{-\frac{\alpha z}{H}}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}\phi_G(x, z, 0) &= \frac{1}{\gamma} \phi(x, z, 0) - A(x) e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}, \\ \psi_G(x, z, 0) &= -\psi_A(x, z, 0),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A(x) &= -\frac{b(x)(\gamma - 2)}{H}, \quad \alpha = \gamma - 1, \\ b(x) &= \left(-\frac{H^2 \frac{d}{dz} \phi(x, z=0)}{-2\gamma + 2 + \gamma^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-\gamma - 2) H \phi(x, z=0)}{(-2\gamma + 2 + \gamma^2) \gamma} \right) \rho_0(0).\end{aligned}$$

По сравнению с (39), формулы (48) содержат дополнительные слагаемые, пропорциональные $e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}$, которые являются следствием влияния граничной отражающей поверхности.

Известно, что в случае изотермической атмосферы, т. е. при $H = \text{const}$, $\rho_0(z) = \rho_0(0) e^{-\frac{z}{H}}$, система (3) при граничном условии $w(x, z=0, t) = 0$ имеет два частных решения, называемых волнами Лэмба [15, 8]. В изотермической атмосфере волны Лэмба распространяются со скоростью звука ($c_s = \sqrt{gH}$ и $-c_s$). Функции $e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}$ зависят от вертикальной координаты z как волна Лэмба, и мы можем заключить, что появление слагаемых, пропорциональных $e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}$, связано с возникновением волн Лэмба. Волны Лэмба, в нашем описании, попадают в класс внутренних гравитационных волн. Но при этом в начальном условии для акустических волн содержится некоторый вклад, который при $t = 0$ компенсирует изменение параметров, обусловленное появлением волн Лэмба.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе произведен анализ линеаризованных гидродинамических уравнений для газа, стратифицированного полем тяжести. Стратификация плотности газа произвольная, но предполагается устойчивой. Этот общий случай называется неизотермической атмосферой.

Введено гильбертово пространство в пространстве столбцов-функций, и система гидродинамических уравнений записана как одно операторное уравнение Шредингера типа (с самосопряженным эволюционным оператором), откуда следует существование решения начальной задачи.

Показано, что система уравнений имеет два типа решений, различающихся функциональной зависимостью от горизонтального масштаба возмущения. В частном случае экспоненциальной стратификации плотности уравнения решаются аналитически и выделенные классы решений совпадают с акустическими и гравитационными волнами. Поэтому можно ассоциировать выделенные классы решений с акустическими и гравитационными волнами и в общем случае неизотермической стратификации.

Для интересного для геофизических приложений случая длинных волн ($\beta^2 = \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \ll 1$) предложены упрощенные системы уравнений для акустических и гравитационных волн и показана асимптотическая при $\beta^2 \rightarrow 0$ сходимость решений сформулированных упрощенных задач к решением точной задачи.

Показано, что у волны каждого типа, у акустической волны и внутренней гравитационной, динамические переменные связаны парой характерных для данного типа волн стационарных соотношений. Выведены асимптотические при $\beta^2 = \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \rightarrow 0$ формулы для этих стационарных соотношений.

Наличие у волн каждого типа пары стационарных соотношений, связывающих гидродинамические переменные, позволило поставить задачу о выделении в начальном условии вкладов акустических и гравитационных волн. Доказано существование решения этой поставленной задачи о выделении вкладов акустических и гравитационных волн и отсутствие каких-либо решений иного типа, при любой устойчивой стратификации. Произведено асимптотическое при $\beta^2 = \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \rightarrow 0$ расщепление исходной задачи на подзадачи о распространении акустических и гравитационных волн.

Проанализировано распределение энергии начального возмущения по типам волн и для случаев начального температурного возмущения и начального возмущения плотности в атмосфере с экспоненциальной стратификацией плотности выведены явные формулы для отношения энергий; показано, что отношение энергий акустической и внутренней гравитационной волн $\frac{E_A}{E_G}$ в этих случаях не зависит от формы начального возмущения и определяется адиабатической постоянной газа γ .

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, шифр проекта 116234986.

Авторы благодарят Гордина В.А. за внимание к работе и практические советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ
СИСТЕМЫ (3) ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ ТЯЖЕЛОГО ГАЗА

Перепишем уравнения (3) в матричной форме:

$$-i \frac{\partial X}{\partial t} + \hat{L}X = 0. \quad (49)$$

Здесь \hat{L} — матричный дифференциальный оператор

$$\hat{L}X = -\frac{i}{\rho_0(z)} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial z} + \rho_0 g \psi \\ (\gamma - 1) \left(\frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} \right) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 w \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Столбец X был определен в разделе 2.

Пусть h — гильбертово пространство столбцов-функций со скалярным произведением (6). Оператор \hat{L} , область определения $D(\hat{L}) = \{X : X \in h, \hat{L}X \in h\}$ которого всюду плотна, в h самосопряжен. Производные в (50) будем понимать в смысле распределений Шварца [17]. Из самосопряженности оператора следует существование решения $X(x, z, t) \in h$ уравнений (49) для любого $X(x, z, 0) \in h$ [16, 18] (см. также [17], теорему Хилле–Иосиды и ее приложения). Решение действительно, если начальные условия действительные.

Доказательство существования решений линейных уравнений для волн в стратифицированном поле тяжести газе дано также в [19, 20]. В этих работах представлена техника доказательства, которая заключается в том, что система уравнений сначала сводится к одному уравнению, и потом это уравнение исследуется.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $\bar{\lambda}_G(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{P}_G(x, z, t) \\ \bar{u}_G(x, z, t) \end{pmatrix}$. Перепишем первое, второе и четвертое уравнения системы (12) в виде:

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\lambda}_G + \bar{L}_G \bar{\lambda}_G = 0. \quad (51)$$

Здесь \bar{L}_G — такой оператор, что

$$\bar{L}_G \bar{\lambda}_G = -\frac{i}{\rho_0} \begin{pmatrix} \gamma g H \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 \bar{u}_G) + \gamma g H \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w}) + \alpha g \rho_0 \bar{w} \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{P}_G \end{pmatrix}, \quad (52)$$

и

$$\bar{w}_G = -\int_{-\infty}^z \frac{\partial \bar{u}_G(x, \xi, t)}{\partial x} d\xi - \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma(H\xi)\rho_0(\xi)} \int_{\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial \bar{u}_G(x, \eta, t)}{\partial x} d\eta d\xi \quad (53)$$

— решение четвертого уравнения системы (12), удовлетворяющее требованиям (15) при условии

$\int_{R^2} \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_G \right)^2 d\Omega < \infty$. Введем скалярное произведение столбцов $\bar{\lambda}_{G_1}, \bar{\lambda}_{G_2}$ формулой:

$$\langle \bar{\lambda}_{G_1}, \bar{\lambda}_{G_2} \rangle_{G_\lambda} = \int_{R^2} \left[\rho_0 \bar{u}_{G_1}^* \bar{u}_{G_2} + \frac{\bar{P}_{G_1}^* \bar{P}_{G_2}}{\gamma \rho_0 g H} + \frac{\left(\bar{P}_{G_1} + \gamma H \frac{\partial \bar{P}_{G_1}}{\partial z} \right)^* \left(\bar{P}_{G_2} + \gamma H \frac{\partial \bar{P}_{G_2}}{\partial z} \right)}{\gamma \rho_0 g H} \right] d\Omega. \quad (54)$$

Это скалярное произведение порождает гильбертово пространство \bar{h}_{G_λ} . Оператор \bar{L}_G с всюду плотной областью определения $D(\bar{L}_G) = \{\bar{\lambda}_G : \bar{\lambda}_G \in \bar{h}_{G_\lambda}, \bar{L}_G \bar{\lambda}_G \in \bar{h}_{G_\lambda}\}$ является самосопряженным. Поэтому существует решение задачи (51), оно принадлежит \bar{h}_{G_λ} [16, 18, 17]. Все компоненты 4-вектора

$$\bar{X}_G(x, z, t, \beta) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_G(x, z, t) \\ \bar{u}_G(x, z, t) \\ \bar{w}_G(x, z, t) \\ \bar{\Phi}_G(x, z, t) \end{pmatrix} \in h \text{ можно легко вос-}$$

становить по решению $\bar{\lambda}_G(x, z, t) \in \bar{h}_{G_\lambda}$.

Интегралы в (15) существуют, если $\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \bar{\lambda}_G(t=0), \frac{\partial}{\partial x} \bar{\lambda}_G(t=0) \right\rangle_{\lambda_G} < \infty$. Существование решения доказано.

Перейдем к доказательству утверждения, что решение системы укороченных уравнений (12) дает приближенное частное решение системы уравнений (3) точной задачи. Пусть $X_G(x, z, t, \beta)$ является решением уравнений (49), которое удовлетворяет начальным условиям $X_G(x, z, t=0, \beta) = \bar{X}_G(x, z, t=0, \beta)$, где $\bar{X}_G(x, z, t=0, \beta)$ дается формулами (14). Для разности решений $\Delta X = \bar{X}_G(x, z, t, \beta) - X_G(x, z, t, \beta)$ усеченной и полной систем уравнений можно написать уравнение

$$-i \frac{\partial \Delta X}{\partial t} + \hat{L} \Delta X = -i \bar{Q}_G, \quad \bar{Q}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial \bar{w}_G}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оценим $\|\bar{Q}_G\|$. При условиях $\frac{\partial \bar{\lambda}_G}{\partial x}, \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G}{\partial x^2} \in \bar{h}_{G\lambda}$ мы получаем из второго и четвертого уравнений системы (12) соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{R^2} \frac{1}{\gamma H \rho_0} \left[\gamma H \frac{\partial^2 (\rho_0 \bar{w}_G)}{\partial t \partial z} + \alpha \frac{\partial (\rho_0 \bar{w}_G)}{\partial t} \right]^2 d\Omega + \\ & + \int_{R^2} \frac{\alpha}{\gamma H} \rho_0 \left(\frac{\partial \bar{w}_G}{\partial t} \right)^2 d\Omega = \\ & = \int_{R^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \bar{P}_G}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 (\rho_0 \bar{w}_G)}{\partial t \partial z} \gamma H + \alpha \frac{\partial (\rho_0 \bar{w}_G)}{\partial t} \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка: $\int_{R^2} \rho_0 \left(\frac{\partial \bar{w}_G}{\partial t} \right)^2 d\Omega \leq \frac{\max(\gamma H)^2}{\min \alpha} \int_{R^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{P}_G}{\partial x^2} \right)^2 \frac{1}{\rho_0(z)} d\Omega$. Коэффициенты

уравнений (51) не зависят x , поэтому решения удовлетворяют закону сохранения

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, t)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, t)}{\partial x^2} \right\rangle_{\lambda_G} = \\ & = \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x^2} \right\rangle_{\lambda_G}, \end{aligned}$$

аналогичному закону сохранения энергии. Отсюда следует неравенство:

$$\begin{aligned} \|\bar{Q}_G\|^2 &= \int_{R^2} \rho_0 \left(\frac{\partial \bar{w}_G}{\partial t} \right)^2 d\Omega \leq M_1^2 \beta^4, \\ M_1^2 &= E_G \left(\frac{\partial^2 \bar{P}_0(x, z)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{u}_0(x, z)}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

M_1 — постоянная, не зависящая от параметра β . Из устойчивости решений системы уравнений (49) по правой части следует сходимость $X_G(x, z, t, \beta)$ к $X_G(x, z, t, \beta)$ при $\beta \rightarrow 0$:

$$\|X_G(x, z, t, \beta) - \bar{X}_G(x, z, t, \beta)\| \leq M_1 \beta^2 t_0, \quad 0 \leq t \leq t_0 < \infty.$$

Теорема 1 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть $\bar{\lambda}_A(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{f}_A(x, z, t) \\ \bar{w}_A(x, z, t) \end{pmatrix}$. Перепишем первое, второе и четвертое уравнения системы (20) в виде:

$$-i \frac{\partial \bar{\lambda}_A}{\partial t} + \bar{L}_A \bar{\lambda}_A = 0. \quad (55)$$

Здесь \bar{L}_A — оператор, такой что

$$\bar{L}_A \bar{\lambda}_A = -\frac{i}{\rho_0(z)} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left[g \alpha \left(\bar{f}_A + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right) \right] + g \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right).$$

Введем скалярное произведение столбцов $\bar{\lambda}_{A_1}, \bar{\lambda}_{A_2}$ формулой:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}_{A_1}, \bar{\lambda}_{A_2} \rangle_{A_\lambda} &= \\ \langle \bar{\lambda}_{A_1}, \bar{\lambda}_{A_2} \rangle_{A_\lambda} &= \int_{R^2} \left[\rho_0^* \bar{w}_{A_1} \bar{w}_{A_2} + \frac{\bar{f}_{A_1}^* \bar{f}_{A_2} \alpha g}{\gamma H \rho_0} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha^2 g}{\rho_0 \gamma H} \left(\bar{f}_{A_1} + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{A_1}}{\partial z} \right)^* \left(\bar{f}_{A_2} + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{A_2}}{\partial z} \right) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (56)$$

Это скалярное произведение порождает гильбертово пространство, которое обозначим h_{A_λ} . Оператор \bar{L}_A с всюду плотной областью определения $D(\bar{L}_A) = \{\bar{\lambda}_A : \bar{\lambda}_A \in h_{A_\lambda}, \bar{L}_A \bar{\lambda}_A \in h_{A_\lambda}\}$ является самосопряженным. Мы опять приходим к уравнению Шредингеровского типа. Поскольку для операторных уравнений этого типа существование решений доказано [16, 18, 17], можно утверждать, что решение задачи (55) существует и принадлежит h_{A_λ} .

По решению $\bar{\lambda}_A(x, z, t) \in h_{A_\lambda}$ можно легко восстановить все компоненты 4-вектора

$$\bar{X}_A = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_A \\ \bar{u}_A \\ \bar{w}_A \\ \bar{\Phi}_A \end{pmatrix} \in h. \text{ При этом функция } \bar{u}_A(x, z, t) \text{ вы-}$$

ражается через $\bar{w}_A(x, z, t)$ посредством последнего уравнения системы (20). Общее решение $u_A(x, z, t)$ этого уравнения содержит две произвольных функции переменных x и t . Частное решение для $\bar{u}_A(x, z, t)$, квадратично интегрируемое над R^2 , может быть получено предельным переходом $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow -\infty$ из решения краевой задачи с граничными условиями $\bar{u}(b) = 0$, $\rho_0(a) \bar{u}(a) = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho_0 \bar{u}_A &= -\rho_0 \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \bar{w}_A(x, \eta, t) d\eta d\xi \\ &+ \int_{-\infty}^z \rho_0(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \bar{w}_A(x, \xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (57)$$

Интегралы существуют, если функция $\frac{\partial}{\partial x} \bar{w}_A(x, z, t)$ квадратично интегрируема (с весом $\rho_0(z)$). Последнее выполняется, если $\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \bar{\lambda}_A(t=0), \frac{\partial}{\partial x} \bar{\lambda}_A(t=0) \right\rangle_{\lambda_A} < \infty$. Существование решения доказано.

Покажем, что решение системы укороченных уравнений (20) дает приближенное частное решение системы уравнений (3) точной задачи. Пусть $X_A(x, z, t, \beta)$ является решением системы (49), удовлетворяющим начальным условиям $X_A(x, z, t=0, \beta) = \bar{X}_A(x, z, t=0, \beta)$, и $\bar{X}_A(x, z, t=0, \beta)$ дается формулами (22). Для разности $\Delta X = \bar{X}_A(x, z, t, \beta) - X_A(x, z, t, \beta)$ решений укороченной и полной систем уравнений справедливо соотношение

$$-i \frac{\partial \Delta X}{\partial t} + \hat{L} \Delta X = -i \bar{Q}_A, \quad \bar{Q}_A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \bar{u}_A}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \\ -(\gamma - 1) \frac{\partial \bar{u}_A}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Оценим $\|\bar{Q}_A\|$. Разберем случай, когда $\sqrt{\rho_0(z)} \bar{w}_A$ является непрерывной функцией, дважды непрерывно дифференцируемой по x и достаточно быстро убывающей при $|z| \rightarrow \infty$ и при $|x| \rightarrow \infty$, чтобы функция была квадратично интегрируемой. Пусть $w_0(x, z, t)$ обозначает решение уравнений (3), соответствующее случаю $\beta = 1$ в (22). Обозначим $u_0(x, z, t)$ решение уравнения (57), соответствующее $w_0(x, z, t)$. Тогда $\bar{w}_A(x, z, t) = \sqrt{\beta} w_0(\beta x, z, t)$. Выражение (57) показы-

вает, что из $\left| \frac{\partial^2 \bar{w}_A(x, z, t, \beta)}{\partial x^2} \right| = \sqrt{\beta} \left| \frac{\partial^2 w_0(\beta x, z, t)}{\partial x^2} \right| \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$ как $\beta^{\frac{3}{2}} \rightarrow 0$ следует $|\bar{u}_A(x, z, t, \beta)| = \beta^{\frac{3}{2}} |u_0(\beta x, z, t)| \rightarrow 0$ как $\beta^{\frac{3}{2}} \rightarrow 0$. Стало быть, $\left(\int_{R_2} \rho_0(z) (\bar{u}_A(x, z, t, \beta))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$ как $\beta^2 \rightarrow 0$ и $\|\bar{Q}_A\| \rightarrow 0$ как $\beta^2 \rightarrow 0$.

Из устойчивости решений системы уравнений (49) по правой части следует сходимость $\bar{X}_A(x, z, t, \beta)$ к $X_A(x, z, t, \beta)$ при $\beta \rightarrow 0$:

$$\|X_A(x, z, t, \beta) - \bar{X}_A(x, z, t, \beta)\| \leq M_2 \beta^2 t_0, \quad (59) \\ 0 \leq t \leq t_0 < \infty.$$

Здесь M_2 постоянная, независимая от параметра β , которая здесь не выписана. Оценку (59)

стандартным образом можно расширить на класс функций, указанных в Теореме 2.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов В.М., Кулешов Ю.В. Изменение спектра инфразвукового сигнала при распространении волн от земной поверхности до высот ионосферы // Акуст. журн. 2014. Т. 60(1). С. 21–30.
2. Петухов Ю.В. О возможности безотражательного распространения плоских акустических волн в непрерывно-стратифицированных средах // Акуст. журн. 2022. Т. 68(2). С. 129–138.
3. Hines C.O. Atmospheric gravity waves. In *Thermospheric circulation*; Mir Press: Moscow, 1975.
4. Yeh K.C. and Liu C.H. Acoustic-Gravity Waves in the Upper Atmosphere // *Reviews of Geophysics and Space Physics*. 1974. V. 12. P. 193–216.
5. Григорьев Г.И. Акустико-гравитационные волны в атмосфере Земли (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42(1). С. 3–24.
6. Kshevetskii S.P., Kurdyayeva Y.A., Gavrilov N.M. Spectra of Acoustic-Gravity Waves in the Atmosphere with a Quasi-Isothermal Upper Layer // *Atmosphere*. 2021. V. 12. P. 818.
7. Марчук Г.И. Численные методы в прогнозе погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 356 с.
8. Gossard E.E., Hooke W.H. *Waves in the Atmosphere*, Elsevier Scientific Publishing Company, New York, 1975. 456 pp.
9. Richmond A.D., Matsushita S. Thermospheric response to a magnetic substorm // *J. Geoph. Res.* 1975. V. 80. P. 2839–2850.
10. Lions J.L., Temam R., Wang S. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications // *Nonlinearity*. 1992. V. 5. P. 237–288.
11. Юдин В.А., Гаврилов Н.М. Алгоритм расчета распространения гравитационных волн от нестационарных локальных источников в стратифицированной атмосфере // Деп. в ВИНТИ, 1985. № 2865–85. 41 с.
12. Кшевецкий С.П. О длинных акустико-гравитационных волнах в атмосфере с произвольной стратификацией по плотности // *Известия РАН. Физ. атмосферы и океана*. 1992. Т. 28. № 5. С. 558–559.
13. Голицин Г.С., Григорьев Г.И., Докучаев В.П. Излучение акустико-гравитационных волн при движении метеоров в атмосфере // *Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана*. 1977. Т. 13. № 9. С. 926–935.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика*. М.: Наука, 1988. 735 с.
15. Дикий Л.А. Теория колебаний земной атмосферы. Ленинград. Гидрометеиздат, 1969. 194 с.
16. Ладженская О.А. О разрешимости нестационарных операторных уравнений // *Матем. сб.* 1956. Т. 39(81). № 4. С. 491–524.

17. Richtmyer R.D. Principles of Advanced Mathematical Physics. Springer: New York, NY, USA, 1978.
18. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. М.: Издательство Московского университета. 1983.
19. Габов С.А., Свешиников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986. 288с.
20. Габов С.А., Свешиников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. 344с.

Waves in heavy stratified gas: Splitting into acoustic and gravity waves subproblems

S. P. Kshevetskii^{a,b,c,*} Yu. A. Kurdyeva^{d,**} and N. M. Gavrilov^{c,*}

^aKant Baltic Federal University, A. Nevskogo str. 14, Kaliningrad, 236041 Russia

^bA. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the Russian Academy of Sciences, Pyzhevsky per., 3, Moscow, 119017, Russia

^cSaint Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, Saint Petersburg, 199034 Russia

^dKaliningrad Branch of the N.V. Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation of the Russian Academy of Sciences, ul. Pionerskaya 61, Kaliningrad, 236035 Russia

*e-mail: spkshev@gmail.com

**e-mail: yakurdyeva@gmail.com

***e-mail: n.gavrilov@spbu.ru

Two-dimensional linearized hydrodynamic equations describing the wave propagation in a stratified heavy gas are considered. The hydrodynamic equation system is reformulated as a single Schrödinger type operator equation. The waves with $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$ are considered, where l_z and l_x are the characteristic

vertical and horizontal scales, respectively, and the asymptotic behavior of solutions as $\beta \rightarrow 0$. It is shown that the set of solutions depending on β form two disjoint classes. For solutions from each of the selected classes, its own, asymptotic as $\beta \rightarrow 0$, approximate equation system is proposed. The selected classes of solutions are acoustic and internal gravity waves. It is shown that the hydrodynamic variables of acoustic and gravity waves are related by certain stationary relationships, different for each class. This allows to pose the problem of separating the contributions of acoustic and gravity waves in the initial condition. The existence of a solution to this wave separation problem is shown. Examples of solving the problem of dividing the general problem into subproblems on the propagation of acoustic and gravity waves are given. Estimates for the division of the energy of the initial disturbance by wave type are obtained.

Keyword: fluid dynamic equations, long waves, asymptotic solutions, operator equation, Hilbert space, acoustic waves, internal gravity waves, dispersion relation

**АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ
ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА**

УДК 550.344.56

АМПЛИТУДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН РЭЛЕЕВСКОГО ТИПА В ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

© 2024 г. Р. А. Жостков^{а,*}, Д. А. Жарков^{а,**}

^аИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская 10, стр. 1,
Москва, 123995 Россия

*e-mail: shageraxcom@yandex.ru

**e-mail: denis.Zharkov2014@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.

После доработки 21.10.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Аналитически и численно рассмотрено распространение поверхностной акустической волны (ПАВ) рэлеевского типа вдоль свободной границы слоистого полупространства с плавным изменением его упругих параметров по горизонтали. Рассчитано изменение амплитуды ПАВ для перехода волны из однослойной системы в однослойную, однослойной в двухслойную и двухслойной в двухслойную в зависимости от упругих параметров, а также длины зондирующей волны. Показано, что амплитуда ПАВ уменьшается при увеличении скорости продольных волн и плотности среды по мере ее распространения, а при увеличении скорости поперечных волн в среде амплитуда ПАВ может как увеличиваться, так и уменьшаться. Изменение амплитуды ПАВ, связанное с изменением скорости продольных волн, сильнее, поэтому этот параметр следует учитывать в прикладных методах. Показано, что величина доминантной длины волны зависит как от геометрических, так и упругих параметров системы.

Ключевые слова: поверхностная акустическая волна, волна Рэлея, слоистая среда, математическое моделирование, ММЗ, Н/В, доминантная длина волны

DOI: 10.31857/S0320791924060095, **EDN:** JTLJOA

ВВЕДЕНИЕ

Специфические свойства поверхностных акустических волн позволяют использовать их во многих практических приложениях, например, в сейсморазведке [1–5] или дефектоскопии [6, 7]. В сейсморазведке они используются как средство исследования внутреннего строения внешних слоев Земли (определение границ слоев, дефектов и неоднородностей), поскольку скорость, затухание, амплитуды и структура рэлеевской волны связаны с упругими свойствами сред, вдоль границы которых она распространяется. Такие геофизические методы как MASW [1] и SPAC [2] используют информацию о скорости волны, и с их помощью восстанавливается модель исследуемой среды на основе анализа дисперсионной кривой. Другие подходы, например, метод микросейсмического зондирования (ММЗ) [3, 8] или метод спектрального отношения горизонтальной к вертикальной компоненте (Н/В) [4, 9] основаны на измерении амплитуд и последующем анализе спектров измеренных сигналов. Оба подхода имеют свои сильные и слабые стороны [10] и возникает вопрос о

возможности объединения этих методов для максимизации используемой экспериментальной информации и получения наиболее точного решения обратных задач. Для этого необходимо отчетливо понимать механизмы распространения поверхностной волны не только в вертикально, но и горизонтально неоднородных средах, причем, исследовать не только скоростные характеристики, но и амплитудные. Стоит отдельно отметить, что касательно этого вопроса были получены серьезные математические результаты [11]. Однако в силу сложности постановки и полученных аналитических решений их использование для прикладных задач существенно затрудняется. Настоящая работа нацелена на поиск наиболее простого и экономного подхода, но отражающего основные закономерности распространения ПАВ в горизонтально-неоднородных средах.

Исследованию свойств поверхностных волн в слоистых средах посвящен ряд работ, например, [12–18]. Однако преимущественно они посвящены анализу дисперсионных закономерностей, поэтому поведение амплитудных характеристик в различных

неоднородных средах все еще нуждается в дальнейшем исследовании, поскольку они также несут информацию о строении среды [19], что актуально с прикладной точки зрения. Одной из таких характеристик является эллиптичность — отношение горизонтальной компоненты смещений к вертикальной, которая удобна для практических задач [4, 9], поскольку не требует учета особенностей источника, в отличие от отдельного исследования амплитуд компонент смещений, которое представляет собой существенно более сложную задачу [20]. На практике эта информация часто неизвестна, поэтому необходимо разрабатывать подходы, позволяющие описывать изменение амплитуды в отсутствие источника. Одной из таких моделей является модель плавного перехода между областями с различными значениями параметров среды [21]. Такая постановка позволяет определить амплитуду волны во второй среде по отношению к первой.

Целью данной работы является расчет амплитудных параметров волны рэлеевского типа, распространяющейся вдоль свободной границы слоистого полупространства при плавном изменении его упругих параметров в горизонтальном направлении.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается двумерный случай со следующей геометрией (рис. 1): свободная граница вертикально слоистой среды расположена при $z = 0$, ось z направлена вниз. Слоистое упругое полупространство занимает область $z \geq 0$. Сверху при $-\infty < z < 0$ находится вакуум. Вдоль свободной границы в положительном направлении оси x распространяется плоская поверхностная волна. Рассматриваемую геометрию разделим на три области: I — опорная среда, II — исследуемая среда, III — область перехода. Волна из области I переходит в область II, испытывая трансформацию в области III, в которой происходит плавное изменение параметров системы. В аналитических построениях волновое поле в областях I и II рассчитывалось независимо друг от друга. Связь между рассчитанными полями устанавливалась, исходя из предположения, что поток энергии через полубесконечное сечение сохраняется [21]. В численном моделировании были рассмотрены два

случая: при длине области перехода равной одной длине волны и пятидесяти длинам волн.

ПАВ В ПЛОСКО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Выражения для акустического поля

Для решения задачи об изменении характеристик ПАВ при переходе из одной вертикально слоистой среды в другую, для начала необходимо рассмотреть распространение ПАВ в одной из них.

Поле в каждом из однородных слоев описывается уравнением Ламэ, записанным для смещений в отсутствие источника [22–24]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1)$$

Смещение \mathbf{u} элемента упругой среды выражается через скалярный φ и векторный $\boldsymbol{\psi}$ потенциалы. При этом для двумерной задачи (в которой смещение вдоль координаты y отсутствует, а потенциалы от y не зависят) $\boldsymbol{\psi} = (0, \psi, 0)$, а смещения по осям x и z имеют вид:

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi},$$

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в (1) и применяя поочередно операции дивергенции и ротора, получим волновые уравнения для потенциалов

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi = 0, \quad \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \Delta \psi = 0.$$

При гармонической зависимости от времени, они переходят в уравнения Гельмгольца:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi + k_l^2 \varphi = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + k_t^2 \psi = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (3) введены волновые числа $k_l = \omega / c_l$ — для продольных волн и $k_t = \omega / c_t$ — для поперечных. Решения данных уравнений отыскиваются в виде плоских волн:

$$\varphi = G(z) e^{-i(\omega t - kx)}, \quad \psi = F(z) e^{-i(\omega t - kx)},$$

где $k = \omega / c$, c — фазовая скорость ПАВ.

Подставляя эти выражения в уравнения (3), получаем для функций $G(z)$ и $F(z)$ уравнения:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - q^2 F = 0, \quad q^2 = k^2 - k_l^2, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - s^2 G = 0,$$

$$s^2 = k^2 - k_t^2.$$

и их решения:

$$F(z) = A^{(-)} e^{-qz} + A^{(+)} e^{qz}, \quad G(z) = B^{(-)} e^{-sz} + B^{(+)} e^{sz},$$

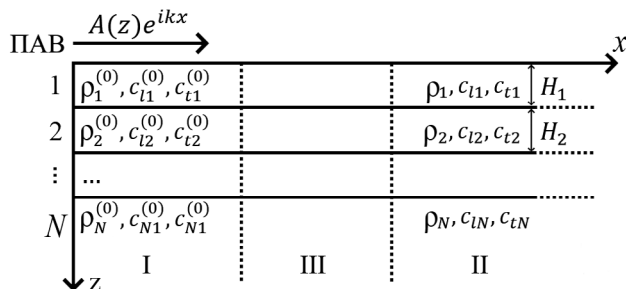


Рис. 1. Постановка задачи.

