

ISSN 0320-7919

Том 69, Номер 6

Ноябрь - Декабрь 2023



АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 69, номер 6, 2023

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИЯ ВОЛН

Дискретная акустика: ARMA-моделирование временных процессов, теория

Ю. И. Бобровницкий, И. А. Карпов

665

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

Прецизионное измерение групповой скорости ультразвука твердых сред в образцах миллиметровой толщины

Д. И. Макалкин, А. А. Карабутов, Е. В. Саватеева

685

Ослабление спин-фононной связи квадрупольных ядер в кристаллах NaF в условиях магнитного насыщения

В. М. Микушев, А. М. Рочев, Е. В. Чарная

695

Исследование акустических характеристик суспензий на основе глицерина и микрочастиц синтетического алмаза с помощью резонатора с продольным электрическим полем

А. П. Семёнов, Б. Д. Зайцев, А. А. Теплых, И. А. Бородина

702

АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

Метод конечно-элементного моделирования гидродинамического шума, возникающего при обтекании упругих тел

А. С. Суворов, Е. М. Соков, А. Л. Вировлянский, В. О. Еремеев, Н. В. Балакирева

713

АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

Локальный метод разделения звуковых и псевдозвуковых пульсаций давления

О. П. Бычков, Г. А. Фараносов

722

Исследование акустических и аэродинамических характеристик гофрированных сопел

*В. Ф. Копьев, И. В. Храпцов, Е. С. Черенкова, М. Ю. Зайцев, Ю. В. Берсенева,
В. В. Ершов, О. Ю. Кустов, Р. В. Бульбович*

737

Моделирование акустических процессов взаимодействия ячеек звукопоглощающих конструкций авиационных двигателей

П. В. Писарев, А. А. Паньков, А. Н. Аношкин, К. А. Ахунзянова

745

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ. ШУМЫ И ВИБРАЦИИ

Особенности уменьшения уровня звука экранами Т-образного профиля

А. И. Комкин, Р. Н. Мусаева

756

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Оценка треков резонансных частот речевого тракта

А. С. Леонов, В. Н. Сорокин

765

Визуализация ультразвуковых излучателей методом обращения сигнала во времени
в модели динамики частиц

Д. Я. Суханов, А. Е. Кузовова

778

АКУСТИКА ЖИВЫХ СИСТЕМ. БИМЕДИЦИНСКАЯ АКУСТИКА

Лазерная виброметрия сдвиговых волн в слое гелеобразной среды

Ш. А. Асфандияров, А. А. Агафонов, А. И. Коробов, В. Г. Андреев

792

Улучшение оптоакустических изображений биотканей методом одномерной обратной
свертки с адаптивной самокалибровкой в реальном времени

*Е. М. Тиманин, И. С. Михайлова, И. И. Фикс, А. А. Курников, А. В. Ковальчук,
А. Г. Орлова, О. А. Угарова, M. Frenz, M. Jaeger, П. В. Субочев*

800

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

Сравнительные исследования вибромеханических характеристик компактных гидроакустических
преобразователей продольно-изгибного типа со сложной формой излучающей оболочки

А. К. Бритенков, М. С. Норкин, С. Б. Захаров, Р. В. Травин, А. В. Стуленков

808

Тепловая помеха при регистрации турбулентных пульсаций давления на поверхности
всплывающего устройства

Е. Б. Кудашев, Л. Р. Яблоник

817

ИНФОРМАЦИЯ

Памяти Виктора Дарьевича Света (17.05.1942–28.11.2023)

823

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИЯ ВОЛН

УДК 534.21

ДИСКРЕТНАЯ АКУСТИКА: ARMA-МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ, ТЕОРИЯ

© 2023 г. Ю. И. Бобровницкий^а *, И. А. Карпов^а

^аФедеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова
Российской академии наук, Малый Харитоньевский пер. 4, Москва, 101990 Россия

*e-mail: yuri@imash.ac.ru

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.

После доработки 28.08.2023 г.

Принята к публикации 19.09.2023 г.

В физике, в частности, акустике время традиционно рассматривается как непрерывная координата. Некоторое исключение составляет обработка сигналов, где дискретизация необходима для расчетов на компьютерах. Но все акустические задачи формулируются и решаются с помощью непрерывных по времени моделей, описываемых дифференциальными уравнениями и их решениями в виде непрерывных функций времени. Между тем эти задачи могут быть эквивалентным образом сформулированы и решены с помощью дискретно-временных моделей, описываемых конечно-разностными уравнениями и их решениями в виде временных рядов. Как показывает опыт некоторых других областей науки, например, теории управления, дискретный подход имеет ряд преимуществ перед непрерывным подходом, использование которых значительно облегчает решение многих задач. Данная статья имеет цель частично восполнить имеющийся здесь пробел в акустике и направлена на создание теоретических основ дискретно-временного подхода к решению акустических задач. Статья ограничена рассмотрением одной широко распространенной в акустике колебательной системы — линейной структуры с N степенями свободы, состоящей из сосредоточенных инерционных, упругих и диссипативных элементов, к которой, в частности, приводит метод конечных элементов. Для нескольких непрерывных моделей этой системы в статье построены эквивалентные дискретно-временные модели, выведены конечно-разностные уравнения и получены их решения. Критерием эквивалентности непрерывных и дискретных моделей в статье принято математически точное равенство соответственных решений во все дискретные моменты времени. Исходя из этого критерия, между параметрами непрерывных и дискретных моделей и их уравнений установлены аналитические связи, позволяющие по непрерывной модели системы строить ее дискретно-временную модель и, наоборот, по известной дискретной модели строить ее непрерывную модель. Особое внимание в статье уделено вынужденным колебаниям системы под действием кинематического возбуждения, важного во многих акустических задачах, тогда как в литературе рассматривается исключительно силовое возбуждение. В статье также рассмотрено одно из самых полезных свойств дискретного моделирования — простота построения дискретных моделей по экспериментально измеренным сигналам. Приведен соответствующий пример. Отметим, что термин “ARMA-модель” является сокращением для “модели авторегрессии и скользящего среднего”, общепринятым в теории управления, теории систем и в других областях науки.

Ключевые слова: колебательные системы с N степенями свободы, эквивалентность дискретной и непрерывной моделей, энергетический критерий адекватности модели

DOI: 10.31857/S0320791923600671, EDN: CQEZFR

ВВЕДЕНИЕ

В акустике все физические переменные (давление, смещения и др.) традиционно рассматриваются как непрерывные функции времени и пространственных координат, а колебательные модели сред и структур описываются дифференциальными уравнениями, обыкновенными или в частных производных. В последнее время, однако, исследователям и инженерам все чаще приходится иметь дело с ситуациями, где переменные и

непрерывные функции дискретизируются и заменяются числовыми рядами. Так, компьютерная обработка и хранение непрерывных временных сигналов доступны только после их дискретизации по времени, а уточненные численные решения колебательных и волновых краевых задач стали возможны благодаря использованию методов конечных и граничных элементов, в которых непрерывные среды и конструкции заменяются их дискретными пространственными моделями. Нет сомнений в том, что в ближайшее

время, благодаря широкому применению компьютеров, дискретизация переменных и параметров будет использоваться все шире, а дискретная математика будет все более активно внедряться в теорию и инженерную практику решения акустических задач.

Между тем, существуют области, где исследуемые явления и процессы по своей природе являются дискретными или измеряются только в определенные моменты времени. Многообразие и доступность таких измерений способствовали раннему развитию научных исследований. Наблюдения за температурой воздуха в городах, за морскими приливами, солнечными пятнами и другими дискретными явлениями уже в 18-м веке привели ученых к формулировке математического понятия *временных рядов*, детерминированных и случайных, и к необходимости их анализа с целью извлечения из них информации, необходимой для понимания природы явлений, а также для построения их динамических моделей, прогнозирования и управления. В начале 20-го столетия на основе этих исследований был сформирован самостоятельный научный раздел “Анализ временных рядов” с большим числом важных результатов и приложений в области спектрального оценивания, статистики (см., например, [1–4]).

Настоящий прорыв в развитии дискретных моделей и методов исследования временных процессов начался в середине 20-го века и продолжается сейчас в связи с бурным развитием промышленности, особенно транспорта, и с необходимостью проектирования оптимальных систем автоматического управления производственными процессами и работой транспортных средств. Эта область науки, которую принято называть “теорией управления” (прежнее название “теория автоматического регулирования”), является сегодня одной из самых развитых. Здесь уже написаны десятки монографий как непосредственно по теории управления, например [5–9], так и по примыкающим к ней дисциплинам — по “идентификации систем”, т.е. по построению математических моделей динамических систем на основе экспериментальных данных [10–13], по цифровой обработке временных сигналов [4, 14] и др. По этой тематике также имеются тысячи публикаций в журналах и трудах многочисленных регулярных конференций — см., в частности, [15, 16], где в открытом доступе печатаются доклады конференций, проводимых под эгидой Международной федерации по автоматическому управлению (International Federation on Automatic Control — IFAC) за 1960–2014 гг. [15] и с 2015 г. по настоящее время [16]. Многие теоретические и практические результаты теории управления, в том числе дискретные модели и методы исследования временных процессов, в последние годы были успешно распространены на другие области, включая такие, казалось бы, далекие от техники области как

биология, медицина, языкознание и другие (см., например, [17, 18]).

Однако, акустику эти процессы затронули незначительно, несмотря на наличие целого ряда проверенных на практике достоинств дискретных методов (простота экспериментального построения дискретных моделей, экономичность в вычислениях, робастность, т.е. работоспособность при низких значениях отношения “сигнал/шум”, возможность прогнозирования случайных процессов и др.). В литературе можно найти отдельные статьи, где дискретные модели временных процессов применяются для решения задач модального анализа, акустического мониторинга и диагностики колебательных систем, например, в [19–23]. Но на регулярной основе, если не считать обработку сигналов, дискретные методы исследования временных процессов в акустике пока не применяются, насколько известно авторам данной статьи, которые не смогли найти в известных монографиях и справочниках по акустике даже упоминания о них.

В предлагаемой работе делается попытка частично восполнить этот пробел. Основное внимание в ней уделено построению дискретных по времени моделей по известным непрерывным моделям для простейших акустических структур — колебательных систем с конечным числом степеней свободы. В основу построения положен критерий, согласно которому временные ряды, описывающие свободные и вынужденные колебания дискретных моделей, должны в точности совпадать с соответственными дискретизированными непрерывными решениями. Такое требование продиктовано особенностью акустических задач, которая заключается в высокой чувствительности волновых и колебательных свойств к изменению модельных параметров. В частности, ниже в статье показано, что повсеместно применяемая в литературе процедура построения дискретных моделей путем формальной замены непрерывных производных конечными разностями приводит к физически неприемлемым результатам — см. Приложение А. Для построенных на основе указанного критерия дискретных моделей в статье выведены конечно-разностные уравнения и получены их решения для свободных и вынужденных колебаний под действием как силового, так и кинематического возбуждения. Между параметрами непрерывных и соответственных дискретных моделей установлены аналитические соотношения, позволяющие без труда переходить от непрерывных моделей к дискретным и наоборот. Отмечено одно из примечательных свойств дискретных моделей — это специальная структура их конечно-разностных уравнений. Она делает чрезвычайно простым построение самой модели экспериментально без предварительного знания соответственных непрерывных моделей и с использованием весьма ограниченного объема данных

измерений. В статье приведен пример такого построения.

Отметим особую роль, которую в данной работе играет известная теорема отсчетов Котельникова [24] (в западной литературе она известна под названием теорема Найквиста–Шеннона). Теорема гласит: любая непрерывная функция $x(t)$ с ограниченным спектром ($\omega < \omega_c$) может быть точно представлена своим дискретным временным рядом $x(nT)$ с интервалом дискретизации T , равным $0 < T \leq \frac{\pi}{\omega_c}$, и восстановлена с помощью разложения

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc} \left[\pi \left(\frac{t}{T} - n \right) \right],$$

где $\operatorname{sinc}(z) = \sin(z)/z$, n – целое число. Она, таким образом, означает, что два представления временной зависимости, в виде непрерывной функции времени и в виде временного ряда, являются при выполнении определенных условий эквивалентными. По существу, но в другой форме, теорема была получена математиками ранее в рамках решения задачи интерполяции функций [25]. Однако ее пришлось заново переоткрывать в 1930-х гг. для нужд теории связи, где она, в силу ее фундаментальной важности, получила название, связанное с выдающимися учеными этой области науки и техники. В настоящее время теорема отсчетов лежит в основе современных численных методов обработки сигналов, теории управления и других областях науки. Поскольку данная статья посвящена установлению аналитической связи между эквивалентными непрерывными и дискретными моделями колебательных систем, то теорема отсчетов и здесь предполагается выполненной во всех приводимых соотношениях, и, таким образом, также лежит в основе предложенной в статье теории.

Подчеркнем, что данная статья рассматривает дискретизацию колебательных процессов по времени и совсем не затрагивает дискретизацию по пространственным координатам, хотя она столь же актуальна и важна из-за широкого применения методов конечных и граничных элементов. Эти два научных направления, основанные на временной и на пространственной дискретизации, развивались независимо, решая разные физические задачи и используя разные математические аппараты. Важное отличие между ними заключается, в частности, в том, что все временные зависимости, в отличие от зависимостей от пространственных координат, подчиняются принципу причинности. С некоторыми имеющимися методами и результатами решения современных пространственно-дискретных или, иначе, сетевых и решетчатых задач читатель может ознакомиться, например, в статье [26].

В заключение Введения приведем перечень и краткую характеристику известных [2] временных дискретных моделей, которые используются в данной статье. Это, прежде всего, ARMA-модель или авторегрессионная модель скользящего среднего (AutoRegressive Moving Average model). В литературе используются и другие названия этой модели, например, ARX. Она описывается конечно-разностным уравнением вида

$$x[n] + \sum_{p=1}^P a_p x[n-p] = \sum_{q=0}^{Q-1} b_q w[n-q], \quad (1)$$

где $x[n]$ – подлежащая определению скалярная величина, например, смещение; $w[n]$ – заданное внешнее воздействие, например, сила; квадратные скобки указывают на принадлежность временному ряду, т.е. на значение функций x и w в дискретные моменты времени $t = nT$, где T – интервал дискретизации, например, $x[n] = x(nT)$; n , p , q , P и Q – целые числа. Коэффициенты a_p и b_q являются параметрами модели, а пара чисел (P, Q) называется порядком модели.

Модель (1) является объединением двух моделей – авторегрессионной модели (AR-модели), которая получается из (1) при $P \geq 1$ и $Q = 1$ или 0 , и модели скользящего среднего (MA-модели), которая соответствует уравнению (1) при $P = 0$ и $Q \geq 1$. Эти две модели независимы, но при отдельном использовании требуют большого, часто бесконечного, числа параметров, в то время как порядок ARMA-модели, как правило, невелик. Одна из часто применяемых в литературе разновидностей MA-модели, которая используется и в данной статье, носит название “модели черного ящика” или “фильтра с одним входом и одним выходом” и характеризуется конечно-разностным уравнением типа

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] w[n-k], \quad (2)$$

где временной ряд $h[n]$, называемый импульсной передаточной функцией, представляет собой выходной сигнал фильтра (черного ящика) при действии на его вход дискретной δ -последовательности Кронекера

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

В разных разделах науки ряд $h[n]$ имеет и другие названия, например, в акустике – это дискретная функция Грина. В соответствии с принципом причинности импульсная передаточная функция тождественно равна нулю при отрицательных n .

Большой класс составляют ARMA-модели с векторными переменными $x[n]$ и $w[n]$, которые описываются конечно-разностными уравнениями (1) с матричными коэффициентами. Ниже в статье будет использоваться одна такая модель –

так называемая SS-модель (State Space model), т.е. модель в пространстве состояний. Ее конечно-разностное уравнение записывается как

$$\mathbf{x}[n] + A\mathbf{x}[n-1] = B\mathbf{w}[n]. \quad (4)$$

Для колебательных систем с N степенями свободы вектор $\mathbf{x}[n]$ имеет размерность $2N$, его компонентами являются комплексные амплитуды N смещений и N скоростей, а A и B — это $2N \times 2N$ -матрицы. SS-модель является наиболее общей моделью для динамических систем. Она широко применяется в общих теоретических исследованиях, а в теории управления считается основной моделью [9].

Что касается непрерывных моделей систем с N степенями свободы, в статье используется хорошо известная $M-C-K$ -модель конечно-элементного типа, состоящая из сосредоточенных масс m , демпферов c и упругостей k , описываемая системой N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка; непрерывная SS-модель, описываемая системой $2N$ обыкновенных уравнений первого порядка, а также модель черного ящика, которая описывается импульсной передаточной функцией $h(t)$, т.е. откликом на δ -функцию Дирака, и интегральным уравнением

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)w(t-\tau)d\tau, \quad (5)$$

описывающим вынужденные колебания системы и являющимся непрерывным аналогом уравнения (2).

1. ДИСКРЕТНО-ВРЕМЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С N СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Целью данного раздела является построение дискретно-временных моделей для колебательных систем с конечным числом степеней свободы по их известным непрерывным моделям. В основу построения положено требование полного совпадения колебаний непрерывной и дискретной моделей в дискретные моменты времени. Постановка этой задачи мотивирована потенциальными возможностями дискретного подхода к решению акустических задач и, частично, некорректностью часто используемого в литературе метода построения дискретных моделей на основе формальной замены производных конечными разностями — см. Приложение А. Основным результатом раздела являются аналитические зависимости между соответственными дифференциальными и конечно-разностными уравнениями, их параметрами, решениями и спектрами, которые позволяют строить как дискретные модели по непрерывным моделям, так и непрерывные модели по дискретным моделям. Ряд результатов раздела, относящихся к силовому возбуждению систем, известны в литературе и приводятся без вывода. Результа-

ты, относящиеся к кинематическому возбуждению, насколько известно авторам, являются новыми. Для наглядности изложение начинается с простейшей колебательной системы, имеющей одну степень свободы. Затем полученные результаты распространены на системы с произвольным числом N степеней свободы.

1.1. Механический осциллятор

1.1.1. Непрерывный подход. Классической непрерывно временной моделью произвольной линейной колебательной системы с одной степенью свободы общепринято считать механический осциллятор (рис. 1), т.е. структуру, состоящую из трех сосредоточенных элементов — массы m , пружины с жесткостью k и вязкого демпфера с коэффициентом демпфирования c , которая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка,

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = \begin{cases} f(t), \\ c\dot{u}_0(t) + ku_0(t). \end{cases} \quad (6a)$$

$$(6b)$$

Здесь t — время, $u(t)$ — смещение массы, $f(t)$ — внешняя сила, приложенная к массе, $u_0(t)$ — внешнее кинематическое возбуждение (смещение), приложенное к пружине и демпферу со стороны основания, которое имеет место, например, при испытаниях на вибрационных стендах, точка означает производную по времени.

Механические параметры модели $M-C-K$ выбраны произвольно в качестве основных представителей для всего класса колебательных систем с одной степенью свободы. Реальные системы могут иметь физически другие инерционные, упругие и демпфирующие элементы. Однако, результаты, полученные для модели (6), будут верны и для других представителей этого класса после соответственной замены параметров. Для удобства

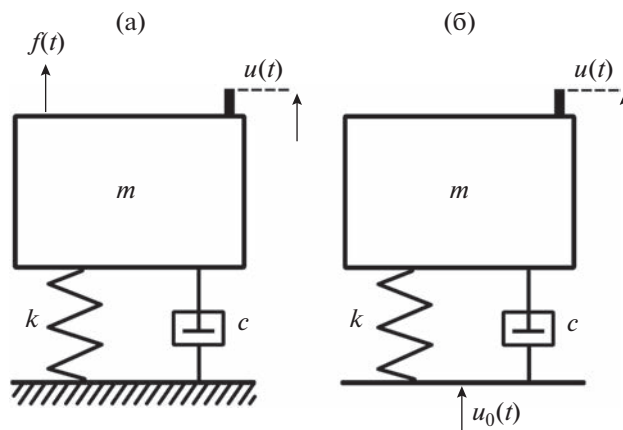


Рис. 1. Общая механическая модель колебательной системы с одной степенью свободы при (а) — силовом и (б) — кинематическом внешнем воздействии.

дальнейшего рассмотрения уравнение (6) поделим на m и представим в виде

$$\ddot{u}(t) + 2\gamma\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \begin{cases} \frac{1}{m} f(t), & (7a) \\ 2\gamma\dot{u}_0(t) + \omega_0^2 u_0(t), & (7b) \end{cases}$$

где введены следующие обозначения: $\gamma = \frac{c}{2m}$ — коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — собственная частота недемпфированной системы.

Напомним некоторые известные свойства колебаний этой структуры. Прежде всего, рассмотрим собственные или свободные колебания осциллятора, которые соответствуют решениям однородного уравнения (7) без правой части. Разыскивая его решение в стандартном виде $u(t) = e^{\lambda t}$, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (8)$$

и два его корня

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -\gamma \pm i\omega_d, & \text{если } 4km > c^2 \text{ (или } \gamma < \omega_0), & (9a) \\ -\gamma = -\omega_0, & \text{если } 4km = c^2 \text{ } (\gamma = \omega_0), & (9b) \\ -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, & \text{если } 4km < c^2 \text{ } (\gamma > \omega_0), & (9b) \end{cases}$$

где $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ — собственная частота демпфированной системы.

В большинстве практических случаев количество демпфирования в системах невелико, и комплексно-сопряженные корни (9а) встречаются чаще всего, а два независимых собственных колебания являются гармоническими функциями частоты ω_d с экспоненциально затухающими амплитудами

$$u_1(t) = e^{-\gamma t + i\omega_d t}, \quad u_2(t) = e^{-\gamma t - i\omega_d t}. \quad (10a)$$

Существует немало и сильно демпфированных систем с большими значениями параметра c , близкими или превышающими критическое значение $c = 2\sqrt{km}$, при котором имеет место один корень двойной кратности (9б). При большем демпфировании рассматриваемая система перестает быть колебательной и все ее собственные движения становятся экспоненциально затухающими. В случае кратного корня (9б) собственные функции равны

$$u_1(t) = e^{-\omega_0 t}; \quad u_2(t) = te^{-\omega_0 t}, \quad (10b)$$

а в случае (9в) — это две затухающие экспоненты вида

$$u_1(t) = e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}, \quad u_2(t) = e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}. \quad (10b)$$

Произвольные свободные движения системы для всех значений демпфирования являются линейными комбинациями собственных функций (10) с амплитудами, однозначно определяемыми по начальным условиям.