где $A^{(-)}$, $B^{(-)}$, $A^{(+)}$, $B^{(+)}$ соответствуют амплитудам волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлении вдоль вертикальной оси. Отметим, что выражения для функций $G(z)$ и $F(z)$ являются общими решениями. Для записи решений в конкретном слое в дальнейшем будет использоваться соответствующий нижний индекс.

Так как при $z \rightarrow \infty$ поле должно затухать, то физический смысл имеют только решения, распространяющиеся в положительном направлении оси z . Соответственно, выражения для потенциалов в полупространстве (при $z > z_N$) будут выглядеть следующим образом:

$$\varphi = A_N e^{-q_N z} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad \psi = B_N e^{-s_N z} e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (4)$$

Здесь величины $q_N = \sqrt{k^2 - k_{iN}^2}$, $s_N = \sqrt{k^2 - k_{tN}^2}$ определяют характерные масштабы затухания продольной и сдвиговой компонент поля вглубь полупространства. А для слоев решения представляют в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= A_i^{(-)} e^{-q_i z} e^{-i(\omega t - kx)} + A_i^{(+)} e^{q_i z} e^{-i(\omega t - kx)}, \\ \psi_i &= B_i^{(-)} e^{-s_i z} e^{-i(\omega t - kx)} + B_i^{(+)} e^{s_i z} e^{-i(\omega t - kx)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $q_i = \sqrt{k^2 - k_{ii}^2}$, $s_i = \sqrt{k^2 - k_{ti}^2}$, i – номер слоя.

Граничные условия

Для определения характеристик ПАВ необходимо записать граничные условия, позволяющие найти скорость волны и связь между амплитудами потенциалов. Поскольку в системе из N слоев существует $4(N-1) + 2$ волновых компонент, то и граничных условий должно быть $4(N-1) + 2$. На свободной границе должно выполняться условие равенства нулю нормальных и касательных напряжений:

$$T_{zz}|_{z=0} = 0, \quad T_{xz}|_{z=0} = 0.$$

На границе i -го и $(i+1)$ -го слоя должно выполняться условие равенства нормальных и касательных смещений и напряжений:

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \lambda_1 - \alpha_1 q_1^2 & -k^2 \lambda_1 + \alpha_1 q_1^2 & -2ik\mu_1 s_1 & 2ik\mu_1 s_1 \\ 0 & 0 & -2ik\mu_1 q_1 & 2ik\mu_1 q_1 & -\mu_1(k^2 + s_1^2) & -\mu_1(k^2 + s_1^2) \\ ik & s_2 & -e^{-q_1 h} ik & -e^{q_1 h} ik & -e^{-s_1 h} s_1 & e^{s_1 h} s_1 \\ -q_2 & ik & e^{-q_1 h} q_1 & -e^{q_1 h} q_1 & -e^{-s_1 h} ik & -ie^{s_1 h} k \\ -k^2 \lambda_2 + \alpha_2 q_2^2 & -2ik\mu_2 s_2 & e^{-q_1 h} (k^2 \lambda_1 - \alpha_1 q_1^2) & -e^{q_1 h} (-k^2 \lambda_1 + \alpha_1 q_1^2) & 2ie^{-s_1 h} k\mu_1 s_1 & -2ie^{s_1 h} k\mu_1 s_1 \\ -2ik\mu_2 q_2 & -\mu_2(k^2 + s_2^2) & 2ie^{-q_1 h} k\mu_1 q_1 & -2ie^{q_1 h} k\mu_1 q_1 & e^{-s_1 h} \mu_1(k^2 + s_1^2) & e^{s_1 h} \mu_1(k^2 + s_1^2) \end{pmatrix},$$

$$\det(d) = 0,$$

где $\alpha_i = \lambda_i + 2\mu_i$, параметры с индексом 1 обозначают величины, относящиеся к слою, а с индексом 2 – к полупространству.

$$u_z|_{z=z_i} = u_z^{i+1}|_{z=z_i}, \quad u_x|_{z=z_i} = u_x^{i+1}|_{z=z_i},$$

$$T_{zz}|_{z=z_i} = T_{zz}^{i+1}|_{z=z_i}, \quad T_{xz}|_{z=z_i} = T_{xz}^{i+1}|_{z=z_i},$$

$$\text{где } T_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right),$$

$$T_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right).$$

Характеристическая матрица

Подставляя решения в виде (4), (5) в граничные условия, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных амплитуд потенциалов, которую можно записать с использованием характеристической матрицы размерности $4(N-1) + 2$. Равенство нулю определителя этой матрицы представляет собой дисперсионное уравнение, корнем которого является скорость ПАВ.

Условием существования нетривиального решения однородной системы линейных алгебраических уравнений является равенство нулю ее определителя. Так как при подстановке скорости ПАВ в матрицу, ее определитель обратится в ноль, то уравнения станут линейно зависимы и, следовательно, одно из них можно опустить. Затем, перенося один из столбцов в правую часть, получаем систему из $4(N-1) + 1$ уравнений с отличной от нуля правой частью. Для поиска решения данной системы удобно применить метод Крамера [25]. Найденные значения являются амплитудными коэффициентами, связывающими амплитуды потенциалов с амплитудой потенциала, соответствующего перенесенному в правую часть столбцу. Эта связь позволяет записать выражения для потенциалов и, следовательно, для смещений через единственную нормировочную амплитуду.

Продemonстрируем нахождение амплитудных коэффициентов на примере двухслойной среды (т.е. слоя, лежащего на полупространстве). В этом случае характеристическая матрица и соответствующее дисперсионное уравнение выглядят следующим образом [22]:

В силу равенства нулю определителя, опустим пятую строку как наиболее громоздкую, а затем перенесем, например, последний столбец в правую часть. Тогда систему уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2\lambda_1 - \alpha_1 q_1^2 & -k^2\lambda_1 + \alpha_1 q_1^2 & -2ik\mu_1 s_1 \\ 0 & 0 & -2ik\mu_1 q_1 & 2ik\mu_1 q_1 & -\mu_1(k^2 + s_1^2) \\ ik & s_2 & -e^{-q_1 h} ik & -e^{q_1 h} ik & -e^{-s_1 h} s_1 \\ -q_2 & ik & e^{-q_1 h} q_1 & -e^{q_1 h} q_1 & -e^{-s_1 h} ik \\ -2ik\mu_2 q_2 & -\mu_2(k^2 + s_2^2) & 2ie^{-q_1 h} k\mu_1 q_1 & -2ie^{q_1 h} k\mu_1 q_1 & e^{-s_1 h} \mu_1(k^2 + s_1^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ A_1^{(-)} \\ A_1^{(+)} \\ B_1^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ik\mu_1 s_1 \\ \mu_1(k^2 + s_1^2) \\ -e^{s_1 h} s_1 \\ ie^{s_1 h} k \\ -e^{s_1 h} \mu_1(k^2 + s_1^2) \end{pmatrix} B_1^{(+)}$$

или

$$MX = GB_1^{(+)}.$$

По методу Крамера связь между амплитудами A_2 и $B_1^{(+)}$ выражается следующим образом:

$$A_2 = \frac{\det(M_1)}{\det(M)} B_1^{(+)},$$

где

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2ik\mu_1 s_1 & 0 & k^2\lambda_1 - \alpha_1 q_1^2 & -k^2\lambda_1 + \alpha_1 q_1^2 & -2ik\mu_1 s_1 \\ \mu_1(k^2 + s_1^2) & 0 & -2ik\mu_1 q_1 & 2ik\mu_1 q_1 & -\mu_1(k^2 + s_1^2) \\ -e^{s_1 h} s_1 & s_N & -e^{-q_1 h} ik & -e^{q_1 h} ik & -e^{-s_1 h} s_1 \\ ie^{s_1 h} k & ik & e^{-q_1 h} q_1 & -e^{q_1 h} q_1 & -e^{-s_1 h} ik \\ -e^{s_1 h} \mu_1(k^2 + s_1^2) & -\mu_N(k^2 + s_N^2) & 2ie^{-q_1 h} k\mu_1 q_1 & -2ie^{q_1 h} k\mu_1 q_1 & e^{-s_1 h} \mu_1(k^2 + s_1^2) \end{pmatrix}.$$

Связь $B_1^{(+)}$ с остальными амплитудами находится аналогичным образом. Итак, амплитуда поверхностной волны оказывается пропорциональна единственной выбранной нормировочной амплитуде (в данном примере $B_1^{(+)}$). Поскольку выбор значения нормировочной амплитуды не имеет принципиального значения с точки зрения математических преобразований, то для удобства обозначим ее как F .

Проделанные вычисления являются вспомогательным результатом, однако они необходимы для расчета характеристик волнового поля в слоистой системе.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЛАВНОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Построение поля ПАВ при плавном изменении параметров по горизонтали удобно выполнить в ВКБ-приближении [26]. Представим вектор смещений в следующем виде:

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \mathbf{V}(\varepsilon x, z) e^{i\omega(t - kx)}, \quad (6)$$

где ε — малый параметр. Для простоты рассмотрим случай однослойного полупространства. Тогда искомого поле удовлетворяет уравнению движения:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \nabla \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \mu \times \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2(\nabla \mu, \nabla) \mathbf{u} \quad (7)$$

и граничным условиям:

$$T_{zz}|_{z=0} = 0, \quad T_{xz}|_{z=0} = 0.$$

Теперь представим амплитудный множитель \mathbf{V} в виде ряда по степеням ε :

$$\mathbf{V} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{V}^{(j)}. \quad (8)$$

При подставке (6) и (8) в уравнение движения (7) и граничные условия можно убедиться, что в нулевом приближении задача сводится к таковой для горизонтально однородной среды, поэтому необходимо рассмотреть следующий член разложения ε^1 . В этом случае для амплитуд компонент смещений может быть получена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial z} - ik\lambda V_x^{(1)} \right) - ik\mu \frac{\partial V_x^{(1)}}{\partial z} + \\ + (\rho\omega^2 - \mu k^2) V_z^{(1)} = L_1(V_x^{(0)}, V_z^{(0)}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_x^{(1)}}{\partial z} - ik\mu V_z^{(1)} \right) - ik\lambda \frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial z} + \\ + (\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2) V_x^{(1)} = L_2(V_x^{(0)}, V_z^{(0)}), \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial z} - ik\lambda V_x^{(1)} = -\frac{\lambda}{c} \frac{\partial V_x^{(0)}}{\partial x}, \\ \mu \left(\frac{\partial V_x^{(1)}}{\partial z} - ik V_z^{(1)} \right) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial V_z^{(0)}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (10)$$

где операторы $L_1(V_x^{(0)}, V_z^{(0)})$ и $L_2(V_x^{(0)}, V_z^{(0)})$ имеют вид:

$$L_1(V_x^{(0)}, V_z^{(0)}) = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \frac{\partial V_x^{(0)}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial V_z^{(0)}}{\partial z} \right] \right\} + \frac{i}{c} \left\{ V_z^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} (k\mu) + 2\mu k \frac{\partial V_z^{(0)}}{\partial x} \right\},$$

$$L_2(V_x^{(0)}, V_z^{(0)}) = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial V_z^{(0)}}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial V_x^{(0)}}{\partial x} \right] \right\} + \frac{i}{c} \left\{ 2(\lambda + 2\mu)k \frac{\partial V_x^{(0)}}{\partial x} + V_x^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} ((\lambda + 2\mu)k) \right\}.$$

В итоге получена неоднородная краевая задача. Для получения условия ее разрешимости, умножим первое из уравнений (9) на $V_z^{(0)*}$, а второе на $V_x^{(0)*}$ (звездочка — комплексное сопряжение), вычтем первое из второго и проинтегрируем по z с учетом граничных условий. Получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} [kI_1 + I_2] = 0, \quad (11)$$

где

$$I_1 = \int_0^\infty \left[(\lambda + 2\mu) (V_x^{(0)})^2 + \mu (V_z^{(0)})^2 \right] dz,$$

$$I_2 = \int_0^\infty \left[\mu V_z^{(0)} \frac{\partial V_x^{(0)}}{\partial z} - \lambda V_x^{(0)} \frac{\partial V_z^{(0)}}{\partial z} \right] dz.$$

Уравнение (11) с точностью до переобозначений можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\omega c_g \int_0^\infty \rho (V_x^2 + V_z^2) dz \right] = 0, \quad (12)$$

где c_g — групповая скорость волны.

Величина в квадратных скобках в (12) является потоком энергии через полубесконечное сечение и, как нетрудно показать, эта величина в первом приближении остается постоянной [21]:

$$P = \omega^2 c_g(\omega) \int_0^\infty \rho(z) [V_x^2 + V_z^2] dz = \text{const}. \quad (13)$$

Отметим, что соотношение (13) не является впервые полученным в настоящее время. Данные выкладки приведены для более полного описания используемой математической модели.

Обобщение соотношения (13) для многослойной системы можно представить следующим образом:

$$P = \omega^2 c_g(\omega) \sum_{i=1}^N \int_0^{h_i} \rho_i [V_{xi}^2 + V_{zi}^2] dz.$$

Далее для анализа трансформации волн в плавном-неоднородной среде предлагается основываться на сохранении потока энергии через полупространство. Возможность использования этого

предположения основывается на том, что изменение упругих параметров среды по горизонтали происходит достаточно медленно, чтобы отражением ПАВ было допустимо пренебречь, т.к. характерный масштаб изменения много больше длины волны. Строго говоря, в теоретических расчетах он считается бесконечным, поскольку поле в каждой среде рассчитывается независимо, но, как будет показано ниже с помощью численного моделирования, при ширине перехода в одну длину волны уже можно считать, что переход достаточно плавный с точностью до единиц процентов. Таким образом, рассчитывая волновое поле для двух слоистых сред и приравнивая поток энергии для каждой из них, представляется возможным выразить амплитуду во второй среде по отношению к первой.

Так как величина потока энергии пропорциональна сумме квадратов компонент смещений, а они в свою очередь пропорциональны единственной выбранной нормировочной амплитуде, то поток энергии пропорционален квадрату этой нормировочной амплитуды: $P \sim F^2$.

Для случая однородного полупространства (однослойной среды) выражения для компонент смещений можно выразить в явном виде [22]:

$$u_x = Fk(e^{-qz} - \frac{2qs}{k^2 + s^2} e^{-sz}) e^{ikx},$$

$$u_z = iFq(e^{-qz} - \frac{2k^2}{k^2 + s^2} e^{-sz}) e^{ikx}. \quad (14)$$

Тогда для потока энергии (13) имеем:

$$P(c_l, c_t, \rho) = \omega^2 c_g \rho \left[\frac{k^2 - q^2}{2q} - \frac{4k^2 q^2 (k^2 - s^2)}{2s(k^2 + s^2)^2} \right] F^2 =$$

$$= C(\omega, c_l, c_t, \rho) F^2.$$

Рассмотрим теперь две среды, представляющие собой полупространства с постоянными значениями упругих параметров. Тогда для первой среды $P_1(\omega, c_l, c_t, \rho) = C_1(\omega, c_l, c_t, \rho) F_1^2$, а для второй $P_2(\omega, c_l, c_t, \rho) = C_2(\omega, c_l, c_t, \rho) F_2^2$. Будем считать, что эти полупространства связаны областью с малыми градиентами упругих параметров, обеспечивающих плавный переход ПАВ из одной среды в другую без отражений, если $P_1(\omega, c_l, c_t, \rho) = P_2(\omega, c_l, c_t, \rho)$. Отсю-

да следует, что отношение нормировочной амплитуды ПАВ во второй среде к амплитуде в первой среде выражается следующим образом

$$\frac{F_2}{F_1} = \sqrt{\frac{C_1(\omega, c_l, c_t, \rho)}{C_2(\omega, c_l, c_t, \rho)}}. \quad (15)$$

Из этого выражения следует, что, зная частоту и параметры двух сред, можно определить отношение нормировочных амплитуд F_2/F_1 . Поскольку амплитуда компонент смещений в конкретной среде пропорциональна соответствующей нормировочной амплитуде (14), то относительное изменение будет пропорционально F_2/F_1 . Подставляя (15) и параметры сред в (14), можно получить искомые изменения амплитуды компонент смещений.

При рассмотрении плоской по горизонтали поверхностной волны можно получить только соотношения между амплитудами, но не абсолютные значения, которые возможно отыскать только при добавлении источника возмущения, например, точечного [27]. Однако в этом случае необходимо учитывать, во-первых, влияние объемных волн и, во-вторых, тот факт, что на поверхностную волну идет не вся энергия источника, а только ее часть, причем в зависимости от параметров системы, эта доля может меняться [20]. Это усложняет анализ амплитудных закономерностей поверхностной волны. Поэтому, на наш взгляд, представляется более целесообразным развивать описание в отсутствие источника, поскольку во многих практических случаях интерес представляет именно относительное изменение, а не абсолютное значение.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Для проверки возможности подобной аналитической оценки амплитуды ПАВ использовалось численное моделирование методом конечных элементов в программном комплексе COMSOL Multiphysics 5.3 с подключенным модулем Solid Mechanics (лицензия № 9600341). Главные отличия численного моделирования от аналитического рассмотрения заключаются в необходимости использовать источник сигнала и рассматривать модель ограниченного размера, который, однако, может быть довольно велик по сравнению с длиной используемой волны, поскольку расчет в двумерной постановке в пространстве частот не слишком требователен к вычислительным ресурсам и может быть выполнен на современных персональных компьютерах за минуты или часы.

Основные использовавшиеся принципы построения численной модели представлены в [28, 29]. Геометрия модели рассматриваемой среды представляет собой вытянутый вдоль оси x прямоугольник, разбитый на горизонтальные слои, которые могут отличаться между собой упругими параметрами, а также состоящий из нескольких вертикальных зон, часть из которых представляют собой плоскостойкие участки среды, рассмотренные в предыдущем разделе, а другие — технические зоны, обеспечивающие плавный переход упругих параметров от различных плоскостойких участков, а также стартовую и финишную зоны, необходимые для обеспечения генерации и поглощения ПАВ (рис. 2).

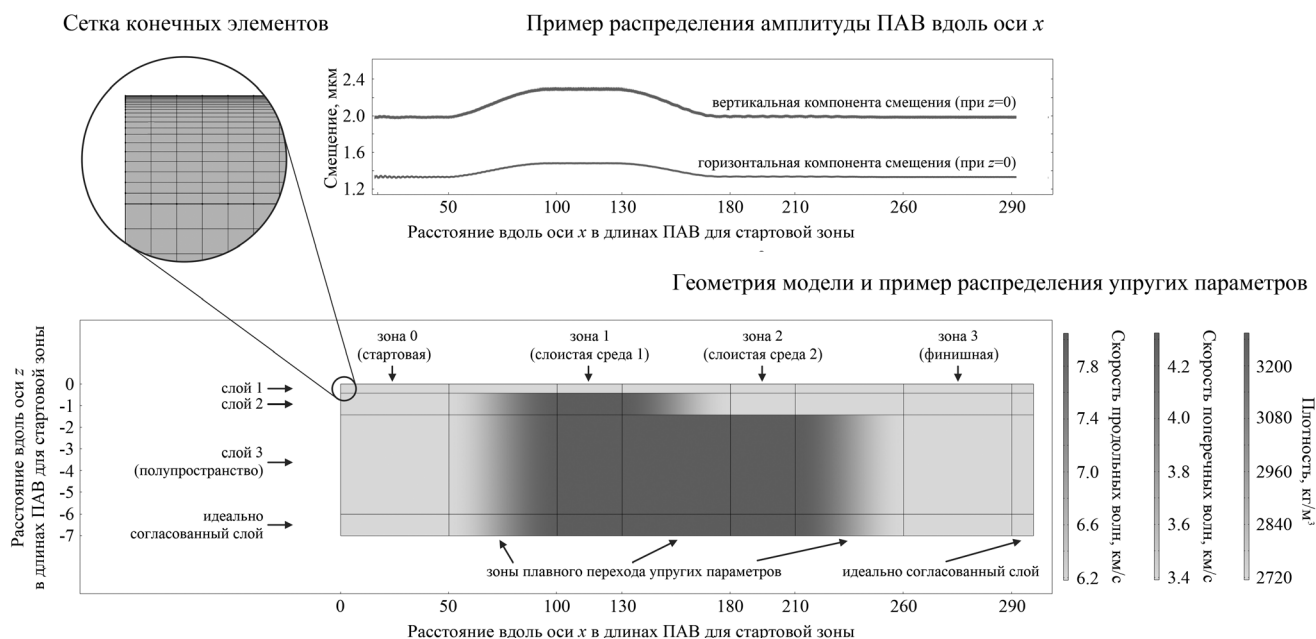


Рис. 2. Пример модели среды, сетки конечных элементов, использовавшихся при численном моделировании, и результатов расчета распределения амплитуды ПАВ вдоль свободной границы среды.

Упругие параметры (плотность и скорости продольной и поперечной волн) в стартовой и финишной зонах не меняются с глубиной, несмотря на то, что присутствует формальное разделение на слои (подобное деление удобно для автоматического построения сетки конечных элементов). В этом случае в качестве источника ПАВ мы можем использовать существующее [22] аналитическое решение для волны Рэлея с известной длиной, которая используется в качестве характерного линейного размера модели (рис. 2).

Параметры в зонах 1 и 2, соответствующих плоскослоистым средам, для которых выполнен теоретический расчет, меняются только по вертикали скачкообразно. В численной модели среды (рис. 2) используются три слоя для моделирования двухслойных сред. Это связано с задачей по исследованию влияния различия мощности слоев разных слоистых сред, поскольку это удобно реализовать введением дополнительного промежуточного слоя, параметры которого выбираются аналогичными выше- или нижележащему слою в зависимости от выбранного строения среды (на рис. 2 представлен вариант, когда мощность низкоскоростного верхнего слоя, лежащего на высокоскоростном полупространстве, увеличивается при переходе из зоны 1 в зону 2).

Для трансформации ПАВ без отражений между зонами (сначала переход волны Рэлея из однородного полупространства в зону 0 в слоистую среду в зоне 1, затем — в другую слоистую среду в зоне 2, а после — в финишную однородную зону) используются протяженные зоны с плавным изменением упругих параметров от значений в левой зоне к значению в правой (для каждого слоя отдельно).

Протяженность каждой из зон 0–3 составляет 30 длин ПАВ для стартовой зоны и достаточна для имитации бесконечной по x среды. Зоны плавного перехода упругих параметров шире (50 длин ПАВ для стартовой зоны), что обеспечивает трансформацию ПАВ без видимых отражений. Глубина моделируемой среды ограничена семью длинами ПАВ для стартовой зоны. Отметим, что эти параметры (как и сетка конечных элементов) избыточны и позволяют получить решения с ошибкой не более 0.1%. Эта оценка была получена стандартной проверкой сходимости численного решения путем серии последовательных расчетов при сгущении сетки конечных элементов и увеличении линейных размеров зон моделируемой среды. Валидация путем сравнения результата расчета характеристик волны Рэлея для случая однородной среды с известным аналитическим решением доказала корректность составленной численной модели, поскольку полученные решения совпали с точностью до четвертого знака после запятой.

Физические процессы в численном моделировании также как и в теоретическом рассмотрении описываются уравнениями (1) механики идеальной линейной упругой среды. При этом граничное условие при $z = 0$ соответствует свободной поверхности, на нижнюю и правую границу наложены слабоотражающие условия, а на левой границе при $x = 0$ расположен источник, задаваемый смещениями (14).

Для большего ослабления эффектов от ограниченного размера численной модели вдоль правой и нижней границ расположены идеально согласованные слои (Perfectly Matched Layers — PMLs), поглощающие большую часть падающих на них упругих волн.

Разбиение на конечные элементы (рис. 2) выполнено с помощью структурированной сетки (все элементы представляют собой прямоугольники) с линейным размером элементов, не превышающим 0.1 длины ПАВ для стартовой зоны. Отметим, что упругие параметры стартовой зоны выбираются таким образом, чтобы скорость ПАВ, соответственно, и ее длина были наименьшими из возможных в рассматриваемой системе, благодаря этому длины всех распространяющихся в данной системе упругих волн превосходят размер конечных элементов не менее, чем в 10 раз. Вблизи свободной границы модели для еще большего повышения точности решения происходит сгущение сетки конечных элементов с уменьшением вертикального размера конечного элемента до 5% от первоначального размера в геометрической прогрессии с коэффициентом 1.2.

Решение численной модели происходит в режиме варьирования параметров (автоматический последовательный расчет нескольких численных реализаций, отличающихся значениями одного или нескольких входных параметров модели) с помощью прямого решателя MUMPS (MUlti-frontal Massively Parallel Solver) [30], реализующего LU-факторизацию.

Выходными данными численного моделирования служат сводные таблицы усредненных по свободным поверхностям зон 1 и 2 значений вертикальных и горизонтальных смещений. Подобное усреднение стоит использовать вместо точечной регистрации, поскольку из-за невозможности полного устранения отражений поверхностной и объемных волн от границ модели в среде (в том числе и на ее поверхности) возникает интерференция распространяющейся ПАВ и слабых отраженных волн, приводящая к слабым пространственным флуктуациям измеряемых величин.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Перейдем к рассмотрению полученных результатов. Начнем с наиболее простой модели —

Таблица 1. Параметры опорной и исследуемой среды.

Модель	Скорость продольных волн, c_l , м/с	Скорость поперечных волн, c_t , м/с	Плотность, ρ , кг/м ³	Мощность слоя, H_l , км
Опорная	5262	3038	2600	∞
Исследуемая	$5262K_{c_l}$	$3038K_{c_t}$	$2600K_\rho$	∞

Таблица 2. Параметры опорной и исследуемой среды.

Модель	Номер слоя	Скорость продольных волн, c_l , м/с	Скорость поперечных волн, c_t , м/с	Плотность, ρ , кг/м ³	Мощность слоя, H_l , км
Опорная	1	6181	3467	2714	∞
Исследуемая	1	$6181K_{c_1}$	$3467K_{c_1}$	2714	HK_H
	2	$8047K_{c_2}$	$4530K_{c_2}$	3333	∞

перехода из однослойной системы в однослойную, т.е. трансформации волны Рэлея. В дальнейшем первую среду (из которой происходит переход) будем называть опорной, а вторую среду (в которую происходит переход) будем называть исследуемой. При этом будем рассматривать зависимости изменения амплитуды ПАВ на поверхности (поскольку именно эта величина как правило измеряется в эксперименте) от коэффициента изменения K , т.е. величины, отражающей во сколько раз значение того или иного параметра исследуемой среды отличается от соответствующего значения опорной среды: K_ρ – коэффициент изменения плотности, K_{c_l} – коэффициент изменения скорости продольных волн, K_{c_t} – коэффициент изменения скорости поперечных волн. При варьировании какого-либо коэффициента K остальные коэффициенты принимаются равными 1; например, при изменении K_ρ считаем, что $K_{c_l} = K_{c_t} = 1$. Параметры рассматриваемых сред представлены в табл. 1.

На рис. 3 представлены зависимости изменения амплитуды горизонтальной и вертикальной компоненты смещений на поверхности от коэффициента изменения различных упругих параметров, полученные аналитически и с помощью численного моделирования. При увеличении коэффициента изменения плотности и скорости продольных волн амплитуда ПАВ уменьшается. В случае изменения скорости поперечных волн наблюдается локальный минимум. Это связано с тем, что с увеличением скорости поперечных волн увеличивается роль векторного потенциала [31] и, как следствие, увеличение амплитуды на поверхности. Кроме того, отметим, что для однослойной модели наиболее сильное изменение амплитуды связано с изменением скорости продольных волн. В целом разница теории и численного моделирования составляет менее 1.5%, однако в области низких c_l и высоких c_t начинается расхождение, связанное

с уменьшением коэффициента Пуассона. Однако поскольку для большинства сплавов, металлов, горных пород значение коэффициента Пуассона лежит в пределах 0.25–0.35 [32], то области вне этих пределов выходят за рамки данного исследования.

При совместном изменении скоростей или всех трех упругих параметров, разница теоретических и численных расчетов становится менее 0.5%. Кроме того, отметим, что при переходе в более “мягкую” среду наблюдается увеличение амплитуды, а при переходе в более “твердую” – уменьшение, что согласуется с основами ММЗ [3].

Перейдем к более сложной модели – переходу из однослойной среды в двухслойную. Выберем в качестве исходной двухслойной модели скоростную модель PREM [33] с усредненными по 24.5 км значениями, а для однослойной модели выберем параметры верхнего слоя, приведенные в табл. 2.

Введем следующие обозначения: $K_{c_{l1}} = K_{c_{l1}} \equiv K_{c_1}$ – коэффициент совместного изменения скорости продольных и поперечных волн в верхнем слое относительно исходной модели, $K_{c_{t2}} = K_{c_{t2}} \equiv K_{c_2}$ – коэффициент совместного изменения скорости продольных и поперечных волн в нижнем слое относительно исходной модели, K_H – коэффициент изменения толщины слоя относительно исходной модели, $H = 24.5$ км.

На рис. 4 представлены зависимости изменения амплитуды при совместном изменении скорости продольных и поперечных волн в первом и втором слое, а также при изменении толщины слоя. При увеличении скоростей в верхнем слое амплитуда уменьшается, а при изменении скорости в нижнем слое увеличивается. В зависимости от мощности слоя наблюдается максимум. Отметим, что в предельных случаях большой и малой мощности двухслойная система эквивалентна однослойной, поэтому зависимости асимптотически

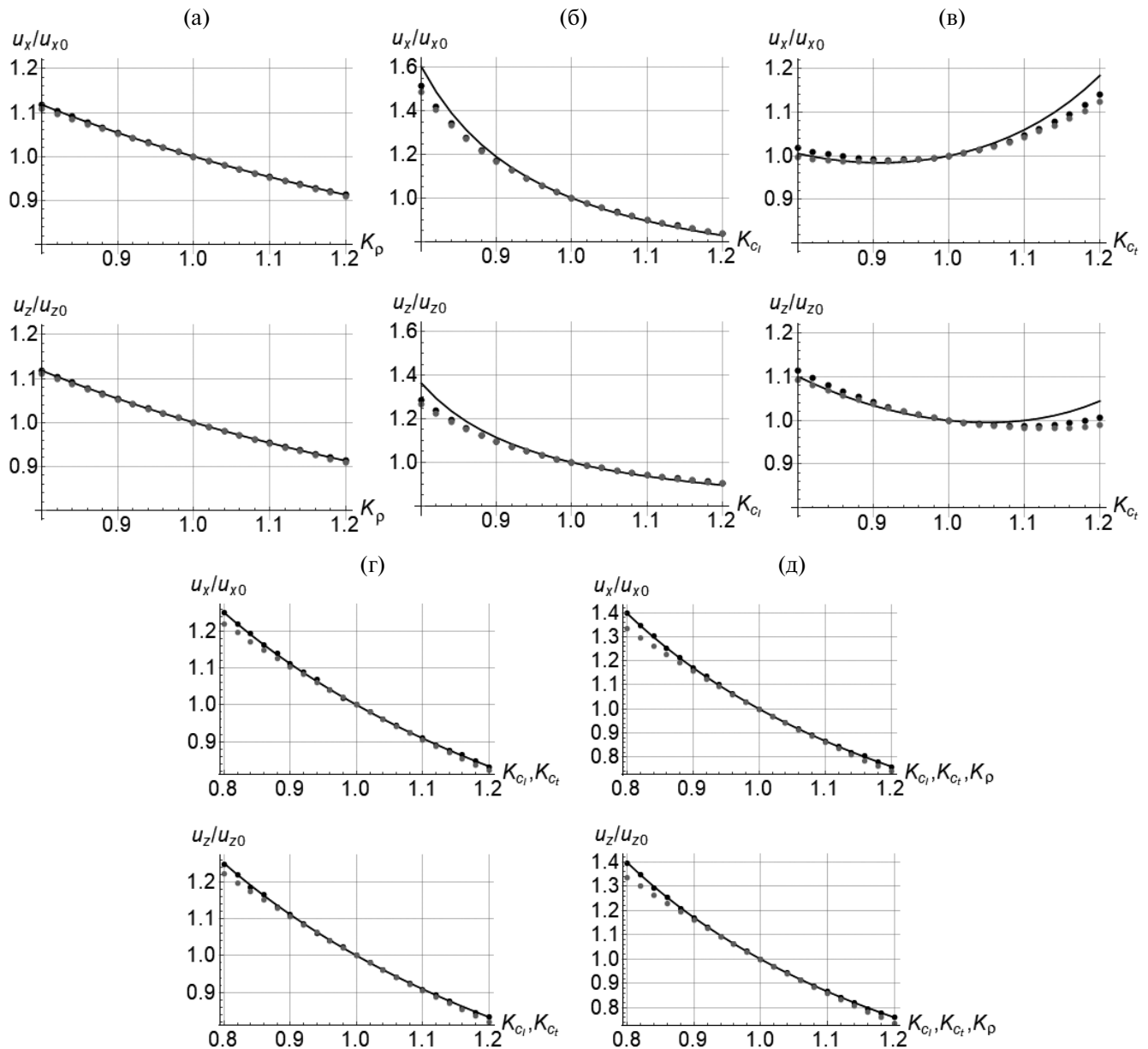


Рис. 3. Зависимость относительного изменения амплитуды горизонтальной и вертикальной компонент смещений на поверхности от (а) — коэффициента изменения плотности, (б) — скорости продольных волн, (в) — скорости поперечных волн, (г) — совместного изменения скорости продольных и поперечных волн, (д) — совместного изменения всех трех упругих параметров; сплошная линия — теория, черные точки — численное моделирование (зона перехода — 50λ), серые точки — численное моделирование (зона перехода — λ).

стремятся к постоянной величине. В данном случае при увеличении K_H эта величина равна 1, поскольку свойства опорной среды такие же, как и у верхнего слоя исследуемой среды. Кроме того, в области малых толщин наблюдается более заметное расхождение теории с численным моделированием. Предположительно, это связано с тем, что в этой области существует дополнительная неоднородная волна, распространяющаяся вдоль границы слоя и полупространства [22], которая учитывается

в численном моделировании, но игнорируется в теоретических расчетах.

Отметим, что из рис. 3 и 4 следует, что при замене плавного перехода размером 50 длин волн на резкий переход (что более характерно для реальных ситуаций) размером 1 длина волны наблюдается большее расхождение с теорией. Это связано с тем, что в данном случае часть энергии отражается от границы [34, 35] и условие сохранения потока энергии не выполняется. Однако оценки показывают, что для рассматриваемых случаев это

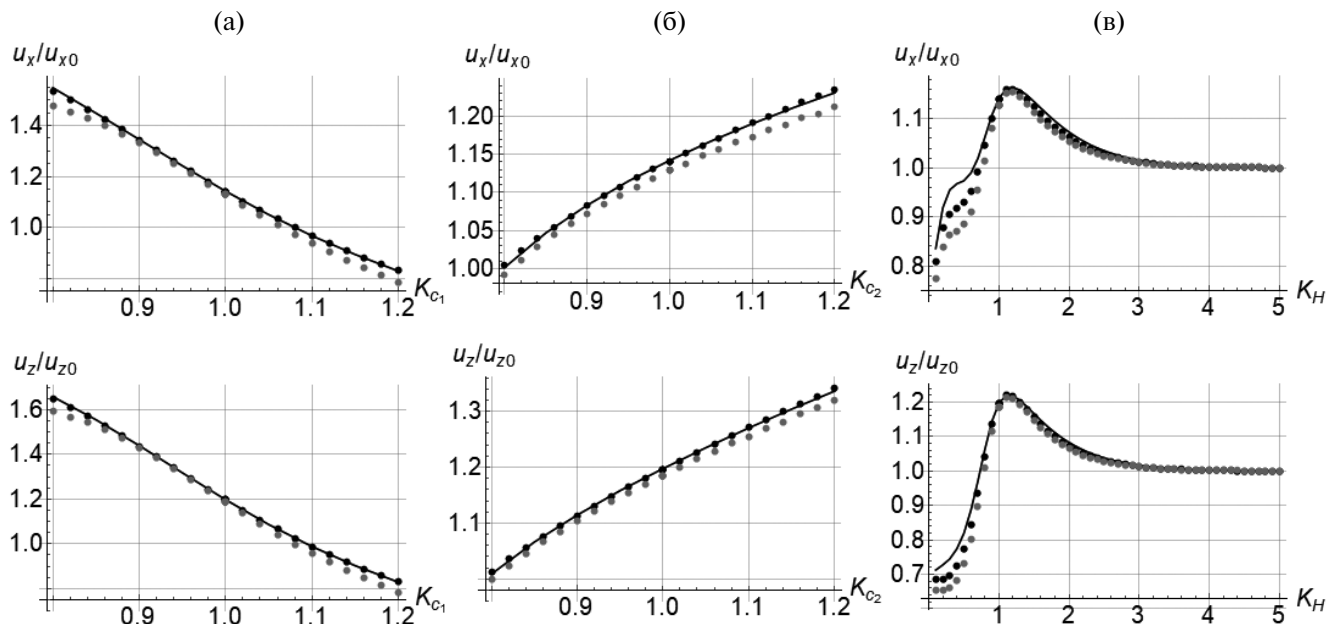


Рис. 4. Зависимость относительного изменения амплитуды горизонтальной и вертикальной компонент смещений на поверхности от коэффициента совместного изменения скорости продольных и поперечных волн (а) – в верхнем и (б) – нижнем слое, (в) – коэффициента изменения мощности слоя; $\lambda/H = 2.5$; сплошная линия – теория, черные точки – численное моделирование (зона перехода – 50λ), серые точки – численное моделирование (зона перехода – λ).

расхождение оказывается около 5%, поэтому можно считать, что при небольших контрастах результаты расчетов для плавного перехода можно применять и для резкого.

Поскольку в настоящее время активно используются методы сейсморазведки, основанные на анализе различных характеристик ПАВ, необходимо определить взаимосвязь этих характеристик, которая важна для задач комплексирования и совместной обработки данных, полученных разными методами. Поэтому далее перейдем к сравнению зависимостей относительной амплитуды, скорости и эллиптичности ПАВ от длины волны.

Рис. 5 демонстрирует, что при определенных длинах волн наблюдается максимум изменения амплитуды, минимумы групповой скорости и эллиптичности. При этом их положения зависят как от толщины слоя, так и от упругих свойств среды. Для рассматриваемых случаев они расположены в пределах от $1.5H$ до $2.5H$. Это согласуется с ММЗ, согласно которому наибольшая чувствительность соответствует глубинам неоднородности, равным примерно 0.3 – 0.5 длины волны [8].

На рис. 6 представлены зависимости доминантной длины волны λ_0 , т.е. длины волны, при которой наблюдается экстремум (см. рис. 5) от различных коэффициентов изменения параметров среды. При увеличении скорости продольных и поперечных волн в нижнем слое, а также мощности, наблюдается увеличение доминантной длины волны. В случае же увеличения скорости продольных и поперечных волн в верхнем слое наблюдается уменьшение.

Отсюда следует, что доминантная длина волны тем больше, чем выше контраст между слоями и чем больше толщина слоя. В работе [8] были произведены расчеты коэффициента глубинной привязки ММЗ, т.е. величины, аналогичной доминантной длине волны, от скоростного контраста неоднородности и было получено, что эта величина возрастает с увеличением контраста, что согласуется с рис. 6.

Перейдем к рассмотрению перехода ПАВ из двухслойной среды в двухслойную. Зафиксируем параметры опорной среды (табл. 3) и, как и в предыдущем случае, будем варьировать параметры исследуемой среды: верхнего и нижнего слоя, а также мощность верхнего слоя. Очевидно, что зависимости от изменения упругих параметров будут аналогичны рис. 4, поскольку исследуемая среда не изменилась. Поэтому ограничимся только зависимостями от длины волны.

Рис. 7 демонстрирует, что при определенных длинах волн наблюдается максимум изменения амплитуды при повышении скорости продольных и поперечных волн в исследуемой среде и минимум при уменьшении. Кроме того, при изменении мощности слоя также наблюдается соответствующее изменение амплитуды. При этом значение доминантной длины волны для компонент смещений отличается от такового на рис. 5, что говорит о том, что эта величина зависит от выбора опорной среды. Это связано с тем, что вид профилей для однослойной и двухслойной моделей отличается друг от друга и, следовательно, максимальная чувствительность наблюдается на разной длине волны.

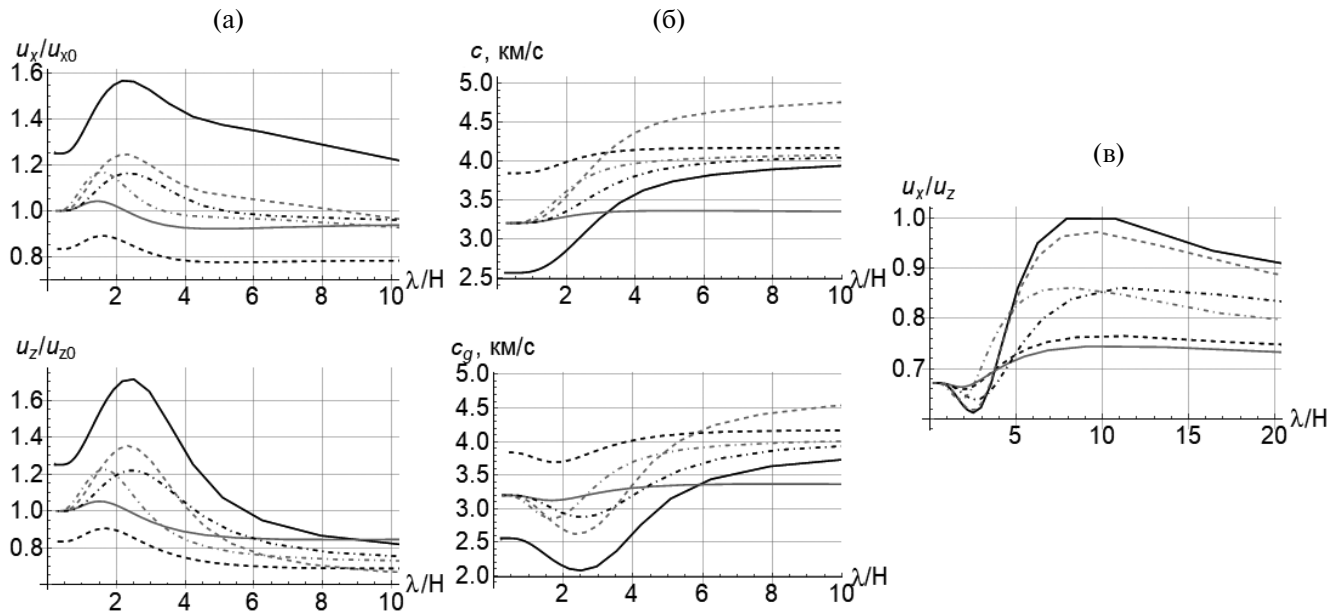


Рис. 5. Зависимость (а) — относительного изменения амплитуды горизонтальной и вертикальной компонент смещений на поверхности, (б) — фазовой и групповой скорости и (в) — эллиптичности на поверхности от длины волны; сплошная черная — $K_{c1} = 0.8$, $K_{c2} = 1$, $K_H = 1$, сплошная серая — $K_{c1} = 1$, $K_{c2} = 0.8$, $K_H = 1$, штриховая черная — $K_{c1} = 1.2$, $K_{c2} = 1$, $K_H = 1$, штриховая серая — $K_{c1} = 1$, $K_{c2} = 1.2$, $K_H = 1$, штрихпунктирная черная — $K_{c1} = 1$, $K_{c2} = 1$, $K_H = 1.2$, штрихпунктирная серая — $K_{c1} = 1$, $K_{c2} = 1$, $K_H = 0.8$.

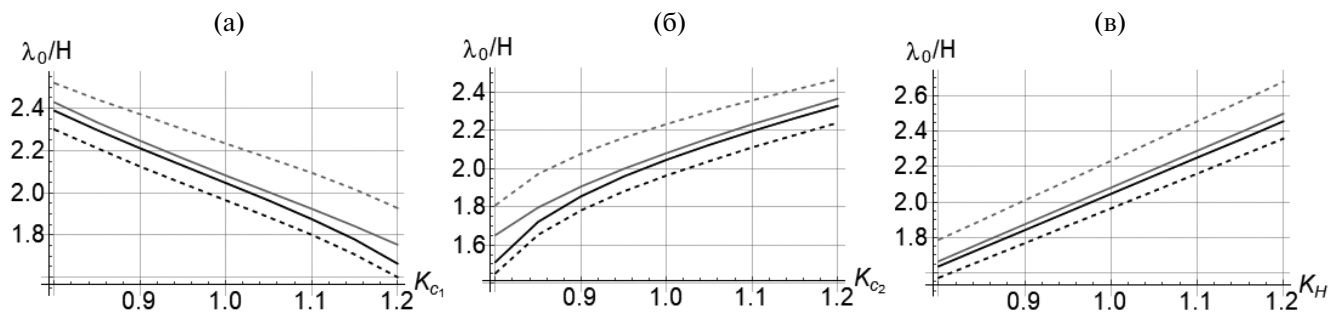


Рис. 6. Зависимость доминантной длины волны относительной амплитуды вертикальной компоненты смещений на поверхности (черная линия), относительной амплитуды горизонтальной компоненты смещений на поверхности (штриховая черная линия), групповой скорости (серая линия) и эллиптичности (штриховая серая линия) от (а) — коэффициента совместного изменения скорости продольных и поперечных волн в верхнем слое, (б) — коэффициента совместного изменения скорости продольных и поперечных волн в нижнем слое и (в) — коэффициента изменения мощности.

Таблица 3. Параметры опорной и исследуемой среды.

Модель	Номер слоя	Скорость продольных волн, c_l , м/с	Скорость поперечных волн, c_t , м/с	Плотность, ρ , кг/м ³	Мощность слоя, H_l , км
Опорная	1	6181	3467	2714	H
	2	8047	4530	3333	∞
Исследуемая	1	$6181K_{c1}$	$3467K_{c1}$	2714	HK_H
	2	$8047K_{c2}$	$4530K_{c2}$	3333	∞

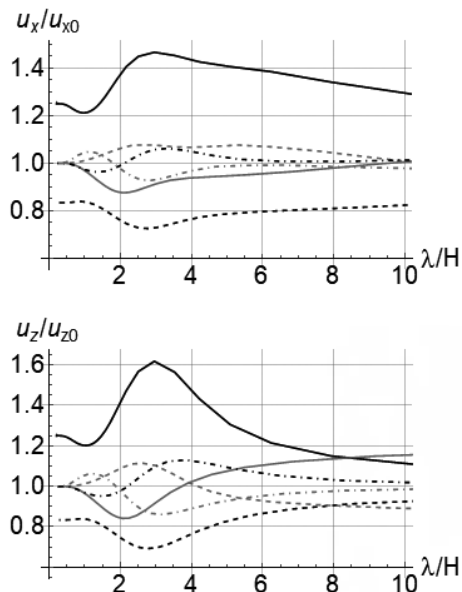


Рис. 7. Зависимость относительного изменения амплитуды горизонтальной и вертикальной компонент смещений на поверхности от длины волны; сплошная черная — $K_{c1} = 0.8$, $K_{c2} = 1$, $K_H = 1$, сплошная серая — $K_{c1} = 1$, $K_{c2} = 0.8$, $K_H = 1$, штриховая черная — $K_{c1} = 1.2$, $K_{c2} = 1$, $K_H = 1$, штриховая серая — $K_{c1} = 1$, $K_{c2} = 1.2$, $K_H = 1$, штрихпунктирная черная — $K_{c1} = 1$, $K_{c2} = 1$, $K_H = 1.2$, штрихпунктирная серая — $K_{c1} = 1$, $K_{c2} = 1$, $K_H = 0.8$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен подход, позволяющий описывать изменение амплитуды волны рэлеевского типа при переходе из одной слоистой системы с нормальной дисперсией в другую. Рассмотрены переходы ПАВ из однослойной в однослойную и двухслойную системы и из двухслойной в двухслойную. Рассчитаны зависимости относительного изменения амплитуды от различных физических и геометрических параметров систем. При переходе в среду с меньшими значениями упругих параметров наблюдается уменьшение амплитуды, а с большими — увеличение, что согласуется с положениями метода микросейсмического зондирования. Получено соответствие с результатами численного моделирования. Показано, что значение доминантной длины волны увеличивается с увеличением контраста между слоями, а также толщины слоя. При этом значение этой величины для компонент смещений зависит от выбора опорной модели.

Применительно к задачам пассивной поверхностно-волновой сейсморазведки результаты данной работы позволяют сделать следующие выводы. При переходе из однослойной системы в однослойную зависимость амплитуды от изменения плотности и скорости продольных волн соответствуют ожиданиям, в то время как зависимость от скорости поперечных волн имеет иной вид, что

говорит о более сложной зависимости свойств поверхностной волны от этого параметра. Изменение амплитуды в этом случае также меньше, чем в зависимости от скорости продольных волн. Это важный результат, поскольку на данный момент в ММЗ полагается, что коэффициент Пуассона постоянен, т.е. не выделяется, какая из скоростей упругих волн вносит определяющий вклад, но основное внимание уделяется скорости поперечных волн [36]. Однако было показано, что, в частности, для однородного полупространства вклад скорости продольных волн существенно больше, поэтому необходимо дальнейшее изучение этого вопроса. При переходе в двухслойную среду зависимости от упругих параметров, а также частотные зависимости демонстрируют соответствие ММЗ. Выбор опорной среды влияет на значение доминантной длины волны, которая может меняться в пределах от 0.3 до 0.7 мощностей слоя, что связано с изменением профиля ПАВ.

Полученные результаты могут быть использованы для построения метода решения обратной задачи сейсморазведки на поверхностных волнах, поскольку позволяют теоретически вычислять изменение амплитуды ПАВ при изменении характеристик среды. Представленные результаты относятся к моделям среды с нормальной дисперсией. Для случая аномальной дисперсии характерна более сложная структура волнового поля в целом [37] и распределение потока энергии в частности, поэтому этот вопрос нуждается в более тщательном рассмотрении.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 22-77-00067.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Park C., Miller R., Xia J. Multichannel analysis of surface waves // *Geophysics*. 1999. V. 64. № 3. P. 800–808.
2. Okada H. Theory of efficient array observation of microtremors with special reference to the SPAC method // *Exploration geophysics*. 2006. V. 37. № 1. P. 73–85.
3. Горбатиков А.В., Барабанов В.Л. Опыт использования микросейсм для оценки состояния верхней части земной коры // *Физика Земли*. 1993. № 7. С. 85–90.
4. Nakamura Y. A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface // *QR of RTRI*. 1989. V. 30. № 1. P. 25–33.
5. Presnov D.A., Sobisevich A.L., Shurup A.S. Model of the Geoacoustic Tomography Based on Surface-type Waves // *Physics of Wave Phenomena*. 2016. V. 24. № 3. P. 249–254.
6. Викторов И.А., Каёкина Т.М. Рассеяние ультразвуковых рэлеевских волн на моделях поверхностных дефектов // *Акуст. журн.* 1964. Т. 10. № 1. С. 30–33.

7. Кокшайский А.И., Коробов А.И., Ширгина Н.В. Диагностика упругих свойств плоской границы двух шероховатых сред поверхностными акустическими волнами // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 152–157.
8. Горбатилов А.В., Цуканов А.А. Моделирование волн Рэлея вблизи рассеивающих скоростных неоднородностей. Изучение возможностей метода микросейсмического зондирования // Физика Земли. 2011. № 4. С. 96–112.
9. Malischewsky P., Scherbaum F. Love's Formula and H/V-ratio (Ellipticity) of Rayleigh Waves // Wave Motion. 2004 V. 40 № 1. P. 57–67.
10. Жостков Р.А., Преснов Д.А., Шуруп А.С., Собисевич А.Л. Сравнение микросейсмического зондирования и томографического подхода при изучении глубинного строения Земли // Изв. Росс. Акад. наук. Сер. физ. 2017. Т. 81. № 1. С. 72–75.
11. Babich V.M., Kirpichnikova N.Y. A new approach to the problem of the Rayleigh wave propagation along the boundary of a non-homogeneous elastic body // Wave Motion. 2004 V. 40. № 3. P. 209–223.
12. Жэн Б.-С., Лу Л.-Ю. Нормальные волны в слоистом упругом полупространстве // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 4. С. 501–513.
13. Жэн Б.-С., Лу Л.-Ю. Волны Рэлея и обнаружение низкоскоростных слоев в слоистом полупространстве // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 5. С. 613–625.
14. Zhang B., Yu M., Lan C.Q., Xiong W. Elastic wave and excitation mechanism of surface waves in multilayered media // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 100. № 6. P. 3527–3538.
15. Chen X. A systematic and efficient method of computing normal mode for multi-layered half-space // Geophysical J. Int. 1993. V. 115. P. 391–409.
16. Кейлис-Борок В.И. О поверхностных волнах в слое, лежащем на упругом полупространстве // Известия АН СССР. Сер. геофиз. 1951. Т. 17. № 2. С. 17–39.
17. Преснов Д.А., Жостков Р.А., Гусев В.А., Шуруп А.С. Дисперсионные зависимости упругих волн в покрытом льдом мелком море // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 426–436.
18. Лебедев А.В., Манаков С.А. Точность оценки параметров слоистой среды при использовании когерентного векторного приема поверхностной волны Рэлея // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 1. С. 68–82.
19. Собисевич А.Л., Преснов Д.А. О решении прямой задачи для определения параметров волн релеевского типа в слоистой геофизической среде // Докл. Рос. Акад. наук. Науки о Земле. 2020. Т. 492. № 2. С. 72–76.
20. Разин А.В., Собисевич А.Л. Геоакустика слоистых сред. М.: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, 2012. 210 с.
21. Яновская Т.Б. К теории метода микросейсмического зондирования // Физика Земли. 2017. № 6. С. 18–23.
22. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
23. Бреховских Л.М. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
24. Оливер А. Поверхностные акустические волны. М.: Мир, 1981. 390 с.
25. Мальцев И.А. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 400 с.
26. Яновская Т.Б. Поверхностно-волновая томография в сейсмологических исследованиях. М.: Наука, 2015. 164 с.
27. Разин А.В. Возбуждение поверхностных акустических волн Рэлея и Стонели распределёнными сейсмическими источниками // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2010. Т. 53. № 2. С. 91–109.
28. Жостков Р.А. Восстановление неоднородностей среды при микросейсмическом зондировании вдоль криволинейной поверхности // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 708–720.
29. Чуркин А.А., Лозовский И.Н., Жостков Р.А. Численное моделирование сейсмоакустических методов контроля качества свай // Изв. Росс. Акад. наук. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 124–127.
30. Amestoy P.R., Duff I.S., l'Excellent J.-Y. Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2000. V. 184. № 2–4. P. 501–520.
31. Гусев В.А., Жарков Д.А. Акустические поля и радиационные силы, создаваемые стоячей поверхностной волной в слоистых вязких средах // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 6. С. 589–604.
32. Атапин В.Г., Пель А.Н., Темников А.И. Сопротивление материалов. Базовый курс. Дополнительные главы. М.: Новосибирский государственный технический университет (НГТУ), 2011. 508 с.
33. Dziewonski A., Anderson D. Preliminary Reference Earth Model // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1981. V. 25. P. 297–356.
34. Лебедев А.В., Манаков С.А., Дубовой Д.В. Рассеяние волн Рэлея на приповерхностном включении в упругом полупространстве // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2023. Т. 66. № 5–6. С. 483–504.
35. Li S., Huang M., Song Y., Bo Lan, Li X. Theoretical and numerical modeling of Rayleigh wave scattering by an elastic inclusion // J. Acoust. Soc. Amer. 2023. V. 153. № 4. P. 2336–2350.
36. Овсяченко А.Н., Горбатилов А.В., Рогожин Е.А., Андреева Н.В., Степанова М.Ю., Ларьков А.С., Сысолин А.И. Микросейсмическое зондирование и активные разломы керченско-таманского региона // Физика Земли. 2019. № 6. С. 84–95.
37. Белянкова Т.И., Калинин В.В. К проблеме анализа динамических свойств слоистого полупространства // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 5. С. 492–504.

AMPLITUDE CHARACTERISTICS OF RAYLEIGH-TYPE WAVES IN HORIZONTALLY INHOMOGENEOUS LAYERED MEDIA

R. A. Zhostkov^{a,*}, D. A. Zharkov^{a,**}

^a*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, B. Gruzinskaya str., 10, build. 1, 123242, Moscow, Russian Federation*

^{*}*e-mail: shageraxcom@yandex.ru*

^{**}*e-mail: denis.Zharkov2014@yandex.ru*

The propagation of a Rayleigh-type surface acoustic wave (SAW) along the free boundary of a layered half-space with a smooth change in its elastic parameters horizontally is considered analytically and numerically. The change in the amplitude of the SAW for the transition of a wave from a single-layer system to a single-layer, single-layer to two-layer and two-layer to two-layer depending on the elastic parameters, as well as the length of the sounding wave, is calculated. It is shown that the amplitude of SAW decreases with an increase in the velocity of longitudinal waves and the density of the medium as it propagates, and with an increase in the velocity of transverse waves in the medium, the amplitude of SAW can both increase and decrease. The change in the amplitude of surfactants associated with a change in the velocity of longitudinal waves is stronger, therefore this parameter should be taken into account in applied methods. It is shown that the magnitude of the dominant wavelength depends on both the geometric and elastic parameters of the system.

Keywords: surface acoustic wave, Rayleigh wave, layered medium, mathematical modeling, MST, H/V, dominant wavelength

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ. ШУМЫ И ВИБРАЦИЯ

УДК 534.75, 612.85

ЗВУКОВЫЕ ЛАНДШАФТЫ В ГОРОДСКОЙ СРЕДЕ: СУБЪЕКТИВНОЕ ВОСПРИЯТИЕ И ОБЪЕКТИВНЫЙ КОНТРОЛЬ

© 2024 г. Л. К. Римская-Корсакова^{а,*}, Н. Г. Канев^б, А. И. Комкин^б, С. А. Шуляпов^а

^аАО “Акустический институт имени академика Н.Н. Андреева”, ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия

^бМГТУ имени Н.Э. Баумана, ул. 2-я Бауманская 5, стр. 1, Москва, 105005 Россия

*e-mail: lkrk@mail.ru

Поступила в редакцию 12.06.2024 г.

После доработки 22.09.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Международная организация по стандартизации (ISO) ввела термин “звуковой ландшафт”, определяющий “акустическую среду, воспринимаемую или понимаемую человеком/людьми в контексте”, а также предложила меры для количественной оценки эмоциональных реакций человека на звуковую среду. Целью данной работы была верификация стандартного метода ISO, в котором эмоциональные реакции человека оценивали координатами точек на плоскости “Приятность-Событийность”, где координата “Приятности” оценивала то, насколько среда была приятной для субъекта, т.е. свойства субъекта, а координата “Событийности” — то, насколько среда была событийной, т.е. свойства среды. Для получения координат точек проводили аудиовизуальную экспертизу среды, вместе с которой измеряли акустические характеристики и используемые в психоакустике показатели субъективных качеств звуковой среды. Характеристики и показатели сопоставляли с координатами “Приятности” и “Событийности”. Показано, что для человека звуковая среда могла быть вполне приятной, когда физические характеристики превышали установленные санитарные нормы или, наоборот, неприятной, когда физические характеристики не превышали такие нормы. Полученные результаты подтвердили обоснованность, информативность и целостность метода оценки звуковых ландшафтов, а также его доступность для непрофессиональных экспертов. Предложенные меры могут быть использованы для инженерного проектирования благоприятной звуковой среды городских территорий.