Вынужденные колебания механического осциллятора определяются его *импульсной передаточной функцией* $h(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau. \quad (11)$$

Функция $h(t)$ является по определению откликом системы на мгновенный единичный импульс, действующий в момент $t = 0$, и удовлетворяет уравнению (7) с правой частью в виде δ -функции Дирака, $f(t) = \delta(t)$ или $u_0(t) = \delta(t)$. В силу принципа причинности, $h(t) = 0$ при $t < 0$. Во всех дальнейших выкладках для краткости мы будем предполагать, что $\gamma < \omega_0$, т.е. что осциллятор имеет докритическое демпфирование и комплексно-сопряженные корни (9а). Вычисления для сильно демпфированного осциллятора производятся аналогично и далее будут опущены.

Импульсная передаточная функция для силового возбуждения при $t > 0$ равна:

$$h_f(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t), \quad (12a)$$

а для кинематического возбуждения $u_0(t) = \delta(t)$ имеет вид:

$$h_k(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\omega_d} \left[(\omega_d^2 - \gamma^2) \sin(\omega_d t) + 2\gamma\omega_d \cos(\omega_d t) \right]. \quad (12b)$$

При анализе и проектировании колебательных систем важное значение имеют также их спектральные характеристики. Приведем поэтому классическое преобразование Фурье от импульсных передаточных функций (12):

$$H_f(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi m} \right) \frac{1}{\omega^2 - 2i\omega\gamma - \omega_0^2} = |H_f(\omega)| e^{i\theta_f(\omega)}, \quad (13a)$$

$$H_k(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \frac{2i\omega\gamma + \omega_0^2}{\omega^2 - 2i\omega\gamma - \omega_0^2}. \quad (136)$$

Их принято называть *частотными характеристиками* системы (frequency response function или FRF); при этом модуль $|H(\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а угол $\theta(\omega)$ – фазово-частотной характеристикой (ФЧХ) системы. Частотная характеристика, как функция частоты, определена на всей комплексной плоскости ω и обладает свойством симметрии: $H(-\omega) = \bar{H}(\omega)$, где черта сверху означает комплексное сопряжение. Другими словами, ее действительная часть $\text{Re}[H(\omega)]$ является четной функцией частоты, а мнимая часть $\text{Im}[H(\omega)]$ – нечетной. При действии на осциллятор произвольного силового $f(t)$ или кинематического $u_0(t)$ возбуждения спектр его смещения равен, согласно (11), произведению частотной характеристики (13) и спектра Фурье воздействия.

1.1.2. Дискретизация и ARMA-модель. Пусть теперь представленные выше непрерывные по t свободные и вынужденные колебания механического осциллятора рассматриваются только в дискретные равноотстоящие моменты времени $t = nT$, где n – целое число, T – интервал дискретизации, равный обратному значению частоты дискретизации. Выясним, как при этом изменяются уравнения движения, импульсные функции и спектры осциллятора.

Рассмотрим сначала свободные колебания. Дискретизация двух независимых собственных колебаний осциллятора (10) превращает их в два независимых бесконечных временных ряда

$$\begin{aligned} u_1[n] &= u_1(nT) = e^{\lambda_1 T n}, \\ u_2[n] &= u_2(nT) = e^{\lambda_2 T n}. \end{aligned} \quad (14)$$

В соответствии с общей теорией [25], они должны удовлетворять однородному конечно-разностному уравнению, имеющему порядок два, равный числу независимых решений. Запишем это уравнение в следующем авторегрессионном виде

$$u[n] + a_1 u[n-1] + a_2 u[n-2] = 0, \quad (15)$$

где a_1 и a_2 – неизвестные пока постоянные коэффициенты. В литературе часто находят эти коэффициенты непосредственно из однородного непрерывного уравнения (7) путем замены в нем производных по времени конечными разностями. Однако, в данном случае этого делать нельзя, т.к. такая замена приводит к физически неоправданным последствиям – см. Приложение А.

Чтобы найти нужные значения коэффициентов a_1 и a_2 , два независимых решения уравнения (15) представим [25] в стандартном виде как $(u_1)^n$ и $(u_2)^n$, где n – целое, а u_1 и u_2 являются корнями характеристического уравнения

$$u^2 + a_1 u + a_2 = 0, \quad (16)$$

и сравним их с рядами (14). Чтобы эти решения совпадали, требуется, очевидно, выполнение следующих равенств

$$u_1 = e^{\lambda_1 T}, \quad u_2 = e^{\lambda_2 T}, \quad (17)$$

где λ_1 и λ_2 – корни “непрерывного” характеристического уравнения (8). Тогда, по известной теореме Виета, искомые коэффициенты уравнения (15) равны

$$a_1 = -(e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}), \quad a_2 = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}, \quad (18a)$$

или после подстановки значений (9a)

$$a_1 = -2e^{-\gamma T} \cos(\omega_d T), \quad a_2 = e^{-2\gamma T}. \quad (18b)$$

Нетрудно найти и обратные зависимости. Если известны коэффициенты (18) конечно-разностного уравнения (15), то относительные значения двух коэффициентов соответствующего непрерывного уравнения (6) выражаются через них как

$$\begin{aligned} \frac{c}{m} &= -\frac{1}{T} \ln(a_2), \\ \frac{k}{m} &= \left[\frac{1}{T} \ln(\sqrt{a_2}) \right]^2 + \left[\frac{1}{T} \arccos\left(-\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right) \right]^2, \end{aligned} \quad (19a)$$

или в более компактной записи

$$\frac{c}{m} = -\frac{1}{T} \ln(u_1 u_2), \quad \frac{k}{m} = \frac{1}{T^2} \ln(u_1) \ln(u_2), \quad (19b)$$

где u_1 и u_2 – корни характеристического уравнения (16). Для нахождения третьего коэффициента уравнения (6), т.е. массы m механического осциллятора, нужно рассмотреть его вынужденные колебания.

В непрерывной постановке вынужденные колебания осциллятора при различных типах возбуждения полностью характеризуются импульсными передаточными функциями (12), которые после дискретизации превращаются во временные ряды:

$$h_f[n] = \frac{e^{-\gamma T n}}{m\omega_d} \sin(\omega_d T n), \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} h_k[n] &= \frac{e^{-\gamma T n}}{\omega_d} \times \\ &\times \left[(\omega_d^2 - \gamma^2) \sin(\omega_d T n) + 2\gamma\omega_d \cos(\omega_d T n) \right]. \end{aligned} \quad (20b)$$

Найдем теперь конечно-разностные уравнения, которым удовлетворяют ряды (20) при $t \geq 0$. Эти уравнения должны иметь один и тот же вид ARMA-уравнения (1):

$$\begin{aligned} h[n] + a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2] &= \\ &= b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1], \end{aligned} \quad (21)$$

отличаясь только значениями МА-коэффициентов в правой части. Действительно, левая часть (21) должна совпадать с левой АР-частью уравнения (15) с коэффициентами (18), т.к. при $n > 1$ оба ряда (20) по своему определению удовлетворяют (15). Однако, правая часть (21) зависит от типа возбуждения. Для силового возбуждения нужен только один коэффициент, а в случае кинематического возбуждения правая часть (21), имитируя непрерывную дельта-функцию Дирака и ее производную, должна содержать дельта-последовательность Кронекера (3), приложенную в два начальных момента времени $n = 0$ и $n = 1$ с неизвестными пока коэффициентами b_0 и b_1 . Эти коэффициенты мы определим, найдя частное решение уравнения (21) и приравняв его поочередно рядам (20).

Поскольку при $n > 1$ уравнение (21) является однородным, его решение равно комбинации двух решений уравнения (15):

$$h[n] = C_1 (u_1)^n + C_2 (u_2)^n,$$

где u_1 и u_2 — корни характеристического уравнения (16), а C_1 и C_2 — неизвестные константы. Подставив это решение в (21) и положив $n = 0$ и $n = 1$, с учетом $h[n < 0] = 0$ в силу принципа причинности, найдем C_1 и C_2 и частное решение уравнения (21) в виде:

$$h[n] = (b_1 - a_1 b_0) \frac{(u_1)^n - (u_2)^n}{u_1 - u_2} - b_0 \frac{(u_1)^n u_2 - u_1 (u_2)^n}{u_1 - u_2} \quad (22a)$$

или после подстановки в него (13) и (14)

$$h[n] = (b_1 - a_1 b_0) e^{-\gamma T(n-1)} \frac{\sin(\omega_d T n)}{\sin(\omega_d T)} - b_0 e^{-\gamma T n} \frac{\sin[\omega_d T(n-1)]}{\sin(\omega_d T)}, \quad (22b)$$

а также соотношения

$$b_0 = h[0], \quad b_1 = h[1] + a_1 h[0]. \quad (23)$$

Если теперь подставить в (23) значения элементов рядов (20) в начальные моменты времени $n = 0$ и 1 , то найдем искомые коэффициенты b_0 и b_1 уравнения (21). Для силового возбуждения, как и ожидалось, отличен от нуля только один коэффициент

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{T}{m} e^{-\gamma T} \frac{\sin(\omega_d T)}{\omega_d T}, \quad (24a)$$

а для кинематического возбуждения оба коэффициента отличны от нуля

$$b_0 = 2\gamma, \quad b_1 = \frac{e^{-\gamma T}}{\omega_d} \times \left[(\omega_d^2 - \gamma^2) \sin(\omega_d T) - 2\gamma \omega_d \cos(\omega_d T) \right]. \quad (24b)$$

Таким образом, временные ряды (20) удовлетворяют одному и тому же конечно-разностному ARMA-уравнению (21), но с разными коэффициентами правой части. Авторы проверили, что решения (22) уравнения (21) с коэффициентами (24) в точности и для всех n совпадают с рядами (20) дискретизированных непрерывных импульсных функций (12).

Произвольные вынужденные колебания осциллятора в дискретной постановке вычисляются по его импульсным передаточным функциям (20) с помощью дискретной конволюции (2) с функциями возбуждения.

1.1.3. Спектральный анализ. Рассмотрим, как дискретизация изменяет спектр колебаний осциллятора, в частности, как меняются его частотные характеристики (13). Воспользуемся следующей известной теоремой [4], играющей важную роль в теории дискретных систем: дискретизация любой непрерывной функции приводит к периодическому продолжению ее спектра с периодом, равным частоте дискретизации. В нашем случае это означает, что спектр Фурье $H_d(\omega)$ дискретной импульсной функции (20) равен (см. Приложение Б)

$$H_d(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(\omega - m\Omega), \quad (25)$$

где $H(\omega)$ — спектр непрерывной импульсной функции (13), $\Omega = 2\pi/T$ — круговая частота дискретизации. Из этого результата следует одно практически важное ограничение, накладываемое при дискретном анализе колебательных систем на частоту дискретизации, ширину частотной характеристики исследуемой системы и спектра возбуждения $f[n]$ или $u_0[n]$. Оно называется теоремой отсчета Котельникова и заключается в том, что спектр Фурье исследуемого сигнала в непрерывной постановке не должен выходить за рамки частотного интервала $[-\Omega/2, \Omega/2]$. В противном случае, соседние слагаемые в (25) накладываются друг на друга, делая невозможным точное восстановление спектра $H(\omega)$ непрерывного сигнала по спектру $H_d(\omega)$ дискретного сигнала.

Например, при спектральном анализе смещения механического осциллятора с силовым возбуждением и умеренным демпфированием его частотная характеристика (13) является быстро убывающей функцией частоты (убывает как ω^{-2} при $\omega \rightarrow \infty$), так что в интервале $[-2\omega_0, 2\omega_0]$, где ω_0 — это собственная частота осциллятора, содержится, как нетрудно проверить, более 95% энер-

гии сигнала. Частоту $2\omega_0$ поэтому можно считать верхней граничной частотой спектра непрерывного сигнала. Чтобы теорема Котельникова выполнялась, частота дискретизации Ω должна в этом случае быть выбрана выше так называемой частоты Найквиста $\Omega_N = 4\omega_0$, равной удвоенной частоте граничной частоты спектра.

Однако, если механический осциллятор возбуждается кинематически, как показано на рис. 16, или в нем измеряется не смещение, а ускорение, ширина его частотной характеристики увеличивается. Одновременно должна увеличиться частота дискретизации и, как следствие, число вычислений. Еще более широкие спектры имеют сложные колебательные системы с большим числом степеней свободы и собственных частот. В таких случаях следует ограничивать спектры внешнего возбуждения. Подробное обсуждение ограничений при дискретном спектральном анализе приведено в книгах по цифровой обработке сигналов, например, в [4, 14].

Формула (25) полезна для теоретического анализа. Для практических вычислений удобнее применять z -преобразование — см. Приложение Б. Например, чтобы вычислить спектры временных рядов (20), воспользуемся непосредственно уравнением (21) и легко проверяемым свойством z -преобразования: сдвиг временного ряда на один шаг назад эквивалентен умножению z -спектра на z^{-1} . Умножив уравнение (21) на z^{-n} и просуммировав результат, получим формулу

$$H_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (26)$$

которая после подстановки $z = e^{i\omega T}$ с точностью до множителя Ω совпадает с (25). Было проверено, что обращение z -спектра (26) с помощью второй формулы (Б13) в Приложении Б после взятия интеграла вычетами дает дискретные импульсные функции (20). Проверено также, что если рассматривать (26) как функцию частоты ω и взять классическое обратное преобразование Фурье в бесконечных пределах, то получим непрерывные импульсные функции (12), умноженные на функцию дискретизации — см. Приложение Б.

Подведем итоги исследования механического осциллятора. Переход от непрерывного подхода к анализу свободных и вынужденных колебаний осциллятора к дискретному подходу требует существенного изменения математических и физических средств анализа: непрерывные функции заменяются временными рядами; вместо обыкновенных дифференциальных уравнений должны решаться уравнения в конечных разностях; спектры дискретных колебаний всегда являются бесконечными и периодическими независимо от того, каков спектр при непрерывном анализе. Устанавливая соответствие между непрерывным

и дискретным подходами, мы исходили из условия, что временные ряды, описывающие колебания осциллятора, должны совпадать со значениями дискретизированных соответственных непрерывных функций времени. При этом между параметрами непрерывных и дискретных моделей были установлены взаимно однозначные аналитические связи, позволяющие переходить от одной модели к другой и обратно. Было в то же время показано, что это можно делать не всегда и корректный переход от непрерывной модели к дискретной модели возможен только для колебательных систем, спектры колебаний которых ограничены сверху по частоте, т.е. когда выполняется теорема отсчетов Котельникова. Эти выводы верны и для более сложных колебательных систем.

1.2. Колебательная система с N степенями свободы

В этом подразделе результаты, полученные при исследовании механического осциллятора, распространены и на случай линейных колебательных систем с N степенями свободы. Для этих систем существует довольно много векторных моделей, как непрерывных, так и дискретных [12, 27], которые отличаются друг от друга числом используемых переменных. Ниже будут рассмотрены две наиболее распространенные модели — SS-модель и модель черного ящика (фильтра с одним входом и одним выходом). SS-модель использует максимально возможное количество переменных $2N$ в пространстве состояний и удобна для теоретических исследований. Модель черного ящика использует одну переменную и удобна в экспериментальных исследованиях. Следуя принятой в статье общей схеме исследования, ниже для обоих случаев сначала формулируется непрерывная модель, а затем по ней строится соответственная дискретная модель. Как и для механического осциллятора, между дифференциальными и конечно-разностными уравнениями, их параметрами и решениями будут установлены аналитические связи.

1.2.1. Общая непрерывная модель. Для описания колебательных и волновых процессов сложных систем в акустике традиционно применяются две основные модели — пространственно непрерывные упругие среды, описываемые уравнениями в частных производных и граничными условиями, а также структуры, состоящие из сосредоточенных элементов и описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Время в обеих моделях считается непрерывным. В последние годы, благодаря повсеместному применению метода конечных элементов, эти модели сближаются, отличаясь количеством степеней свободы. Поэтому в качестве наиболее общей непрерывной акустической модели колебательных систем мы примем здесь вторую модель, т.е. дискретную

структуру, состоящую из N масс, соединенных между собой (и с основанием) сосредоточенными упругостями и вязкими демпферами. Модель хорошо изучена и описывается практически во всех учебниках и справочниках по акустике [28, 29]. Как и в случае механического осциллятора, выбор M – C – K в качестве параметров модели является условным, вместо них могут подразумеваться физически другие сосредоточенные элементы. Модель описывается системой N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}(t), \\ \hat{K}\mathbf{u}_0(t) + \hat{C}\dot{\mathbf{u}}_0(t), \end{cases} \quad (27)$$

где $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_N(t)]^T$, $\mathbf{u}_0(t) = [u_{01}(t), \dots, u_{0N}(t)]^T$ и $\mathbf{f}(t) = [f_1(t), \dots, f_N(t)]^T$ – это N -векторы обобщенных смещений масс, смещений основания и внешних сил, приложенных к массам, инерционная $N \times N$ -матрица M действительна, симметрична и положительно определена, упругая матрица K и матрица C вязких демпферов действительны, симметричны и не-

отрицательны, $\hat{K} = \text{diag}\{K_{11}, K_{22}, \dots, K_{NN}\}$ и $\hat{C} = \text{diag}\{C_{11}, C_{22}, \dots, C_{NN}\}$. Уравнения (27) описывают колебания широкого класса колебательных систем с N степенями свободы, в том числе конечно-элементные модели. Уравнения отличаются от общепринятых добавлением варианта с кинематическим возбуждением $\mathbf{u}_0(t)$. Примерами задач с таким возбуждением могут служить колебания зданий во время землетрясений, а также стендовые испытания конструкций на вибрационных столах.

1.2.2. SS-модели. Для представления модели (27) в виде непрерывной SS-модели в пространстве состояний нужно удвоить количество переменных, например, приняв скорости масс $\dot{\mathbf{u}}(t)$ в качестве дополнительных N переменных. Система (27) N уравнений второго порядка запишется тогда в виде следующей системы $2N$ уравнений первого порядка:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = U\mathbf{y}(t) + V\mathbf{g}(t), \quad (28)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_\alpha(t) \\ \mathbf{y}_\beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\alpha(t) \\ \mathbf{g}_\beta(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} [0, \mathbf{f}(t)]^T & \text{для силового возбуждения,} \\ [0, \hat{K}\mathbf{u}_0(t) + \hat{C}\dot{\mathbf{u}}_0(t)]^T & \text{для кинематического возбуждения,} \end{cases}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha} & U_{\alpha\beta} \\ U_{\beta\alpha} & U_{\beta\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix},$$

индексы α и β в блочном представлении векторов и матриц соответствуют значениям $\alpha = \{1, 2, \dots, N\}$ и $\beta = \{N+1, \dots, 2N\}$.

Положим, что при $t < 0$ система уже совершала свободные колебания, так что в момент времени $t = 0$ она приобрела смещение и скорости $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, которые примем за начальные условия задачи. Кроме того, будем считать, что при $t < 0$ внешнее возбуждение отсутствует, начинает действовать в момент $t = 0$ и продолжает действовать в последующее время. При таких условиях решение системы (28) записывается в виде суммы двух слагаемых – общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы уравнений

$$\mathbf{y}(t) = e^{Ut} \mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{U(t-\tau)} V \mathbf{g}(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Это решение взято из книги Ф.Р. Гантмахера [30], где также подробно разъяснено, как вычислять функции от матриц.

Как и в случае механического осциллятора, вынужденные колебания рассматриваемой системы удобно выразить через импульсную передаточную вектор-функцию $\mathbf{h}(t)$ – см. (11). Она описывается вторым слагаемым в (29), если в него вместо N -вектора $\mathbf{f}(t)$ или $\mathbf{u}_0(t)$ подставлять вектор $\mathbf{e}\delta(t)$, где $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ – это N -вектор с единичными элементами, $\delta(t)$ – это дельта-функция Дирака. В результате для силового возбуждения получим

$$\mathbf{h}_f(t) = e^{Ut} V \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (30a)$$

Для кинематического возбуждения нужно сначала с помощью интегрирования по частям преобразовать слагаемое с производной от дельта-функции и затем произвести интегрирование. В результате имеем:

$$\mathbf{h}_k(t) = e^{Ut} \left(V \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{K}\mathbf{e} \end{bmatrix} + UV \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{C}\mathbf{e} \end{bmatrix} \right), \quad (30b)$$

где $N \times N$ -матрицы $\hat{K}$ и $\hat{C}$ даны в (27). Дискретизация полученных решений (29), (30) сводится к замене $t = nT$, T — интервал дискретизации, превращая эти непрерывные векторные функции во временные векторные ряды.

Рассмотрим теперь дискретный подход к анализу колебательной системы с N степенями свободы и покажем, каким конечно-разностным уравнениям удовлетворяют временные ряды дискретизированных непрерывных решений, а также установим аналитическую связь между параметрами непрерывной и дискретной моделей. Как и при непрерывном подходе, воспользуемся для этого дискретной SS-моделью как наиболее общей среди всех дискретных моделей. В данном случае эта модель описывается следующей системой $2N$ конечно-разностных уравнений первого порядка

$$\mathbf{x}[n] = A\mathbf{x}[n-1] + B\mathbf{w}[n], \quad (31)$$

где $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{w}[n]$ — это $2N$ -векторы состояния и внешних воздействий, A — матрица порядка $2N$ параметров рассматриваемой системы и B — это $2N \times 2N$ -матрица, зависящая от особенностей внешнего воздействия, например, силового или кинематического, и учитывающая формальные особенности модели, такие как умножение возбуждения на обратную инерционную матрицу или V в (28) и другие. Порядок этой модели определен количеством переменных, необходимых для полного описания всех степеней свободы, т.е. равен $2N$. При тех же условиях, что и в непрерывном подходе, т.е. при начальных условиях $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$ и при отсутствии внешнего возбуждения при отрицательных $n < 0$, решение системы уравнений находится стандартным способом [25] и равно

$$\mathbf{x}[n] = A^n \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^n A^{n-k} B \mathbf{w}[k]. \quad (32)$$

Первое слагаемое описывает свободные колебания, второе — вынужденные.

Найдем связь между параметрами A и B дискретной SS-модели (31) и материальными параметрами U и V непрерывной SS-модели (28), исходя из условия равенства $2N$ -векторов состояния решений (29) и (32) во всех дискретных моментах времени nT при свободных и при вынужденных колебаниях, иначе говоря, из равенства $\mathbf{x}[n] = \mathbf{y}(nT)$.

Приравнивая свободные колебания (первые слагаемые в (29) и (32)), непосредственно получаем соотношение

$$A = e^{UT}, \quad (33)$$

которое позволяет вычислить авторегрессионные параметры дискретной SS-модели рассматриваемой колебательной системы по известным материальным параметрам M , C , K непрерывной мо-

дели, точнее по их отношениям $M^{-1}K$ и $M^{-1}C$. Верно и обратное утверждение: если известна авторегрессионная матрица A колебательной системы, то по ней можно найти отношения матриц материальных параметров:

$$U = \frac{1}{T} \ln(A) \text{ или } M^{-1}K = U_{\beta\alpha}, \quad M^{-1}C = U_{\beta\beta}. \quad (34)$$

Чтобы связать с материальными параметрами вторую матрицу дискретной SS-модели (31) — матрицу B , достаточно приравнять соответственные векторы импульсных переходных временных рядов. Для непрерывной модели этот вектор равен (30) для $t = nT$, а для дискретной модели он равен второму слагаемому решения (32), в котором внешнее воздействие отлично от нуля только в момент времени $kT = 0$ и соответствует $2N$ -вектору $\mathbf{w}[0]$, в котором каждый элемент равен единице, точнее:

$$\mathbf{h}[n] = A^n B \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

В результате, приравнивая (35) и $\mathbf{h}_f(nT)$ в (30а), получим, что для силового возбуждения системы искомая матрица равна:

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (36a)$$

А приравнивая (35) и $\mathbf{h}_k(nT)$ в (30б), для кинематического возбуждения получим:

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & U_{\alpha\beta} M^{-1} \hat{C} \\ 0 & M^{-1} \hat{K} + U_{\beta\beta} M^{-1} \hat{C} \end{bmatrix}. \quad (36b)$$

Формулы (36) дают возможность определить матрицу B в дискретной модели (31), если известны все материальные параметры непрерывной модели. В случае силового возбуждения верно и обратное: зная матрицу B_f , можно вычислить инерционную матрицу системы:

$$M = (B_{\beta\beta})^{-1},$$

которая вместе с формулами (34) определяет все материальные параметры колебательной системы M , C , K . Однако, для кинематического возбуждения это не так: по известным матрицам A и B_k можно найти только некоторые отношения материальных матриц. Чтобы определить все материальные матрицы колебательной системы в отдельности, включая матрицы $\hat{C}$ и $\hat{K}$, которые характеризуют соединение системы с вибрирующим основанием, необходимо знание матрицы A и обеих матриц (36).

Нетрудно проверить, что для случая $N = 1$, т.е. для колебательной системы с одной степенью свободы, полученные в этом подразделе результа-

ты в точности совпадают с результатами, полученными выше для механического осциллятора. В этом случае для непрерывной SS-модели (28) имеем следующие параметры

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\omega_0^2 & -2\gamma \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix},$$

а для дискретной модели (31) они равны

$$A = e^{UT} = e^{-\gamma T} \begin{bmatrix} \cos(\omega_d T) + \frac{\gamma}{\omega_d} \sin(\omega_d T) & \frac{1}{\omega_d} \sin(\omega_d T) \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_d} \sin(\omega_d T) & \cos(\omega_d T) - \frac{\gamma}{\omega_d} \sin(\omega_d T) \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} 0 & 2\gamma \\ 0 & \omega_0^2 - 4\gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Проверено, что, исключив из векторов состояния x и y вторую компоненту (скорость), из этих уравнений можно получить все соотношения, приведенные в п. 1.1.1.

1.2.3. Одномерная модель черного ящика. Векторные SS-модели колебательных систем со многими степенями свободы и соответственные уравнения и их решения удобны для теоретического анализа свободных и вынужденных колебаний. Однако они содержат много переменных и неудобны для экспериментального анализа сложных систем. Современные эксперименты, как правило, ограничиваются измерениями в небольшом числе точек и для их описания требуются более простые модели. В этом подразделе рассматривается простейший случай, когда колебания системы измеряются только в одной точке и возбуждение производится тоже в одной точке, этой же или другой. Для описания такого эксперимента, очевидно, достаточно модели черного ящика с одной скалярной переменной. Как будет показано далее, в непрерывном варианте модель описывается одним обыкновенным дифференциальным уравнением порядка $2N$ с правой частью, содержащей помимо самого возбуждения также множество его производных. А соответственная дискретная модель является в общем случае ARMA-моделью (1) порядка $(2N, 2N)$, конечно-элементное уравнение которой содержит $2N$ авторегрессионных коэффициентов и $2N$ коэффициентов скользящего среднего для кинематического возбуждения и $2N-1$ для силового возбуждения. Для этих моделей ниже будут установлены аналитические связи между коэффициентами и решениями их уравнений, которые, как и в случае механического осциллятора и SS-моделей, позволяют строить дискретную модель по известной непрерывной модели и, наоборот, непрерывную модель по известной дискретной модели. Начнем с вывода дифференциального уравнения для непрерывной модели.

Рассмотрим снова систему уравнений (27) с силовым возбуждением и преобразуем ее следующим образом. Введя для краткости обозначение

для производной по времени $\partial = \frac{d}{dt}$, перепишем систему (27) в виде: $D(\partial)u(t) = f(t)$, где каждый элемент $N \times N$ -матрицы $D(\partial)$ является полиномом второй степени относительно оператора ∂ . Формальным решением системы является $u(t) = D^{-1}(\partial)f(t)$, в котором j -ая компонента смещения удовлетворяет соотношению [30]

$$|D(\partial)|u_j(t) = \sum_{k=1}^N A_{jk}(\partial)f_k(t). \quad (37)$$

Здесь $|D(\partial)|$ – определитель матрицы $D(\partial)$, а $A_{jk}(\partial)$ – алгебраическое дополнение ее элемента $D_{kj}(\partial)$. Определитель $|D(\partial)|$ есть полином по ∂ степени $2N$, а определитель $A_{jk}(\partial)$ – полином степени $(2N-2)$. Поэтому соотношение (37) фактически является обыкновенным дифференциальным уравнением $2N$ -го порядка для смещения $u_j(t)$ с правой частью в виде заданных внешних сил и их производных по времени. Очевидно, что другие компоненты смещения удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению, что и (37), отличаясь друг от друга правыми частями.

Физический смысл уравнения (37) состоит в том, что оно описывает передачу колебаний от N источников (сил) на j -ую массу N различными путями. Если источник только один, например, $f_k(t)$, то уравнение (37) описывает один такой путь передачи колебаний от силы $f_k(t)$, приложенной к массе с номером k , на массу с номером j . Этот путь, очевидно, ветвистый и объединяет множество “дорожек”, проходящих через всю колебательную систему и соединяющих эти две массы. В уравнении (37) этот факт отражается в виде производных различного порядка от $f_k(t)$. Для одного пути передачи колебаний, т.е. для колебаний в одной точке колебательной системы, вызванных возбуждением в другой точке, уравнение (37) записывается после деления на коэффициент при старшей производной как

$$\left(\partial^{2N} + \sum_{l=1}^{2N} \alpha_l \partial^{2N-l} \right) u_j(t) = \sum_{m=0}^{2N-2} \beta_m \partial^m f_k(t).$$

Если к k -ой массе вместо силы $f_k(t)$ приложено кинематическое возбуждение $u_{k0}(t)$ аналогично тому, как показано на рис. 1б для механического осциллятора, число производных в правой части уравнения увеличивается на единицу. Далее в этом подразделе мы не будем указывать, какой именно путь и какое возбуждение имеется в виду, так как они однотипны, и рассмотрим одно общее уравнение, верное для всех этих случаев:

$$\begin{aligned} u^{(2N)}(t) + \alpha_1 u^{(2N-1)}(t) + \dots + \alpha_{2N-1} u^{(1)}(t) + \\ + \alpha_{2N} u(t) = \beta_0 f(t) + \\ + \beta_1 f^{(1)}(t) + \dots + \beta_{2N-1} f^{(2N-1)}(t), \end{aligned} \quad (38)$$

где $u(t)$ означает смещение какой-либо массы, а $f(t)$ — силу или смещение основания, действующие на эту или другую массу рассматриваемой колебательной системы. Верхние индексы в круглых скобках обозначают производные по времени соответственных порядков.

Отметим основные особенности уравнения (38). Главная из них это то, что для всех путей передачи, т.е. для всех $u_j(t)$, левая часть дифференциального уравнения (38) одна и та же. Это линейный дифференциальный оператор, порядок которого равен удвоенному числу степеней свободы колебательной системы. Физически это вполне объяснимо, т.к. свободные колебания системы, описываемые однородным уравнением (38), определяются только внутренними параметрами системы в целом и не зависят от того, где их наблюдают или как их возбуждают. Эта особенность дает теоретическое обоснование положения о том, что по измерениям колебаний в нескольких или даже в одной точке сложной колебательной системы можно получить полную информацию о собственных частотах, потерях и некоторых других свойствах системы в целом.

Еще одна важная особенность уравнения (38) — это структура его правой части, которая помимо силы $f_k(t)$ или смещения основания $u_{0k}(t)$ содержит множество их производных. Наличие производных связано с тем, что, как отмечалось выше, передача колебаний по системе происходит по многим дорожкам вязко-упруго соединенных масс. Чем больше связей между массами, тем больше дорожек, соединяющих источник с точкой наблюдения и тем больше слагаемых с производными. В общем же случае число коэффициентов $\{\alpha_j\}$ дифференциального уравнения (38) и коэффициентов $\{\beta_j\}$ его правой части одинаково и равно удвоенному числу степеней свободы системы.

Дискретным аналогом дифференциального уравнения (38) является конечно-разностное уравнение типа ARMA-уравнения (1), у которого число авторегрессионных коэффициентов совпа-

дает с числом коэффициентов скользящего среднего и равно удвоенному числу степеней свободы исследуемой системы:

$$\begin{aligned} x[n] + a_1 x[n-1] + \\ + a_2 x[n-2] + \dots + a_{2N} x[n-2N] = \\ = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + \\ + \dots + b_{2N-1} w[n-2N+1], \end{aligned} \quad (39)$$

где $x[n]$ — скалярный временной ряд (в данном случае смещение какой-либо массы), $w[n]$ — внешнее возбуждение. Число ненулевых коэффициентов скользящего среднего в случае силового возбуждения равно $2N-1$, т.е. на единицу меньше. Отметим, что результаты (38), (39) для силового возбуждения были получены другим методом в работе [31].

Найдем связь между коэффициентами $\{\alpha_j, \beta_j\}$ дифференциального уравнения (38) и коэффициентами $\{a_k, b_k\}$ ARMA-уравнения (39). Однородное непрерывное уравнение (38) имеет $2N$ независимых решений вида

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \dots, u_{2N}(t) = e^{\lambda_{2N} t}, \quad (40)$$

где λ_k — это корни характеристического уравнения

$$\lambda^{2N} + \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \lambda^{2N-k} = 0. \quad (41)$$

Так как коэффициенты этого уравнения действительны, то все его мнимые и комплексные корни состоят из сопряженных пар.

Однородное ARMA-уравнение (39) также имеет $2N$ независимых решений вида [25]:

$$x_1[n] = (x_1)^n, \dots, x_{2N}[n] = (x_{2N})^n, \quad (42)$$

где x_k — это корни характеристического уравнения

$$x^{2N} + \sum_{m=1}^{2N} a_m x^{2N-m} = 0. \quad (43)$$

Приравнявая ряды (42) и временные ряды, полученные дискретизацией непрерывных решений (40), $u_k(nT) = x_k[n]$, $k = 1, 2, \dots, 2N$, найдем аналитическую связь между корнями характеристических уравнений (41) и (43)

$$x_k = e^{\lambda_k T}, \quad k = 1, \dots, 2N. \quad (44)$$

А так как коэффициенты характеристических уравнений равны коэффициентам $\{\alpha_k\}$, $\{a_k\}$ уравнений (38) и (39) и, по теореме Виета, аналитически выражаются через корни этих уравнений, то соотношения (44) позволяют установить следующую связь между коэффициентами $\{\alpha_k\}$ и $\{a_k\}$. Если известно уравнение (38) и, следовательно, известны его коэффициенты $\{\alpha_k\}$ и корни $\{\lambda_k\}$, то авторегрессионные коэффициенты $\{a_k\}$ выражаются через них как

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(x_1 + x_2 + \dots + x_{2N}) = \\
&= e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} + \dots + e^{\lambda_{2N} T}, \\
a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{2N-1} x_{2N} = \\
&= e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T} + \dots + e^{(\lambda_{2N-1} + \lambda_{2N}) T}, \\
&\dots \\
a_{2N} &= \prod_{k=1}^{2N} x_k = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{2N}) T} = e^{-\alpha_1 T}.
\end{aligned} \quad (45)$$

Обратно, если известно ARMA-уравнение (39) и, соответственно, известны коэффициенты a_k и корни x_k , то коэффициенты дифференциального уравнения (38) равны

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{2N}) = \\
&= -\frac{1}{T} \ln(x_1 x_2 \dots x_{2N}) = -\frac{1}{T} \ln(a_{2N}), \\
\alpha_2 &= \frac{1}{T^2} [\ln(x_1) \ln(x_2) + \dots + \ln(x_{2N-1}) \ln(x_{2N})], \\
&\dots \\
\alpha_{2N} &= \frac{1}{T^{2N}} \prod_{k=1}^{2N} \ln(x_k).
\end{aligned} \quad (46)$$

Связь коэффициентов (45) и (46), очевидно, неявная и выражена через корни характеристических уравнений $\{\lambda_k\}$ и $\{x_k\}$, которые между собой связаны функционально в (44). Но если удастся корни исключить из уравнений (44), (45) и (46), то связь становится явной как, например, в случае механического осциллятора — см. (18) и (19).

Связь между правыми частями уравнений (38) и (39) получим, как и в случае механического осциллятора, приравняв их импульсные передаточные функции. Импульсную функцию для непрерывного случая получим, применив преобразование Фурье к уравнению (38), положив в нем в качестве внешнего воздействия дельта-функцию Дирака, $f(t) = \delta(t)$. Прямое Фурье-преобразование дает следующую частотную характеристику системы

$$H(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\beta_0 + \beta_1 \lambda + \dots + \beta_{2N-1} \lambda^{2N-1}}{\lambda^{2N} + \alpha_1 \lambda^{2N-1} + \dots + \alpha_{2N}} = \frac{1}{2\pi} \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}, \quad (47)$$

$\lambda = i\omega,$

представленную в виде отношения двух полиномов от частоты. Вычисление вычетов обратного Фурье-преобразования после подстановки $t = nT$ дает искомую импульсную передаточную функцию, дискретизированную по времени

$$h[n] = h(nT) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{B(\lambda_k)}{dA(\lambda_k)/d\lambda} e^{\lambda_k T n}, \quad (48)$$

где λ_k — это корни характеристического уравнения (41).

Импульсную функцию для дискретного случая получим, применив z -преобразование к ARMA-уравнению (39), в котором в качестве внешнего возбуждения использована дельта-последовательность Кронекера (3). Прямое z -преобразование дает частотную характеристику системы

$$H_d(z) = z \frac{b_0 z^{2N-1} + b_1 z^{2N-2} + \dots + b_{2N-1}}{z^{2N} + a_1 z^{2N-1} + \dots + a_{2N}} = z \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad (49)$$

$z = e^{i\omega T},$

которая, как и (47), представлена в виде отношения двух полиномов с той лишь разницей, что в (49) переменной полиномов является экспоненциальная функция $\exp(i\omega T)$, периодическая с частотой дискретизации $\Omega = 2\pi/T$. Вычисление вычетов обратного z -преобразования (см. Приложение Б) дает искомую импульсную передаточную функцию в виде временного ряда

$$h_d[n] = \sum_{k=1}^{2N} \frac{Q(z_k)}{P'(z_k)} z_k^n, \quad (50)$$

где z_k — корни характеристического уравнения (43), совпадающие со значениями x_k , штрих означает производную по z .

По принятому условию, временные ряды (48) и (50) должны совпадать, и равенство

$$h(nT) = h_d[n] \quad (51)$$

должно выполняться при любых n . Выше уже была установлена связь (44) между корнями характеристических уравнений (41) и (43), а также связь (46), (47) между коэффициентами дифференциального уравнения (38) и авторегрессионными коэффициентами уравнения (39). Поэтому все эти величины будем считать известными, а равенство (51) используем для установления прямой связи между коэффициентами $\{\beta_k\}$ и $\{b_k\}$ в правых частях уравнений (38) и (39). Поскольку число этих коэффициентов равно $2N$, то, положив число n в (51) равным $2N$ независимым значениям, например, $n = 1, 2, \dots, 2N$, получим систему $2N$ алгебраических линейных уравнений, которая устанавливает требуемую связь между векторами коэффициентов $\mathbf{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2N-1}]^T$ и $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{2N-1}]^T$:

$$R\mathbf{\beta} = S\mathbf{b}, \quad (52)$$

где элементы $2N \times 2N$ -матриц R и S равны

$$\begin{aligned}
R_{nm} &= \sum_{k=1}^{2N} \frac{\lambda_k^{m-1} e^{\lambda_k T(n-1)}}{A'(\lambda_k)}, \\
S_{nm} &= \sum_{k=1}^{2N} \frac{z_k^{2N+n-m-1}}{P'(z_k)}, \quad z_k = e^{\lambda_k T}.
\end{aligned}$$

Если известны коэффициенты β , т.е. известно дифференциальное уравнение (38), то коэффициенты $\mathbf{b}$ скользящего среднего в ARMA-уравнении (39) равны $\mathbf{b} = S^{-1}R\beta$, и наоборот.

В частности, для механического осциллятора $N = 1$ имеем:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 T} - \lambda_2 e^{\lambda_2 T}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} & 1 \end{bmatrix},$$

где $\lambda_{1,2}$ даны в (9). Нетрудно проверить, что соотношение (52) с матрицами (53) верно как для силового (вектор $\beta = [0, 1/m]^T$ дан в (7а); $\mathbf{b}$ дан в (24а)), так и для кинематического возбуждения ($\beta = [\omega_0^2, 2\gamma]^T = [\lambda_1 \lambda_2, -(\lambda_1 + \lambda_2)]^T$ дан в (7б); $\mathbf{b}$ дан в (24б)).

Таким образом, все результаты, полученные для механического осциллятора, распространены на произвольные линейные колебательные системы со многими степенями свободы. Для наиболее известных непрерывных моделей этих систем построены дискретные аналоги и показано, что они одинаково полно описывают свободные и вынужденные колебания систем. Критерием их эквивалентности в статье принято считать равенство их смещений во все дискретные моменты времени. Между параметрами и решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, которыми описываются непрерывные модели, и конечно-разностных уравнений дискретных моделей установлены аналитические связи, позволяющие строить дискретные модели по непрерывным моделям и, наоборот, строить непрерывные модели по дискретным моделям. Однако непрерывные модели и их дискретные аналоги имеют разные структуры, используют разные математические аппараты и физические интерпретации результатов. Поэтому при решении одних и тех же задач они могут сильно отличаться по физическим свойствам результатов, по области применимости и эффективности. В частности, решение некоторых акустических задач оказывается предпочтительнее при использовании именно дискретных моделей. Таковыми являются, например, задачи моделирования сложных колебательных систем по экспериментальным данным, типовые задачи модального анализа и другие.

2. ПОСТРОЕНИЕ ARMA-МОДЕЛИ

Одним из достоинств дискретного подхода к анализу колебательных систем является простота построения их ARMA-моделей по экспериментальным данным. Действительно, как видно из ARMA-уравнений (1) и (39), неизвестные пара-

метры модели — коэффициенты авторегрессии a_p и скользящего среднего b_q входят в эти уравнения линейно и легко находятся с помощью стандартных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, если известны (экспериментально измерены) временные ряды $x[n]$ и $w[n]$ — см., например, [12, 23, 31–33]. Единственное затруднение, которое может при этом возникнуть, состоит в том, что порядок модели, т.е. количество неизвестных коэффициентов, необходимо знать заранее.

В общей теории идентификации динамических систем [10–13] определение порядка модели является одной из основных не решенных до конца проблем моделирования и ей уделено в литературе много внимания. Был предложен целый ряд критериев, по которым оценивают адекватность модели и ее порядок. Наиболее часто используются так называемые информационные критерии, основанные на оценке количества информации в модельных сигналах, а также критерии, основанные на оценке способности модели правильно прогнозировать случайные временные ряды [11, 12, 34, 35]. Для вычисления некоторых из этих критериев в МАТЛАБе составлены стандартные программы [36]. Однако, как следует из публикаций, эффективность этих критериев зависит от решаемой задачи, так что универсального критерия, по-видимому, не существует, по крайней мере, для моделирования сложных динамических систем.