Ключевые слова: воздействие шума, физические характеристики шума, субъективные показатели качества шума, атрибуты воспринимаемого аффективного качества, модели связи, инженерное проектирование

DOI: 10.31857/S0320791924060103, EDN: JTKWMA

1. ВВЕДЕНИЕ

Шумовое загрязнение признают второй по значимости проблемой для здоровья человека и окружающей среды в городах после загрязнения воздуха [1].

В настоящее время можно выделить три подхода к количественной оценке воздействия шума на человека и разработке мер снижения его негативного влияния. Первый классический подход называем физическим. В рамках этого подхода шумом окружающей среды называют нежелательный или вредный наружный шум, возникающий в результате деятельности человека и имеющих подвижные (транспорт) и стационарные (любые механизмы, промышленные предприятия и т.д.) источники [2, 3]. Шумовое воздействие на человека

оценивают на основании измеряемых физических характеристик: уровней звукового давления, октавных спектров, уровней звука, определенных за определенное время воздействия и др. Для борьбы с шумами разных источников существует система санитарного нормирования, действующая во многих странах мира, в т.ч. в России [4]. Такой подход привел к значительному снижению уровней шумов окружающей среды. Однако не редки случаи, когда раздражающими являются шумы, уровни которых не превышают допустимые нормы.

Второй подход к оценке шумового раздражения и разработке мер по управлению шумом можно назвать психоакустическим. Он подразумевает выявление неприятных субъективных качеств

звуков, связанных с определенными физическими характеристиками звуковой среды. Ощущение звукового давления называют *громкостью*. Громкие шумы крайне неприятны для человека. Громкость является интегральным субъективным качеством. Помимо звукового давления и частоты она зависит от длительности шума, от расположения звуковых источников, возникающих эффектов слуховой суммации и маскировки [5]. Модуляции шума также могут быть неприятны для человека [6]. При частотах модуляции менее 20 Гц человек ощущает *флуктуации громкости* шума, а при частотах в 15–250 Гц – *хриплость* шума. Неприятные слуховые ощущения вызывают шумы с высокочастотными и тональными составляющими. В таком случае говорят о появлении субъективных качеств, названных *резкостью* и *тональностью*. Для перечисленных качеств введены меры оценки и разработаны стандартные методы оценки [7–14]. Поскольку на основании отдельных субъективных качеств нельзя оценить неприятность шума в целом, была введена метрика краткосрочного психоакустического раздражения [6]. Она учитывает разные субъективные качества, но не учитывает мнение людей о звуке, их эмоциональное состояние, эстетические и когнитивные предпочтения. Метрику раздражения применяют для контроля хода мероприятий по улучшению качеств шумов самых разных технических средств от кофемолок до ветряных турбин, в том числе внешних и внутренних шумов автомобильного транспорта [15]. Ее используют при выборе конструкции и материалов проектируемых самолетов [16–18]. В РФ такой подход пока не нашел своего широкого применения [19].

Раздражение человека шумом может быть обусловлено не только его физическими свойствами или особенностями слухового восприятия. Для человека в зависимости от внешних условий, потребностей и внутреннего настроения благоприятной может быть как спокойная деловая, так и празднично-громкая звуковая среда. Третий подход к управлению шумом окружающей среды, который *учитывает мнение людей о среде*, называют “звуковым ландшафтом” (soundscape) [20–23]. Подход зародился в конце 1960-х гг. и стал в настоящее время самостоятельной областью [24–26]. Когда людей просят свободно описать, как они воспринимают окружающую звуковую среду в ситуациях повседневной жизни, они чаще всего реагируют эмоционально, указывая, насколько среда была приятной или неприятной [27, 28]. Этот факт заставил исследователей искать те свойства звуковой среды, на которые прежде всего обращает внимание человек при ее описании и в которых отражаются *свойства среды и свойства субъекта* [29, 30]. В настоящее время проблемы звуковых ландшафтов интересуют специалистов не только в области психологии и акустики, но и экологии, этнологии, географии,

архитектуры, ландшафтного планирования, музыки, теле- и радиовещания и многих других. Поэтому, чтобы иметь основу для общения специалистов разных специальностей, был разработан международный стандарт ISO/TS 12913 “Акустика. Звуковой ландшафт” [31–33].

Стандарт ISO/TS 12913 ввел понятие “звуковой ландшафт”, определил количественные меры оценки эмоциональных реакций человека на звуковую среду, предложил методы их оценки. Создавая модели связи мер оценки звуковых ландшафтов с акустическими характеристиками внешнего шума и его психоакустическими показателями качеств, можно предсказать как изменится отношение человека к среде при изменении свойств шума [34–37], а также решать задачи инженерного проектирования благоприятной окружающей среды для человека, проживающего в шумных городах и населенных пунктах. В настоящее время подход звукового ландшафта находится в стадии активного внедрения.

В данной работе приводятся результаты верификации одного из стандартных методов оценки звуковых ландшафтов [31–33]. Целью работы было измерение введенных стандартом мер оценки звуковых ландшафтов, сопоставление этих мер с физическими характеристиками и показателями субъективных качеств звуков окружающей среды, с оценками восприятия звуковой человеком.

В работе принята следующая структура изложения материала. Вначале перечисляются акустические характеристики и показатели субъективных качеств звуков окружающей среды, которые были получены в рамках настоящего исследования (раздел 2). Вводится определенное стандартом понятие звуковой ландшафт [30] и приводится описание метода его оценки [31, 32] (раздел 3). Излагаются результаты аудиовизуальной экспертизы звуковых ландшафтов в разных локациях вокруг МГТУ им. Н.Э. Баумана (раздел 4). Проводится сопоставление мер оценки звуковой среды и звуковых ландшафтов (раздел 5).

2. АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПОКАЗАТЕЛИ СУБЪЕКТИВНЫХ КАЧЕСТВ ЗВУКОВ

Основные величины и процедуры физических измерений шума на местности изложены в российских стандартах [2, 3], а допустимые уровни звукового давления шумов на различных территориях указаны в санитарных правилах [4].

В данной работе для измерений физических характеристик звуков использовали измеритель шума Экофизика-110А. Измеряли уровень звукового давления L (дБА); максимальный уровень звукового давления L_{\max} (дБА); разность уровней процентного превышения $(L_5 - L_{95})$ (дБА), где L_x – уровень

X -процентного превышения, получаемый как скорректированный уровень звукового давления, превышенный в течение X -процентов времени на заданном временном интервале.

Наряду с измерениями физических характеристик, производили записи временных профилей звуков, длительностью ~ 60 с, на основании которых рассчитывали показатели субъективных качеств звуков, а также метрику краткосрочного психоакустического раздражения PAA . Для расчетов показателей и метрики использовали интегрированный комплекс MATLAB, в котором реализованы стандартные алгоритмы расчетов таких показателей [7–14].

Ниже перечислены оцениваемые нами субъективные качества и метрика раздражения PAA , приводятся принятые в психоакустике условные обозначения показателей, единицы их измерений, особенности алгоритмов расчетов.

Громкость звука N (сон), громкости X -процентного превышения, N_X (сон), т.е. громкость, которая превышает в течение X процентов времени на заданном временном интервале, а также разность $(N_{10} - N_{90})$. Громкость в 1 сон соответствует громкости чистого тона частотой 1000 Гц с уровнем $L = 40$ дБ. Стандартный алгоритм расчета громкости N [7–11] предусматривает суммирование удельных громкостей N' в наборе возбужденных звуком слуховых фильтров. N' связана со звуковым давлением степенной функцией. Расчет N' учитывает слуховую чувствительность, эффекты адаптации и маскировки, свойства бинаурального суммирования. Как и реальная [5, 6], расчетная громкость N тем выше, чем больше звуковое давление, длительность и ширина спектра звука.

Резкость звука S (акум) связывают с ощущениями, вызванными присутствием высокочастотных компонент в звуке [6]. Эталонный звук в 1 акум соответствует узкополосному шуму с уровнем $L = 60$ дБ, центральной частотой 1 кГц и шириной полосы ΔF менее 150 Гц. Метод расчета S основан на расчетах удельных громкостей N' [12]. Он предусматривает вычисление отношения интеграла свертки громкостей N' с весовым коэффициентом g к общей громкости звука [6]. Коэффициент g зависит от центральной частоты слухового фильтра f_0 : он равен единице для фильтров, у которых $f_0 < 2900$ Гц и пропорционально возрастает от 1 до 4 для фильтров, у которых $2900 < f_0 < 13500$ Гц. Более раздражающими являются звуки, которые имеют частотные компоненты выше ~ 3000 Гц. Резкость звука также коррелирует с громкостью: чем больше громкость, тем резче звук.

Ощущение *флуктуаций* FS (васил) возникает при низких частотах модуляции ($f_{\text{mod}} < 20$ Гц) [6]. Ощущение FS в 1 васил вызывает амплитудно-модулированный (АМ) тон с уровнем $L = 40$ дБ, частотой

несущей $f = 1000$ Гц, частотой и глубиной модуляции 4 Гц и 100%, соответственно. В основе расчета показателя качества FS лежат оценки глубин слуховой маскировки ΔL_m коротких тонов, предъявляемых на фоне АМ звуков с $f_{\text{mod}} = 100\%$ [14]. Наиболее неприятные ощущения *флуктуаций* возникают при f_{mod} в 4 Гц. Для широкополосных звуков расчет FS предполагает суммирование глубин маскировки ΔL_m , полученных в наборе возбужденных слуховых фильтров. Узкополосные шумы вызывают ощущение FS при $f_{\text{mod}} \sim 0.64\Delta F$, где ΔF – ширина полосы шума.

Ощущение *хриплости* R (аспер) вызывают звуки с частотами модуляций f_{mod} в диапазоне частот 15–250 Гц [6]. Максимальную хриплость имеют звуки при $f_{\text{mod}} \cong 70$ Гц. Ощущение в 1 аспер вызывает АМ тон с уровнем $L = 60$ дБ, частотой несущей $f = 1000$ Гц, частотой модуляции $f_{\text{mod}} = 70$ Гц, глубиной модуляции $m = 100\%$. В основе расчета показателя качества R , как и расчета FS [14], лежат оценки глубин маскировки ΔL_m , но, в отличие от FS , значения R пропорциональны произведению частоты модуляции на глубину маскировки, т.е. $R \sim f_{\text{mod}} \Delta L_m$.

На основании полученных оценок N , S , FS , R рассчитывали метрику краткосрочного психоакустического раздражения PAA :

$$PAA = N \left(1 + \sqrt{W_S^2 + W_{FSR}^2} \right),$$

$$\text{где } W_{FSR} = \frac{2.18}{N^{0.4}} (0.4FS + 0.6R),$$

$$W_S = \begin{cases} 0.25(S - 1.75) \log_{10}(N + 10), & \text{при } S > 1.75, \\ 0, & \text{при } S \leq 1.75. \end{cases}$$

Метрика раздражения PAA была выведена эмпирическим путем в ходе слуховых экспериментов [6]. Наибольший вклад в метрику вносит показатель громкости N .

Другой подход к оценке метрик раздражения PAA предусматривает слуховое ранжирование некоторого набора шумов по степени раздражения и построение методом множественной линейной регрессии аналитического уравнения, связывающего ранги шумов с вычисленными для них показателями качеств N , S , FS , R (см. [19]).

3. СТАНДАРТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ЗВУКОВЫХ ЛАНДШАФТОВ

Концепция “звуковой ландшафт” фокусируется на поиске того, как звук воспринимается и понимается отдельными людьми и/или социальными группами. Международная организация по стандартизации определила звуковой ландшафт как “акустическую среду, воспринимаемую или переживаемую и/или понимаемую человеком или

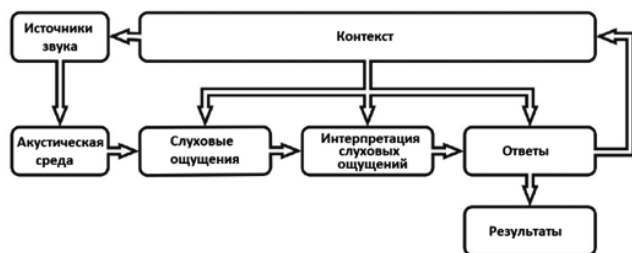


Рис. 1. Элементы концепции звукового ландшафта.

людьми в контексте” [31]. Термин “звуковой ландшафт” отличается от терминов “акустическая среда” или “шум окружающей среды”, так как учитывает перцептивное восприятие среды человеком (рис. 1).

“Контекст” устанавливает связь между человеком и его деятельностью, местом и временем, он может влиять на восприятие звукового ландшафта через “слуховые ощущения”, через “интерпретацию слуховых ощущений”, через “ответы” и реакции человека на звуковую среду. “Слуховые ощущения” учитывают восприятие акустической среды человеком. “Интерпретация слуховых ощущений” — это переживания и ожидания человека, с учетом намерений и причин пребывания в заданном месте. Реакция человека на звуковую среду зависят от эмоционального, психологического, физиологического состояния, способностей контролировать себя под воздействием звуков, времени суток и условий освещения, личной деятельности и деятельности других. “Результаты” представляют собой долгосрочное последствие, обусловленное звуковой средой (например, человек принимает решение посещать или избегать какое-либо место).

Центральное место в изучении звуковых ландшафтов занимает поиск соответствия между выносимыми экспертами оценками среды, отражающими ситуацию и контекст (личный, социальный, культурный и др.), и характеристиками среды, отражающими динамические и временные изменения звуковых ландшафтов в течение дня, месяца, сезона.

В данной работе для оценки звуковых ландшафтов мы использовали стандартный метод А [32, 33]. Метод предусматривает проведение групповой “звуковой прогулки”, в ходе которой эксперты анализируют слышимые звуки реальной или виртуальной среды и заполняют анкету, а организаторы оценивают характеристики звуковой среды.

Вопросы первой части анкеты были направлены на идентификацию экспертами типов слышимых в среде звуков. Приняты три типа звуков. Первый тип — это “Шумы”, т.е. технологические звуки, под которыми понимают звуки разных технических средств, дорожные и строительные шумы, и

звуки от конструкций, заводов и машин и пр. Второй тип — “Звуки присутствия людей”, т.е. голоса, разговор, смех, шаги, пение, играющие дети и пр., и третий тип — “Звуки природы”, т.е. пение птиц, звуки текущей воды, ветра в кустах и деревьях и пр. Как правило, люди считают среду приятной, если в ней преобладают звуки природы; неприятной, если преобладают технологические звуки, и насыщенной событиями, если преобладают звуки присутствия человека.

Каждому типу звуков эксперт должен был присвоить ранг на порядковой шкале, содержащей пять категорий ответов от 1 (совсем нет) до 5 (полностью доминирует). Ответ группы экспертов соответствовал медиане, как мере центральной тенденции, а диапазон шкалы принимали за меру дисперсии.

Вторая часть анкеты была посвящена анализу аффективного или эмоционального воспринимаемого качества звуковой среды. В основе такого анализа лежит разработанная Дж. Расселом модель эмоций [27, 28], в соответствии с которой эксперты должны были оценить 8 атрибутов воспринимаемого качества среды по пятиранговой порядковой шкале от 5 (“полностью согласен”) до 1 (“полностью не согласен”). Эти атрибуты: “приятная” (мера *pleasant*), “яркая”, “захватывающая”, “динамичная” (мера *vibrant*), “насыщенная событиями” (мера *eventful*), “хаотичная” (мера *chaotic*), “раздражающая” (мера *annoying*), “монотонная” (мера *monotonous*), “лишенная событий” (мера *uneventful*), “спокойная” (мера *calm*) [33]. Групповой ответ экспертов также соответствовал медиане.

Следует указать, что перевод названия атрибутов качеств с английского на другие языки является отдельной научной задачей, в решении которой принимает участие представительная международная коллаборация [38, 39]. Поэтому использованный нами перевод названия атрибутов на русский язык не следует считать окончательным.

На рис. 2а приводится пример отображения 8 атрибутов качества среды двух воображаемых звуковых ландшафтов ЗЛ1 и ЗЛ2 на циркумplexной плоскости. Такая плоскость имеет 8 ортогональных осей для отображения атрибутов и 5 концентрических окружностей для оценки их интенсивности. Два звуковых ландшафта ЗЛ1 и ЗЛ2 характеризуют две фигуры, расположенные почти симметрично относительно оси “хаотичный”–“спокойный”.

Чтобы минимизировать описание звуковых ландшафтов, чтобы иметь количественные меры для их анализа и иметь возможность применять статистические методы анализа распределений ответов экспертов, стандартный метод А [32] вводит тригонометрическое преобразование значений 8 атрибутов качества в пару координат *ISO Pleasant* и *ISO Eventful* [33] (в дальнейшем *ISOPl* и *ISOEv*)

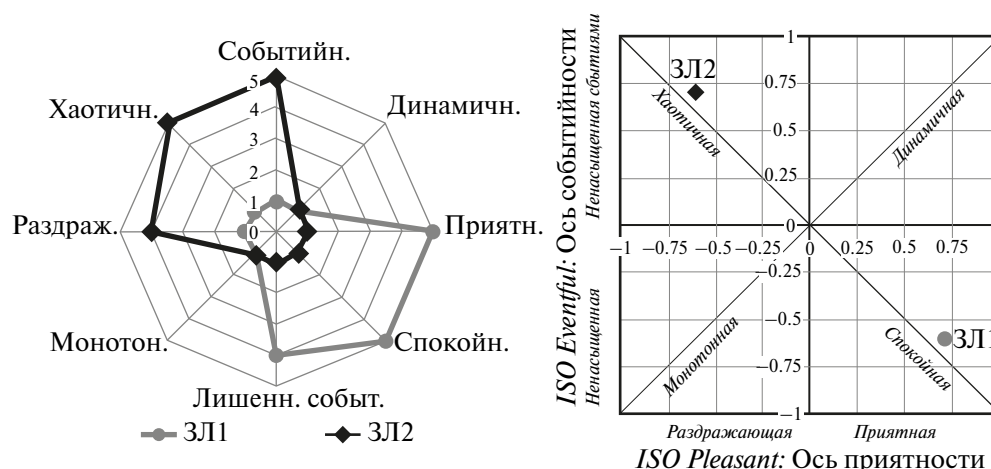


Рис. 2. Представление результатов обследования звуковых ландшафтов на (а) — циркумплексной плоскости и (б) — плоскости “Приятность—Событийность”.

точек на плоскости “Приятность—Событийность”. Такое преобразование имеет вид:

$$\begin{aligned}
 ISOPl &= k[(pleasant - annoying) + \\
 &+ \cos(\varphi)(calm - chaotic) + \\
 &+ \cos(\varphi)(vibrant - monotonous)]; \\
 ISOEv &= k[(eventful - uneventful) + \\
 &+ \cos(\varphi)(chaotic - calm) + \\
 &+ \cos(\varphi)(vibrant - monotonous)];
 \end{aligned}$$

где $k = 1 / (4 + \sqrt{32})$ и $\varphi = \pi / 4$.

На рис. 2б представлено отображение 8 атрибутов звуковых ландшафтов ЗЛ1 и ЗЛ2 (рис. 2а) точками на плоскости “Приятность—Событийность”. Значения координат $ISOPl$ и $ISOEv$ меняются в диапазоне от -1 до +1. Четыре квадранта на плоскости характеризуют звуковые ландшафты как “оживленный — хаотичный — скучный — спокойный”. “Оживленный” или “яркий, динамичный” звуковой ландшафт аттестуется одновременно как приятный и насыщенный событиями; “хаотичный” — как неприятный и насыщенный событиями, “скучный” или “монотонный” звуковой ландшафт — как неприятный и лишенный событий, а “спокойный” — как приятный и ненасыщенный событиями. По расположению точек (рис. 2б) звуковой ландшафт ЗЛ1 можно описать как очень неприятный, хаотичный и насыщенный событиями, а ландшафт ЗЛ2 — как очень приятный, спокойный и лишенный событий. Таким образом, по значениям координат $ISOPl$ и $ISOEv$ точек на плоскости “Приятность—Событийность” (рис. 2б) стандартный метод А позволяет определить, насколько звуковой ландшафт был приятным и насыщенным событиями. Принято, что координата

$ISOPl$ отражает то, насколько среда была для субъекта приятной (т.е. свойства субъекта), а координата $ISOEv$ — насколько среда была событийной (т.е. свойства среды).

В третьей заключительной части анкеты эксперты дают аудиовизуальную оценку среде, ее громкости, приемлемости и адекватности месту также по ранговой шкале от 1 (нет совсем) до 5 (полностью согласен).

Формирование благоприятных звуковых ландшафтов предполагает определение желаемой формы среды, представляемой либо на циркумплексной плоскости (рис. 2а), либо на плоскости “Приятность—Событийность” (рис. 2б), а также разработку комплекса мер, приближающих существующий звуковой ландшафт к желаемому. Есть указания [40], что раздражающие и хаотичные звуковые ландшафты, подобные ЗЛ2, весьма трудно преобразовать в приятные и спокойные, подобные ЗЛ1.

4. ЭКСПЕРТИЗА РЕАЛЬНЫХ ЗВУКОВЫХ ЛАНДШАФТОВ

Аудиовизуальная экспертиза звуковых ландшафтов в 6 локациях была проведена в середине ноября 2023 г. в период с 17 до 18 часов при участии 14 непрофессиональных экспертов в возрасте чуть более 20 лет. Четыре локации были расположены около МГТУ имени Н. Э. Баумана: Л1 — около входа на факультет ЭМ, Л2 и Л3 — у нового и старого корпусов Главного здания Университета, Л4 — у общежития. Еще две локации располагались в общественных местах: Л5 — в центре пешеходной улицы и Л6 — во дворе жилого дома (рис. 3).

В разных локациях эксперты выявили разные типы звуков (рис. 4). В локациях Л1–Л4 вблизи университета имели место звуки двух типов: “Шум” и “Звуки присутствия людей” (рис. 4).



Рис. 3. Расположение локаций. Локации Л1-Л4 находились около входов в учебные и жилые корпуса МГУ, а Л5 и Л6 — на близкорасположенных территориях общего пользования.

Основным источником “Шумов” в Л1 был движущийся автотранспорт, а в Л2 и Л3 — движущийся автотранспорт и строительные работы. Высокие ранги “Шумов” и их превалирование над рангами “Звуков присутствия людей” в Л1 и Л2 явно указывали на раздражающий характер звуковых ландшафтов. Во время проведения экспертизы “Звуки присутствия людей” в Л4 превалировали над “Шумами”. На пешеходной улице Л5 эксперты указали только на высоко ранговые “Звуки присутствия людей”, а во дворе жилого дома (Л6) — на низко ранговые звуки трех типов.

По типам звуков локации были разделены на две группы (отмечены овалами, см. рис. 4, 6, 7). В первой группе локаций (Л1-Л4) присутствовали звуки сходных типов, во второй группе (Л4-Л6) — разных типов.

На рис. 5 отображены индивидуальные и средние оценки звуковых ландшафтов точками на плоскости “Приятность-Событийность” с координатами *ISOPI* и *ISOEv*. В первой группе локаций и по положению средней оценки самым неприятным, хаотичным и насыщенным событиями был звуковой ландшафт локации Л1, которая непосредственно примыкала к оживленной транспортной магистрали. Локация Л2 располагалась в уютном сквере и традиционно считалась приятной, однако, в день экспертизы звуковой ландшафт оказался неприятным и насыщенным событиями из-за громких звуков проводимых рядом строительных работ и яркого освещения строительной площадки. Локация Л3 находилась перед входом в общежитие, ее звуковой ландшафт нейтральный по приятности, но насыщенный событиями. В локации Л4 экспертизу проводили на ступенях монументального здания

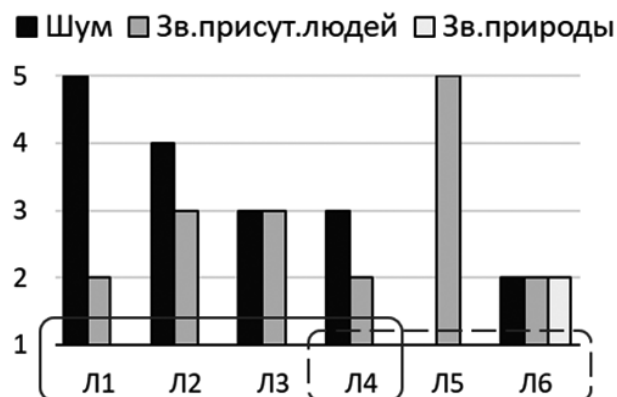


Рис. 4. Медианы ранговых оценок, полученных группой экспертов для звуков разных типов в 6 локациях. Ордината — значения медиан от 1 (не слышу) до 5 (полностью доминирует). Овалы делят локации на 2 группы.

нового Главного корпуса, перед которым была парковка, которая отделяла локацию от оживленной транспортной магистрали. Во время экспертизы локации имело место приятное приглушенное освещение заходящим за горизонт солнцем. По положению координат *ISOPI* и *ISOEv* звуковой ландшафт в Л4 по сравнению с Л1-Л3 был наиболее приятным и менее всего насыщенным событиями (рис. 5).

Локации Л5 и Л6 располагались на общественных территориях вблизи Университета. Звуковой ландшафт пешеходной улицы Л5 оказался нейтральным по приятности, как в Л3, но насыщенным событиями, как в Л2 (рис. 5). Самым спокойным, приятным и ненасыщенным событиями был звуковой ландшафт во дворе жилого дома (Л6). Он содержал тихие звуки всех типов, подчеркивающие спокойствие и безопасность окружающей среды.

Средние значения координат *ISOPI* и *ISOEv*, характеризующие звуковые ландшафты в 6 локациях, представлены на рис. 6. В первой группе локаций Л1-Л4 изменения координат обусловлены снижением рангов неприятных звуков типа “Шум” (рис. 4): значения *ISOPI* повышались от отрицательных до положительных значений, а значения *ISOEv* снижались от высоких положительных значений почти до нуля. Во второй группе выделялась локация Л5. Здесь доминирующим типом был “Звук присутствия людей” (рис. 4). Поэтому оценка *ISOPI* была несколько ниже, а оценка *ISOEv* — значительно выше таковых в Л4 и Л6.

Заключительная часть экспертизы посвящена оценкам контекста восприятия среды: оценка частоты посещения места в настоящем и желания посещать место в будущем, оценка среды в целом, ее громкости и соответствия среды месту.

Эксперты с разной частотой посещали локации Л1-Л6: очень часто посещали локацию Л1,

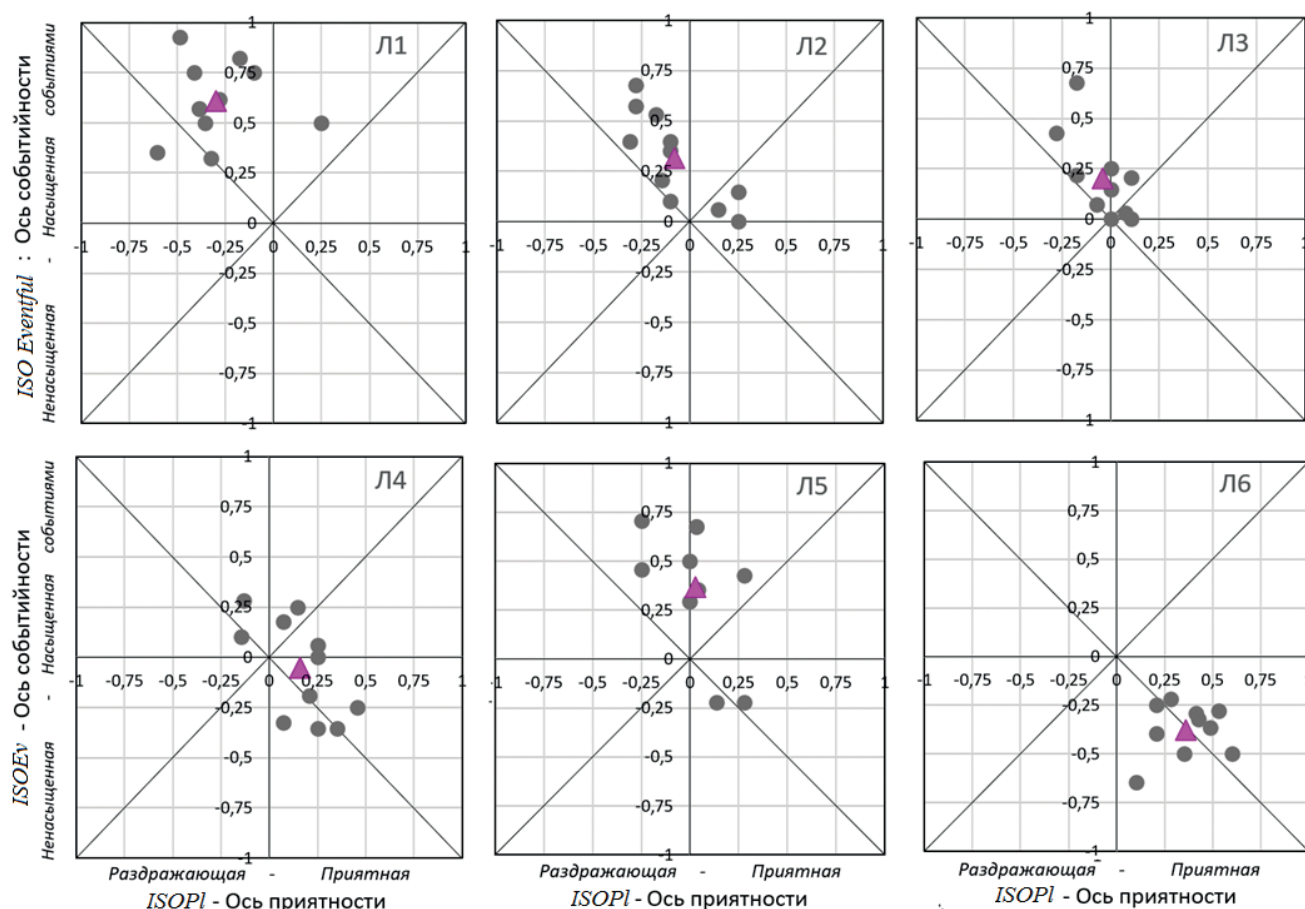


Рис. 5. Экспертные оценки звуковых ландшафтов координатами *ISOPI* и *ISOEv* точек на плоскости “Приятность-Событийность” в 6 локациях. Символы ● и ▲ соответствуют индивидуальным и средним оценкам.