Несколько иная ситуация имеет место в акустике при дискретном моделировании колебательных систем с N степенями свободы. Выше в п. 1 статьи приведен теоретический результат, который облегчает определение порядка ARMA-модели таких систем. Результат устанавливает однозначную аналитическую связь между порядком ARMA-модели и числом N степеней свободы системы, найти которое как правило нетрудно, например, по числу резонансных частот в спектре колебаний. Помимо этого, для нахождения наилучшей модели или ее подтверждения мы предлагаем количественный критерий адекватности модели, названный энергетическим критерием ЕС. Он определяется как отношение разности спектральных плотностей мощности (PSD) колебаний системы и модели к PSD системы:

$$EC = \frac{\int |\text{PSD}_{\text{system}} - \text{PSD}_{\text{model}}| d\omega}{\int \text{PSD}_{\text{system}} d\omega}, \quad (54)$$

где интегрирование производится по рабочему диапазону частот. Он количественно характеризует точность модели по мощности сигналов, что выгодно отличает его от других известных критериев при решении акустических задач.

В качестве примера рассмотрим простейшую колебательную систему — механический осциллятор, экспериментально исследованный ранее

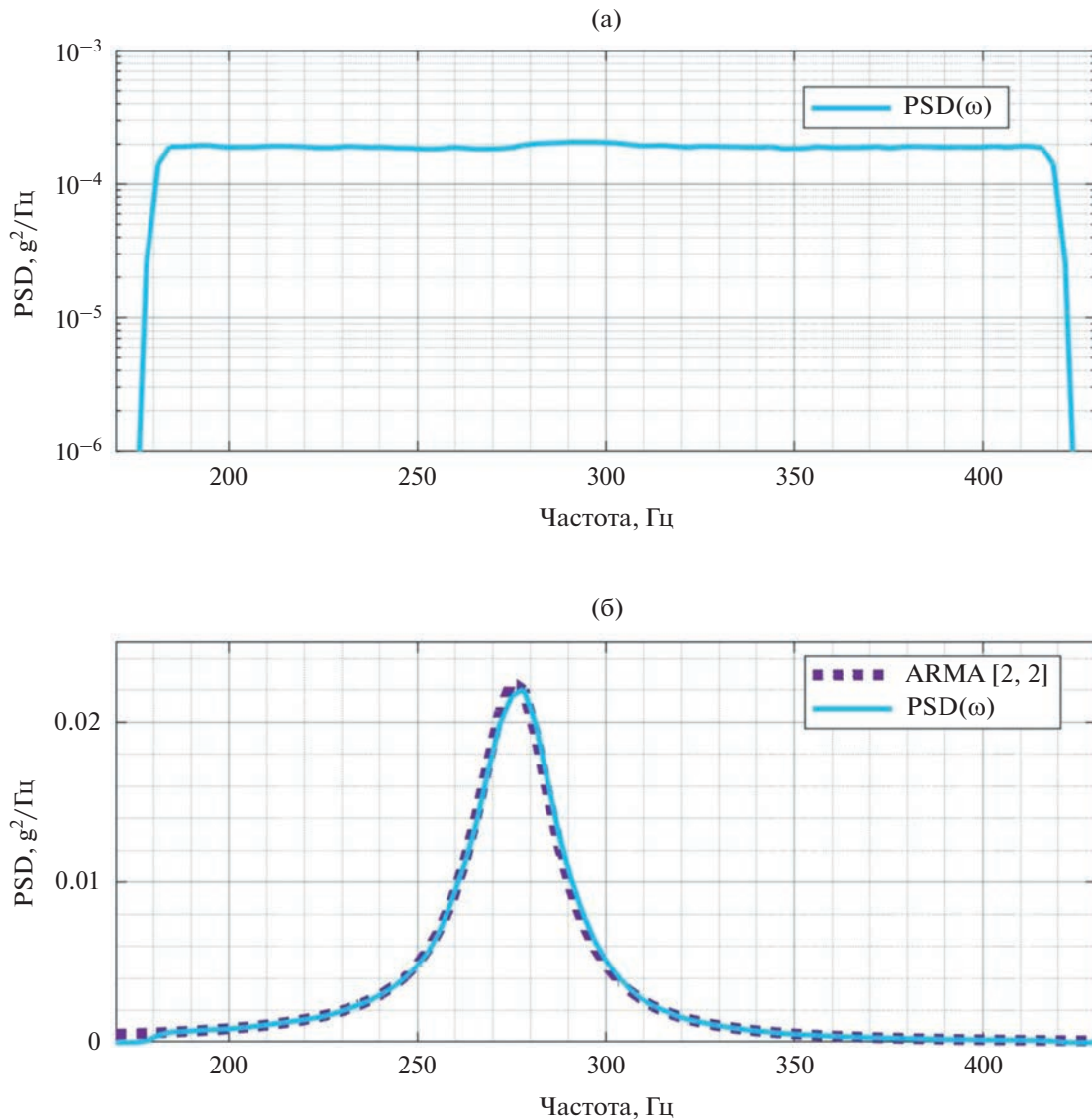


Рис. 2. Спектральная плотность мощности (а) — ускорения входного кинематического воздействия и (б) — ускорения массы осциллятора.

одним из авторов данной статьи с целью определения в ней количества демпфирования [23]. Осциллятор возбуждался кинематически на одном из вибростендов случайным сигналом, имеющим постоянную спектральную плотность мощности в рабочем диапазоне частот — см. рис. 2а. Спектр колебаний массы осциллятора (рис. 2б) содержит один резонанс на частоте $f_0 = 275 \text{ Гц}$. Следовательно, система имеет одну степень свободы, и порядок ее ARMA-модели был принят равным (2, 2). Все четыре коэффициента ARMA-уравнения были определены в [23], найдены материальные параметры (масса, жесткость, коэффициент демпфирования) и модальные параметры (собственная частота недемпфированной системы и коэффициент потерь). Они совпали с большой точностью со значениями, измеренными другими способами.

На рис. 3а приведен также график критерия ЕС как функции двух переменных — количества авторегрессионных коэффициентов AR и коэффициентов MA скользящего среднего. По графику видно, что порядок (2, 2) соответствует малому значению критерия, $\text{ЕС}(2, 2) = 0.012$. При меньших порядках значение критерия, т.е. ошибка моделирования, сильно возрастает. При больших порядках ошибка моделирования также невелика, поэтому любая модель порядка больше (2, 2) допустима для использования, однако, требует значительно большего объема вычислений по сравнению с моделью (2, 2). Таким образом, как следует из рис. 3а, для рассматриваемой системы существует много приемлемых моделей, однако, наилучшая из них соответствует минимальному значению порядка, который совпадает с найден-

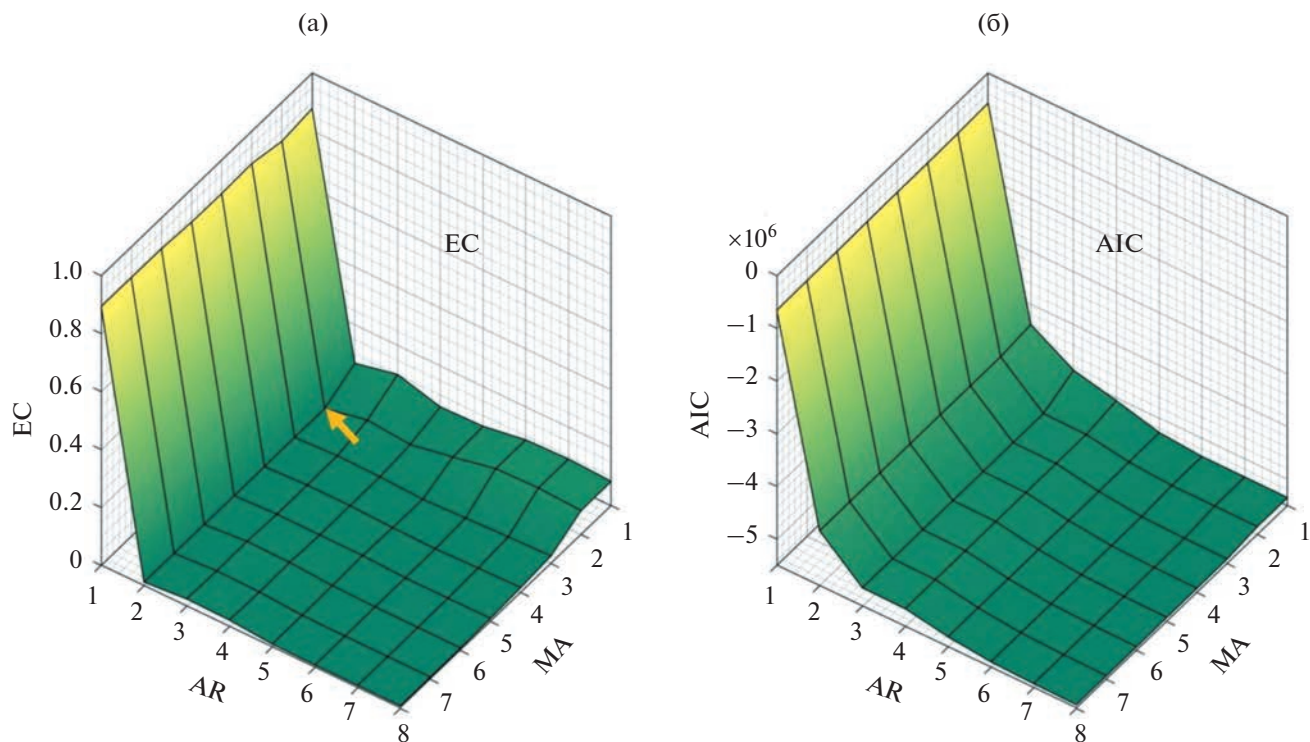


Рис. 3. Графики адекватности ARMA-моделирования осциллятора для различных значений порядка модели (AR, MA) согласно (а) — энергетическому критерию (54) и (б) — информационному критерию Акаике; стрелкой указана модель (2, 2).

ным выше теоретическим значением (2, 2). Для справки на рис. 3б приведен график наиболее популярного в литературе информационного критерия Акаике AIC [34]. Он, как можно видеть, приводит в данном случае к несколько завышенному значению порядка модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одной из наиболее ранних и развитых областей математики является теория временных рядов, т.е. моделирование и анализ временных процессов, детерминированных и случайных, заданных в дискретные моменты времени. Известны ее богатые на результаты приложения в области спектрального анализа, в теории автоматического регулирования (теории управления) и других областях науки, в том числе не связанных с техникой. Однако в акустике методы дискретно-временного анализа пока не нашли должного применения, несмотря на их достоинства и перспективы. Данная статья направлена на то, чтобы частично исправить эту ситуацию. В ней создана теоретическая основа дискретно-временного подхода к решению акустических задач, связанных с линейной системой из сосредоточенных параметров с N степенями свободы. Свободные и вынужденные колебания этой системы под действием внешних сил хорошо изучены в непрерывно-временной постановке. В данной статье, в добавление к из-

вестным в литературе результатам, учтены также вынужденные колебания этой системы под действием кинематического возбуждения, которое имеет место во многих практических задачах. В статье получены следующие основные результаты.

- Сформулирован критерий эквивалентности дискретной и непрерывной моделей колебательной системы: они должны давать одинаковые решения во все дискретные моменты времени.

- На основе критерия эквивалентности для нескольких непрерывных моделей системы с N степенями свободы (модели в пространстве состояний, модели черного ящика) построены соответственные дискретно-временные модели, конечно-разностные уравнения и их решения.

- Получены аналитические соотношения между параметрами дифференциальных уравнений непрерывных моделей и параметрами соответственных конечно-разностных уравнений дискретных моделей; эти соотношения позволяют однозначно строить дискретно-временную модель системы по известной непрерывной модели и, наоборот, непрерывную модель по дискретной.

- Показано, что ARMA-модель системы с N степенями свободы, совершающей вынужденные колебания под действием кинематического возбуждения, имеет порядок $(2N, 2N)$, а под действием силового возбуждения — порядок $(2N, 2N - 1)$.

– Предложен энергетический критерий адекватности ARMA-модели, характеризующий точность моделирования по спектральной плотности мощности колебаний.

Представленная статья посвящена теории. Ее применение к решению практических задач, в частности, актуальной, но еще не решенной до конца, задачи экспериментального определения количества демпфирования в колебательных системах, авторы планируют на ближайшее время.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ЗАМЕНА ПРОИЗВОДНЫХ КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Одним из часто используемых в литературе методов построения дискретных конечно-разностных уравнений по известному непрерывному дифференциальному уравнению является метод, основанный на простой замене производных соответственными конечными разностями. В этом приложении на примере механического осциллятора показано, что этот метод может приводить к существенному изменению колебательных свойств осциллятора и, следовательно, не может применяться к решению акустических задач.

Пусть имеется механический осциллятор без потерь (рис. 1, $c = 0$), который описывается однородным обыкновенным дифференциальным уравнением (7):

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad (A1)$$

и совершает свободные колебания с заданной частотой ω_0 и начальными условиями:

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = 0. \quad (A2)$$

Нетрудно получить решение задачи (A1)–(A2). Оно равно

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) \quad (A3a)$$

или после дискретизации с частотой $\Omega = 2\pi/T$

$$u[n] = u(nT) = u_0 \cos(\omega_0 nT). \quad (A3б)$$

Решение (A3) описывает незатухающие гармонические колебания с амплитудой u_0 и частотой ω_0 .

Построим теперь для этого осциллятора конечно-разностное уравнение, заменив формально в уравнении (A1) вторую производную известным конечно-разностным выражением, и сравним его решение с решением (A3). Положив в (A1) $u(t) = u[n]$ и заменив вторую производную так называемой нисходящей конечной разностью второго порядка [37]

$$\frac{1}{T^2}(u[n+2] - 2u[n+1] + u[n]), \quad (A4)$$

получим следующее однородное конечно-разностное уравнение для дискретных колебаний механического осциллятора:

$$u[n+2] - 2u[n+1] + [1 + (\omega_0 T)^2]u[n] = 0 \quad (A5)$$

и его общее решение [25], равное

$$u[n] = C_1(1 + i\omega_0 T)^n + C_2(1 - i\omega_0 T)^n,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Наложив на него начальные условия $u[0] = u_0, u[1] - u[0] = 0$, аналогичные условиям (A2), получим $C_1 = C_2 = u_0/2$ и окончательное решение задачи

$$u[n] = u_0 r^n \cos(\omega nT), \quad (A6)$$

где $r = [1 + (\omega_0 T)^2]^{1/2}$ и $\omega = \frac{1}{T} \arctg(\omega_0 T)$, описывающее свободные дискретные колебания рассматриваемого механического осциллятора с начальным смещением u_0 и нулевой начальной скоростью.

Сравнение двух решений (A3) и (A6), полученных для одной и той же структуры, показывает, что они близки по форме и численно только при малых интервалах дискретизации T и небольших значениях количества отсчетов n . Однако с физической (колебательной) точки зрения они различаются принципиально. Во-первых, амплитуда колебаний (A6) не остается постоянной, а растет экспоненциально со временем, т.к. $r > 1$. Физически это означает, что осциллятор обладает отрицательным демпфированием и является, следовательно, неустойчивой колебательной системой, что, очевидно, не соответствует действительности. Во-вторых, согласно (A6), осциллятор колеблется с частотой ω , которая не равна заданной ω_0 .

Для наглядности рассмотрим пример, когда частота дискретизации Ω в 10 раз превышает частоту колебаний осциллятора ω_0 . В этом случае $\omega_0 T = \pi/5 \approx 0.628$ и амплитуда колебаний (A6) возрастает более чем в 5 раз через каждые 10 отсчетов, а частота колебаний уменьшается почти в два раза, $\omega/\omega_0 = 0.56$.

Таким образом, метод получения дискретного AR-уравнения из непрерывного уравнения путем замены производной по времени конечной разностью превратило обычный механический осциллятор без потерь в совершенно другую структуру, обладающую качественно отличными акустическими свойствами.

Отметим, что если вторую производную по времени в уравнении (A1) заменить, вместо (A4), восходящей конечной разностью второго порядка [37],

$$\frac{1}{T^2}(u[n] - 2u[n-1] + u[n-2]),$$

то вместо (A6) получится уравнение

$$[1 + (\omega_0 T)^2] u[n] - 2u[n-1] + u[n-2] = 0,$$

имеющее решение

$$u[n] = u_0 r^{-n} \cos(\omega T n), \quad (A7)$$

с теми же значениями r и ω , что и в (A6). Но в отличие от (A6), решение (A7) экспоненциально убывает по амплитуде, что физически эквивалентно наличию положительного демпфирования в осцилляторе.

Таким образом, показано, что общепринятый способ перехода от непрерывных уравнений к дискретным конечно-разностным уравнениям с помощью замены производных конечными разностями может приводить к большим отличиям от соответственных непрерывных решений, вплоть до изменения типов колебательного или волнового движения, сопровождаясь изменением собственных частот и появлением ложных потерь. Из проведенного анализа следует, что для решения акустических задач применение рассмотренного метода некорректно и нужно использовать другие методы, которые не изменяют колебательных или волновых свойств исследуемых сред и структур, например, метод данной статьи, основанный на равенстве решений непрерывного и дискретного уравнений в дискретных точках.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВЫВОД ФОРМУЛЫ (25), ЕЕ СВЯЗЬ С ВРЕМЕННЫМИ РЯДАМИ И z -ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Когда говорят о спектре какого-либо непрерывного временного сигнала $x(t)$, то чаще всего подразумевают классическое преобразование Фурье в бесконечных пределах, уточняя при этом величину постоянных множителей перед прямым и обратным преобразованием. Однако, существуют и другие определения спектра, например, спектр временного ряда (т.е. дискретно-временное преобразование Фурье), спектр периодического сигнала (ряд Фурье), конечный ряд Фурье. Наконец, существует z -преобразование и z -спектр дискретных сигналов, тесно связанный с рядом Фурье. Подробный анализ и связь между этими спектральными вариантами можно найти в книге [4]. В данной статье в качестве главного используется определение спектра, основанного на классическом преобразовании Фурье в следующей традиционной форме:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (B1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Таковыми, например, являются спектры (13) и (25). Доказательство теоремы (25), которое дано в этом Приложении, также производится в рамках преобразования (B1). Однако, в конце Приложения приведена связь со спектрами временных рядов, а также с z -спектрами, использование которых во многих практических задачах оказывается технически эффективнее.

Пусть в соответствии с (B1) имеется непрерывный сигнал $x(t)$ и его спектр Фурье $X(\omega)$. Требуется найти спектр Фурье дискретизированной функции $x_d(t)$ и показать, что он равен (25).

Адекватным представлением дискретизированной функции является в этом случае произведение непрерывной функции $x(t)$ и так называемой функции дискретизации (Time Sampling function) или “гребенки Дирака” $TS_T(t)$:

$$x_d(t) = x(t) TS_T(t). \quad (B2)$$

Она определяется через дельта-функции Дирака как

$$TS_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (B3)$$

где T — интервал дискретизации. Функция дискретизации — это периодическая функция времени с периодом T , отличная от нуля в дискретных точках $t = nT$, n — целое. В силу периодичности она может быть представлена также в виде ряда Фурье [37]:

$$TS_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n t/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t}, \quad (B4)$$

где $\Omega = 2\pi/T$ — круговая частота дискретизации.

Для доказательства равенства (25) нам потребуется спектр Фурье $S_{TS}(\omega)$ функции дискретизации, т.е. ее прямое преобразование (B1). Воспользовавшись ее представлениями (B3) и (B4), с помощью первой формулы (B1) получим для него

$$S_{TS}(\omega) = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n \omega / \Omega} =$$

$$= \frac{1}{\Omega} FS_{\Omega}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega). \quad (B5)$$

Здесь функция $FS_{\Omega}(\omega)$ — это частотная гребенка Дирака (Frequency Sampling function), равная временной гребенке после замены t и T на ω и Ω . Таким образом, спектр временной гребенки Дирака пропорционален гребенке Дирака в частотной области.

Найдем теперь классический спектр Фурье дискретной функции (B2):

$$\begin{aligned}
X_d(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{TS}_T(t) e^{-i\omega t} dt = \\
&= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-i\omega Tn}.
\end{aligned} \quad (\text{Б6})$$

Из теории преобразования Фурье [4] известно, что спектр произведения двух функций времени равен свертке их спектров, т.е.

$$X_d(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \phi) S_{\text{TS}}(\phi) d\phi.$$

Подставляя сюда спектры (Б1) и (Б5), получим

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega), \quad (\text{Б7})$$

что и доказывает справедливость теоремы (25).

Нетрудно проверить правильность этого результата, взяв от (Б7) обратное преобразование Фурье. Действительно, в результате элементарных преобразований имеем:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega) e^{i\omega t} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega) e^{i(\omega - n\Omega)t} d(\omega - n\Omega) = \\
&= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} = x_d(t),
\end{aligned}$$

что и должно быть. Здесь было использовано представление (Б4) для функции дискретизации.

Укажем теперь на связь классического спектра Фурье (Б7) со спектром временного ряда и z -спектром. В теории временных рядов [3, 14] спектр временного ряда $x[n]$ определяется как

$$S_x(e^{i\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\omega Tn}. \quad (\text{Б8})$$

Сравнение определения (Б8) с соотношением (Б6) приводит к равенству

$$S_x(e^{i\omega T}) = \Omega X_d(\omega), \quad (\text{Б9})$$

которое означает, что спектр $S_x(e^{i\omega T})$ временного ряда как функция частоты ω равен с точностью до множителя Ω классическому спектру $X_d(\omega)$ дискретизированной функции $x(nT)$. Как и спектр $X_d(\omega)$, спектр временного ряда является периодической функцией частоты ω с периодом Ω и потому представим в виде ряда Фурье в частотной области:

$$S_x(e^{i\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\omega Tn}. \quad (\text{Б10})$$

Соотношение (Б8) как раз и является таким представлением, причем коэффициенты ряда

Фурье равны соответственным значениям временного ряда. Покажем это также напрямую, исходя из общей теории рядов Фурье. Действительно, по определению [37] n -ый коэффициент разложения равен:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} S_x(e^{i\omega T}) e^{i\omega Tn} d\omega = \\
&= \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} X_d(\omega) e^{i\omega Tn} d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega Tn} d\omega = x(nT),
\end{aligned} \quad (\text{Б11})$$

т.е. n -ому значению временного ряда $x[n]$. Таким образом, спектр временного ряда полностью определяется соотношениями (Б8)–(Б11), которые фактически являются обычным рядом Фурье в частотной области.

Важной особенностью спектра временного ряда, как это видно из (Б8) и (Б10), является то, что он представляет собой так называемую сложную функцию частоты, т.е. он является функцией некоей промежуточной переменной, которая в свою очередь является функцией частоты. Эта промежуточная переменная в данном случае равна z -переменной:

$$z = e^{i\omega T}. \quad (\text{Б12})$$

Нетрудно видеть, что именно z -переменная обеспечивает периодичность спектра по частоте ω с периодом $\Omega = 2\pi/T$, в то время как сама спектральная функция $S_x(z)$ периодической по z не является. Как показано в тексте статьи (см., например, (26)), для дискретных ARMA-сигналов она представляет собой отношение двух полиномов по z .

В теории временных рядов [3, 14] вместо ряда Фурье (Б10), (Б11) обычно используется т.н. z -преобразование, которое получается из него с помощью замены переменной (Б12). Формально z -преобразование характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned}
S_x(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \\
x[n] &= \frac{1}{2\pi i} \oint S_x(z) z^{n-1} dz,
\end{aligned} \quad (\text{Б13})$$

которые эквивалентны (Б10) и (Б11). Интегрирование в обратном z -преобразовании (Б13) производится в комплексной плоскости z по единичной окружности против часовой стрелки. “Свертывание” периодичности спектров временных рядов с помощью замены (Б12) существенно упрощает спектральный анализ благодаря компактности и простоте, что сделало z -преобразование незаменимым в теории дискретных систем и превратило его в самостоятельный хорошо разви-

тый раздел математической теории цифровой обработки сигналов [4, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Deistler M.* Identification and time series analysis: past, present and future // Proc. of a workshop "Statistics Theory and Control", Laurence, Kansas, 2002. Berlin: Springer-Verlag, 2002. P. 97–109.
2. *Бокс Дж., Дженкинс Г.Д.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. В 2-х томах. Перевод с англ. под ред. Писаренко В.Ф. М.: Мир, 1974. 604 с.
3. *Бриллинджер Ф.* Временные ряды. Обработка данных и теория. Перевод с англ. под ред. Колмогорова А.Н. М.: Мир, 1980. 536 с.
4. *Марпл мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. Перевод с англ. под ред. Рыжака И.С. М.: Мир, 1990. 584 с.
5. *Jury E.I.* Sampled data control systems. NY: Wiley, 1958. 453 p.
6. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. 510 с.
7. *Åström K.J., Wittenmark B.* Computer controlled systems. Theory and Design. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984. 558 p.
8. *Systems and control Encyclopedia / Ed. Singh M.G.* Oxford: Pergamon Press, 1987. 464 p.
9. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.
10. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояний. Перевод с англ. под ред. Райбмана Н.С. М.: Мир, 1975. 681 с.
11. *Söderström T., Stoica P.* System identification. NJ: Prentice-Hall, 1989. 620 p.
12. *Льонг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. Перевод с англ. под ред. Цыпкина Я.З. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 432 с.
13. *Pintelon R., Shoukens J.* System identification. A frequency domain approach. NY: IEEE Press, 2001. 750 p.
14. *Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.* Цифровая обработка сигналов. 3-е издание. Перевод с англ. под ред. Боева С.Ф. М.: Техносфера, 2019. 1048 с.
15. IFAC Proceedings Volumes in ScienceDirect.com by Elsevier. <https://sciencedirect.com/journal/ifac-proceedings-volumes>
16. IFAC Papers OnLine in ScienceDirect.com by Elsevier. <https://sciencedirect.com/journal/ifac-papersonline/issues>
17. *Markel J., Gray A.* Linear prediction of speech. NY: Springer, 1976.
18. *Айвазян Г.А., Фантацини Д.* Эконометрика: продвинутый курс с приложениями в финансах. М.: Магистр: Инфра-М, 2014. 944 с.
19. *Hoel S., Omenzetter P.* Optimal selection of autoregressive model coefficients for early damage detectability with an application to wind turbine blades // Mechanical Systems and Signal Processing. 2016. V. 70–71. P. 557–577.
20. *Sakellariou J.S., Fassois S.D., Sakaris C.S.* Vibration-based damage localization and estimation via the stochastic function model-based method: an overview // Structural Health Monitoring. 2018. V. 17. № 6. P. 1335–1438.
21. *Candy J.V., Fisher K.A., Case J.E., Goodrich T.W.* Multichannel spectral estimation in acoustics: a state-space approach // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 148. № 2. P. 759–779.
22. *Карпов И.А.* Параметрическое моделирование виброакустических дискретно-временных случайных процессов и применение для идентификации колебательных систем // Ученые записки физического факультета Московского университета. 2020. № 1. ID 2011701.
23. *Karpov I.A., Grebennikov A.S., Kim A.A.* Application of autoregressive moving average modelling of random processes to identify the loss factor of linear oscillatory systems // Acoust. Phys. 2021. V. 67. № 6. P. 694–699.
24. *Котельников В.А.* О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176. № 7. С. 762–770 (перепечатка статьи 1933 года).
25. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. 2-е изд. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. 400 с.
26. *Макаров О.И., Шанин А.В., Корольков А.И.* Интеграл Зоммерфельда в задачах моделирования дифракции акустических волн с помощью треугольной сетки // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 2. С. 129–145.
27. *Reinders E.* System identification methods for (operational) modal analysis: review and comparison // Archives of Computational Methods in Engineering. 2012. V. 19. № 1. P. 51–124.
28. *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Том 1. Пер. с англ. под ред. Рытова С.М. М.: ГИТТЛ, 1955. 509 с.
29. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. Пер. с англ. под ред. Лямшева Л.М. М.: Мир, 1971. 552 с.
30. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
31. *Lin C.-Sh., Chiang D.-Y., Tseng T.-C.* Extended time series algorithm for model identification from nonstationary ambient response data only // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Article ID 391815. 12p.
32. *Pandit S.M., Wu S.M.* Time series and system analysis with application. NY: John Wiley Sons, 1983.
33. *Pi Y.L., Mickleborough N.C.* Modal identification of vibrating structures using ARMA model // J. Eng. Mech. 1989. V. 115. P. 2232–2250.
34. *Akaike H.* A new look at the statistical model identification // IEEE Trans. on Automatic Control. 1974. V. AC-19. № 6. P. 716–723.
35. *Hannan E.J.* Estimation of order of an ARMA process // Annals of Statistics. 1980. V. 8. P. 1071–1081.
36. MATHLAB <https://se.mathworks.com/help/ident/ug/model-quality-metrics.html>
37. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. Перевод с англ. под ред. Арамановича И.Г. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. 720 с.

ПРЕЦИЗИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ УЛЬТРАЗВУКА ТВЕРДЫХ СРЕД В ОБРАЗЦАХ МИЛЛИМЕТРОВОЙ ТОЛЩИНЫ

© 2023 г. Д. И. Макалкин^а, *, А. А. Карабутов^а, Е. В. Саватеева^а

^аИнститут общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук,
ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

*e-mail: dmitrymakalkin@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.06.2023 г.

После доработки 12.09.2023 г.

Принята к публикации 19.09.2023 г.

Предлагается методика высокоточного локального измерения групповой скорости продольных волн в твердых образцах миллиметровой толщины. Для достижения требуемой точности используется лазерное термооптическое возбуждение субмикросекундных ультразвуковых видеоимпульсов и сверхширокополосная пьезоэлектрическая регистрация отраженных от контролируемого образца акустических сигналов. Исследуются плоскопараллельные образцы из дюрала, кварца и стали толщиной 2–6 мм. Для достижения необходимой точности измерения групповой скорости ультразвука используется математическая обработка формы сигнала с компенсацией дифракции ультразвукового пучка при распространении в образце. Показана возможность обеспечения неопределенности измерения групповой скорости ультразвука в диапазоне частот 1–15 МГц на уровне 0.1% в образцах миллиметровой толщины.

Ключевые слова: скорость ультразвука, фотоакустика, лазерный ультразвук, дифракция, эталон

DOI: 10.31857/S0320791923600622, **EDN:** ZGWXRO

ВВЕДЕНИЕ

Проблема старения объектов критической инфраструктуры продолжает оставаться чрезвычайно злободневной, что делает актуальной разработку все более точных и информативных методов диагностики ее реального состояния. Ультразвуковые (УЗ) методы неразрушающего контроля нашли широкое применение при решении этих проблем.

Изменение механических свойств материалов (плотность, модули упругости, прочность и т.п.) при старении могут изменяться весьма незначительно (на доли и единицы процентов), что, однако, может приводить к радикальному уменьшению времени их службы. Поэтому неразрушающий контроль текущих локальных механических свойств материалов конструкций представляет важнейшую проблему оценки остаточного ресурса элементов критической инфраструктуры. Существующие методы такого контроля (рентгеновская дифрактометрия, вихретоковый контроль, флэш-термография) имеют ограниченные возможности и, как правило, не дают возможности провести количественную оценку состояния объекта контроля.

УЗ методы контроля позволяют устранить значительную часть этих трудностей. Однако для ре-

шения таких задач требуется прецизионное измерение (как правило, с точностью лучше 1%) скорости ультразвука с высокой локальностью (единицы или десятки мм). Достижение такой точности стандартными средствами УЗ контроля мегагерцового диапазона не представляется возможным ввиду ограниченности длительности зондирующего УЗ импульса и значительной (2–5 мм для металлов) протяженности “мертвой” зоны системы контроля.

Использование для решения этих задач термооптического механизма возбуждения коротких субмикросекундных УЗ видеоимпульсов и сверхширокополосной пьезорегистрации акустических сигналов представляется одним из возможных путей решения упомянутых задач.

Более полувека назад были представлены методы измерения скорости звука, дающие принципиальную возможность достижения точности измерения на уровне 0.001% [1]. Однако для достижения такой точности возникает ряд жестких условий, невыполнение которых не позволяет достигнуть упомянутой точности. К ним относятся требования на минимальные габариты (толщина, ширина) образца, ширина спектрального диапазона излучающего и принимающего устройств,

жесткая стабилизация температурного режима ввиду зависимости скорости звука от температуры, обеспечение однородности распределения температуры по объему образца.

В силу этого измерение скорости ультразвука не в эталонных образцах и условиях, а на промышленных изделиях обычно осуществляется с точностью в 1–5%. В то же время ужесточение требований к свойствам материалов деталей и элементов критической инфраструктуры и их фактическому состоянию делают актуальной задачу локального измерения скорости ультразвука с более высокой точностью.

На точность измерения скорости звука время пролетным методом влияет погрешность измерения габаритов образца и его геометрической формы, а для бесконтактных акустооптических методов, пригодных для оптически непрозрачных образцов, требуется толщина образца не менее 5 мм [2]. Проведенные измерения улучшенным резонансным методом на образцах из разных материалов (Д16Т, сплавы стали, стекло К8) обладали погрешностью порядка десятка м/с, а для образцов из Д16Т хоть и была достигнута погрешность порядка 1 м/с, но была отмечена изменчивость скорости звука для толщины образца до 5 мм, что было объяснено большим влиянием качества механической обработки поверхностей образцов [3]. В любом случае для прецизионного измерения скорости ультразвука (с точностью лучше 1%) жесткие требования предъявляются к плоскостности и, вообще говоря, параллельности поверхностей образца. Упомянутые методы не являются новыми, однако в Американском стандарте методов измерения скорости ультразвука 2015 г. E494-15 astm [4] не много ссылок на более новые методы, и, в целом, они пригодны для образцов толщиной от 5 мм при обеспечении точности в 1%.

К началу 21-го века бесконтактные методы генерации и приема УЗ волн для проведения контрольных измерений были, пожалуй, самыми многообещающими [5]. Отдельно остановимся на бесконтактном лазерно-ультразвуковом методе [6], который обеспечил измерение групповой скорости для некоторых случаев с погрешностью не хуже 0.1%. Метод предполагает доступ к обеим сторонам образца, что может быть непригодно для смонтированных деталей, а для сохранения высокого динамического диапазона интерферометра необходима предварительная полировка поверхностей. Из-за острой фокусировки возбуждающего лазерного луча возникает незначительная абляция поверхности образца, и к тому же температура в зоне облучения изменяется на сотни градусов, что влияет и на скорость звука и может существенно увеличивать методическую погрешность.

Подобная схема используется в отечественной эталонной установке. В Государственном первичном эталоне ГПЭ 189-2012 [7, 8] используется эхо-импульсный способ измерения скорости продольных УЗ-волн с помощью оптического метода генерации и приема УЗ-волн: в источнике звука используется моноимпульсный твердотельный лазер (длительностью импульса не более 40 нс), а в приемнике — одномодовый He-Ne лазер. Заявленная относительная систематическая погрешность измерения скорости продольных волн — менее 0.014%/м для диапазона скоростей 5000–6500 м/с. В ГПЭ используются образцы разных толщин в диапазоне от 2 до 100 мм из стали 40Х13, Д16Т и кварцевого стекла К8. Этот эталон в 2014 г. преобразовался в ГЭТ 189-2014 (Государственный первичный эталон единиц скоростей распространения и коэффициента затухания УЗ волн в твердых средах) [9].

В данной работе мы показываем результаты измерения групповой скорости звука в некоторых твердых телах с помощью метода лазерного ультразвука [10], оцениваем влияние дифракции на форму распространяемого УЗ импульса и на измеренную скорость звука, и приводим алгоритм дифракционной компенсации групповой скорости звука.

Основой этого процесса является термооптический эффект, т.е. быстрое тепловое расширение поглощающей лазерный импульс области твердого тела. В отличие от существующего эталона для термооптического возбуждения звука, в настоящей работе используется специализированный поглотитель, оптимизированный для получения акустического импульса требуемой длительности и достаточной амплитуды. Этот “пробный” импульс вводится в исследуемый образец, и скорость ультразвука в материале образца определяется по времени пробега акустического импульса по толщине образца.

ВЛИЯНИЕ ДИФРАКЦИИ

В общем случае, распространение акустического пучка сопровождается эффектами дифракции, нелинейности и диссипации среды. Распространение акустического пучка в параксиальном приближении в таком случае описывается уравнением Хохлова–Заболотской–Кузнецова [11]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\epsilon p}{\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right) = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p.$$

Однако, в случае, максимально приближенном к условиям исследования, когда амплитуда сигнала мала (порядка 10 кПа) и акустические пути коротки (десятки миллиметров), нелинейностью и диссипацией можно пренебречь. Тогда упрощаем это

уравнение, сохраняя только дифракционную компоненту:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p.$$

Решением такого уравнения является временной профиль сигнала (импульса), сильно трансформированный по отношению к исходному:

$$p \left(\tau = t - \frac{z}{c_0}, r_{\perp} = 0, z \right) = p(\tau, r_{\perp} = 0, z = 0) - \omega_D \int_{-\infty}^{\tau} \exp(-\omega_D(\tau - \theta)) p(\theta, r_{\perp} = 0, z = 0) d\theta,$$

где $p(\tau, r_{\perp} = 0, z = 0) = p_0 \exp\left(-\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^2\right)$ – исходный гауссовский сигнал, c_0 , a_0 , τ_a , z , τ – скорость звука, начальный радиус пучка, половинная длительность импульса на полувысоте (FWHM), координата и время импульса, соответственно, $\omega_D = 2c_0 z / a_0^2$ – частота, на которой апертура излучателя равна одной зоне Френеля.

После интегрирования окончательно получим решение в размерном виде:

$$p \left(\tau = t - \frac{z}{c_0}, r_{\perp} = 0, z \right) = p_0 \exp\left(-\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^2\right) - p_0 \omega_D \frac{\tau_a \sqrt{\pi}}{2} \exp\left(\frac{\omega_D^2 \tau_a^2}{4} - \omega_D \tau\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\tau}{\tau_a} - \frac{\omega_D \tau_a}{2}\right) + 1 \right].$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду, введя новые переменные $\theta = \tau / \tau_a$ – временная координата, $\sigma = z / L_D$ – пространственная координата, $L_D = \pi a_0^2 / (c_0 \tau_a)$ – длина дифракции, и получаем временной профиль импульса в безразмерных координатах:

$$p(\theta, \sigma) = p_0 \exp(-\theta^2) - 2\sqrt{\pi} p_0 \sigma [\operatorname{erf}(\theta - 2\sigma) + 1] \exp(-4\sigma\theta + 4\sigma^2). \quad (1)$$

Заметим, что для дальнейшего получения численных значений требуются значения начального радиуса a_0 , длительности импульса τ_a и скорости звука c_0 , которые следует брать близкими к экспериментальным. Кроме того, радиус гауссового пучка увеличивается с ростом акустического пути импульса:

$$a(z) = a_0 \sqrt{1 + (z/L_D)^2}. \quad (2)$$

Если построить семейство профилей (1) при разных значениях пространственной безразмерной координаты σ , то видно (рис. 1), как при ее росте смещается максимум импульса относительно безразмерного времени $\theta = 0$. Это смещение является следствием дифракции звука в преобра-

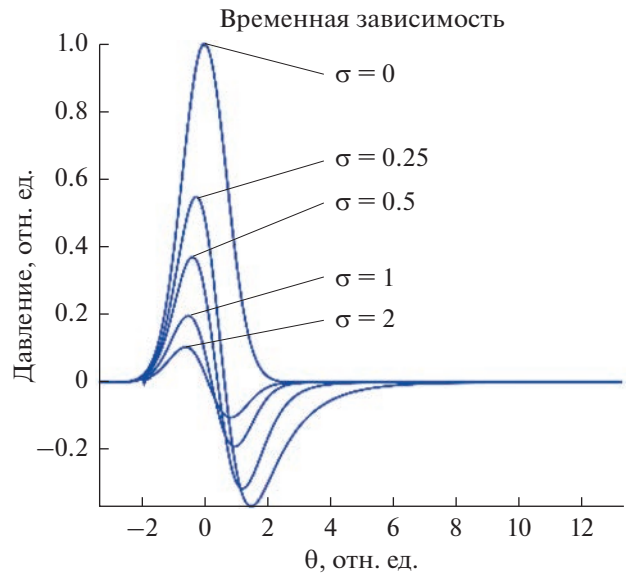


Рис. 1. Трансформация типичного гауссовского импульса при разных значениях $\sigma = z/L_D$, где $L_D = \pi a_0^2 / (c_0 \tau_a)$. При $\sigma = 1$ координата z равна длине дифракции L_D .

зователе, и оно напрямую влияет на изменение групповой скорости звука. Примечательно превращение профиля в свою производную для больших значений σ , что соответствует переходу из ближней волновой зоны в дальнюю.

Сложность аналитически полученного выражения для временного профиля импульса в безразмерных координатах не позволяет в разумное время найти его экстремум аналитически, однако высокодискретный численный расчет дает следующий интересный результат (рис. 2). Заметно, как функция смещения экстремума замедляется и почти выходит на постоянное значение для больших значений σ . О том, что это может значить для измерения скорости звука, поговорим чуть далее.

Таким образом, можно заключить, что при распространении в твердом теле УЗ импульс получает временной сдвиг, который может оказать влияние на точность опирающихся на импульс расчетов. Насколько сильным окажется влияние будет показано в следующей части при обсуждении методики измерений.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальная установка [12] (см. рис. 3) для измерения групповой скорости продольных звуковых волн работает в эхо-режиме. В ее основе Nd:YAG лазер с модуляцией добротности с диодной накачкой, испускающий 10 нс импульс света, оптико-акустический преобразователь (ОАП) с

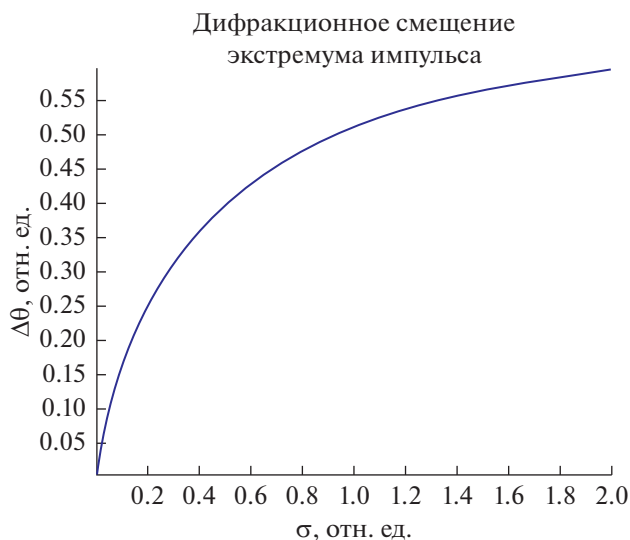


Рис. 2. Смещение экстремума импульса от начального положения в зависимости от безразмерной пространственной координаты σ .

апертурой 5.6 мм, который преобразует падающий свет в импульс с начальной длительностью порядка 60 нс, распространяющийся, в том числе, в направлении образца, широкополосный пьезоэлектрический приемник ультразвука с апертурой 4 мм и специальный волновод, пропускающий световой импульс от лазера к ОАП и пропускающий УЗ импульс, вернувшийся от образца, к

пьезоприемнику. Между поверхностями ОАП и образца наносится слой воды для лучшего акустического сопряжения импедансов данных объектов. Принятый пьезоэлектрическим преобразователем сигнал оцифровывается АЦП и с помощью компьютера выводится на экран или в файл в виде временной зависимости амплитуды. Благодаря небольшой апертуре ОАП, исследования образца осуществляются локально.