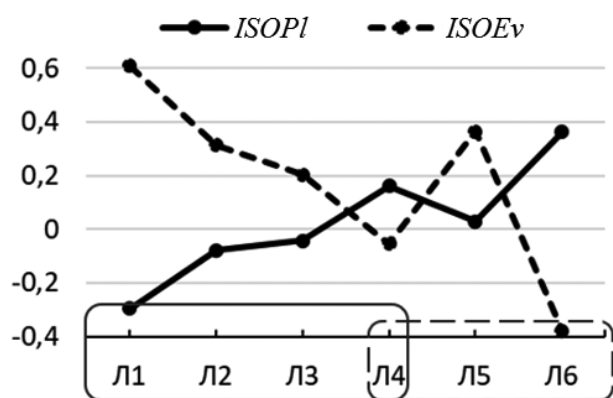


Рис. 6. Значения координат *ISOPI* и *ISOEv* точек на плоскости “Приятность-Событийность”, соответствующих средним оценкам звуковых ландшафтов в 6 локациях. Ордината — средние по группе значения координат *ISOPI* и *ISOEv*.

часто — локации Л3 и Л5, нечасто — локации Л2 и Л5, совсем нет — локацию Л6. Ранги оценок соответствия среды месту варьировали между “нейтральной” и “хорошей” (ранги 3-4). Оценки желания посещать локации в будущем варьировали около “не часто, при случае” (оценка 2-3). Последние

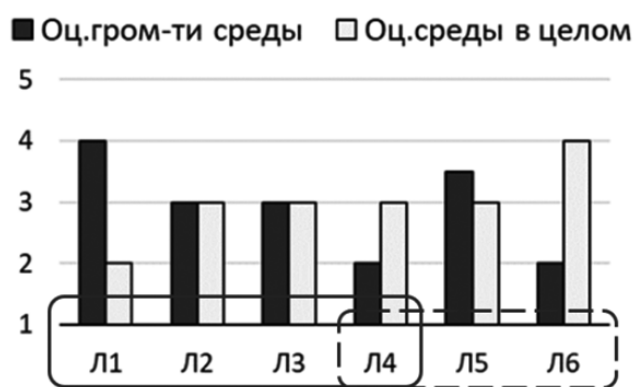


Рис. 7. Медианы ранговых оценок среды в целом и ее громкости в 6 локациях. Ордината — ранговые оценки от 1 (очень плохо / совсем нет) до 5 (очень хорошо / очень громко).

оценки, по-видимому, отражали лояльность экспертов к учебному заведению и учитывали срок обучения.

Показательными были результаты экспертизы громкости среды и восприятия среды в целом (рис. 7): чем выше был ранг оценки громкости

среды, тем ниже был ранг оценки среды в целом. При этом изменения ранговых оценок громкости среды соответствовали изменениям средних значений координат *ISOEv*, отражающих свойства среды (рис. 6), а изменения ранговых оценок среды в целом – изменениям средних значений координат *ISOPI*, отражающих свойства субъекта.

5. СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕР
ОЦЕНОК ЗВУКОВОЙ СРЕДЫ
И ЗВУКОВЫХ ЛАНДШАФТОВ

В табл. 1 приведены значения характеристик, используемых в трех подходах к оценке воздействия шума на человека. Это значения координат “Приятности-Событийности” *ISOPI* и *ISOEv* (подход звуковой ландшафт), уровней звукового давления (*L*, *L_{max}*, *L₁₀–L₉₀*) (физический подход), таких показателей субъективных качеств, как громкость (*N*, *N₅–N₉₅*), резкость *S*, метрика раздражения *PAA* (психоакустический подход). Показатели *FS* и *R* не указаны из-за малости своих значений.

Сравним интегральные характеристики *L*, *N* и *PAA*, используемые для оценки вызываемого у человека раздражения. Для этого на одном графике отобразим изменчивости уровней (ΔL), громкости (ΔN) и метрики раздражения (ΔPAA), вычисленные как разности между значениями *L*, *N* и *PAA*, полученных в локациях Л1–Л6, и значений, полученных в локации Л1 (рис. 8). Как следует из рисунка, точнее изменения громкости среды оценивает линейная шкала громкости *N* в сон, но не логарифмическая шкала уровней *L* в дБА. Наибольшую чувствительность к изменениям громкости среды обнаруживает метрика раздражения *PAA*, так как расчет метрики предусматривает подчеркивание громкости *N* другими показателями качеств (см. раздел 2), в нашем случае резкостью *S* (табл.1).

Сопоставим оценки звуковых ландшафтов с акустическими характеристиками и показателями субъективных качеств звуковой среды (табл. 1).

В первой группе локаций Л1–Л4, расположенных около зданий Университета, изменения оценок звуковых ландшафтов совпали с изменениями характеристик и показателей звуковой среды из-за присутствия в локациях звуков сходных типов: “Шумов” и “Звуков присутствия людей” (рис. 4). С ростом номера локации в Л1–Л4 ранги звуков первого типа снижались от 5 до 3, а ранги звуков второго типа оставались в пределах 2-3, поэтому значения уровней *L*, громкостей *N* и метрик раздражения *PAA* последовательно снижались на 9.4 дБ, 15 сон и 22 ед. Поэтому значения координаты “Приятности” возрастали на 22%, а значения координаты “Событийности” снижались на 33%. Во всех локациях уровни *L* превысили допустимые нормы. По расположению координат *ISOPI* и *ISOEv* звуковой ландшафт в Л1 был самым неприятным, хаотичным и насыщенным событиями. Однако звуковой ландшафт в Л4 был приятным, спокойным и

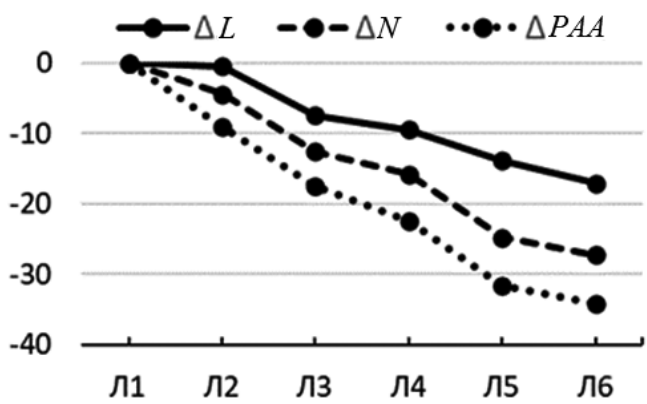


Рис. 8. Изменчивость физических и субъективных оценок громкости, а также метрики раздражения *PAA* звуковой среды в 6 локациях. Ордината – изменчивости уровней звукового давления ΔL в дБА, громкости ΔN в сон и метрики раздражения ΔPAA в ед.

Таблица 1. Числовые значения мер оценки звуковых ландшафтов и характеристик звуковой среды.

Локации	I. Характер-ки ЗЛ		II. Физические характер-ки			III. Психоакустические характер-ки			
	Расчет по рез-там анкетирования		Измерение Экофизика-110А			Расчет в среде Matlab			
	<i>ISOPI</i>	<i>ISOEv</i>	<i>L</i>	<i>L_{max}</i>	<i>L₁₀–L₉₀</i>	<i>N</i>	<i>N₅–N₉₅</i>	<i>S</i>	<i>PAA</i>
	ед.	ед.	дБА	дБА	дБА	сон	сон	акум	ед.
Л1	–0.30	0.61	71.1	75.2	12	45.5	25.7	1.2	58.7
Л2	–0.08	0.31	70.7	73.5	3.5	43.3	7.9	1.0	49.8
Л3	–0.04	0.20	63.7	69.1	9	32.7	17.2	1.3	41.3
Л4	0.16	–0.05	61.7	65.2	3.5	30.8	11.1	1.1	36.4
Л5	0.03	0.37	57.3	62.7	7.5	22.1	16.5	1.1	27.2
Л6	0.36	–0.38	54.1	59.2	5.5	19.4	13.4	1.3	24.5

Таблица 2. Корреляционные связи координат *ISOPI* и *ISOEv* звуковых ландшафтов с физическими и психоакустическими характеристиками звуковой среды в 6 локациях.

	Параметр	I. Хар-ки ЗЛ		II. Физические хар-ки			III. Психоакустические хар-ки				
		<i>ISOPI</i>	<i>ISOEv</i>	<i>L</i>	<i>L</i> _{max}	<i>L</i> ₁₀ – <i>L</i> ₉₀	<i>N</i>	<i>N</i> ₅ – <i>N</i> ₉₅	<i>S</i>	<i>FS</i>	<i>R</i>
I.	<i>ISOPI</i> <i>ISOEv</i>										
II.	<i>L</i> , дБА	–0.86	0.73								
	<i>L</i> _{max} , дБА	–0.91	0.78								
	<i>L</i> ₁₀ – <i>L</i> ₉₀ , дБА	–0.63	0.60	0.26	0.37						
III.	<i>N</i> , сон	0.85	0.70	0.99	0.99	0.33					
	<i>N</i> ₅ – <i>N</i> ₉₅ , сон	–0.82	0.71	0.65	0.71		0.72				
	<i>S</i> , акум	0.31	–0.43	–0.43	–0.35	0.44	–0.32	0.17			
	<i>FS</i> , васил			–0.65	–0.65	0.05	–0.60	–0.15	0.54		
	<i>R</i> , аспер			–0.19	–0.13	0.63	–0.06	0.54	0.71	0.39	
	<i>PAA</i> , ед.	–0.88	0.72	0.98	0.98	0.41		0.79	–0.26	–0.54	0.01

Указаны статистически значимые значения коэффициентов корреляции ($p < 0.005$).

Жирным шрифтом выделены значения коэффициентов корреляции, превышающие +0.7.

ненасыщенным событиями при том, что уровни *L* были выше санитарных норм на 6 дБ.

Если в сравниваемых локациях присутствуют звуки разных типов, то между изменениями характеристик звуковой среды и звуковых ландшафтов связи могут быть совсем другими. Покажем это на примере группы локаций Л4–Л6.

В локация Л5 интегральные *L*, *N* и *PAA* были ниже на 4.4 дБ, 8.7 сон и 9.2 ед. по сравнению с таковыми в локация Л4, но в Л5 оценка *ISOPI* снизилась на 6.5%, а оценка *ISOEv* возросла на 21%. В Л5 уровень *L* был в пределах санитарной нормы, однако, звуковой ландшафт не был благоприятным для человека. В локация Л5, расположенной на пешеходной улице, звуковой ландшафт формировали высокоранговые “Звуки присутствия людей” (рис. 4). Он был нейтральным по приятности (*ISOPI* ~ 0.0) и имел повышенную событийность (*ISOEv* ~ 0.4). Это указывало, что в Л5 эксперты ощущали не спокойствие и безопасность, но излишнюю подвижность и суетливость.

Локация Л6 находилась во дворе жилого дома. В Л6 по сравнению с Л5 характеристики *L*, *N* и *PAA* снижались на 3.2 дБ, 2.7 сон, 2.7 ед. Такое снижение было меньше, чем в предыдущем случае, однако оценка *ISOPI* повысилась на 16.5%, а оценка *ISOEv* снизилась на 37.5%. Причинами повышения приятности и заметного снижения событийности в Л6 были замкнутое пространство локация, присутствие тихих звуков всех трех типов: “Шумов”, “Звуков присутствия людей”, “Звуков природы”.

Здесь уместно указать на сходство оценок звуковых ландшафтов (*ISOPI* и *ISOEv*) в локациях Л5 и

Л2 (рис. 5, табл. 1). Звуковой ландшафт в локация Л5 формировали только “Звуки присутствия людей”, уровни *L* которых соответствовали санитарным нормам. В то время как в звуковом ландшафте Л2 преобладали звуки типа “Шум” с уровнями *L* заметно превышающими санитарные нормы.

Таким образом, из сравнения пар локаций (Л4–Л5, Л5–Л6, Л5–Л2) следует, что связи между характеристиками звуковой среды и звуковых ландшафтов зависят от состава звуков окружающей среды и их характеристик, от контекста восприятия среды человеком, назначения территории, ее благоустройства, настроения человека и др.

В заключение проследим корреляционные связи между мерами звуковых ландшафтов (*ISOPI* и *ISOEv*), физическими характеристиками звуковой среды (*L*, *L*_{max}, *L*₁₀–*L*₉₀) и психоакустическими показателями качеств среды (*N*, *N*₅–*N*₉₅, *S*, *FS*, *R*, *PAA*) (табл. 2). Получить достоверные оценки таких связей для каждой из двух групп локаций из-за малости числа последних было нельзя, но можно для всех 6 локаций сразу.

Самое важное, что расчеты не выявили корреляционных связей между координатами *ISOPI* и *ISOEv*. Это подтверждает взаимную независимость координат. В то же время, корреляционные связи координат *ISOPI* с интегральными характеристиками *L*, *N* и *PAA* были высокими, статистически достоверными и отрицательными, а связи координат *ISOEv* с теми же характеристиками — высокими, статистически достоверными и положительными. Абсолютные значения коэффициентов корреляции для *ISOPI* составляли |0.85–0.88| и были выше таковых для *ISOEv*, составлявших |0.7–0.73|. Снижение

абсолютных значений коэффициентов корреляции для *ISOEv* обусловлены большей вариабельностью координат *ISOEv*, чем координат *ISOPi* (рис. 6), из-за изменения состава слышимых звуков (рис. 4).

В обследованных локациях Л1–Л6 изменчивость координат *ISOPi* соответствовала изменчивости ранговых оценок среды в целом, а изменчивость координат *ISOEv* – изменчивости ранговых оценок громкости среды (рис. 6 и 7). Это подтверждает, что координата *ISOPi* отражает отношение субъекта к среде, а координата *ISOEv* – свойства среды.

6. ВЫВОДЫ

1. Стандартный метод (А) экспертной оценки звуковых ландшафтов [31–33] имеет три части: (а) определение типов звуков (рис. 4); (б) оценку 8 атрибутов воспринимаемого аффективного (эмоционального) качества среды и вычисление по ним двух координат *ISOPi* и *ISOEv* на плоскости с осями “Приятность-Событийность” (рис. 2), характеризующими отношение субъекта к среде и свойства последней, (в) аудиовизуальную оценку среды и контекста ее восприятия. Все части взаимосвязаны и обеспечивают целостность метода. Нельзя предсказать приятность или событийность среды только по типу доминирующих звуков, а оценки приятности и событийности должны быть подтверждены аудиовизуальными оценками среды и свойств ее восприятия (контекст).

2. Полученные результаты подчеркивают обоснованность введения стандарта ISO/TS 12913 “Акустика. Звуковой ландшафт” [31–33], информативность метода оценок звуковых ландшафтов парой координат точек на плоскости “Приятность-Событийность”, доступность способа тестирования среды для непрофессиональных экспертов.

3. Было показано, что характеристики звуковых ландшафтов коррелировали с объективными характеристиками звуковой среды в тех локациях, которые имели сходное назначение и где присутствовали громкие звуки сходных типов. Такая связь нарушалась, если сравниваемые локации имели разное назначение и звуковое разнообразие. Другими словами, связи между характеристиками звуковой среды и звуковых ландшафтов зависели от состава звуков окружающей среды и их характеристик, от контекста восприятия среды человеком, назначения территории, ее благоустройства, настроения человека и др.

4. Большую точность в оценках изменений громкости среды дает линейная шкала громкости *N* в сон, а не логарифмическая шкала уровней звукового давления *L* в дБА. Наибольшую чувствительность к изменениям громкости среды обнаруживает метрика раздражения *PAA*, которая помимо громкости учитывает слуховое восприятие

других субъективных качеств, связанных с наличием модуляций звуков, высокочастотных и тональных компонент.

5. Все три подхода (физический, психоакустический, звуковой ландшафт) к оценке воздействия шума на человека и разработке мер снижения негативного влияния шума актуальны и значимы.

Первый и второй подходы нацелены на определение источников шумов, на снижение уровней их излучения, на устранение физических характеристик звуков, которые приводят к появлению неприятных субъективных качеств шумов. Третий подход учитывает психические особенности аудиовизуального восприятия среды человеком. Такой подход, наряду с мерами снижения неприятных свойств звуковой среды, включает маскирование неприятных типов звуков, таких как “Шум” и громкие “Звуки присутствия людей”, приятными для человека звуками, например, “Звуками природы”.

Комплексное использование всех трех подходов позволяет формировать благоприятную звуковую среду на тех территориях в городах и населенных пунктах, где невозможно полностью исключить присутствие неблагоприятных звуков.

Работы выполнены в рамках договора о сотрудничестве между Акустическим институтом им. акад. Н.Н. Андреева и МГТУ им. Н.Э. Баумана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руководство по вопросам шума в окружающей среде для Европейского региона. WHO Region Office for Europe, 2018, www.euro.who.int.
2. ГОСТ Р 53187–2008 Акустика. Шумовой мониторинг городских территорий.
3. ГОСТ Р ИСО 1996–1–2019. Акустика. Описание, измерение и оценка шума на местности. Часть 1. Основные величины и процедуры оценки.
4. Санитарные правила и нормы СанПиН 1.2.3685–21 “Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания” (с изменениями на 30 декабря 2022 года).
5. Слуховая система. Под ред. Альтман Я.А. Л.: Наука, 1990. 620 с.
6. Fastl H., Zwicker E. Psychoacoustics: Facts and Models. Springer Science & Business Media, 2007. 463 p.
7. ISO 532-1/2: 2017. Acoustics—Methods for calculating loudness—Part 1: Zwicker method; Part 2: Moore-Glasberg method.
8. ISO 532-2: 2017. Acoustics — Methods for calculating loudness — Part 2: Moore-Glasberg method.
9. ANSI/ASA S 3.4:2007. Procedure for the Computation of Loudness of Steady Sounds.
10. DIN 45631. 2010. Calculation of loudness level and loudness from the sound spectrum — Zwicker method.

11. DIN 45631/A1. 2010. Calculation of loudness level and loudness from the sound spectrum — Zwicker method — Amendment 1: Calculation of the loudness of time-variant sound.
12. DIN 45692. 2009. Measurement technique for the simulation of the auditory sensation of sharpness.
13. DIN 45681. 2005. Acoustics — Determination of tonal components of noise and determination of a tone adjustment for the assessment of noise immissions.
14. ECMA-418-2. 2020. Psychoacoustic metrics for ITT-equipment, part 2: models based on human perception. Geneva.
15. *Genuit K.* Sound-Engineering im Automobilbereich. Springer. Berlin. 2010.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-01415-4.589>
16. *More S.R.* Aircraft noise characteristics and metrics. PhD thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana, December 2010.
17. *Greco G., Bertsch L., Ring T., Langer S.* Sound quality assessment of a medium-range air-craft with enhanced fan-noise shielding design // *CEAS Aeronautical J.* 2021. 12. 481–493.
18. *Huang Y., Lv B., Ni K., Jiang W.* Discomfort estimation for aircraft cabin noise using linear regression and modified psychoacoustic annoyance approaches // *J. Acoust. Soc. Am.* 2023. V. 154. P. 1963–1976.
<https://doi.org/10.1121/10.0020838>
19. *Римская-Корсакова Л.К., Пятаков П.А., Шуляков С.А.* Оценки раздражающего действия шума // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 5. С. 550–561.
20. *Kato K.* Soundscape, cultural landscape and connectivity. Sites: New Series. 2009. 6. 2. 80–91.
21. *Kang J., Aletta F.* The Impact and Outreach of Soundscape Research // *Environments.* 2018. V. 5(5). P. 58.
<https://doi.org/10.3390/environments5050058>
22. *Brown L.A.* A review of progress in soundscapes and an approach to soundscape planning // *Int. J. Acoustic and Vibration.* 2012. V. 17(2). P. 73–81.
23. *Носуленко В.Н.* Психофизика восприятия естественной среды. Проблема воспринимаемого качества. М.: Изд-во Институт психологии РАН, 2007. 400 с.
24. *Schafer R.M.* The New Soundscape. Associated Music, New York, NY, 1969. P. 1–65.
25. *Schafer R.M.* The Soundscape: Our Sonic Environment and the Tuning of the World. Destiny Books. Rochester, 1993. P. 301.
26. *Kang J.* Soundscape: Progress in the past 50 years and challenges in the next 50 years. IN-TER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings. 2021. 263(6). 132–139.
<https://doi.org/10.3397/IN-2021-1302>
27. *Russell J.A.* A circumplex model of affect // *Journal of Personality and Social Psychology.* 1980. 39, 1161–1178.
28. *Russell J.A., Ward L.M., Pratt G.* Affective quality attributed to environments: a factor analytic study // *Environment and Behavior.* 1981. V. 13. P. 259–288.
29. *Russell J.A.* Core affect and the psychological construction of emotion // *Psychological Review.* 2003. V. 110. № 1. P. 145–172.
30. *Fiebig A., Jordan P., Moshona C.C.* Assessments of acoustic environments by emotions — the application of emotion theory in soundscape // *Frontiers in Psychology.* 2020.
<https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.573041>
31. ISO/TS 12913-1:2014, “Acoustics—Soundscape—Part 1: Definition and conceptual frame-work” (International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland).
32. ISO/TS 12913-2:2018, “Acoustics—Soundscape—Part 2: Data collection and reporting re-quirements” (International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland).
33. ISO/TS 12913-3:2019, “Acoustics—Soundscape—Part 3: Data analysis” (International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland).
34. *Aumond P., Can A., De Coensel B., Botteldooren D., Ribeiro C., Lavandier C.* Modeling soundscape pleasantness using perceptual assessments and acoustic measurements along paths in urban context // *Acta Acustica united with Acustica.* 2017. V. 103. № 3. P. 430–443.
<https://doi.org/10.3813/aaa.919073>
35. *Gelman A., Hill J.* Data analysis using regression and multilevel/hierarchical models. New York: Cambridge University Press, 2007.
36. *Axelsson Ö., Nilsson M.E., Berglund B.* A principal component model of soundscape perception // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 128. P. 2836–2846.
37. *Axelsson Ö., Nilsson M.E., Hellström B., Lundén P.* A field experiment on the impact of sounds from a jet-and-basin fountain on soundscape quality in an urban park // *Landsc. Urban Plan.* 2014. V. 123. P. 49–60.
38. *Aletta F., Oberman T., Axelsson Ö., Xie H., Zhang Y., Lau S.-K., Tang S.-K., Jambrošić K., De Coensel B., Van den Bosch K.* Soundscape Assessment: Towards a Validated Translation of Perceptual Attributes in Different Languages. Institute of Noise Control Engineering, 2020. V. 261. P. 3137–3146.
39. *Aletta F., Oberman T., Mitchell A., Kang J.* SATP Consortium. Preliminary Results of the Soundscape Attributes Translation Project (SATP): Lessons Learned and next Steps // In Proceedings of the 10th Convention of the European Acoustics Association Forum Acusticum. 2023. P. 701–705.
40. *Mitchell A., Aletta F., Kang J.* How to analyze and represent quantitative sound-scape data // *J. Acoust. Soc. Am. Express Letters.* 2022. V. 2(3). 037201.
<https://doi.org/10.1121/10.0009794>
41. *Jeon J.Y., Lee P.J., You J.* Acoustical characteristics of water sounds for soundscape enhancement in urban open spaces // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 131(3). P. 2101–2109.

SOUNDSCAPES IN THE URBAN ENVIRONMENT: AUDIOVISUAL PERCEPTION AND OBJECTIVE CONTROL

L. K. Rimskaya-Korsakova^{a,*}, N. G. Kanev^b, A. I. Komkin^b, S. A. Shulyapov^a

^a*JSC “N.N. Andreev Acoustics Institute” Russia, 117036, Moscow, st. Shvernika 4*

^b*Bauman Moscow State Technical University Russia, 105005, Moscow, st. 2-ya Baumanskaya, 5, building 1*

E-mail: lkrk@mail.ru

The International Organization for Standardization (ISO) introduced the term “soundscape”, which defined the latter as “an acoustic environment perceived or understood by a person/people in context”. It proposed methods for quantitatively assessing human emotional reactions to a sound environment. In one of the methods, such reactions were represented by coordinates on the “Pleasantness-Eventfulness” plane. The pleasantness coordinate assessed how pleasant the environment was for the subject at the time of the examination, i.e. the properties of the subject, and the eventfulness coordinate assessed how eventful the environment was, i.e. the properties of the environment. The purpose of this work was to verify the standard ISO method. Therefore, an audiovisual examination of the environment was carried out in different locations; pleasantness and eventfulness coordinates were calculated; acoustic characteristics and psychoacoustic characteristics of the environment were recorded and calculated, the latter were then compared with the characteristics of sound landscapes (or pleasantness and eventfulness coordinates). It was shown that a sound environment with physical characteristics higher than established sanitary standards may well be pleasant for a person. The obtained results confirmed the validity, informativeness and integrity of the method for assessing soundscapes, its accessibility for non-professional experts. The characteristics of soundscapes can be used for engineering design of the sound environment of urban areas.

Keywords: noise impact, physical characteristics of noise, noise perception, subjective quality indicators, attributes of perceived affective quality, models of the relationship between objective and emotional characteristics

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.63; 519.64; 532.1; 534.21; 536.2

УЧЕТ ВЯЗКИХ И ТЕРМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ВО ВРЕМЕНИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ

© 2024 г. А. И. Корольков^а, А. Ю. Лаптев^{б,*}, А. В. Шанин^б

^аUniversity of Manchester, Oxford Road, Manchester, M13 9PL UK

^бМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы,
Москва, ГСП-1, 119991 Россия

*e-mail: laptev97@bk.ru

Поступила в редакцию 16.12.2023 г.

После доработки 04.06.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Исследуется задача распространения акустических волн с термовязкими граничными условиями. Для термовязких граничных условий формулируется временная постановка, основанная на понятии дробной производной. Дается слабая формулировка задачи, которая с помощью метода конечных элементов сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры. Для численного решения данной системы строится неявная конечно-разностная схема. Для ее верификации моделируется задача о распространении звука в тонкой трубе, результаты численного моделирования сравниваются с аналитическим решением.

Ключевые слова: пограничный слой, вязкость, температуропроводность, МКЭ, численные методы

DOI: 10.31857/S0320791924060113, **EDN:** JTNHTK

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], термические и вязкие эффекты в воздухе малы, что позволяет описывать распространение акустических волн с помощью волнового уравнения. Однако в узких полостях и вблизи границ термические и вязкие потери могут быть значительны. Прямой способ учета термовязких эффектов заключается в точном или приближенном решении уравнений Навье-Стокса, как это делается, например, в [2–4].

Решение уравнений Навье-Стокса с вычислительной точки зрения представляет собой весьма трудоемкую задачу. Более эффективным является использование системы уравнений пограничного слоя вблизи границ и волнового уравнения в остальной области [5, 6]. Такой подход сопряжен с вычислительными сложностями — в пограничном слое необходимо генерировать более плотную сетку и осуществлять сращивание двух разных решений в граничных областях. Наиболее простой и эффективный метод заключается в учете термовязких эффектов с помощью граничного условия специального вида. В [1, 7] термовязкие граничные условия получены для стационарной задачи и имеют следующий вид:

$$\delta_v \frac{i-1}{2} \Delta_t \tilde{p}(\omega) - \delta_T \frac{\omega^2 (i-1)(\gamma-1)}{c_0^2} \tilde{p}(\omega) + \frac{\partial \tilde{p}(\omega)}{\partial n} = 0, \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi f$ — частота, c_0 — скорость звука, $\tilde{p}(\omega)$ — Фурье-образ давления,

$$\delta_v = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad \delta_T = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega\rho_0 c_p}}$$

представляют собой толщины соответственно вязкого и термического слоя, ρ_0 — равновесная плотность воздуха, $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты, ν — кинематическая вязкость, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, κ — коэффициент теплопроводности. а Δ_t — касательный лапласиан (оператор Лапласа—Бельтрами).

Однако в некоторых практически важных случаях возникает необходимость решать задачи акустики во временной постановке. Характерным примером являются задачи распространения импульсных возмущений. Импульсный сигнал имеет широкий частотный спектр, что ведет к необходимости решения стационарной задачи на большом

количестве частот, и, следовательно, к большим вычислительным затратам. Другим примером служат задачи с подвижными границами, для которых просто не существует постановки в частотной области. Таким образом, возникает необходимость вывода временного представления для термовязких граничных условий.

В настоящей работе исследуется задача распространения акустических волн с термовязкими граничными условиями во временной постановке. Показывается, что такие условия представляют собой интегральный граничный оператор со слабой сингулярностью. Дается слабая формулировка задачи, которая с помощью метода конечных элементов сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры. Для задачи распространения звука в тонкой трубе результаты численного моделирования сравниваются с аналитическим решением.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть акустическое давление $p(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет в некоторой конечной области Ω волновому уравнению (см. рис. 1):

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta p(\mathbf{x}, t) = \rho_0 f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

где $f(\mathbf{x}, t)$ — функция источника, Δ — оператор Лапласа, $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$ — координатный вектор.