После генерации импульса на приповерхностном слое ОАП происходит его распространение в обоих направлениях — в сторону приемника-преобразователя и в сторону образца. На рис. 4а показан вид принимаемых преобразователем сигналов, специально упрощенных для лучшего восприятия. Первым из пришедших на приемник сигналов является опорный, это продольные волны с неизменной фазой, которые не проходят через склейку и образец, а, родившись на приповерхностном слое ОАП, распространяются через звукопровод сразу к пьезоприемнику. Далее следуют 1-й донный сигнал — это первое отражение продольной волны от донной поверхности образца со смещенной на π фазой из-за акустически мягкой границы — и остальные донные сигналы: 2-й, 3-й и т.д. Заметим, что при распространении звука через несколько слоев разных сред (ОАП, водный слой, образец, воздух), на границах раздела этих сред имеет место частичное преобразование продольной волны в поперечную. Импульсы этих волн тоже проявляются среди регистрируемых сигналов, но они имеют существенно мень-

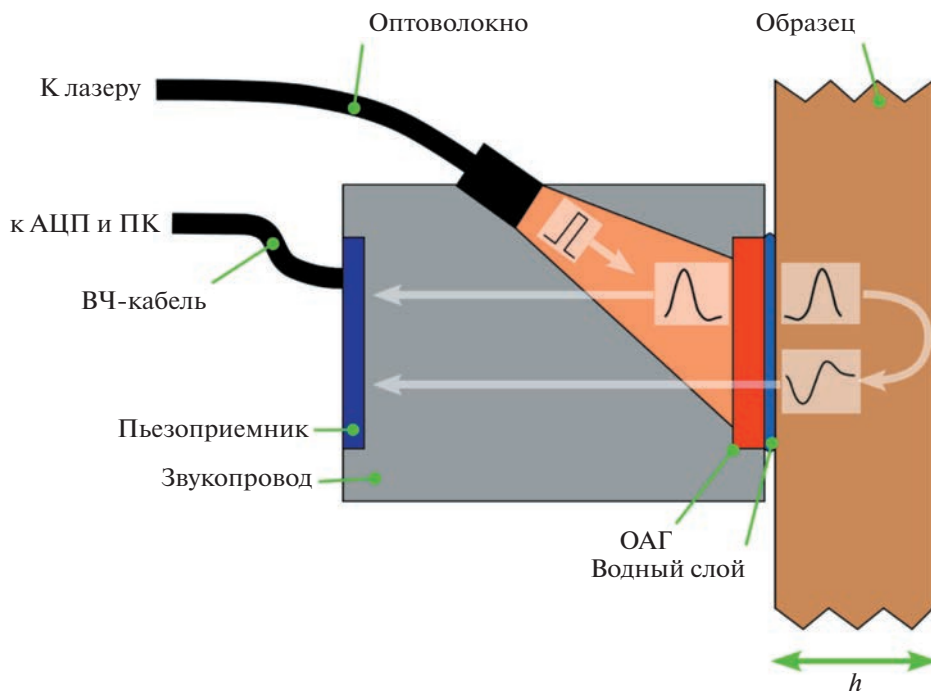


Рис. 3. Схема экспериментальной установки измерения скорости звука в твердых телах.

шую амплитуду за счет того, что отношение длины волны к диаметру мало. Кроме того, они достигают приемника в более низком частотном диапазоне, поэтому могут быть легко отфильтрованы цифровым фильтром.

Временная форма сигналов (рис. 4б) содержит следующие за основным импульсом фазы противоположной полярности: такие “хвосты” являются следствием дифракции широкополосного ультразвукового пучка. Если бы влияние дифракции было бы мало, то вычислить групповую скорость продольных волн можно было бы по времени задержки между любыми двумя отражениями и, учитывая разницу их акустических путей, получить

$$V = \Delta z_{12} / \Delta t_{12}, \quad (3)$$

где Δt_{12} и Δz_{12} — разницы времен и путей между указанными сигналами 1 и 2.

Теперь же нужно учитывать дифракционную трансформацию каждого отражения, внося в формулу расчета скорости временной сдвиг их экстремумов $\Delta \tau_1$ и $\Delta \tau_2$. На рис. 4в показан исходный (реально наблюдаемый) сигнал “с хвостом” синего цвета и его первоначальный гауссовский вид “без хвоста” красного цвета. Согласно численным расчетам выше, дифракция приводит к более быстрому “распространению” экстремума сигнала, что отразится на точности измерения скорости ультразвука в данном образце. Для компенсации этой методической погрешности используется следующая формула:

$$V_{\text{комп}} = \frac{\Delta z_{12}}{(t_2 + |\Delta \tau_2|) - (t_1 + |\Delta \tau_1|)} = \frac{\Delta z_{12}}{\Delta t_{12} + |\Delta \tau_{12}|}. \quad (4)$$

Был проведен численный расчет дифракционной ошибки E_D измерения групповой скорости как функции скорости звука и толщины образца для нескольких отражений, что дает представление о влиянии дифракции на погрешность измерения. Для этого требуется задать начальный диаметр УЗ пучка $a_0 = 2.76$ мм и начальную полуширину импульса. Тогда дифракционная ошибка $E_D(n, h, c_0) = (V(n, h, c_0) - c_0) / c_0$, где c_0 — истинная скорость ультразвука в образце, а $V(n, h, c_0)$ — искаженная дифракцией скорость, которую и можно экспериментально измерить: $V(n, h, c_0) = \Delta z(n, h, c_0) / \Delta t(n, h, c_0)$, где $\Delta z(n, h, c_0)$ и $\Delta t(n, h, c_0)$ — разницы акустических путей и времен n -й пары отражений для толщины образца h и истинной скорости c_0 .

Расчеты проводились для условий эксперимента. По графикам (рис. 5) видно, что область значений E_D не превышает 0.3% для скоростей ниже 8000 м/с и толщин более 2–3 мм. Также для выбранных толщины и скорости звука в образце заметно явное уменьшение E_D при рассмотрении дальних отражений. Интересной деталью также

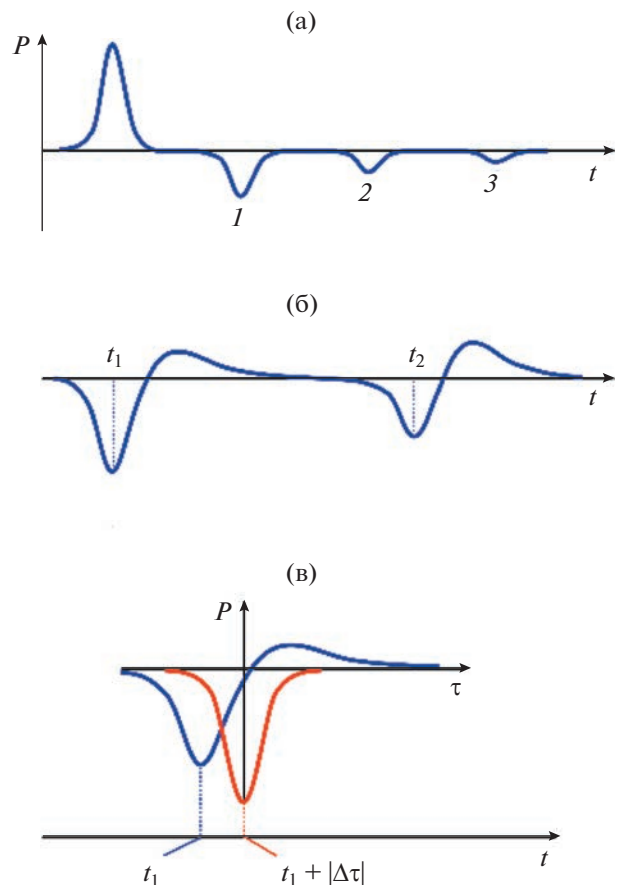


Рис. 4. Сдвиг экстремума широкополосного ультразвукового импульса при дифракции пучка.

является то, что даже для высоких скоростей и малых толщин дифракционный вклад составляет менее 1%.

Таким образом, можно сделать вывод, что дифракция должна оказывать существенное влияние на величину измеренной групповой скорости продольных УЗ волн.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Были проведены измерения скорости ультразвука без компенсации и с компенсацией дифракционной трансформации формы сигнала для трех разных образцов, параметры которых занесены в табл. 1: это сплав Д16Т, плавный кварц (КВ) и сталь 12Х18Н10Т. Шероховатость поверхностей металлических образцов не превышала Rz5, а вариации толщины по поверхности образца, измеренные микрометрически, 5–15 мкм. Статистический разброс результатов измерения толщины связан в значительной мере с инструментальной погрешностью.

Измерения проходили при нормальном давлении и температуре окружающего воздуха 21°C с

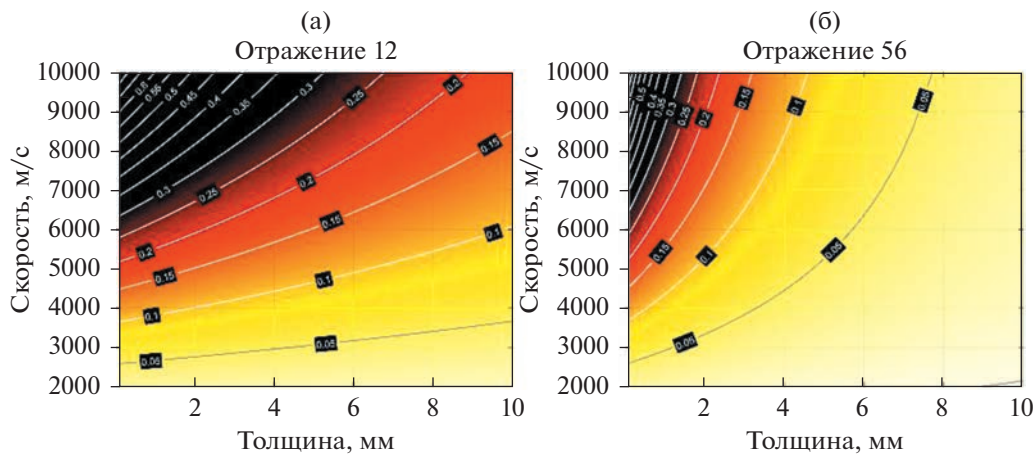


Рис. 5. Численный расчет дифракционной ошибки (%) групповой скорости звука, вычисленной по разным парам отражений.

усреднением по 1000 замерам. На рис. 6 приведен пример записи сигналов с АЦП – результат прохождения звука через образец № 1 после усреднения. Опорный сигнал в данном случае обладает характерным дифракционным “хвостом”, на который накладывается его отражение от ближайшей (лицевой) поверхности образца, что видно на врезке в этом рисунке. Первый донный сигнал также содержит в себе дифракционное искажение. Далее с примерно тем же интервалом можно заметить и остальные донные отражения: второе, третье и т.д.

В табл. 2 представлены результаты измерений скорости звука по формуле (3) без учета дифракции для пар отражений каждого образца. Номера строчек – это номер стартового отражения из пары, с него начинается отсчет времени распространения акустического импульса и пройденного пути. Номер столбца соответствует номеру последнего отражения из пары, на котором этот процесс заканчивается. Результаты расположены таким образом, что каждой главной диагонали таблицы соответствует определенное значение акустического пути, а каждой строке соответствует определенный начальный радиус пучка (хотя начальный радиус акустического пучка $a_0 = 2.76$ мм, но из-за уширения пучка с ростом акустического пути по формуле (2) каждому стартовому номеру из пары отражений соответствует свой “начальный” радиус).

Можно заметить, что для образцов Д16Т и КВ измеренная величина скорости хоть и на доли процента, но меняется в зависимости от фактического акустического пути и от комбинации отражений, и у пар с большими номерами значение скорости в целом меньше. Это связано с более сильным влиянием дифракции на измеренную скорость, вычисленную по первым отражениям, чем по последним, или вообще для случая тонких образцов с малыми акустическими путями отражений: согласно графику из рис. 2 для больших значений пространственной координаты зависимость дифракционного смещения экстремума импульса от начального положения выходит почти на константу. Поэтому, измеряя скорость по паре “дальних” отражений, дифракционные сдвиги обоих отражений почти взаимосокащаются, обеспечивая результат скорости, меньший по значению, и близкий к истинной скорости.

Таким образом, можно сделать два вывода:

- 1) учет дифракции для “тонких” образцов может быть не существен при возможности регистрации многократных отражений в образце; пример – образец № 3.
- 2) учет дифракции может быть не нужен в случае “толстых” образцов, толщина которых $z \gg L_D$ – длины дифракции спектральных составляющих опорного акустического сигнала.

Таблица 1. Наименование, размеры и плотности образцов

	Образец № 1	Образец № 2	Образец № 3
Материал	Д16Т	Кварц КВ	Сталь 12Х18Н10Т
Толщина, мм	5.59 ± 0.01	5.88 ± 0.01	1.33 ± 0.01
Плотность ρ , кг/м ³	2690 ± 40	2170 ± 30	7700 ± 200

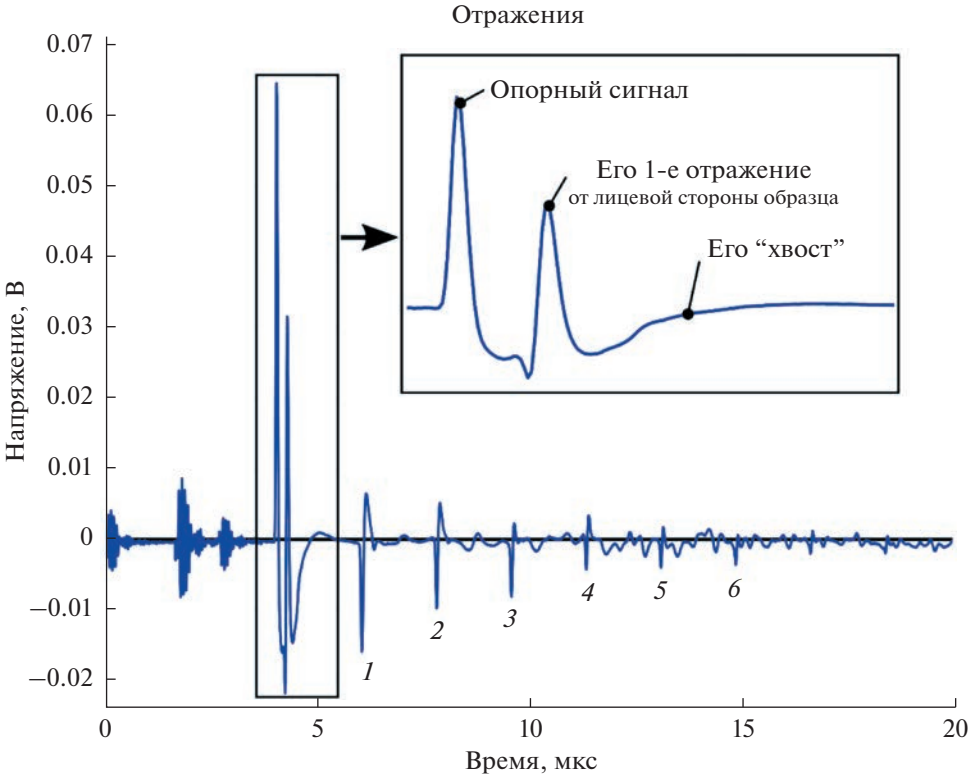


Рис. 6. Многократные отражения УЗ импульса от поверхностей образца № 1.

Образец стали был таким тонким, что “хвост” опорного сигнала и отражение опорного сигнала от лицевой стороны образца оказались близкими по времени с донными отражениями, из-за чего они неудачно наложались на последние, влияя на положение их экстремума (рис. 7). Поэтому для данного случая групповая скорость с ростом номеров отражений не уменьшается, а растет. Большой вклад вносит погрешность измерения тол-

щины, которая для данного образца оказывается более 0.3%.

Из результатов измерений в образце № 3 следует, что при малых толщинах образцов погрешность измерений скорости ультразвука определяется в первую очередь погрешностью измерения толщины и, очевидно, качеством подготовки образца.

Таблица 2. Результаты измерений скорости без компенсации дифракции. В верхней части ячейки – скорость в м/с, в нижней – акустический путь в мм

Образец № 1 Д16Т, $h = 5.59$ мм						Образец № 2 КВ, $h = 5.88$ мм					Образец № 3 12Х18Н10Т, $h = 1.33$ мм				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
1	6357.8	6354.7	6354.7	6354.8	6354.3	5980.1	5977.9	5978.1	5976.8	5975.4	5941.2	5952.7	5961.6	5964.4	5963.6
	11.192	22.384	33.576	44.768	55.960	11.762	23.524	35.286	47.048	58.810	2.668	5.336	8.004	10.672	13.340
2		6351.5	6353.1	6353.9	6353.5		5975.7	5977.1	5975.7	5974.3		5964.2	5971.8	5972.2	5969.2
		11.192	22.384	33.576	44.768		11.762	23.524	35.286	47.048		2.668	5.336	8.004	10.672
3			6354.7	6355.0	6354.1			5978.5	5975.6	5973.8			5979.4	5976.2	5970.9
			11.192	22.384	33.576			11.762	23.524	35.286			2.668	5.336	8.004
4				6355.3	6353.8				5972.8	5971.4				5973.1	5966.7
				11.192	22.384				11.762	23.524				2.668	5.336
5					6352.3					5970.0					5960.3
					11.192					11.762					2.668

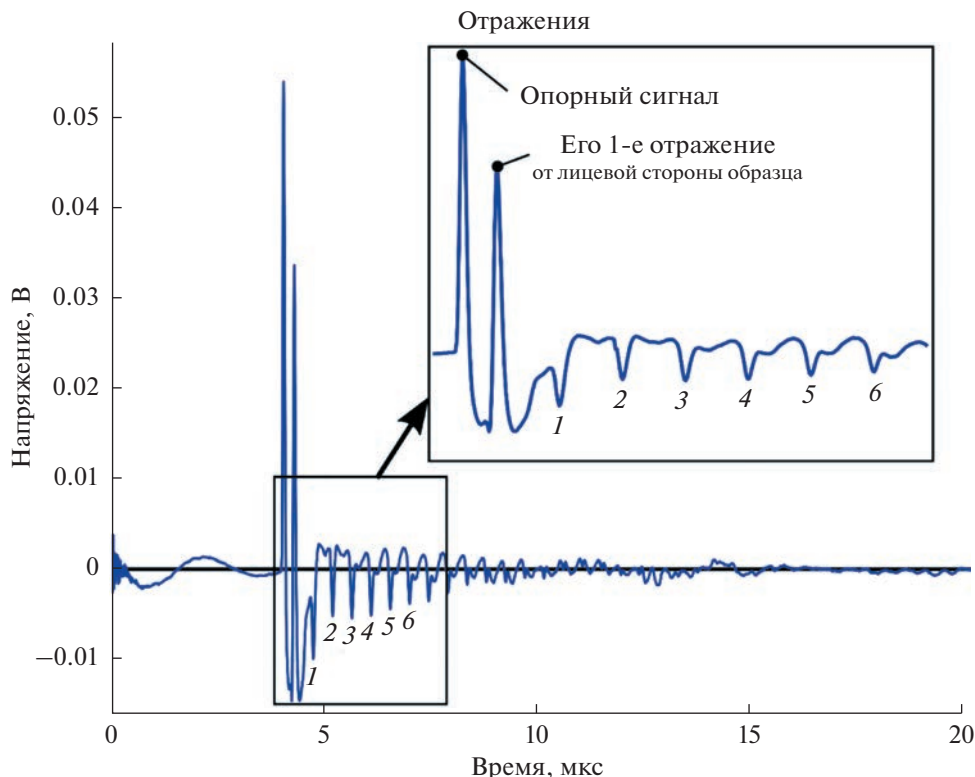


Рис. 7. Многократные отражения УЗ импульса от поверхностей образца стали 12X18H10T.

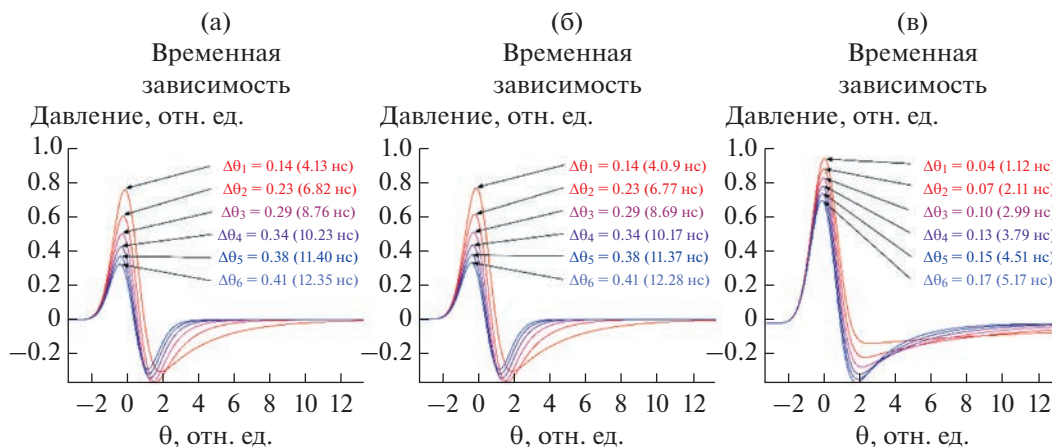


Рис. 8. Дифракционная трансформация гауссовского импульса для образцов Д16Т, КВ и 12X18H10Т (слева направо) с указанием времени сдвига экстремума для каждого отражения.

Для компенсации влияния дифракционной трансформации формы ультразвуковых импульсов на результат измерения скорости ультразвука в расчетах использовалась формула (5), подобная (4):

$$V_{\text{комп}ij} = \frac{\Delta z_{ij}}{\Delta t_{ij} + |\Delta \tau_{ij}|}, \quad (5)$$

где $\Delta \tau_{ij} = \Delta \tau_j - \Delta \tau_i = \Delta \tau_a (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i)$ – разница дифракционных сдвигов j -го и i -го сигнала.

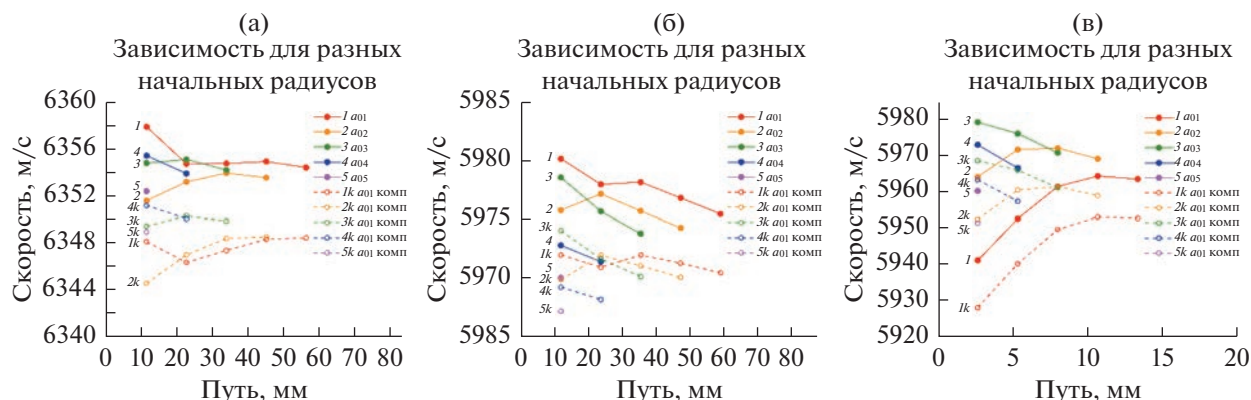
Сдвиг экстремума сигнала при дифракции ультразвукового пучка рассчитывался для каждого отражения теоретически по методике, описанной в начале статьи (см. рис. 1). Графики дифракционной трансформации гауссовского импульса для определенных значений пространственной координаты, соответствующей каждому отражению и иным параметрам, совпадающим с условиями эксперимента, показаны на рис. 8.

Таблица 3. Результаты для образцов Д16Т, кварца КВ, стали 12Х18Н10Т. Верхнее число в ячейке — измеренная скорость (м/с), нижнее — скорость после компенсации дифракции

	Образец № 1 Д16Т, $h = 5.59$ мм					Образец № 2 КВ, $h = 5.88$ мм					Образец № 3 12Х18Н10Т $h = 1.33$ мм				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
1	6357.8	6354.7	6354.7	6354.8	6354.3	5980.1	5977.9	5978.1	5976.8	5975.4	5941.2	5952.7	5961.6	5964.4	5963.6
	6348.1	6346.3	6347.4	6348.3	6348.4	5972.0	5970.9	5972.0	5971.3	5970.5	5928.2	5940.3	5949.8	5953.2	5952.8
2		6351.5	6353.1	6353.9	6353.5		5975.7	5977.1	5975.7	5974.3		5964.2	5971.8	5972.2	5969.2
		6344.6	6347.0	6348.4	6348.5		5969.9	5972.0	5971.1	5970.1		5952.5	5960.6	5961.6	5959.0
3			6354.7	6355.0	6354.1			5978.5	5975.6	5973.8			5979.4	5976.2	5970.9
			6349.4	6350.3	6349.8			5974.0	5971.6	5970.1			5968.7	5966.1	5961.2
4				6355.3	6353.8				5972.8	5971.4				5973.1	5966.7
				6351.1	6350.0				5969.2	5968.2				5963.5	5957.5
5					6352.3					5970.0					5960.3
					6348.9					5967.2					5951.5

Сравнение групповой скорости до компенсации и после компенсации дифракции приводятся в табл. 3, но более наглядно они отображены на графиках рис. 9, где скорости сгруппированы с помощью цветов по общим начальным радиусам пучка (т.е. каждому цвету соответствует определенная строка из табл. 3). Видно, что компенсация дифракции уменьшает значения скорости для всех образцов, но разброс значений скоростей “до” и “после” не во всех случаях в пользу компенсации. Для образца Д16Т положительный эффект наступает при акустическом пути более 40 мм, для КВ — для пути более 30 мм, а для образца стали — более 10 мм, причем для стали компенсация дифракции становится исключением, когда про-

являются проблемы, описанные выше. Заметим, что во всех трех случаях вариации как скомпенсированных, так и нескомпенсированных скоростей меньше их смещения друг относительно друга. Для Д16Т и КВ это смещение доходит до 0.1% (~7 м/с), а для образца стали — до 0.2% (~11 м/с). Таким образом, эффект осуществленной компенсации дифракции оказывается сильнее разброса скоростей для указанных акустических путей. Добавим, что эффект компенсации может быть улучшен, если усовершенствовать существующую модель сигнала с помощью метода деконволюции, и принимая за исходную форму сигнала не гауссовский импульс, а более приближенный к реальности вид.

**Рис. 9.** Групповые скорости без компенсации и с компенсацией дифракции для образцов Д16Т, кварца КВ и стали 12Х18Н10Т (слева направо). Линии визуализируют группы точек с общим начальным радиусом пучка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика локального измерения групповой скорости продольных волн в образцах миллиметровой толщины из разных однородных твердых материалов с компенсацией трансформации профиля за счет дифракции. Полученные результаты показывают, что при толщинах более 5 мм достижение погрешности измерений 0.1% возможно даже при использовании первых эхоимпульсов. Проведенные исследования показали, что возможны локальные высокоточные измерения групповой скорости в образцах из дюралюминия, кварца и стали для толщин более 3–4 мм, а также то, что данная методика для образцов толще 5 мм уменьшает разброс скорости. Обсуждаются возможности улучшения методики.

Работа выполнена в рамках Госзадания (номер темы FFWG-2019-0008, номер в ЕГИСУ АААА-А19-119121790089-0) Института общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Труэлл Э., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. 307 с.
2. Богданов С.В., Зубринов И.И., Пестряков Е.В., Сапожников В.К. Интерференционный акустооптический метод измерения скорости звука // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 1. С. 35–41.
3. Кондратьев А.И. Прецизионные измерения скорости и затухания ультразвука в твердых телах // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 470–476.
4. <https://www.astm.org/e0494-15.html>
5. Неразрушающий контроль: Справочник в 7 т. / Под ред. Ключева В.В. Т. 3. Ермолов И.Н., Ланге Ю.В. Ультразвуковой контроль. М.: Машиностроение, 2004. 864 с.
6. Aussel J.-D., Monchalain J.-P. Precision laser-ultrasonic velocity measurement and elastic constant determination // Ultrasonics. 1989. V. 27. № 3. P. 165–177.
7. Базылев П.В., Изотов А.В., Кондратьев А.И., Луговой В.А., Нигай В.П., Окишев К.Н. Государственный первичный эталон единицы скорости распространения продольных ультразвуковых волн в твердых средах // Измерительная техника. 2011. № 11. С. 7–10.
8. Базылев П.В., Изотов А.В., Кондратьев А.И., Луговой В.А., Окишев К.Н. Государственный первичный эталон единиц скоростей распространения продольных, сдвиговых и поверхностных ультразвуковых волн в твердых средах // Измерительная техника. 2013. № 7. С. 6–10.
9. Базылев П.В., Доронин И.С., Кондратьев А.И., Крумгольц И.Я., Луговой В.А., Окишев К.Н. Государственный первичный эталон единиц скоростей распространения и коэффициента затухания ультразвуковых волн в твердых средах ГЭТ 189-2014 // Измерительная техника. 2016. № 5. С. 5–10.
10. Соколовская Ю.Г., Подымова Н.Б., Карабутов А.А. Лазерный оптико-акустический метод для обнаружения нарушений периодичности структуры углепластиков // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 4. С. 454–461.
11. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.
12. Макалкин Д.И., Карабутов А.А., Саватеева Е.В., Симонова В.А. Измерение локальных модулей упругости конструкционных материалов с использованием лазерных источников ультразвука // Докл. Росс. Акад. наук. Физика, технические науки. 2022. Т. 502. С. 63–66.

УДК 534.29;537.635;548.4

ОСЛАБЛЕНИЕ СПИН-ФОНОННОЙ СВЯЗИ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЯДЕР В КРИСТАЛЛАХ NaF В УСЛОВИЯХ МАГНИТНОГО НАСЫЩЕНИЯ

© 2023 г. В. М. Микушев^а *, А. М. Рочев^а, Е. В. Чарная^а **^аСанкт-Петербургский государственный университет, Физический факультет, Петродворец, ул. Ульяновская 1, Санкт-Петербург, 198504 Россия

*e-mail: v.mikushev@spbu.ru

**e-mail: e.charnaya@spbu.ru

Поступила в редакцию 27.04.2023 г.

После доработки 22.05.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Скорость ядерной спин-решеточной релаксации определяется эффективностью взаимодействия тепловых фононов с ядерными спинами. Представлены результаты по снижению эффективности спин-фононной связи путем подавления вклада парамагнитных центров в релаксацию квадрупольных ядер. Подавление достигалось стационарным магнитным воздействием ларморовской частоты. Показано, что, как и в случае присутствия акустического поля, скорость спин-решеточной релаксации ядер ^{23}Na в кристалле фторида натрия при магнитном насыщении сигнала ЯМР не меняется в области отрицательной средней спиновой температуры. В области положительной спиновой температуры релаксация спинов ^{23}Na существенно замедляется, при этом восстановление ядерной намагниченности со временем описывается суммой двух экспонент. По мере увеличения интенсивности насыщающего поля растет вклад ядерных спинов с меньшей эффективностью спин-фононной связи, соответствующих экспоненте с большим временем релаксации. Продemonстрировано, что для ядер ^{19}F , не имеющих квадрупольного момента, эффективность спин-фононного взаимодействия не изменяется в условиях насыщения. Полученные результаты могут быть использованы для исследования структуры реальных кристаллов.

Ключевые слова: магнитная квантовая акустика, ядерное спин-фононное взаимодействие, акустическое и магнитное насыщение линии ЯМР, спин-решеточная релаксация, парамагнитные центры

DOI: 10.31857/S0320791923600464, EDN: CQLXPH

ВВЕДЕНИЕ

Эффективность спин-фононного взаимодействия определяет скорость спин-решеточной релаксации (СРР) ядер, характеризуемую измеряемыми методами ядерного магнитного резонанса (ЯМР) временем T_1^Σ [1]. Для ядер в реальных диэлектрических кристаллах суммарная скорость СРР равна:

$$(T_1^\Sigma)^{-1} = (T_1^{\text{lat}})^{-1} + (T_1^{\text{imp}})^{-1}, \quad (1)$$

где слагаемое $(T_1^{\text{lat}})^{-1}$ определяется спин-фононной связью в кристаллах с идеальной решеткой, а “примесный” вклад $(T_1^{\text{imp}})^{-1}$ обусловлен участием парамагнитных дефектов и примесей. Для ядер, обладающих электрическим квадрупольным моментом, “решеточный” вклад возникает за счет динамических градиентов электрических полей, индуцированных тепловыми фононами [2]. Решеточный механизм релаксации квадрупольных ядер доминирует в достаточно чистых образцах,

но роль примесной релаксации возрастает в легированных кристаллах, особенно при температурах ниже комнатной [3, 4]. В то же время, релаксация ядер со спином $\frac{1}{2}$ практически полностью определяется вторым слагаемым в уравнении (1). Эффективность примесного механизма ядерной СРР и его значительный вклад в величину T_1^Σ даже при малой концентрации парамагнитных центров в объеме кристалла, например, в случае наличия неконтролируемых примесей в специально очищенных образцах, обусловлены сильной связью парамагнитных центров с колебаниями решетки и с ближайшими ядерными спинами, а также участием спиновой диффузии, выравнивающей ядерную намагниченность в объеме образца [3].

В магнитной квантовой акустике для наблюдения акустического ядерного резонанса (АЯР), при котором переходы между ядерными зеемановскими уровнями индуцируются либо бегущей акустической волной, либо диффузно рассеянным акустическим полем резонансной частоты,

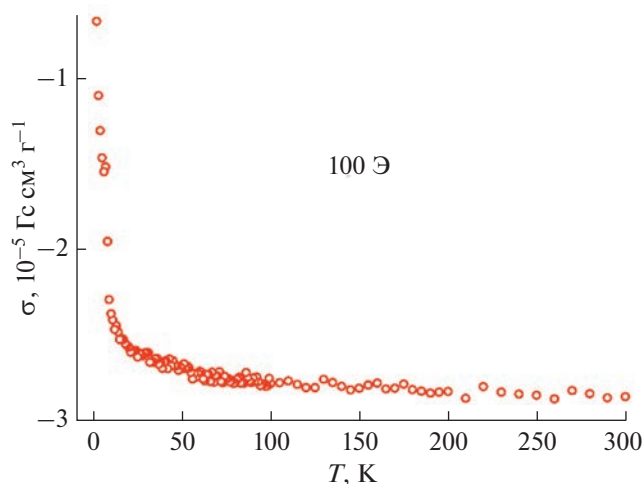


Рис. 1. Температурная зависимость удельной намагниченности σ кристалла фторида натрия в режиме охлаждения в магнитном поле 100 Э.

применяются два метода [5, 6]. В “прямом” методе АЯР непосредственно регистрируется резонансное поглощение акустической энергии спиновой системой ядер. В методе акустического насыщения сигнала ЯМР исследуется уменьшение разности населенностей спиновых уровней по изменению интенсивности сигнала ЯМР, которое можно трактовать как следствие повышения средней спиновой температуры в ансамбле ядер [7]. Метод насыщения сигнала ЯМР получил существенно большее распространение в силу высокой чувствительности и универсальности. Исследования акустического насыщения сигнала ЯМР квадрупольных ядер показали, что процесс насыщения подобен обратному процессу ядерной СРР. В идеальных кристаллах насыщение происходит за счет акустической модуляции электрических кристаллических полей. Присутствие парамагнитных центров различной природы приводит к появлению дополнительного канала акустического насыщения благодаря локальному перегреву спин-системы ближайших к этим центрам ядер и спиновой диффузии [8–10]. Локальное повышение спиновой температуры ядер вблизи определенного парамагнитного центра подавляет вклад этого центра в примесную релаксацию, что снижает скорость суммарной СРР $(T_1^{\Sigma})^{-1}$. Использование акустического насыщения сигнала ЯМР позволило, таким образом, реализовать методику разделения механизмов СРР квадрупольных ядер и измерить в ряде материалов времена $(T_1^{\text{lat}})^{-1}$ и $(T_1^{\text{imp}})^{-1}$ путем наблюдения восстановления ядерной намагниченности к своему равновесному значению в условиях насыщения [11–13]. Следует подчеркнуть, что изучение механизмов спин-фононного взаимодействия в различных материалах

является принципиально важным вопросом для многих практических применений [6, 14]. Задачей настоящей работы является исследование возможности разделения решеточного и примесного вкладов в спин-фононное взаимодействие в условиях магнитного насыщения линии ЯМР для квадрупольных ядер натрия в кристалле NaF и сравнение со случаем ядер фтора, не имеющих квадрупольного момента.

ОБРАЗЦЫ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Образцы были вырезаны из монокристалла фторида натрия NaF вдоль оси симметрии четвертого порядка. Состав исследуемого кристалла был изучен на наличие в объеме примесей, вошедших в решетку в процессе роста. Количественный элементный анализ пробы, взятой из объема кристалла, проводился на оптическом эмиссионном спектрометре с индуктивно связанной плазмой ICPE-9000 (Shimadzu). Анализ показал содержание в исследуемом кристалле NaF примесных атомов в следующих концентрациях: Ca – 310 мг/кг, Mg – 10.5 мг/кг, Fe – 7.9 мг/кг, Zn – 6.1 мг/кг и Sr – 3.1 мг/кг.

Исследование образца NaF на магнитометре MPMS SQUID VSM (Quantum Design) выявило слабый парамагнетизм, обусловленный неконтролируемыми парамагнитными центрами, на фоне диамагнитной намагниченности (рис. 1).

ЯМР измерения проводились на импульсном спектрометре Bruker Avance III 400, оптимизированном для работы с твердыми образцами, при температурах 296 и 155 К. Наблюдалось восстановление намагниченности ядер ^{23}Na после инверсии 180° импульсом при приложении дополнительного резонансного магнитного насыщающего воздействия.

Ядерная намагниченность при стационарном насыщении характеризовалась фактором насыщения $Z^{\text{st}} = A^{\text{st}}/A_0$, где A^{st} и A_0 – интегральные интенсивности линий ЯМР ^{23}Na в присутствии и в отсутствие дополнительного воздействия [15–17]. Для измерения скорости релаксации в условиях насыщения была разработана импульсная последовательность, схема которой изображена на рис. 2а. Перед 180° импульсом включается радиоимпульс P_1 с ларморовской частотой заполнения, длительность Δt которого не меньше $10T_1^{\Sigma}$. Интенсивность импульса P_1 в разных измерениях изменяется для создания стационарного насыщения различной степени. В промежутке между 180° и 90° импульсами подается радиоимпульс P_2 такой же мощности, как и P_1 . Длительность импульса P_2 зависит от времени задержки между 180° и 90° импульсами, задаваемым для измерения скорости восстановления ядерной намагниченности. По-

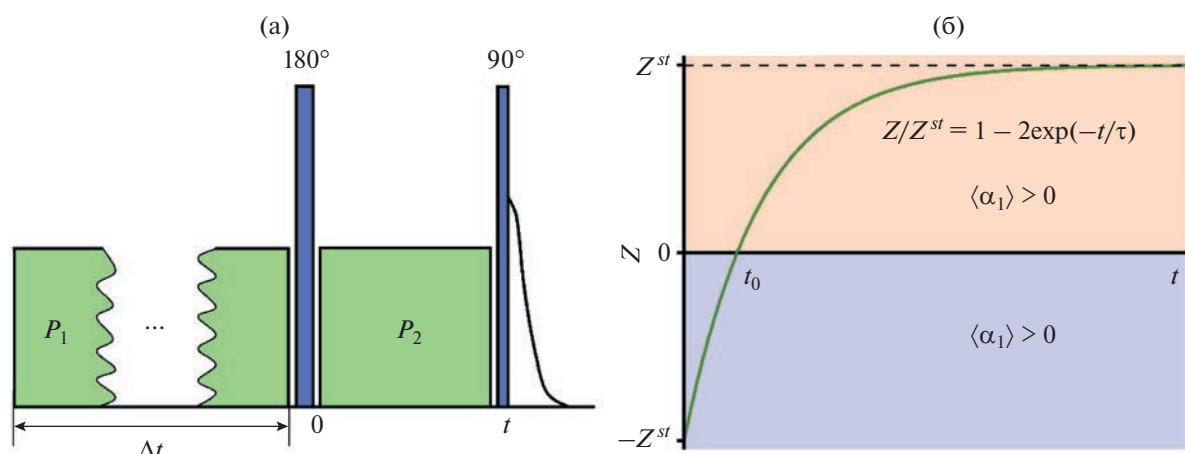


Рис. 2. (а) — Импульсная последовательность для наблюдения восстановления ядерной намагниченности в условиях магнитного насыщения линии ЯМР. Дополнительные резонансные радиоимпульсы P_1 и P_2 создают стационарное магнитное насыщение с фактором Z^{st} . (б) — Восстановление ядерной намагниченности после 180° импульса к Z^{st} . τ — время восстановления, t_0 — время, при котором ядерная намагниченность равна 0. $\langle \alpha_I \rangle$ — среднее по объему образца значение обратной спиновой температуры.

сле 90° импульса регистрируется сигнал свободной прецессии, Фурье-преобразование которого дает линию ЯМР. Зависимость интегральной интенсивности линии ЯМР A от времени задержки t между инвертирующим и зондирующим импульсами позволяет построить кривую восстановления ядерной намагниченности $Z(t) = A(t)/A_0$ к стационарному значению, как показано на рис. 2б, и рассчитать время восстановления τ .

В присутствии парамагнитных центров, приводящих к неоднородности ядерной намагниченности, вводится средняя по объему образца спиновая температура $\langle T_I \rangle$ [7]. Величину Z в этом случае можно выразить через отношение обратной спиновой температуры $\langle \alpha_I \rangle \equiv \frac{\hbar}{k_B \langle T_I \rangle}$ к обратной

температуре решетки $\alpha_l \equiv \frac{\hbar}{k_B T_l}$ (T_l — температура решетки): $Z = \frac{\langle \alpha_I \rangle}{\alpha_l}$. Таким образом, восстановление ядерной намагниченности на начальном этапе вплоть до момента времени t_0 (рис. 2б) происходит в области отрицательных спиновых температур, а затем для $t > t_0$ — в области положительных спиновых температур. В отсутствие эффекта подавления примесного вклада в СРР для каждого значения фактора насыщения Z^{st} суммарное время релаксации T_1^Σ связано с временем восстановления ядерной намагниченности в условиях стационарного насыщения τ (рис. 2б) соотношением:

$$T_1^\Sigma = \tau / Z^{st}. \quad (2)$$

Соотношение (2) является следствием известного уравнения для изменения обратной спиновой температуры под действием резонансного возбуждения и СРР [7]:

$$\frac{\partial \langle \alpha_I \rangle}{\partial t} = \frac{\alpha_l - \langle \alpha_I \rangle}{T_1^\Sigma} - W \langle \alpha_I \rangle = \frac{\alpha_l}{T_1^\Sigma} - \frac{\langle \alpha_I \rangle}{Z^{st} T_1^\Sigma}, \quad (3)$$

где W — вероятность индуцированных переходов и $Z^{st} = 1/(1 + WT_1^\Sigma)$. Решение уравнения (3) показывает экспоненциальное восстановление обратной спиновой температуры к равновесному значению со временем τ , подчиняющимся соотношению (2).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Измерения восстановления ядерной намагниченности ^{23}Na после инверсии 180° импульсом проводились при температурах 296 и 155 К в диапазонах фактора магнитного насыщения от 1 до 0.07 и от 1 до 0.06 соответственно. Полученные в отсутствие насыщения ($Z^{st} = 1$) времена релаксации T_1^Σ равнялись 12.4 и 54.6 с при 296 и 155 К соответственно. Было показано, что ход кривых восстановления $Z(t)$ при обеих температурах на начальном этапе в области отрицательных спиновых температур был экспоненциальным и характеризовался временами $\tau_1 = T_1^\Sigma Z^{st}$ в соответствии с выражением (2) при всех значениях фактора насыщения. С учетом неполной инверсии ядерной намагниченности после инвертирующего импульса кривые $Z(t)$ описывались выражением:

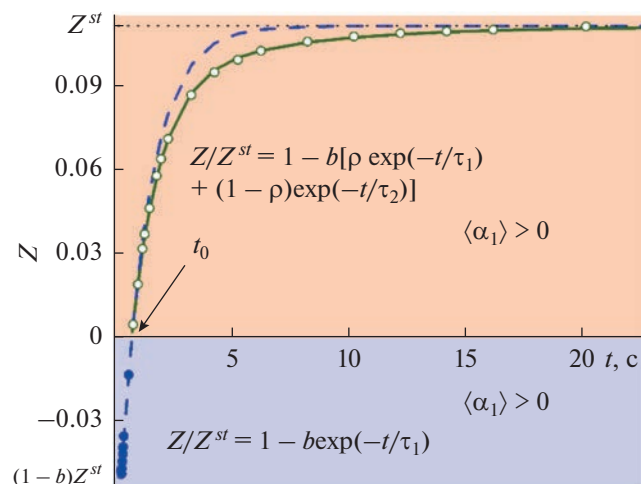


Рис. 3. Восстановление ядерной намагниченности после 180° импульса при стационарном насыщении $Z^{st} = 0.11$ для $T = 296$ К. Штриховая и сплошная линии построены по формуле (5) с $\rho = 1$ и $\rho < 1$ при $t > t_0$ соответственно.

$$Z(t) = Z^{st} [1 - b \exp(-t/\tau_1)], \quad (4)$$

где b — численный коэффициент, $1 < b < 2$. Таким образом, дополнительное магнитное насыщение не сказывалось на эффективности спин-фононного взаимодействия ядер натрия в области отрицательных средних спиновых температур при любом уровне насыщения.