Разобьем границу области $\partial\Omega$ на две части. Часть границы, на которой термовязкие эффекты пренебрежимо малы, обозначим как $\partial\Omega_n$. На ней выполняется граничное условие Неймана:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_n, \quad (3)$$

где \mathbf{n} — вектор внутренней нормали.

Часть границы, на которой термовязкие эффекты значительны, обозначим как $\partial\Omega_v$. Введем

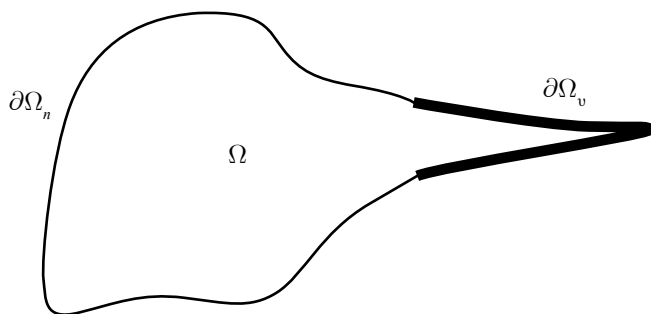


Рис. 1. Примерный вид области Ω .

прямое и обратное преобразование Фурье для произвольной функции $f(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t) \exp(-i\omega t) dt, \\ f(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) \exp(i\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Получение временного представления термовязких граничных условий путем формального выполнения обратного преобразования Фурье (4) от выражения (1) сопряжено с определенными трудностями, так как частота входит в граничное условие в дробной степени (первое слагаемое пропорционально $\omega^{-1/2}$, а второе — $\omega^{3/2}$). В результате во временной постановке термовязких граничных условий появляются дробные производные (см. приложение А):

$$\begin{aligned} \sqrt{v_0} {}^C D_t^{-1/2} \Delta_\tau p(\mathbf{x}, t) + \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 c_p}} {}^C D_t^{3/2} p(\mathbf{x}, t) + \\ + \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_v. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введено обозначение дробной производной в смысле Капуто:

$${}_a^C D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \int_a^t \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} \frac{1}{(t - \tau)^{\beta+1-n}} d\tau,$$

где n — ближайшая к β целая степень, такая что $n > \beta$.

Задачу необходимо дополнить начальными условиями:

$$p_0 = p(\mathbf{x}, 0), \quad p'_0 = \frac{dp}{dt}(\mathbf{x}, 0).$$

Отметим, что условие (5), учитывающее термовязкие потери, в настоящей работе используется впервые.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Пусть имеется некоторое пространство гладких весовых функций H . Рассмотрим слабую постановку задачи (2) для всех $w \in H$:

$$\frac{1}{c_0^2} \int_\Omega \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} w dV - \int_\Omega \Delta p(\mathbf{x}, t) w dV = \rho_0 \int_\Omega f(\mathbf{x}, t) w dV.$$

Применим первую формулу Грина ко второму члену в левой части

$$\int_\Omega \Delta p(\mathbf{x}, t) w dV = - \int_\Omega \nabla p(\mathbf{x}, t) \nabla w dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} w dS.$$

Пользуясь (5), преобразуем член с нормальной производной:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} w dS &= -\sqrt{v} \int_{\partial\Omega_v} {}^c D_t^{-1/2} \Delta_\tau p(\mathbf{x}, t) w dS - \\ &- \frac{\gamma-1}{c_0^2} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 c_p}} \int_{\partial\Omega_v} {}^c D_t^{3/2} p(\mathbf{x}, t) w dS = \\ &= \sqrt{v} \int_{\partial\Omega_v} {}^c D_t^{-1/2} \nabla_\tau p(\mathbf{x}, t) \nabla_\tau w dS - \\ &- \frac{\gamma-1}{c_0^2} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 c_p}} \int_{\partial\Omega_v} {}^c D_t^{3/2} p(\mathbf{x}, t) w dS. \end{aligned}$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} w dV + \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}, t) \nabla w dV - \\ - \sqrt{v} \int_{\partial\Omega_v} {}^c D_t^{-1/2} \nabla_\tau p(\mathbf{x}, t) \nabla_\tau w dS + \\ + \frac{\gamma-1}{c_0^2} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 c_p}} \int_{\partial\Omega_v} {}^c D_t^{3/2} p(\mathbf{x}, t) w dS = \rho_0 \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) w dV. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой выражение для волнового уравнения в слабой постановке. В соответствии с идеей метода конечных элементов, аппроксимируем давление следующим образом [8]:

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^L p^k(t) N_k(\mathbf{x}),$$

где $p^k(t)$ — значения давления в узлах, $N_k(\mathbf{x})$ — так называемые функции формы, L — число узлов дискретизации. Учитывая граничные условия (3), (5) и используя функции формы в качестве весовых функций w (метод Галеркина), получим конечно-элементную формулировку:

$$\mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p} + \mathbf{V} {}^c D_t^{-1/2} \mathbf{p} + \mathbf{T} {}^c D_t^{3/2} \mathbf{p} + \mathbf{K} \mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N} \nabla \mathbf{N}^T dV, \\ \mathbf{V} &= -\frac{\sqrt{v}}{\rho_0} \int_{\partial\Omega_v} \nabla_\tau \mathbf{N} \nabla_\tau \mathbf{N}^T dS, \\ \mathbf{T} &= \frac{\gamma-1}{\rho_0 c_0^2} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 c_p}} \int_{\partial\Omega_v} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dS, \\ \mathbf{f} &= \int_{\Omega} f \mathbf{N} dV. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{p} — столбец давлений:

$$\mathbf{p} = (p^1 \quad p^2 \quad \dots \quad p^L)^T,$$

верхним индексом T обозначается транспонирование, \mathbf{N} — столбец функций формы:

$$\mathbf{N} = (N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_L)^T,$$

а \mathbf{f} — столбец функций источника. Матрица \mathbf{M} называется матрицей массы, \mathbf{K} — матрицей жесткости, а появление матриц \mathbf{V} , \mathbf{T} обусловлено термическими и вязкими эффектами.

Система (6) является системой интегро-дифференциальных уравнений Вольтерры. Перепишем (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{M}} \frac{d}{dt} \mathbf{y} &= \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{y} + \widehat{\mathbf{V}} \int_0^t G(t-\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau + \\ &+ \widehat{\mathbf{T}} \int_0^t G(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \mathbf{y}(\tau) d\tau + \widehat{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{M}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{V}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$G(t-\tau)$ — ядро интегральных слагаемых:

$$G(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}},$$

а \mathbf{y} — новый столбец неизвестных:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} d\mathbf{p} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВО ВРЕМЕНИ УРАВНЕНИЯ (7)

Как было отмечено выше, (7) представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений. Будем отдельно аппроксимировать дифференциальную и интегральную часть уравнений.

Производная столбца $d\mathbf{y}/dt$ аппроксимируется центральной разностью:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} \approx \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_{n-1}}{2\Delta t},$$

где Δt — шаг дискретизации по времени, а нижние индексы обозначают текущий временной шаг $y_n = y(n\Delta t)$.

Для самого первого шага используется аппроксимация разностью справа:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_1 - y_0}{\Delta t}.$$

Введем следующие квадратурные аппроксимации для интегральных слагаемых в (7) [9]:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} G(t_n - \tau) y(\tau) d\tau &\approx \sum_{j=0}^n b_{nj} y_j, \\ \int_0^{t_n} G(t_n - \tau) \frac{d}{d\tau} y(\tau) d\tau &\approx \frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=1}^n b_{nj} (y_{j+1} - y_{j-1}), \end{aligned} \quad (8)$$

где b_{nj} дается формулой

$$\begin{aligned} b_{nj} &\equiv \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi} \sqrt{t_{n+1} - \tau}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t_{n+1} - t_j} - \sqrt{t_{n+1} - t_{j+1}}). \end{aligned}$$

Заметим, что для того, чтобы оценить значения интегралов в (8) в момент времени t_{n+1} , необходимо знать неизвестные y_n только в предшествующие моменты времени t_0, \dots, t_n . Отметим также, что, несмотря на сингулярность ядра $G(t - \tau)$ при $t = \tau$, квадратурные коэффициенты b_{nj} везде имеют конечные значения.

Таким образом, приходим к следующей неявной конечно-разностной схеме:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (\hat{\mathbf{M}} - b_{nn} \hat{\mathbf{T}})^{-1} (\hat{\mathbf{M}} y_{n-1} + 2\Delta t \hat{\mathbf{K}} y_n + \\ &+ 2\Delta t \hat{\mathbf{V}} \sum_{j=0}^n b_{nj} y_j + \\ &+ \hat{\mathbf{T}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} (y_{j+1} - y_{j-1}) - b_{nn} y_{n-1} \right)). \end{aligned} \quad (9)$$

ВЕРИФИКАЦИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ФОРМУЛИРОВКИ

Рассмотрим задачу распространения монохроматической звуковой волны частоты ω в тонкой полубесконечной трубе с квадратным сечением со стороной a (см. рис. 2).

Звук возбуждается объемными источниками звука, находящимися в основании трубы. Для



Рис. 2. Геометрия модели.

простоты предполагается, что источники находятся в фазе по сечению трубы, возбуждая лишь поршневую моду. Таким образом, эффективно задача является одномерной и может быть легко описана аналитически. На боковых стенках трубы предполагается выполнение термовязких условий (5) во временной постановке или условий (1) в частотной области.

Аналитическое описание

Ввиду простоты условия (1) будем исследовать стационарную задачу. Введем аксиальную координату x вдоль трубы. В таком случае давление подчиняется уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}(x, \omega)}{\partial x^2} + \omega^2 \rho(\omega) \kappa(\omega) \tilde{p}(x, \omega) = 0,$$

где $\rho(\omega)$ — комплексная плотность воздуха с учетом вязких эффектов, а $\kappa(\omega)$ — комплексная сжимаемость воздуха с учетом термических эффектов [10]:

$$\begin{aligned} \rho(\omega) &= \rho_0 \left(1 + \frac{s^2 F(z_v)}{1 - F(z_v)} \right), \\ \kappa(\omega) &= \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left(\gamma - (\gamma - 1) \frac{1 - F(z_T)}{s^2 F(z_T)} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{2J_1(z)}{zJ_0(z)}, \\ z_{v,T} &= i^{3/2} \sqrt{2} \frac{R}{\delta_{v,T}}, R = s^2 \frac{a}{2}, \quad s^2 = \frac{8}{7}, \end{aligned}$$

где $J_0(z)$ и $J_1(z)$ — функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядка. Формулы (10) выполняются при условиях $R > 10^{-5}$ м и $R\gamma^{3/2} < 10^4$ м с^{-3/2} [11]. Первое условие означает, что труба является “широкой” в смысле Вестона [12], т.е. ее радиус больше длины свободного пробега. Второе же условие означает, что труба одновременно является “узкой”, т.е. длина звуковой волны больше длины свободного пробега. Число s^2 является фактором формы для квадратного сечения [13].

Оценим ошибку формул (10). Для этого опишем, из каких соображений она была получена. Здесь повторяются рассуждения из [13]. В случае трубы с круглым сечением формула (10) получается аналитически (для этого надо взять $s^2 = 1$, а в качестве R — радиус сечения). В случае трубы с сечением в форме щели также можно получить аналитическое выражение для комплексных плотностей и сжимаемости. Однако если в формулах (10) взять в качестве фактора формы $s^2 = 2/3$, а в качестве R — полуширину щели, то на высоких частотах будут получаться правильные асимптотические

представления для действительной и мнимой частей комплексной плотности, а на низких — для мнимой части. На средних же частотах ошибка довольно мала. Из этого факта делается вывод, что формулы (10) подходят для описания труб с любым постоянным сечением. В [14] проводится моделирование труб с сечениями различной формы с помощью метода конечных элементов. В частности, получаются асимптотические пределы для действительной и мнимой частей комплексной плотности воздуха. Путем подбора фактора формы s^2 , дающего правильную асимптотику для комплексной плотности на низких частотах, можно хорошо аппроксимировать комплексные плотность и сжимаемость для труб с произвольным постоянным сечением на широком диапазоне частот. В то же время, конечно, формулы (10) все же будут давать небольшую ошибку, особенно на средних частотах.

На основании трубы выполняется следующее граничное условие:

$$\frac{d\tilde{p}}{dx}(0, \omega) = \frac{\rho_0}{a^2} \tilde{u}(\omega),$$

где $\tilde{u}(\omega)$ — Фурье-образ функции источника.

Давления и их производные в двух точках трубы $\tilde{p}(x_1, \omega)$, $d\tilde{p}/dx(x_1, \omega)$ и $\tilde{p}(x_2, \omega)$, $d\tilde{p}/dx(x_2, \omega)$ связаны следующим матричным соотношением:

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}(x_2, \omega) \\ \frac{d\tilde{p}}{dx}(x_2, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k(\omega)(x_2 - x_1)) & -\frac{Z(\omega)}{\rho_0 \omega} \sin(k(\omega)(x_2 - x_1)) \\ \frac{\rho_0 \omega}{Z(\omega)} \sin(k(\omega)(x_2 - x_1)) & \cos(k(\omega)(x_2 - x_1)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}(x_1, \omega) \\ \frac{d\tilde{p}}{dx}(x_1, \omega) \end{pmatrix},$$

где $k(\omega)$ и $Z(\omega)$ — соответственно комплексные волновое число и импеданс:

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\rho(\omega) \kappa(\omega)}, \quad Z(\omega) = \sqrt{\frac{\rho(\omega)}{\kappa(\omega)}}.$$

С учетом граничного условия получается следующее выражение для давления в точке $x = x_0$:

$$\tilde{p}(x_0, \omega) = \frac{1}{i\omega a^2} \tilde{u}(\omega) Z(\omega) \exp(-ik(\omega)x_0). \quad (11)$$

Для получения выражения для давления и производной давления во временной области, применим к (11) обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} p(x_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(x_0, \omega) \exp(i\omega t) d\omega, \\ \frac{dp}{dt}(x_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \tilde{p}(x_0, \omega) \exp(i\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) и свойства линейности преобразования Фурье можно получить, что при отсутствии термовязких эффектов (т.е. при $k(\omega) = \omega/c_0$, $Z(\omega) = \rho_0 c_0$) производная давления по времени $dp/dt(x_0, t)$ будет пропорциональна функции источника $f(t)$, сдвинутой на x_0/c_0 .

Численное моделирование

Будем моделировать трубу длины $L = 120$ см с квадратным сечением со стороной $a = 2$ мм с помощью конечно-элементной формулировки во временной области (6). При таких размерах трубы условие $Rf^{3/2} < 10^4$ м с^{-3/2} будет справедливо на частотах до 44 кГц. В основании трубы находятся точечные источники объемного ускорения, в качестве функции источника используется следующая функция:

$$f(t) = \cos(2\pi f_0(t - t_0)) \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где $c_0 t_0 = 0.4$ м, $c_0 \sigma \approx 0.0858$ м, $f_0 = 2000$ Гц. Данные параметры обеспечивают необходимую локализацию функции источника как во временной, так и в частотной областях.

В момент времени $t = 0$ амплитуда огибающей функции источника составляет только примерно 0.002% от максимальной, поэтому с определенной точностью можно дополнить (6) начальным условием $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$. Следует также обратить внимание, что граничные условия уже учтены в (6) с помощью матриц $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{V}}$, а граничные условия Неймана в конечно-элементной формулировке учитываются автоматически. Следует напомнить, что в данной задаче на боковые стенки накладываются термовязкие граничные условия (5), а на торцы — граничные условия Неймана.

Метод конечных элементов реализуется на тетраэдральных сетках различной плотности. Каждая сетка собирается следующим образом: трубка разбивается на равные параллелепипеды, затем каждый параллелепипед разбивается на пять тетраэдров. Характерные размеры сеток (наименьшие стороны параллелепипедов) составляют 2 мм, 1 мм, 0.666... мм и 0.5 мм, число тетраэдров — соответственно 600, 2400, 5400 и 9600. Функции формы линейные. Плотность среды и скорость звука имеют следующие значения:

$$\rho_0 = 1.2043 \text{ кг/м}^3, \quad c_0 = 343.2 \text{ м/с}.$$

Материальные константы имеют следующие значения:

$$\nu = 1.51 \times 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}, \gamma_a = 1.4, \\ c_p = 1.03 \text{ кДж}/(\text{кг К}), \kappa = 0.025 \text{ Вт}/(\text{м К}).$$

Моделирование проводилось до момента времени, соответствующего распространению импульса на 1.5 м.

Поскольку квадратурные коэффициенты b_{nj} стремятся к нулю при $n \gg j$, для численного счета можно взять не все коэффициенты. Анализ показывает, что для самой грубой сетки достаточно взять последние 4000 квадратурных коэффициентов, что для данной задачи является приблизительно половиной от всех используемых в (9) коэффициентов. Для каждой следующей сетки число коэффициентов подбиралось таким образом, чтобы оно соответствовало тому же промежутку времени, что и для самой грубой сетки.

Анализ сходимости схемы по времени показывает, что, несмотря на тот факт, что использование центральных производных дает ошибку порядка $O((\Delta t)^2)$, использование квадратур [9] приводит к ошибке порядка $O(\Delta t)$, таким образом полученная схема теоретически имеет первый порядок точности. В то же время, как показывает численный счет, при использовании обычных правых производных решение является неустойчивым даже при $\Delta t = 0.01 h_{\min}/c_0$, где h_{\min} — длина наименьшего из ребер в сетке. Поэтому, несмотря на кажущуюся избыточность, было принято решение использовать именно центральные производные для

конечно-разностного представления производных по времени. При использовании центральных производных решение становится устойчивым при $\Delta t = 0.1 h_{\min}/c_0$. Шаг по времени для каждой сетки подбирается в соответствии с этим условием, таким образом, шаг по времени зависит от шага сетки.

Можно также показать, что использование конечно-элементной постановки с линейными функциями формы дает ошибку по пространству порядка $O(h_{\max}^2)$, где h_{\max} — длина наибольшего из ребер в сетке.

На рис. 3 представлена вычисленная с помощью ранее описанной схемы производная давления по времени $dp/dt(x_0, t)$ на расстоянии 50 см от источника и ее сравнение с формулой (12). В качестве значения производной давления берется среднее значение производной по всем узлам сетки, находящимся на сечении трубы в 50 см от источника. Амплитуда импульса нормирована на максимальное значение при отсутствии термовязких эффектов.

Отметим, что длина трубы достаточно большая, чтобы при наложении временного окна на сигнал все его отражения отфильтровались. Таким образом, моделирование распространения звука в такой трубе будет эквивалентно моделированию в полубесконечной трубе.

Из представленных графиков можно сделать два вывода: во-первых, для тонких труб термовязкие эффекты будут значительными уже на расстояниях порядка 0.5–1 м; во-вторых, результаты численного моделирования достаточно хорошо согласуются с результатами аналитических расчетов (12).

Была также исследована сходимость полученной схемы по норме $L_2([0, T])$. Вычислялась относительная ошибка численного решения согласно формуле

$$\varepsilon = \frac{\left\| \left(\frac{dp}{dt} \right)_{\text{числ}} - \left(\frac{dp}{dt} \right)_{\text{аналит}} \right\|_{L_2}}{\left\| \left(\frac{dp}{dt} \right)_{\text{аналит}} \right\|_{L_2}} \equiv \\ \equiv \frac{\sqrt{\int_0^T \left(\left(\frac{dp}{dt} \right)_{\text{числ}} - \left(\frac{dp}{dt} \right)_{\text{аналит}} \right)^2 dt}}{\sqrt{\int_0^T \left(\left(\frac{dp}{dt} \right)_{\text{аналит}} \right)^2 dt}},$$

где под аналитическим решением понимается формула (12).

Согласно рис. 4, сходимость метода порядка $O((\Delta t)^{3/2})$, а относительная ошибка для сетки с наименьшим шагом составляет примерно 2.5%.

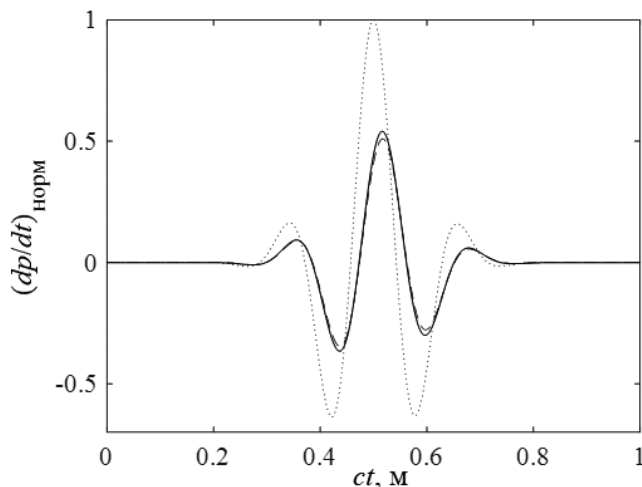


Рис. 3. Сравнение численного моделирования с аналитическим решением. Пунктирной линией обозначен импульс на расстоянии 50 см от излучающей поверхности без учета термовязких эффектов, прерывистой линией — с учетом термовязких эффектов, сплошной линией — аналитическое решение (12).

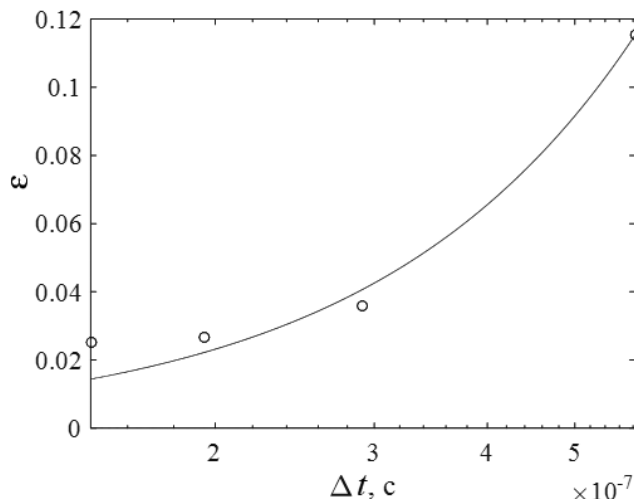


Рис. 4. Зависимость разницы численного и аналитического решения от шага сетки.

Однако на более плотных сетках порядок сходимости заметно ухудшается. Это можно объяснить тем, что численная ошибка на плотных сетках приближается к ошибке самой теоретической формулы (12), что обсуждалось ранее. Косвенно это подтверждается исследованиями сеток на стационарных задачах, где ошибки решения на сетках разной плотности практически не отличаются.

Наличие квадратурных формул в (9) заметно влияет на вычислительную сложность схемы. Численные эксперименты показали, что времена решения с учетом термовязких условий и без них отличаются на два порядка, но отношение этих времен уменьшается при уплотнении сетки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача распространения звуковых волн во времени с учетом вязких и термических эффектов, учет которых производится с помощью нелокального интегрального граничного условия (4). Выводится конечно-элементная постановка, в которой задача сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры. Для решения полученной системы строится формальное обобщение метода Рунге-Кутты на случай интегро-дифференциальных уравнений. Адекватность численного моделирования демонстрируется на задаче распространения звука в тонкой трубе путем сравнения с аналитическим решением.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-29-06048. Работа А.И. Королькова была также поддержана Королевским обществом посредством исследовательской стипендии Дороти Ходжкин д-ра Кисиль.

ПРИЛОЖЕНИЕ А ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Преобразование Фурье производной функции n -го (целого) порядка дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(i\omega)^n \tilde{f}(\omega)] \exp(i\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Определим свертку двух действительных функций $f(t)$ и $g(t)$ следующим образом:

$$(f \times g)(t) \equiv \int_{-\infty}^t f(\tau) g(\tau - t) d\tau.$$

Пользуясь теоремой Фубини, можно найти преобразование Фурье свертки (теорема о свертке):

$$(f \times g)(\omega) = \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega). \quad (14)$$

Поэтому производную свертки можно выразить следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(f \times g) = \frac{df}{dt} \times g = f \times \frac{dg}{dt}. \quad (15)$$

Одностороннее преобразование Фурье степенной функции t^α дается следующим выражением:

$$\int_0^\infty t^{-\alpha} \exp(-i\omega t) dt = (i\omega)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha). \quad (16)$$

Здесь Γ — гамма-функция. Соотношение справедливо для $\alpha < 1$.

С помощью формулы (13) дробная производная $f(t)$ может быть введена следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^\beta \tilde{f}(\omega) \exp(i\omega t) dt \equiv \\ &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^n \tilde{f}(\omega) (i\omega)^{\beta-n} \exp(i\omega t) dt, \end{aligned} \quad (17)$$

где n — ближайшая к β целая степень, такая что $n > \beta$. Используем (14) и (15), чтобы получить временное представление дробной производной. Выражение (17) можно представить в виде свертки классической производной $f(t)$ и степенного ядра (16)

$$\frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{1}{t^{\beta+1-n}}.$$

Из (15) следует два временных определения дробной производной, различающиеся порядком дифференцирования и интегрирования:

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \left(f \times \frac{1}{t^{\beta+1-n}} \right)$$

и

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f \right) \times \frac{1}{t^{\beta+1-n}}.$$

Первое соответствует дробной производной в смысле Римана-Лиувилля [15]:

$${}_a D_t^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+1-n}} d\tau,$$

а второе – дробной производной в смысле Капуто:

$${}_a^C D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^t \frac{d^n f}{d\tau^n} \frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1-n}} d\tau.$$

В настоящей работе производная понимается в смысле Капуто, ввиду простоты численной реализации. Как следует из определений, дробная производная является нелокальным оператором, для которого необходимо знать все предыдущие значения дифференцируемой функции. Заметим, что если порядок β меньше нуля, то мы имеем дело с дробным интегралом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pierce A.D.* Acoustics, An Introduction to Its Physical Principles and Applications. Acoustical Society of America, 2019. Разд. 10.4.
2. *Tijedeman H.* On the propagation of sound waves in cylindrical tubes // *J. Sound Vibration*. 1975. V. 39. № 1. P. 1–33.
3. *Richards W.B.* Propagation of Sound Waves in Tubes of Noncircular Cross Section. NASA Technical Paper 2601, NASA Lewis Research Center, Cleveland, Ohio, 1986.
4. *Каспаряниц А.А.* К вопросу о распространении звуковых волн в “газах и жидкостях Ван-дер-Ваальса” // *Акуст. журн.* 1958. Т. 4. № 4. С. 325–332.
5. *Rienstra S.W., Hirschberg A.* An Introduction in Acoustics. Extended and revised version of report IWDE92–06. Eindhoven University of Technology, 2016. Разд. 4.5.
6. *Searby G., Habibullah M., Nicole A., Laroche E.* Prediction of the Efficiency of Acoustic Damping Cavities // *J. Propulsion and Power*. 2008. V. 24. № 3. P. 516–523.
7. *Berggren M., Bernland A., Noreland D.* Acoustic boundary layers as boundary conditions // *J. Computational Physics*. 2018. V. 371. P. 633–650.
8. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
9. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Studies for Applied Mathematics. 1985. Разд. 11.4.
10. *Zwikker C., Kosten C.W.* Sound Absorbing Materials. Elsevier Pub. Co., 1949.
11. *Stinson M.R.* The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 89. № 2. P. 550–558.
12. *Weston D.E.* The Theory of Propagation of Plane Sound Waves in Tubes // *Proc. of the Physical Society. Section B*. 1953. V. 66. № 8. P. 695–709.
13. *Allard J.F., Atalla N.* Propagation of Sound in Porous Media. John Wiley & Sons, Ltd, 2009. Разд. 4.4 и 4.7.
14. *Craggs A., Hildebrandt J.G.* Effective densities and resistivities for acoustic propagation in narrow tubes // *J. Sound Vibration*. 1984. V. 92. № 3. P. 321–331.
15. *Holm S.* Waves with Power-Law Attenuation. Acoustical Society of America, 2019. Разд. 1.4.

ACCOUNTING FOR VISCOUS AND THERMAL EFFECTS IN TIME IN COMPUTATIONAL PROBLEMS OF ACOUSTICS

A. I. Korolkov^a, A. Yu. Laptev^{b,*}, A. V. Shanin^b

^aUniversity of Manchester, Oxford Road, Manchester, M13 9PL UK

^bLomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, GSP-1, 119991 Russia

*e-mail: laptev97@bk.ru

The problem of acoustic wave propagation with thermoviscous boundary conditions is studied. For thermoviscous boundary conditions, a time-dependent formulation is presented based on the concept of a fractional derivative. A weak formulation of the problem is given, which is reduced to a system of Volterra-type integro-differential equations using the finite element method. An implicit finite-difference scheme is constructed for the numerical solution of this system. To verify it, the problem of sound propagation in a thin pipe is modeled, the results of numerical modeling are compared with the analytical solution.

Keywords: boundary layer, viscosity, thermal diffusivity, FEM, numerical methods

АКУСТИКА ЖИВЫХ СИСТЕМ.
БИОМЕДИЦИНСКАЯ АКУСТИКА

УДК 599.537:534.28

МОРФОЛОГИЯ И НЕКОТОРЫЕ СЛУХОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ
НАРУЖНЫХ УШЕЙ ДЕЛЬФИНА АФАЛИНА
(*TURSIOPS TRUNCATUS*) И ЧЕЛОВЕКА

© 2024 г. В. А. Рябов^{а,*}

^аКарадагская научная станция им. Т.И. Вяземского — природный заповедник РАН,
филиал ФИЦ “Институт биологии южных морей имени А.О. Ковалевского РАН”,
ул. Науки 24, п. Курортное, Феодосия, 298188 Россия

*e-mail: ryabofff@inbox.ru

Поступила в редакцию 21.02.2024 г.

После доработки 09.09.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Установлено, что роль наружных слуховых проходов у дельфина играют соответствующие подбородочные каналы, мандибулярные каналы и мягкие ткани, заполняющие каналы. Показано, что слуховые проходы дельфина максимально вынесены на острие рострума навстречу отраженным от подводных объектов эхо и звукам, в отличие от слуховых проходов человека, расположенных по бокам головы. У дельфина механизмы формирования уникальных признаков локализации эхо и звука в пространстве обусловлены асимметрией морфологических структур левого и правого наружного уха, их волновыми размерами, а также количеством слуховых проходов, их положением и архитектурой. Однако у человека эти механизмы обусловлены симметрией расположения слуховых проходов и ушных раковин на левой и правой половине головы и расстоянием между ними. У дельфина наружные уши адаптированы для утилизации деструктивной интерференции когерентных эхо от мешающих объектов с целью повышения отношения полезное эхо/мешающее отражение. В целом слух дельфина как часть его эхолокационной системы, и слух человека, обуславливают принципиальные различия морфологии и слуховых механизмов уже на уровне их наружных ушей.

Ключевые слова: дельфин, человек, наружное ухо, слуховой проход, морфология, механизмы, подбородочный канал, мандибулярный канал, асимметрия

DOI: 10.31857/S0320791924060123, **EDN:** JTGVIJX

ВВЕДЕНИЕ

Odontoceti, и в частности, дельфины — вторично водные животные, их адаптация к водной среде обитания привела к значительным модификациям структур наружного и среднего уха [1]. Они лишились ушной раковины, “слуховой проход” (расположен каудальнее глаза) стал узок и скорее всего не функционален, а барабанная перепонка представляет собой коническое упругое образование и не имеет непосредственной связи с рукояткой молоточка [1].

Отсутствие у зубатых китов характерных для всех сухопутных животных ушных раковин обеспечило им совершенную обтекаемую форму головы с точки зрения гидродинамики. Вместе с тем эта адаптация создала ряд проблем исследователям, поскольку приемники звука периферического

отдела слуха дельфина находятся внутри его нижней челюсти и не ясно, где они локализованы, по какому пути звук проходит из воды на левое и правое среднее ухо, какие морфологические структуры играют роль наружных слуховых проходов (СП), и непонятны их слуховые механизмы.

Тем не менее, у исследователей сложилось единое мнение о том, что звук из жирового тяжа нижней челюсти проходит на тимпанопериотический комплекс (ТП), т.е. на среднее и внутреннее ухо животных [1, 2].

Чтобы найти путь звукопроводения из воды в жировой тяж, были исследованы различные области головы и нижней челюсти дельфинов, наиболее чувствительные к звукам, предъявляемым контактно через челюстелефоны [3]. Рассмотрены возможности проведения звука через предполагаемые

“слуховые окна” [2, 4], через мягкие ткани между левой и правой половиной нижней челюсти [5], а также через эволюционно новые СП, роль которых, по-видимому, играют левый и правый ряд подбородочных каналов (ПК), мандибулярные каналы (МК) и мягкие ткани (МТ), заполняющие каналы [6, 7]. Однако области наилучшей чувствительности поверхности головы и нижней челюсти дельфинов к звукам, предъявляемым контактно, также как и области “слуховых окон”, в работах разных авторов различаются. В целом, до настоящего времени нет единого мнения о путях и механизмах звукопроводения на их среднее ухо [8].

Однако тот факт, что зубатые киты лишились наружных ушей (ушных раковин) во время адаптации к водной среде обитания миллионы лет назад, еще не означает, что у них за последующие миллионы лет не развились морфологические структуры, играющие роль согласованных с водной средой обитания эволюционно новых наружных ушей. Так, направленность слуха (около 10°) во фронтальной и медианной плоскостях [9] и высокая точность локализации звука, практически одинаковая во фронтальной и медианной плоскости дельфина 0.9° и 0.7° , соответственно [10], указывают на наличие у них морфологических структур, играющих роль приспособленных к водной среде эволюционно новых наружных ушей. Имеющиеся к настоящему времени данные позволяют полагать, что эту роль играет левый и правый ряд ПК, МК и морфологические структуры роострума и черепа дельфина [6, 7, 11, 12].

Цель настоящей работы — сравнительный анализ морфологии эволюционно новых наружных ушей и некоторых слуховых механизмов дельфина афафина (*Tursiops truncatus*) и человека.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Методы исследований

Экспериментальные исследования с дельфинами проводились в закрытых бетонных бассейнах размерами $27.5 \times 9.5 \times 4.5$ м [7] и $20 \times 13 \times 3$ м [22] ФГБУН Карадагская научная станция им. Т.И. Вяземского — природный заповедник РАН, филиал ФГБУН ФИЦ “Институт биологии южных морей имени А.О. Ковалевского РАН”. В качестве подопытных животных использовались взрослые черноморские дельфины вида афафина (*Tursiops truncatus*). Животные имели нормальный слух, находились в бассейне более 25–30 лет.

Эксперименты с дельфинами выполнялись с применением методики инструментальных условных рефлексов с пищевым подкреплением и использованием разделительной сети [22] и парадигмы go/no-go [7]. Эксперименты [7] и [22]

проводились с интервалом около 30 лет в разных бассейнах с разными дельфинами.

Для изучения влияния акустического экранирования нижней челюсти дельфина в области ПК на чувствительность его слуха [7], дельфин был обучен по сигналу тренера подходить к мосткам, где тренер надевал (или не надевал) ему акустический экран на область подбородочных каналов. После этого, дельфин по сигналу тренера подходил к стартовому манипулятору, подвешенному на глубине 1 м, и стоял, касаясь его кончиком роострума. Через несколько секунд исследователь включал стимул (излучатель которого находился на расстоянии 2 м от стартового манипулятора), который дельфин обнаруживал (или не обнаруживал). В каждом испытании предъявление положительного или отрицательного стимулов (предъявление или не предъявление стимула) определялось случайным порядком.

Акустически непрозрачный экран был изготовлен из вспененного неопрена с замкнутыми порами по форме роострума дельфина и плотно надевался на него, длина экрана около 15 см, толщина 0.6 см. Учитывая широкий диапазон использованных в эксперименте частот, длина волны звуковых стимулов изменяется от 1.5 до 20 см, поэтому акустический экран закрывал и верхнюю и нижнюю челюсть, что обеспечивало наилучшую звуковую тень в области ПК.

Материалом при изучении морфологии каналов нижней челюсти [6, 11, 13, 14] служили кости черепа и нижней челюсти четырех взрослых дельфинов вида афафина (*Tursiops truncatus*), которые мы нашли в разное время на берегу моря. Для изучения морфологии и выполнения необходимых измерений одна из нижних челюстей была распиlena в области ПК. Далее в тексте будем обозначать их, если это необходимо, с номером ПК n , где n — номер канала, считая от кончика роострума; $n = 1, 2, 3, 4$. Измерение поперечных размеров каналов проводилось в плоскости максимальной ширины канала и во взаимно перпендикулярной плоскости.

Учитывая результаты измерений размеров каналов и архитектуры ПК и МК [6, 11, 13, 14], физическое моделирование механизмов приема эхо (звука) и его проведения по каналам нижней челюсти было рассмотрено с использованием модели групповой антенны бегущей волны и акустического катеноидального рупора.

Для изучения роли асимметрии левого и правого наружного уха дельфина в пространственной локализации источников эхо и звука [12] было измерено и проанализировано изменение времени пробега фронта плоской звуковой волны через каждый ПК и степень их экранирования с момента падения фронта звука на ближайший к нему ПК в зависимости от локализации звука в пространстве. Для этого измерены пробегаемые звуком пути

от фронта плоской звуковой волны через каждый ПК до соответствующего ТП и определена степень экранирования ПК рострумом и черепом в зависимости от расположения звука в пространстве. Необходимые измерения выполнены в программе Photoshop CS3 с использованием инструмента “линейка”, а также фотографий рострума и черепа дельфина, сделанных с расстояния 5–10 м (для уменьшения перспективных искажений). При этом точность измерений составляет сотые доли см. Учитывая, что минимальная длина волны высшей частоты звуков дельфина (~ 160 кГц) составляет около 0.94 см, и минимальная рассчитанная интерауральная разница временных задержек (ИРВЗ) слуха дельфина около 1.3 мкс [21], точность измерений путей пробега звука является достаточной. Время пробега звука через каждый ПК рассчитано с учетом соответствующего измеренного пути и скорости звука в воде и тканях дельфина, равной 1500 м/с [15].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Наружные слуховые проходы дельфина

В работах [6, 11–14] было показано, что ПК, МК и соответствующие морфологические структуры рострума и черепа дельфина афалина (*Tursiops truncatus*) играют роль СП их наружных ушей. Рассмотрим и обсудим основные результаты этих работ.

Изучение морфологии каналов нижней челюсти, их архитектуры, размеров и предполагаемых функций, а также физическое моделирование слуховых механизмов в свете известных концепций акустики и групповых антенн [6, 11, 13, 14] свидетельствует о том, что левый и правый ряд ПК нижней челюсти дельфина афалина (*Tursiops truncatus*) (которые пронизывают нижнюю челюсть и МК в области симфиза, рис. 1–3) играют роль решеток элементарных приемников антенн бегущей волны (АБВ). Этот тип антенн относится к разновидности групповых антенн. Максимум чувствительности АБВ совпадает с базой ее приемников (т.е. с направлением, вдоль которого расположены элементарные приемники — ПК). В связи с этим становится очевидным, что каналы левой и правой половины нижней челюсти дельфина создавались на протяжении эволюции для устройства левой и правой антенны, соответственно. При этом каждый ПК и соответствующий МК, играя роль акустически узкого волновода и акустического рупора, обеспечивают режим “бегущей волны” звука в левой и правой АБВ, т.е. в каналах нижней челюсти во всем диапазоне частот слуха дельфина (исходя из свойств рупора) [6, 11, 13, 14]. Благодаря этому перенос энергии звука из воды в ПК, МК и МТ, заполняющие каналы нижней челюсти (сосудисто-нервный пучок и жировой тяж [15], рис. 1), и далее на латеральную стенку ТП

(среднее и внутреннее ухо) обеспечивается во всей области частот слуха и эхолокации дельфина (0.1–160 кГц) без искажений [6, 7, 13].

Рассмотренные выше результаты определяют организацию левого и правого широкополосного наружного уха дельфина в свете известных концепций акустики и групповых антенн как комплекс АБВ, расположенный оптимально в горле акустического катеноидального рупора [6, 11, 13, 14]. При таком сочетании АБВ осуществляет прием звука, преобразуя падающую на нее звуковую волну в бегущую волну по каналам нижней челюсти, независимо от угла ее падения, и вместе с костями рострума и черепа участвует в формировании характеристики направленности (ХН) наружного уха дельфина. Вместе с тем ПК, МК и МТ, играя роль акустических рупоров, обеспечивают оптимальное согласование акустических сопротивлений ТП с внешней средой [6, 11, 13, 14].

Следует отметить, что рассмотренные результаты свидетельствуют о соответствии морфологии наружных ушей дельфина и их слуховых механизмов известным концепциям акустики и групповых антенн. Вместе с тем в работах [7, 13] было получено экспериментальное подтверждение некоторых аспектов этих предположений. Было показано, что акустическое экранирование рострума дельфина в области ПК повышает слуховые пороги обнаружения акустических импульсов с частотами 8, 16, 30, 60 и 100 кГц, на 30–50 дБ [7, 13]. Во всей исследованной области частот 6–160 кГц (с учетом широкополосности стимулов) экранирование ПК существенно ухудшает чувствительность слуха дельфина, следовательно, ПК принимают акустические сигналы и играют роль основного пути проведения их из воды в жировой тяж МК и далее на среднее ухо [7, 13].

Более того, результаты рассмотренных работ [6, 7, 11, 13] согласуются с результатами одной из недавних работ [12], впервые для *Odontoceti* свидетельствующей о наличии у зубатых китов морфологических структур, функционально выполняющих роль приспособленных к водной среде эволюционно новых наружных ушей, в качестве которых выступают левый и правый ряд ПК, МК и морфологические структуры их рострума и черепа. При этом левый и правый ряд ПК, соответствующие МК и МТ, заполняющие каналы, играют роль наружных СП и передают звук на соответствующее среднее ухо. В этой работе измерены пути пробега звука по ПК, МК и МТ нижней челюсти дельфина афалина (*Tursiops truncatus*) на ТП, рассчитаны относительные временные задержки звука между ПК и степень их акустического экранирования рострумом и черепом в зависимости от локализации звука в пространстве. Установлено, что левое и правое наружное ухо формируют уникальные временные и спектральные признаки пространственной

локализации звука с максимальной точностью, реализованной ростралью. Механизмы локализации основаны на асимметрии, включающей в себя рострально-каудальную и лево-правую взаимно-комплементарную асимметрию архитектуры ПК, дорсально-вентральную асимметрию размеров рострума, а также рострально-вентральную асимметрию положения левого и правого ряда ПК на роструме и рострально-каудальную асимметрию размеров рострума и черепа. Показано, что наружные уши дельфина интегрированы в обтекаемую форму рострума и головы дельфина в отличие от ограниченных ушными раковинами наружных ушей сухопутных животных и человека, что уменьшает сопротивление его движению со стороны воды и, главное, не ухудшает отношение уровней сигнал/шум обтекания в его слухе с ростом скорости движения.

Таким образом, результаты работ [6, 7, 11, 12, 13, 16] свидетельствуют о том, что ПК, МК и МТ играют у дельфина роль наружных слуховых проходов их эволюционно новых наружных ушей. Вместе с тем эти работы выполнены с использованием разных полидисциплинарных подходов, результаты работ хорошо согласуются между собой, что повышает их достоверность и дает основание использовать рассмотренные в работах концепции в дальнейших исследованиях.

Для изучения особенностей морфологии и некоторых механизмов наружных ушей дельфинов, которые не были рассмотрены в работах [6, 7, 11, 12, 13, 16], уточним номенклатуру каналов нижней челюсти дельфина в контексте их функции в слухе дельфинов и с учетом рассмотренных выше концепций. Будем рассматривать ПК, МК и МТ и как морфологические структуры нижней челюсти, и как структуры сложных наружных слуховых проходов эволюционно новых наружных ушей дельфина, состоящие из соответствующих ПК, МК и МТ. При этом будем обозначать их в соответствии с номером каждого ПК, т.е. СП1-СП4 на правой стороне нижней челюсти и СП1-СП3 на ее левой стороне, соответственно, рис. 1–3.

Вместе с тем учтем, что каждый ПК проводит в соответствующий МК и МТ часть энергии актуального звука или парциальный звук с определенным уровнем звукового давления (в соответствии с весовым коэффициентом, рассмотрим ниже).

В то же время кости рострума и черепа дельфина афалина (*Tursiops truncatus*) играют роль акустически не прозрачного экрана и эквивалентного фильтра нижних частот для огибающего их звука, параметры которых зависят от локализации звука в пространстве относительно ПК [12].

Размеры, форма и количество СП

У человека и у дельфина два наружных уха — левое и правое. Однако у человека в каждом ухе только по одному наружному слуховому проходу, каждый из которых играет роль волновода и передает падающий на него звук на барабанную перепонку среднего уха [17]. Длина слуховых проходов (в среднем 26 мм) существенно больше их среднего диаметра, $D \approx 6.3$ мм [17]. Поперечные размеры СП у человека соответствуют размерам акустически узкого волновода во всей области частот слуха, т.к. $D \leq 0.58\lambda$ [18, 19], где $\lambda \approx 17$ мм — минимальная длина волны звука частотой 20 кГц и D — поперечные размеры волновода или горла акустического рупора D_r .

В отличие от человека, у дельфина (*Tursiops truncatus*) в левом ухе три СП, СП1-СП3, а в правом — четыре СП1-СП4, рис. 1–3. Максимальные значения поперечных размеров СП дельфина в области ПК (1.6–3.2 мм) и в области МК (в ростральной области, горло рупора — около 4 мм), что несколько меньше, чем у человека. В то же время их поперечные размеры также соответствуют размерам акустически узкого волновода во всей области частот слуха дельфина (0.1–160 кГц) [6, 7, 11, 12, 13, 16]. Следовательно, механизмы распространения звука по слуховым ходам дельфина, и человека подчиняются законам распространения звука в волноводах и рупорах.

Интересно, что в 5 раз более высокая, чем в воздухе, скорость звука в воде приводит к пропорциональному увеличению длины волны звуков одной и той же частоты в воде по сравнению с воздухом, но максимальные частоты звуков у дельфина могут достигать 200 кГц, поэтому минимальные длины волн звука в слухе дельфина и человека отличаются только приблизительно в два раза. Учитывая, что поперечные размеры СП определяются минимальной длиной волны звука, у дельфина афалина (*Tursiops truncatus*) они приблизительно в два раза меньше чем у человека — 3.2 и 6.3 мм, соответственно. При этом суммарная площадь сечений СП на левой (~ 17 мм²) и правой (~ 18 мм²) половине нижней челюсти дельфина в 1.7 раз меньше площади соответствующих СП человека (около 31 мм²) и характеризует апертуру левого и правого эволюционно нового наружного уха и соответствующих АБВ дельфина [6].

Отметим, что левый и правый ряд СП дельфина (*Tursiops truncatus*) играют роль решеток элементарных приемников групповых антенн “бегущей волны”, адаптированных для приема плоской звуковой волны, поэтому сферическую волну они не будут принимать корректно. В отличие от этого у человека наружные слуховые проходы играют роль “точечных” приемников звука, т.к. их диаметр около 6.3 мм [17], в 2.7 раз меньше длины волны

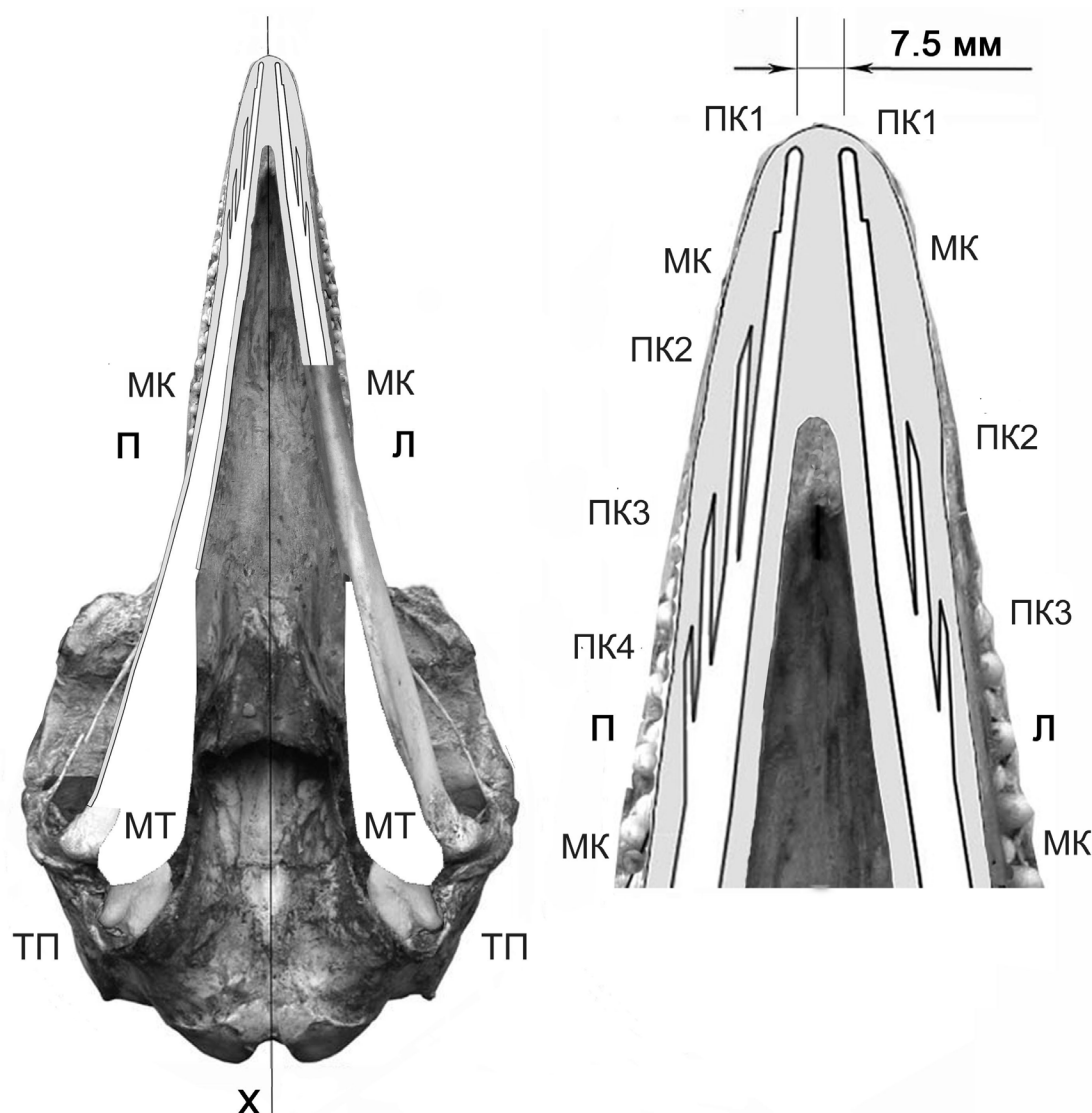


Рис. 1. Череп и нижняя челюсть дельфина афалина (*Tursiops truncatus*), вентральный вид. Слева расположение ПК и МК левого (Л) и правого (П) наружного уха (показан разрез правой половины нижней челюсти от симфиза до сустава, и разрез ее левой половины в области симфиза). Справа разрез в области симфиза, ПК и МК, увеличено. МТ — мягкие ткани и жировое тело, заполняющее ПК и МК, — прикрепляются к латеральной стенке ТП. ТП — левый и правый тимпанопериотический комплекс (среднее и внутреннее ухо). X — продольная ось.

звуков верхней границы области частот слуха 20 кГц, поэтому они могут одинаково хорошо принимать и плоские и сферические звуковые волны.

Расположение СП левого и правого наружного уха

При взгляде на наружные уши дельфина (*Tursiops truncatus*) бросается в глаза, что в отличие от СП человека, расположенных симметрично по бокам головы, имеющие сферическую форму, левый и правый ряд СП дельфина максимально вынесены навстречу отраженным от подводных объектов эхо и звукам в направлении максимума точности их локализации (рис. 1–3). Более того,

левый и правый ряд СП имеет билатеральную и рострально-каудальную асимметрию и размещены на острове рострума дельфинов рострально-вентрально, существенно ниже продольной оси рострума, О, т.е. асимметрично [12]. Вместе с тем ярко выраженную рострально-каудальную асимметрию имеют и череп, и нижняя челюсть дельфинов [12].

Расстояние между лСП1 и пСП1 (где л — левый и п — правый) у имеющихся у нас четырех черепов взрослых дельфинов вида афалина (*Tursiops truncatus*) составило около 0.75 см (рис. 1), что близко к $\frac{1}{2} \lambda$, где λ — длина волны максимума энергии зондирующих “щелчков” дельфина на частоте 100–110 кГц — около 1.3–1.5 см [20] и характеризует базу их слуха [6].

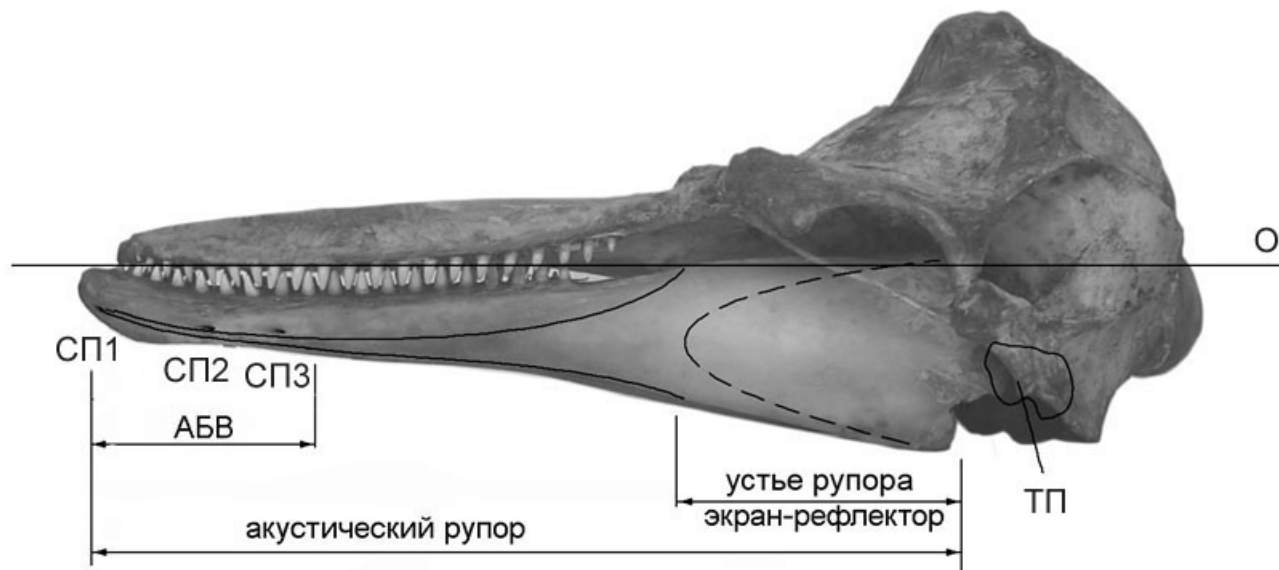


Рис. 2. Череп дельфина, латеральный вид, левая сторона. АБВ — антенна бегущей волны (ряд ПК1–ПК3, рис. 1.) СП1–СП3 — наружные слуховые проходы. Профиль СП1 — сплошная линия (профиль ПК1 и МК). Устье акустического рупора — каудальный раскрыв медиальной стенки кости нижней челюсти (штриховая линия). Акустически непрозрачный экран-рефлектор — наружная заднелатеральная стенка кости нижней челюсти. ТП — тимпанопериотический комплекс. О — продольная ось головы животного.

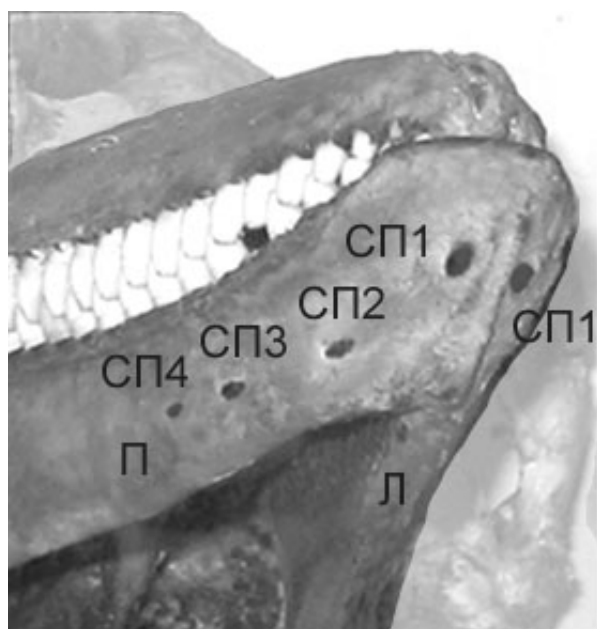


Рис. 3. Нижняя и верхняя челюсть (рострум) дельфина афалина (*Tursiops truncatus*), рострально-вентрально-латеральный вид. Показано расположение видимых для данного ракурса СП вдоль правой (П) и левой (Л) половины нижней челюсти. Области черепа, удаленные более чем на 27 см от кончика роострума, показаны менее контрастно.

Однако у человека расстояние между левым и правым СП существенно больше, около 21 см [28], что близко к длине волны звука с частотой 1.5 кГц, оно определяет границу смены признаков локализации в горизонтальной плоскости с ИРВЗ на интерауральные

различия интенсивности (ИРИ) (рассмотрим ниже) и указывает на принципиальные различия слуховых механизмов дельфина и человека.

Расстояние между левым и правым рядом остальных СП дельфина, расположенных каудальнее, плавно возрастает до 4.7 см у ЛСП3–ПСП4.

С какой же целью эволюция слуха зубатых китов пошла в направлении кардинального уменьшения базы их слуха, увеличения числа СП и асимметрирования их архитектуры по сравнению со слухом наземных животных и человека? Ответ на эти вопросы в некоторой степени дают рассмотренные ниже особенности слуха дельфина.

Так, морфология наружных ушей дельфина (*Tursiops truncatus*) и расположение их СП [6, 12, 13] согласуется с известным раздвижением черепа зубатых китов на протяжении миллионов лет эволюции (telescoping) [36], которое, по-видимому, преследовало цель создания и размещения эволюционно новых наружных ушей [12] зубатых китов и дельфинов (рис. 1–3). Можно полагать, что они образовались в результате адаптации предков дельфина к новым условиям среды обитания, как эволюционная адаптация их слуха к воде [1, 2] и как функциональная адаптация слуха, необходимая для выполнения новых более сложных функций их эхолокационной системы: слышать эхо [6, 7, 11–14], активно и пассивно локализовать эхо и звуки в пространстве [10, 12, 33], координировать и управлять эхолокационным процессом [37], улучшать направленность [9] и помехозащищенность слуха [12, 16], и др., наряду с приемом обычных звуков [20].

Рассчитанная относительная временная задержка звука между лСП1 и пСП1 при изменении положения источника звука во фронтальной и медианной плоскости на 0.9° и 0.7° , что соответствует максимальной точности локализации звука дельфином во фронтальной и медианной плоскостях в ростральном направлении [10, 12], составила менее чем 0.07 мкс во фронтальной плоскости, а в медианной она практически отсутствует. При больших изменениях положения источника звука во фронтальной плоскости эта задержка возрастает. Например, если ширина ХН слуха афалин в горизонтальной плоскости составляет 59° , 32° и 13.7° на частотах 30, 60 и 120 кГц, соответственно [9], то при изменении локализации звука в сторону от рострального направления на половину ширины этих ХН рассчитанные нами значения временных задержек между лСП1 и пСП1 составили менее чем 2.5, 1.4 и 0.6 мкс, соответственно. При латеральном источнике звука слева или справа задержки максимальны и не превышают 5 мкс. Следовательно, во фронтальной плоскости дельфина рассчитанные выше временные задержки звука между первыми СП существенно ниже известных, измеренных у дельфина с помощью “челюстефонов” порогов ИРВЗ в области “*pan bone*” нижней челюсти в горизонтальной плоскости, составляющих около 7 мкс для “щелчков” с максимумом энергии на 30 кГц и 17–18 мкс для “щелчков” с максимумом энергии на 60–90 кГц [21]. В то же время при перемещении звука в медианной плоскости относительные задержки звука между лСП1 и пСП1 практически отсутствуют.

Для СП, расположенных каудальнее, например, для лСП3 и пСП4, где расстояние между ними больше [11], около 4.7 см, рассчитанные относительные временные задержки звука, определяемые только расстоянием между ними в этом случае, составили около 0.48 мкс при смещении звука на 0.9° и около 31 мкс при латеральном источнике звука слева или справа, соответственно.

Вместе с тем, рострально-каудальная расстановка СП (рис. 1–3) на нижней челюсти на дистанции около 9 см, что более чем в 9 раз больше длины волны максимальной частоты слуха афалины около 160 кГц, $\lambda \approx 0.99$ см, имеет значение для формирования временных признаков локализации звука (т.е. относительных временных задержек парциальных звуков, зависящих от локализации актуального звука) [12].

Однако у дельфина временные признаки пространственной локализации звука состоят из целой суммы задержек [12]. Они определяются расстояниями между левым и правым рядом соответствующих СП, а также рострально-каудальными расстояниями между ними, разностью путей распространения фронта плоской звуковой волны до этих СП, временем распространения парциальных звуков по соответствующим ПК, играющим при этом роль

линий временной задержки звука и задержками звука за счет огибания костей рострума и черепа в результате дифракции по пути к соответствующим СП. С учетом всех этих факторов относительные задержки звука между парциальными звуками различных ПК, например [12], при латеральном падении звука справа составили между: пПК4–пПК3 – 17 мкс, пПК4–пПК2 – 40.4 мкс, пПК4–пПК1 – 70 мкс, пПК4–лПК1 – 74 мкс, v (пПК4–лПК2) – 63 мкс, v (пПК4–лПК3) – 49 мкс. и d (пПК4–лПК2) – 87 мкс, d (пПК4–лПК3) – 73 мкс, где p и l – правый и левый, d и v – дифракция звука с дорсальной и вентральной стороны наружных ушей (рострума) на контралатеральные ПК, соответственно. Этот пример показывает роль разных слуховых механизмов и архитектуры СП дельфина в формировании признаков локализации звука, и их несовместимость с механизмами слуха человека (рассмотрим ниже).

Архитектура СП и размеры рострума дельфина являются оптимальными и для формирования ими уникальных временных и спектральных признаков локализации звука и, вместе с тем, для синфазного приема эхо и звука всеми слуховыми проходами в направлении максимума точности локализации слуха (около 0° во фронтальной плоскости и около 7° в медиальной) без искажений его признаками локализации, что имеет принципиальное значение для тонкого анализа эхо зондирующих импульсов (“щелчков”) их эхолокационной системы [12].

Более того, расположение лСП1 и пСП1 принципиально отличается от расположения остальных СП с точки зрения освещения звуком и экранирования рострумом и черепом [12]. Очевидно, что при падении звука из любой точки рострального полупространства, лСП1 и пСП1 практически одинаково им освещены и не попадают в область акустической тени рострума и черепа, рис. 1, 3. В то же время освещение звуком остальных СП и экранирование их рострумом и черепом существенно изменяется при изменении локализации звука в пространстве относительно рострума дельфина, и заметно изменяется даже при минимальном (единицы градусов) изменении пространственной локализации звука [12].

Отметим, что поперечные размеры рострума в области СП составляют около 3λ , расстояние между левым и правым рядом СП каудально возрастает от 0.5 λ до 3.6 λ и длина рострума (расстояние от кончика рострума до черепа) составляет более 21 λ , где λ – длина волны максимума энергии зондирующих “щелчков” дельфина на частоте 100–110 кГц – около 1.3–1.5 см [20] (21λ соответствует волновому размеру $kL = (2\pi L)/\lambda = 130$, где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, L – характерный размер).

Вместе с тем, относительно тонкий и длинный рострум дельфина и рассмотренная выше морфология и архитектура СП его эволюционно новых

наружных ушей имеют значение для утилизации слухом дельфина деструктивной интерференции отраженных когерентных помех с целью улучшения отношения уровней полезное эхо/мешающее отражение (рассмотрим ниже).

Нормированные значения весовых коэффициентов, определяющих соотношение уровней звукового давления парциальных звуков в СП1, СП2 и СП3 левого наружного уха, составили 1.0; 0.37 и 0.21, и в СП1, СП2, СП3 и СП4 правого наружного уха — 0.95; 0.29; 0.19 и 0.06, соответственно [12]. Учитывая, что плотность энергии волны пропорциональна квадрату ее амплитуды, нормированные значения весовых коэффициентов, определяющих соотношение энергий парциальных звуков в этих СП, составили: 1.0; 0.14; 0.04 и 0.9; 0.08; 0.036; 0.004, соответственно. Отсюда следует, что лСП1 передает на среднее ухо более 82% энергии актуального звука и пСП1 — более 87%, тогда как остальные СП левого и правого уха — 18% и 13.3%, соответственно. Следовательно, первые СП передают на средние уши основную часть парциальных энергий звука из рострального полупространства без добавления к ним признаков их пространственной локализации. В то же время остальные каналы передают меньшую часть парциальных энергий звука, существенно окрашенных признаками локализации этого звука. Другими словами, это есть вероятный компромисс между количеством энергии актуального звука, не идущей на формирование спектральных и временных признаков его пространственной локализации с целью меньших искажений признаками локализации, что имеет значение для тонкого анализа эхо.

Учитывая расположение СП (рис. 1–3), можно полагать, что первые СП левого и правого наружного уха адаптированы для квазимоноурального синфазного приема и передачи на средние уши актуального звука, локализованного в медианной плоскости в широком секторе углов практически из всего рострального полупространства без экранирования его роостромом и черепом. При этом форма этого звука во временной области и спектр в области частот 0.1–160 кГц, передаваемые на соответствующее левое и правое среднее ухо, одинаковы и не зависят от локализации звука в этом пространстве. Этот результат может расширить объяснение причин того, что дельфины разных видов при решении сложных эхолокационных задач, предъявляемых им в горизонтальной плоскости, разворачивались вдоль своей продольной оси на 90°, что обсуждается в работах [22, 23].

Вместе с тем, первые СП левого и правого уха адаптированы для квазимоноурального и квазисинфазного приема и передачи на средние уши актуального звука, локализованного в ростральном полупространстве, по крайней мере в широком секторе углов по уровню 0.7 от максимума ХН дельфина в соответствующей плоскости.

В общем лСП1 и пСП1 обеспечивают квазимоноуральный прием звука, локализованного в любой точке пространства вокруг дельфина, но для звуков каудального полупространства будут наблюдаться экранирование этих СП и спектральная фильтрация падающего на них звука, определяемая огибанием (дифракцией) звуком костей роострума и черепа [12].

Пространственная локализация звука

Основными факторами, обуславливающими механизмы формирования уникальных признаков пространственной локализации звука у дельфина (*Tursiops truncatus*) являются асимметрия морфологических структур его левого и правого наружного уха, их волновые размеры, а также количество СП, их расположение и архитектура [12].

Так, рострально-каудальная взаимно комплементарная асимметрия архитектуры СП во фронтальной плоскости (рис. 1–3), а также рострально-каудальная асимметрия размеров роострума и черепа и их волновые размеры определяют признаки рострально-каудальной пространственной локализации звука, формируемые наружными ушами дельфина во фронтальной и медианной плоскостях [6, 11–13].

Левострая-правострая взаимно комплементарная асимметрия архитектуры СП во фронтальной плоскости (рис. 1) определяет признаки локализации звука (лево-право), формируемые в латеральных направлениях [12].

Дорсально-вентральная асимметрия размеров костей роострума (дорсальная часть роострума шире расстояния между левым и правым рядом СП) и асимметричное (роострально-вентральное) расположение левого и правого ряда СП на рооструме дельфина определяют признаки дорсально-вентральной локализации звука.

Архитектура СП и их расположение на острие роострума определяют соотношение энергий парциальных звуков между первыми и остальными СП, и степень их экранирования (т.е. спектральной фильтрации эхо и звука, падающих на СП) в зависимости от локализации звука в пространстве.

Таким образом, признаки пространственной локализации звука в слухе дельфина афалина (*Tursiops truncatus*) формируются на уровне наружных ушей во всем диапазоне частот эхолокации и слуха (0.1–160 кГц) [12]. При этом три СП левого наружного уха и четыре СП правого наружного уха формируют последовательности из трех и четырех парциальных звуков с уникальными временными задержками и уникальными уровнями спектра в зависимости от пространственной локализации этого эхо или звука, которые передаются на левое и правое среднее ухо, соответственно.

Интересно, что у ночных хищных птиц, сов (*Tyto alba*, *Phodilus bodius* и др.) билатеральная асимметрия расположения ушных раковин формирует спектральные признаки локализации звука только в вертикальной плоскости [24–26]. У мохноногого сыча, длиннохвостой и бородатой неясытей эта асимметрия распространяется даже на кости черепа. В тоже время наземные эхолоцирующие хищники, рукокрылые (*Chiroptera*) при локализации звука в вертикальной плоскости используют признаки, формируемые ушными раковинами [27].

У человека, в отличие от дельфина, основными факторами, определяющими механизмы пространственной локализации звука, являются: симметричное расположение ушных раковин и слуховых проходов на левой и правой половине головы, имеющей сферическую форму, на расстоянии около 21 см, определяемое размерами головы [28], а также морфология наружных ушей (ушных раковин), и их расположение у слуховых проходов.

При этом локализация звуков человеком на разных частотах происходит по-разному. Звуки с частотами ниже 150 Гц человек не локализует. В горизонтальной плоскости человек локализует звуки с частотами от 150 Гц до 1.5 кГц (длина волны больше интераурального расстояния), анализируя интерауральную разницу временных задержек (ИРВЗ) или интерауральную разность фаз звуковой волны [29–31]. В этой области частот интерауральная разница интенсивностей звука мала, так как длина волны намного больше размеров головы и, следовательно, нет акустической тени и моноуральной направленности слуха. На частотах выше 3 кГц (длина волны становится меньше половины интераурального расстояния) сама голова начинает затенять звук дальнего от источника звука уха. На этих частотах человек локализует звук по интерауральным различиям интенсивности звука (ИРИ). С наибольшей точностью человек локализует звуки с длинами волн больше 1 и меньше $\frac{1}{2}$ интераурального расстояния (т.е. с частотами меньше 1.5 кГц и больше 3 кГц).

Следует отметить, что изменение признаков локализации с ИРВЗ на ИРИ существенно ухудшает точность и даже однозначность локализации в области частот 1.5–3 кГц [19, 32] и является существенным недостатком слуховой системы человека.

В отличие от слуха человека, признаки пространственной локализации звука в слухе дельфина афалина (*Tursiops truncatus*) не изменяются во всем диапазоне частот слуха и эхолокации (0.1–160 кГц) [12]. Это имеет значение для точной и однозначной активной и пассивной локализации эхо и звуков [10, 12, 33], а также для тонкого анализа эхо.

В вертикальной плоскости признаки локализации звука у человека формируют в основном ушные раковины. Они играют существенную роль для локализации звука в этой плоскости и определения

его положения сверху-снизу и спереди-сзади [32, 34, 35]. Однако точность локализации звука в вертикальной плоскости у человека на порядок хуже, чем в горизонтальной [19].

Следует отметить, что в отличие от вертикальной плоскости, ушные раковины лишь частично участвуют в формировании интерауральных различий звуков (ИРВЗ и ИРИ) в горизонтальной плоскости. Признаки локализации звука, основанные на этих различиях, формируются на более высоких уровнях слуха человека.

Вместе с тем к звуку, падающему на слуховые проходы человека, всегда добавляются отражения этого же звука от ушных раковин, несущие признаки пространственной локализации звука при любой локализации звука. Более того, в слухе человека звук поступает на левое и правое ухо со значительными интерауральными временными задержками и ослаблением интенсивности верхних частот в ухе дальнем от источника звука, в результате разной степени экранирования ушей головой при изменении локализации звука в пространстве. Эти факторы в некоторой степени искажают оригинальный звук, однако прием звука без искажений признаками локализации, в отличие от дельфина, в слухе человека не обеспечивается. Вместе с тем, квазимоноуральный прием звука у человека, по-видимому, не может быть реализован вследствие действующего в его слухе “эффекта предшествования” (рассмотрим ниже).

Ослабление мешающих отражений зондирующих импульсов дельфина

В работе [16] были проанализированы данные известных работ, демонстрирующие тонкие способности эхолокатора дельфина при обнаружении подводных объектов в условиях реверберационных помех и свидетельствующие о высоком уровне адаптации его слуха к мешающим отражениям (реверберации). Реверберация представляет собой суммарный эхосигнал, вызванный зондирующим импульсом эхолокатора от объектов и неоднородностей среды. Интенсивность реверберации пропорциональна интенсивности зондирующего импульса, поэтому в обстановке, ограниченной отраженными помехами, изменение интенсивности зондирующего импульса эхолокатора дельфина не улучшает отношение сигнал/помеха [16].

Однако, как следует из результатов экспериментов по дифференцированию дельфином сферических мишеней в условиях мешающих отражений стальных цилиндров [22] и результатов моделирования акустического поля мешающих отражений [16], морфология и размеры СП наружных ушей дельфина адаптированы к решению эхолокационных задач в условиях мешающих отражений. В этих экспериментах, например, три цилиндра мешали различению дельфином двух шаров по материалу

меньше чем два цилиндра или даже один. Наличие третьего цилиндра между шарами давало дельфину возможность использовать деструктивную интерференцию мешающих отражений их зондирующего “щелчка” от центрального и одного из боковых цилиндров, в результате которой влияние помех уменьшается и отношение полезное эхо/отраженная помеха улучшалось. Он легко находил область акустического поля, где происходит интерференция помех, и располагал там СП. Учитывая длительность зондирующего “щелчка” дельфина около 25 мкс, размеры области деструктивной интерференции соизмеримы с протяженностью “щелчка” в пространстве — около 4 см [16] и размерами области расположения левого и правого ряда СП дельфина, рис. 1–3. Учитывая, что дельфин принимает эхо и звук СП (рассмотрено выше), для утилизации деструктивной интерференции мешающих отражений апертура и база слуха дельфина (расстояние между СП левого и правого наружного уха) имеют самое существенное значение.

Анализ модели отраженных помех нагляднее показал, что наилучшими условиями для их взаимного подавления во временной области являются равенство амплитуд и задержка во времени одной помехи относительно другой на полпериода (~ 5 мкс) [16]. В этом случае отражения оказываются в противофазе и наиболее эффективно ослабляют друг друга. Их максимальные амплитуды уменьшаются почти в 2.5 раза (-7.6 дБ), при этом энергия двух помех уменьшается в 7 раз (-8.5 дБ). Еще более эффективная картина подавления отражений от цилиндров наблюдается в спектральной области. Например, на частотах максимума их энергетических спектров ($F_0 = 114.3$ кГц) и, соответственно, в области максимальной чувствительности слуха дельфина энергия составляющих подавляется в 59 раз (-17.7 дБ) относительно спектральной плотности эхо одного цилиндра. Представленный в этой работе анализ модели показывает наличие больших потенциальных возможностей для уменьшения влияния отраженных помех, возникающих в результате их интерференции, и повышения вследствие этого отношения сигнал/помеха. Полученные данные позволяют сделать вывод о том, что слух дельфина анализирует тонкую пространственную структуру акустического поля полезного сигнала на фоне взаимодействующих между собой мешающих отражений в месте расположения его СП. Он обладает преимуществом (в обсуждаемом контексте) перед приемником с большой апертурой или базой, который будет усреднять тонкую пространственную структуру акустического поля мешающих отражений в области расположения приемника [16]. Преимущество приемника с оптимальной апертурой и базой особенно заметно на коротких широкополосных “щелчках” дельфина и когерентных помехах, присущих работе его эхолокатора.

В отличие от этого в слухе человека при бинауральном приеме два одинаковых звуковых сигнала не только не подавляются взаимно, но, наоборот, усиливают друг друга вследствие “эффекта предшествования” [38] и воспринимаются как один “фантомный” сигнал, приходящий с направления, определяемого соотношением их амплитуд (на частотах выше 3 кГц) или временной задержкой одного из них (на частотах 150–1500 Гц) [39]. Следовательно, использование деструктивной интерференции эхосигналов от мешающих цилиндров (отраженных помех) исключает использование слухом дельфина “эффекта предшествования”. В пользу этого свидетельствуют и данные работы [40]. Автору этой работы не удалось обучить дельфина выходить на муляж излучателя сигналов, расположенного посередине между двумя излучателями одинаковых сигналов, при любых временных задержках и соотношениях интенсивностей сигналов на излучателях, а также расстояниях между ними.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ полученных в работе результатов указывает на то, что эволюция новых наружных ушей дельфина афалина (*Tursiops truncatus*) шла преимущественно в направлении развития свойств, необходимых для функции эхолокационной системы. Среди них наиболее существенными являются: 1) интеграция ушей в обтекаемые формы роострума и головы, в отличие от ограниченных ушными раковинами наружных ушей наземных животных и человека, что уменьшает сопротивление движению дельфина со стороны воды и, главное, не ухудшает отношение уровней сигнал/шум обтекания в его слухе с ростом скорости движения, что имеет значение для функции его эхолокационной системы, по крайней мере, на скоростях до 18 км/ч; 2) синфазный прием эхо или звука всеми СП в направлении максимума точности локализации слуха без искажений признаками локализации, что имеет значение при тонком анализе эхо зондирующих импульсов его эхолокационной системы; 3) асимметрия архитектуры СП, а также роострума и черепа дельфина, что, вместе с принципиальным отличием расположения первых слуховых проходов (лСП1 и пСП1) от расположения остальных СП с точки зрения освещения их звуком и экранирования роострумом и черепом, имеет значение для формирования уникальных признаков пространственной локализации эхо или звука; 4) утилизация слухом дельфина деструктивной интерференции отраженных когерентных помех (эхо мешающих объектов) с целью улучшения отношения полезное эхо/отраженная помеха; 5) передача первыми СП на средние уши дельфина основанной части парциальных энергий актуального звука из роострального полупространства (лСП1 — более 82%, и пСП1 — более

87%), без добавления к ним признаков их пространственной локализации. В то же время остальные каналы передают меньшую часть парциальных энергий этого звука (левого и правого уха — 18% и 13.3%, соответственно), существенно окрашенных признаками локализации этого звука, что имеет значение для тонкого анализа эхо.

В целом полученные в работе результаты свидетельствуют о том, что слух дельфина как часть его эхолокационной системы и слух человека обуславливают принципиальные различия морфологии и слуховых механизмов уже на уровне их наружных ушей. Вместе с тем они расширяют наше представление о возможностях пространственного слуха эхолоцирующих животных, показывают новые механизмы и особенности их слуха и требуют дальнейших исследований.

Данная работа финансировалась за счет средств бюджета КНС-ПЗ РАН, филиала ФИЦ “Институт биологии южных морей им. А.О. Ковалевского РАН”, в рамках темы НИР № 124052000059-4. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Все исследования проводились в соответствии с принципами биомедицинской этики, изложенными в Хельсинкской декларации 1964 г. и последующих поправках к ней. Они также были одобрены Этическим комитетом Санкт-Петербургского университета (Санкт-Петербург), протокол № 115-02-2 от 06.04.2022.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ketten D.R. Functional analyses of whale ears: Adaptations for underwater hearing // I.E.E.E. Proc. in Underwater Acoustics. 1994. V. 1. P. 264–270.
2. Norris K.S. The evolution of acoustic mechanisms in odontocete cetaceans // Evolution and Environment / Ed. Drake E. New Haven: Yale Univ. Press., 1968. P. 297–324.
3. Brill R.L., Moor P.W.B., Dankiewicz L.A. Assessment of dolphin (*Tursiops truncatus*) auditory sensitivity and hearing loss using jawphones // J. Acoust. Soc. Amer. 2001. V. 109. P. 1717–1722.
4. Popov V.V., Supin A. Ya., Klishin V.O., et al. Evidence for double acoustic windows in the dolphin, *Tursiops truncatus* // J. Acoust. Soc. Amer. 2008. V. 123(1). P. 552–560.
5. Cranford T.W., Krysl P., Hildebrand J.A. Acoustic pathways revealed: simulated sound transmission and reception in Cuvier’s beaked whale (*Ziphius cavirostris*) // Bioinsp. Biomim. 2008. 3. 016001. 10 pp. <https://doi.org/10.1088/1748-3182/3/1/016001>
6. Ryabov V.A. Mechanisms of Sound Reception and Conduction in the Dolphin // Biophysics. 2014. 59(3). P. 475–483.
7. Ryabov V.A. The effect of acoustic shielding of the region of a dolphin’s mental foramina on its hearing sensitivity // St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics. 2016. V. 2. P. 240–246. <https://doi.org/10.1016/j.spjpm.2016.08.003>
8. Романенко Е.В. Акустика дельфинов и рыб (обзор) // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 1. С. 82–92.
9. Au W.W.L., Moore P.W.B. Dolphin beam patterns // J. Acoust. Soc. Am. 1984. V. 75: 257–261.
10. Renaud D.L., Popper A.N. Sound localization by the bottlenose porpoise *Tursiops truncatus* // J. exp. Biol. 1975. V. 63. P. 569–585.
11. Ryabov V.A. Lower jaw – peripheric part of the dolphin echolocation hearing // Collection of scientific papers after the third Int. Conf. MARINE MAMMALS OF THE Holarctic, October 11–17, 2004, Koktebel, Crimea. Moscow, 2004. P. 483–489.
12. Рябов В.А. Роль асимметрии левого и правого наружного уха дельфина афалина (*Tursiops truncatus*) в пространственной локализации звука // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 1. С. 101–114.
13. Ryabov V.A. Role of the mental foramina in dolphin hearing // Natural Science. 2010. V. 2. No 6. P. 646–653. doi:10.4236/ns.2010.26081, <http://www.scirp.org/journal/NS/>
14. Ryabov V.A. A dolphin lower jaw is hydro acoustic antenna of the traveling wave // Abstracts of 146 meeting of ASA. J. Acoust. Soc. Amer. 1144. 2003. P. 2414–2415.
15. Varanasi U., Malins D.C. Unique lipids of the porpoise (*Tursiops gilli*): differences in triacylglycerols and wax esters of acoustic (mandibular and melon) and blubber tissues // Biochimica et Biophysica Acta. 1971. V. 231. P. 415–418.
16. Ryabov V.A. Acoustic Clutter Field and Echo Reception by the Dolphin // ISSN0006–3509. Biophysics. 2008. V. 53. No 3. P. 237–242. <http://dx.doi.org/10.1134/S0006350908030123>
17. Johansen P.A. Measurement of the human ear canal // Acustica. 1975. V. 33. N 5. P. 349–351.
18. Скучик Е. Основы акустики. М. Мир, 1976. Т. 1. 520 с.
19. Слуховая система / Ред. Альтман Я.А. Л.: Наука, 1990. 620 с. (Основы современной физиологии.)
20. Ryabov V.A. Acoustic Signals and Echolocation System of the Dolphin // Biophysics. 2014. 59(1). P. 135–147.
21. Moore P.W.B., Pavlosky D.A., Dankiewicz L. Interaural Time and Intensity Difference Thresholds in the Bottlenose Dolphin (*Tursiops truncatus*) // Sensory Systems of Aquatic Mammals / Eds. Kastelein R.A., Thomas J.A., Nachtigall P.E. DeSpil Publishers, Woerden, the Netherlands, 1995.
22. Zaslavsky G.L., Ryabov V.A. Discrimination of targets by dolphin (*Tursiops truncatus*) in the presence of interfering cylinders // Marine mammal sensory Systems. N.Y. Plenum Press. 1992. P. 433–437.
23. Wei C., Houser D., Erbe C., Mátrai E., Ketten D. and Finneran J.J. Does rotation increase the acoustic field of view? Comparative models based on CT data of a live dolphin versus a dead dolphin // Bioinspir. Biomim. 2023. 18 (3). 035006. <https://doi.org/10.1088/1748-3190/acc43d>

24. *Norberg R.A.* Occurrence and independent evolution of bilateral ear asymmetry in owls and implications on owl taxonomy // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. B.* 1977. V. 280. P. 375–408.
25. *Knudsen E.I., Konishi M.* Mechanisms of sound localization in the barn owl (*Tyto alba*) // *J. Comp. Physiol. A.* 1979. V. 133. P. 13–21.
26. *Konishi M.* Neuroethology of sound localization in the owl // *J. Comp. Physiol.* 1993. V 173. P. 3–7.
27. *Gorlinsky I.A., Konstantinov A.I.* Auditory localization of ultrasonic source by *Rhinolophus ferrum-equinum* // *Proc. of the forth Int. Bat Res. Conf. Nairobi.* 1978. P. 145–153.
28. *von Hornbostel E.M., Wertheimer M.* Über die Wahrnehmung der Schallrichtung (нем.) // *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Berlin: Akademie der Wissenschaften, 1920. Bd. 20. S. 388–396.
29. *Howard I.P., Templeton W.B.* Human Spatial Orientation. Oxford: John Wiley & Sons, 1966.
30. *Mills A.W.* On the minimum audible angle // *J. Acoust. Soc. Am.* 1958. V. 49(2). P. 467–477.
31. *Mills A.W.* Auditory localization // *Foundation of Modern Auditory Theory. V. II* / Ed. Tobias J.V. New York: Academic Press, 1972. P. 303–348.
32. *Nordland B.* Physical factors in angular localization // *Acta Otolaringol.* 1962. V. 54. P. 75.
33. *Branstetter B.K., Mevissen S.J., Herman L.M. et al.* Horizontal angular discrimination by an echolocating bottlenose dolphin *Tursiops truncatus* // *Bioacoustics.* 2003. № 14. P. 15–34.
34. *Gardner M.B.* Some monaural and binaural factors of median plane localization // *J. Acoust. Soc. Am.* 1973. V. 54. N 6. P. 1489–1495.
35. *Butler R.A.* The influence of the external and middle ear on auditory discrimination // *Handbook of sensory physiology.* Berlin: Springer-Verlag, 1975. V. 5(2). P. 247–260.
36. *Miller G.S.* The telescoping of the cetacean skull // *Smithsonian Misc Coll.* 1923. V. 76. P. 1–67.
37. *Белькович В.М., Дубровский Н.А.* Сенсорные основы ориентации китообразных. Л.: Наука, 1976. 204 с.
38. *Blauert J.* Spatial hearing: the psychophysics of human sound localization. MA: MIT Press, Cambridge, 1997. 494 p.
39. *Sandel T.T., Teas D.C., Feddersen W.E., Jefferes L.A.* Localization of Sound from Single and Paired Sources // *J. Acoust. Soc. Am.* 1955. V. 27. P. 842–852. <https://doi.org/10.1121/1.1908052>
40. *Zaslavski G.L.* Differences between the auditory system of humans and bottlenose dolphins. *Razreda sazu XLVII-3, Ljubljana, 2006, Slovenia, pp 51–74.*

MORPHOLOGY AND SOME HEARING MECHANISMS OF THE EXTERNAL EARS OF THE BOTTLENOSE DOLPHIN (*TURSIOPS TRUNCATUS*) AND HUMANS

R. A. Ryabov^{a,*}

^a*Vyazemsky Karadag Scientific Station—Natural Reserve
of Russian Academy of Sciences, Branch of Federal Research Center “Kovalevsky Institute of Biology of the Southern Seas,
Russian Academy of Sciences”, Nauki Str. 24, Kurortnoe, Feodosiya 298188, Russia*

*E-mail: ryaboff@inbox.ru

The study of the morphology and auditory mechanisms of the new (evolutionary) external ears of the bottlenose dolphin was continued in the light of the latest morphological and experimental results obtained by the author. For the first time for toothed whales, it has been shown that the bottlenose dolphin (*Tursiops truncatus*) has three external auditory canals (AC) in the left ear and four in the right ear. However, in contrast to the human AC – located symmetrically on the left and right half of the head, the left and right row of the dolphin AC, having bilateral and rostral-caudal asymmetry, are located at the tip of the rostrum asymmetrically (rostral-ventral). It has been established that the illumination by echo (sound) and shielding by the rostrum and skull of the firsts ACs is fundamentally different from the rest of the ACs, depending on spatial localization of echo (sound). The architecture of the ACs are optimal for the formation of unique signs of echo (sound) localization, and for it in-phase reception by all ACs in the direction of maximum accuracy of hearing localization, without the localization signs, which is fundamentally importance for fine analysis of the echo. In contrast, in human hearing, sound is colored by signs of localization at any position it in space. The mechanisms of localization of echo (sound) and their fundamental difference in dolphins and humans, as well as mechanisms for protecting the dolphin's hearing from interfering reflections, are considered. It has been established that the auditory mechanisms of the external ears of dolphins and humans are determined by their morphology and functions.

Keywords: dolphin (*Tursiops truncatus*), evolutionarily new external ears, morphology, architecture of external auditory canals, asymmetry, echo (sound) localization, interfering reflection.