Одноэкспоненциальный процесс восстановления ядерной намагниченности с временами $\tau_1 = T_1^\Sigma Z^{st}$ наблюдался также и в области положительных средних спиновых температур, но при ограниченных значениях фактора насыщения $Z^{st} > 0.4$ и $Z^{st} > 0.7$ для температур 296 и 155 К соответственно. При более сильном насыщении зависимость $Z(t)$ в области $\langle \alpha_I \rangle > 0$ ($t > t_0$) описывалась суммой двух экспонент с временами восстановления намагниченности τ_1 и $\tau_2 > \tau_1$

$$Z(t) = Z^{st} \{1 - b[\rho \exp(-t/\tau_1) + (1 - \rho) \exp(-t/\tau_2)]\}, \quad (5)$$

где ρ — весовой коэффициент, характеризующий относительный вклад решеточного механизма релаксации. Появление второй экспоненты с большим временем восстановления ядерной намагниченности демонстрирует снижение эффективности спин-фононного взаимодействия для части ядер и соответствует замедлению скорости СРР ^{23}Na . В качестве примера на рис. 3 показан ход восстановления ядерной намагниченности при 296 К для стационарного значения фактора

насыщения $Z^{st} = 0.11$. Следует подчеркнуть, что возможность расчета кривой восстановления ядерной намагниченности как суммы двух экспонент при достаточно большом насыщении обусловлена высокой точностью измерений, недостижимой в более ранних работах по подавлению примесного механизма релаксации.

Выражение (5) можно распространить на область отрицательных спиновых температур, полагая $\rho = 1$ при $t < t_0$.

На рис. 4 представлены значения весового коэффициента ρ для “быстрой” СРР с временем восстановления τ_1 , рассчитанного с помощью выражения (5) по экспериментальным зависимостям восстановления ядерной намагниченности ^{23}Na для различных значений фактора стационарного магнитного насыщения Z^{st} при двух температурах.

На рис. 5 показаны зависимости времен восстановления ядерной намагниченности τ_1 и τ_2 от фактора стационарного насыщения Z^{st} . Линейные зависимости между временем τ_1 и фактором Z^{st} при двух температурах согласуются с уравнением (2) и с величинами измеренных в отсутствие магнитного насыщения времен T_1^Σ . При пороговых значениях фактора стационарного насыщения в области времен $t > t_0$ появляется вклад более медленного процесса релаксации, который характеризуется временами восстановления $\tau_2 > \tau_1$. Доля этого вклада возрастает с уменьшением фактора насыщения.

Одноэкспоненциальная релаксация в области отрицательных спиновых температур при любой интенсивности насыщающего ядерную спиновую систему дополнительного резонансного поля означает, что не происходит подавления примесного механизма. В рамках термодинамического подхода [7] к описанию поведения ядерной спин-системы натрия примесный вклад в спин-фононное взаимодействие является эффективным, если локальная обратная спиновая температура α_{loc} ближе к обратной температуре решетки α_I , чем средняя по объему образца обратная спиновая температура $\langle \alpha_I \rangle$ [18]. В области отрицательных спиновых температур условие

$$|\alpha_{loc} - \alpha_I| < |\langle \alpha_I \rangle - \alpha_I| \quad (6)$$

выполняется всегда, даже в случае локального перегрева ядерной спин-системы вблизи парамагнитных центров до значений $\alpha_{loc} \approx 0$.

В области $t > t_0$ при $\langle \alpha_I \rangle > 0$ достаточно сильное дополнительное стационарное насыщение приводит к локальному перегреву спин-системы около определенных парамагнитных центров

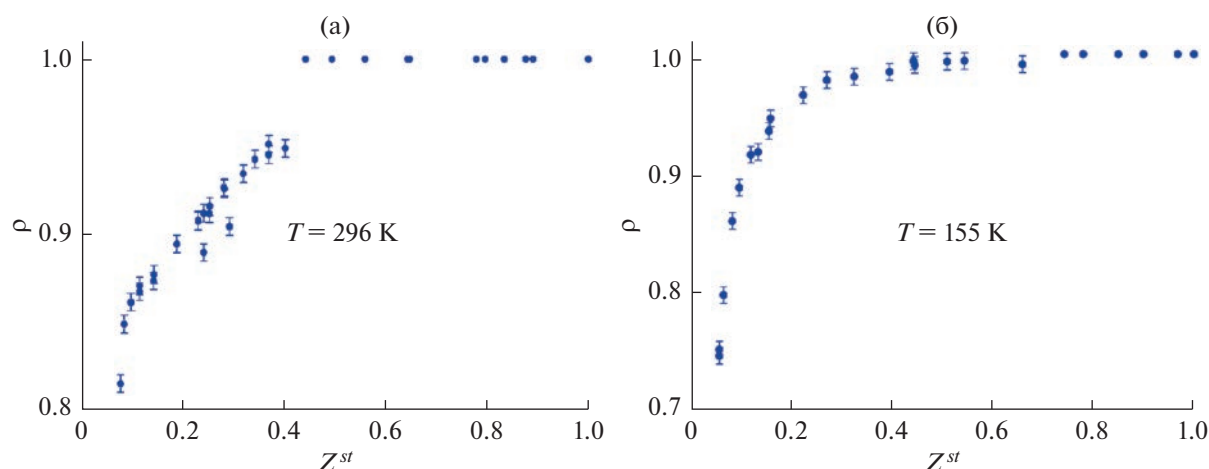


Рис. 4. Весовой коэффициент ρ , рассчитанный согласно (5) из экспериментальных кривых восстановления ядерной намагниченности ^{23}Na для различных Z^{st} при температуре (а) – 296 К и (б) – 155 К.

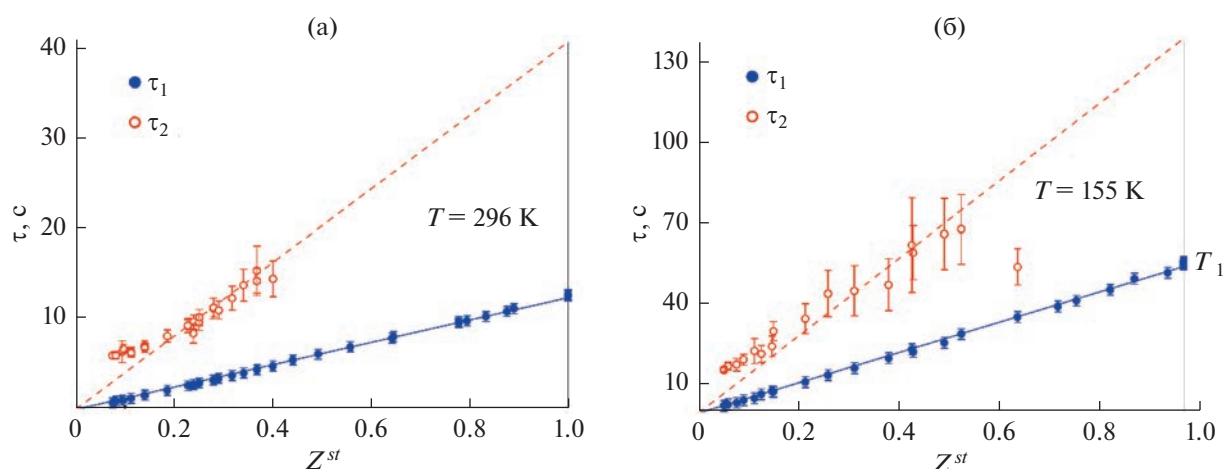


Рис. 5. Времена восстановления ядерной намагниченности ^{23}Na τ_1 и τ_2 в зависимости от фактора стационарного магнитного насыщения Z^{st} .

(понижению локальной обратной спиновой температуры) и к инверсии неравенства (6). Таким образом, происходит подавление примесной релаксации. Поскольку в случае присутствия в кристалле неконтролируемых примесей и точечных дефектов процесс подавления осуществляется при разных уровнях стационарного насыщения для разных парамагнитных центров, следует ожидать постепенного увеличения вклада медленной релаксации с ростом Z^{st} , что и наблюдается на эксперименте. При этом времена τ_2 соответствуют времени восстановления ядерной намагниченности только за счет решеточного механизма спин-фононной связи. Отметим, что теоретическая модель перегрева ядерной спин-системы

ядер в условии стационарного магнитного насыщения была предложена в [19].

На рис. 5 видно, что зависимость τ_2 от фактора стационарного насыщения близка к линейной, как и зависимость τ_1 . Построенные по рассчитанным значениям τ_2 проходящие через начало координат прямые должны при $Z^{st} = 1$ давать по аналогии с уравнением (2) значения времен СРР за счет решеточного механизма спин-фононной связи: $T_1^{\text{lat}} \approx 40 \text{ с}$ при 296 К и $T_1^{\text{lat}} \approx 140 \text{ с}$ при 155 К. Полученные оценки согласуются с температурной зависимостью времени спин-решеточной релаксации в идеальных кристаллах, идущей за счет двухфононных рамановских процессов [4, 20].

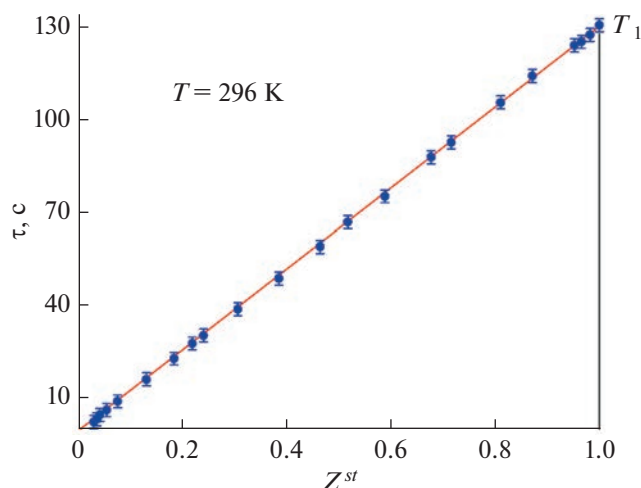


Рис. 6. Время восстановления τ намагниченности ядер ^{19}F в зависимости от фактора стационарного магнитного насыщения Z^{st} при температуре 296 К.

Измерения восстановления ядерной намагниченности в условиях стационарного магнитного насыщения были проведены нами также для ядер ^{19}F в том же кристалле NaF. Ядра ^{19}F имеют спин $\frac{1}{2}$ и не обладают квадрупольным электрическим моментом. Для дипольных ядер основную роль в СРР играет релаксация за счет парамагнитных центров и спиновой диффузии, тогда как решеточным вкладом можно пренебречь [3, 21]. Кроме того, возможно, что для ядер, не имеющих квадрупольного момента, насыщение реализуется без участия парамагнитных центров. На рис. 6 показана зависимость времени восстановления ядерной намагниченности τ от фактора насыщения при комнатной температуре. Как видно из рис. 6, при любых значениях Z^{st} процесс восстановления ядерной намагниченности к стационарному значению имеет экспоненциальный характер (4) с временами τ , соответствующими $T_1^{\Sigma} = T_1^{\text{imp}} = 131$ с. Полученный результат подтверждает отсутствие эффекта подавления примесной релаксации для ядер ^{19}F .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе реализован метод подавления вклада парамагнитных центров в спин-фононное взаимодействие ядер ^{23}Na , обладающих квадрупольным электрическим моментом, в условиях магнитного насыщения ядерной спиновой системы. Получено, что эффективность спин-фононного взаимодействия ядер не изменяется при отрицательных средних по объему образца спиновых температурах для любого фактора стацио-

нарного магнитного насыщения, как и в случае акустического насыщения. В области положительных спиновых температур СРР ядер ^{23}Na замедляется при увеличении стационарного насыщения до определенных значений Z^{st} . При этом происходит подавление примесной релаксации для части ядерной спин-системы. По зависимости времени восстановления ядерной намагниченности от фактора насыщения для этой части ядер оценены времена решеточного вклада в релаксацию при температурах 296 и 155 К. Предложенная методика разделения примесного и решеточного вкладов в релаксацию в условиях магнитного насыщения дает принципиальную возможность исследования примесного состава диэлектрических кристаллов с использованием стандартного оборудования ЯМР.

Измерения проводились на оборудовании Ресурсного центра Научного парка СПбГУ “Центр диагностики функциональных материалов для медицины, фармакологии и нанoeлектроники”. Определение состава и концентрации парамагнитных примесей в образцах проведено в Ресурсных центрах Научного парка СПбГУ “Методы анализа состава вещества” и “Физические методы исследования поверхности”. Жидкий азот предоставлен Криогенным отделом Научного парка СПбГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрагам А., Гольдман М. Ядерный магнетизм: порядок и беспорядок: в 2-х томах. М.: Мир, 1984. 660 с.
2. Микущев В.М., Чарная Е.В. Ядерный магнитный резонанс в твердом теле. СПб: Издательство Санкт-Петербургского университета, 1995. 204 с.
3. Хуцишвили Г.Р. Спиновая диффузия // Успехи физ. наук. 1965. Т. 87. № 2. С. 211–250.
4. Бахрамов А., Столышко А.Л., Чарная Е.В., Шутилов В.А. Спин-фононное взаимодействие в кристаллах NaCl и NaF, легированных медью // ФТТ. 1986. Т. 28. № 3. С. 844–849.
5. Кессель А.Р. Ядерный акустический резонанс. М.: Наука, 1969. 215 с.
6. Голенищев-Кутузов В.А., Самарцев В.В., Соловаров Н.К., Хабибулин Б.М. Магнитная квантовая акустика. М.: Наука, 1977. 200 с.
7. Гольдман М. Спиновая температура и ЯМР в твердых телах. М.: Мир, 1972. 342 с.
8. Кулешов А.А., Микущев В.М., Столышко А.Л., Чарная Е.В., Шутилов В.А. Роль дефектов и спиновой диффузии в электрическом насыщении линии ЯМР в кристаллах GaAs // ФТТ. 1986. Т. 28. № 11. С. 3262–3266.
9. Кулешов А.А., Микущев В.М., Столышко А.Л., Чарная Е.В., Шутилов В.А. Роль точечных дефектов в ядерном квадрупольном спин-фононном взаимодействии в диэлектрических кристаллах // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 6. С. 836–838.

10. Кулешов А.А., Микушев В.М., Столыпко А.Л., Чарная Е.В. Акустический ядерный резонанс в условиях бегущей ультразвуковой волны // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 3. С. 473–476.
11. Ефиценко П.Ю., Микушев В.М., Чарная Е.В. Прямое измерение решеточного и примесного вкладов в спин-решеточную релаксацию квадрупольных ядер // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 54. № 10. С. 583–585.
12. Ефиценко П.Ю., Мавлоназаров И.О., Микушев В.М., Чарная Е.В. Прямое измерение решеточного и дефектного вкладов в спин-решеточную релаксацию квадрупольных ядер в кристаллах GaAs и NaI // ФТТ. 1992. Т. 34. № 6. С. 1753–1758.
13. Мавлоназаров И.О., Микушев В.М. Измерение времени ядерной спин-решеточной релаксации в монокристаллах хлористого натрия в присутствии ультразвука // ФТТ. 1992. Т. 34. № 7. С. 2257–2260.
14. Власов В.С., Голов А.В., Котов Л.Н., Щеглов В.И., Ломоносов А.М., Темнов В.В. Современные проблемы сверхбыстрой магнитоакустики // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 1. С. 22–56.
15. Мавлоназаров И.О., Микушев В.М., Чарная Е.В. Прямое измерение решеточного и примесного вкладов в ядерную спин-решеточную релаксацию в условиях магнитного насыщения // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 56. № 1. С. 15–17.
16. Микушев В.М., Чарная Е.В. Ядерная спин-решеточная релаксация в условиях акустического, электрического и магнитного насыщения // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 1. С. 171–173.
17. Chandul A., Charnaya E.V., Kuleshov A.A., Mikushev V.M., Ulyashev A.M. Impurity Nuclear Spin-Lattice Relaxation Suppression and Charge Exchange of Chromium Ions in a γ -Irradiated Ruby Crystal // J. Magn. Reson. 1998. V. 135. № 1. P. 113–117.
18. Mikushev V.M., Charnaya E.V., Lee M.K., Chang L.-J. Suppression of the defect contribution to nuclear spin-lattice relaxation by long rf magnetic pulses for the particular case of $^{23}\text{NaCl}$ // Results Phys. 2019. V. 12. С. 1202–1203.
<https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.01.008>
19. Charnaya E.V., Mikushev V.M., Shabanova E.S. Direct measurements of impurity and lattice components of the nuclear spin-lattice relaxation in Al_2O_3 crystals // J. Phys.: Condens. Matter. 1994. V. 6. № 37. P. 7581–7588.
<https://doi.org/10.1088/0953-8984/6/37/012>
20. Микушев В.М., Уляшев А.А., Чарная Е.В., Chandoul A. Температурная зависимость времени спин-решеточной релаксации квадрупольных ядер в условиях насыщения линии ЯМР // ФТТ. 2002. Т. 44. № 6. С. 1001–2260.
21. Persyn G.A., Nolle A.W. Low- and High-Temperature Magnetic Resonance and Relaxation of NaF: Mn^{2+} // Phys. Rev. 1965. V. 140. № 5A. A1610–A1619.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.140.A1610>

УДК 534.231.3

ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СУСПЕНЗИЙ НА ОСНОВЕ ГЛИЦЕРИНА И МИКРОЧАСТИЦ СИНТЕТИЧЕСКОГО АЛМАЗА С ПОМОЩЬЮ РЕЗОНАТОРА С ПРОДОЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

© 2023 г. А. П. Семёнов^а, *, Б. Д. Зайцев^а, А. А. Теплых^а, И. А. Бородина^а

^аСаратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Рабочая 24, Саратов, 410019 Россия

*e-mail: alex-sheih@ya.ru

Поступила в редакцию 22.03.2023 г.

После доработки 19.04.2023 г.

Принята к публикации 18.05.2023 г.

Исследованы акустические свойства суспензий на основе чистого глицерина и алмазного порошка с размером частиц 1–2 мкм с различной концентрацией с помощью резонатора с продольным электрическим полем. Дисковый резонатор из лангасита с круглыми электродами на обеих сторонах пластины с частотой 4.1 МГц, работающий на продольной акустической волне, полностью погружали в жидкостный контейнер с исследуемой суспензией. На основе измеренных частотных зависимостей реальной и мнимой частей электрического импеданса резонатора с использованием эквивалентной электромеханической схемы были определены продольный модуль упругости и продольный коэффициент вязкости исследуемых образцов. Сравнение экспериментально найденных зависимостей продольного модуля упругости, коэффициента вязкости и скорости продольной акустической волны от объемной концентрации частиц алмаза в суспензии с расчетными зависимостями показало их хорошее соответствие.

Ключевые слова: пьезоэлектрический резонатор с продольным электрическим полем, суспензии, резонансная частота, электрический импеданс и адмиттанс, модуль упругости, коэффициент вязкости, скорость продольной акустической волны

DOI: 10.31857/S0320791923600294, EDN: ZHNFZQ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в самых разных областях науки и техники существует проблема быстрого и точного анализа различных свойств жидкостей, а также смесей на основе жидкостей и твердых частиц [1–7]. Такая проблема часто возникает при мониторинге состояния различных водоемов, сточных и грунтовых вод. Кроме того, с такими задачами часто сталкиваются специалисты в таких областях как медицина, биология, пищевая, фармацевтическая и нефтегазодобывающая промышленность [8–11]. Для исследования различных свойств жидкостей в течение многих десятилетий широко используются акустические методы и различные типы акустических волн. Например, для определения вязкости жидкости использовались акустические волны с поперечно-горизонтальной поляризацией нулевого порядка, распространяющиеся в пьезоэлектрических пластинах [12]. Весьма перспективными оказались поперечно-горизонтальные акустические

волны [13], волны высших порядков в пьезоэлектрических пластинах [14] и в многослойных структурах [15, 16]. Широко используются жидкостные датчики на пьезоэлектрических резонаторах с поперечным электрическим возбуждающим полем [17–20].

Резонаторы с продольным электрическим полем представляют собой, как правило, плоскопараллельную пластину пьезоэлектрического кристалла с круглыми электродами на обеих ее сторонах. Эти резонаторы хорошо известны как простые, надежные и легкодоступные акустоэлектронные устройства, которые могут использоваться для определения механических свойств различных пленок [21, 22]. Кристаллографическая ориентация и толщина среза кристалла определяются выбором типа чистой объемной акустической моды и рабочего частотного диапазона. При исследовании акустических свойств различных материалов с использованием таких резонаторов между поверхностью электроакустического преобразова-

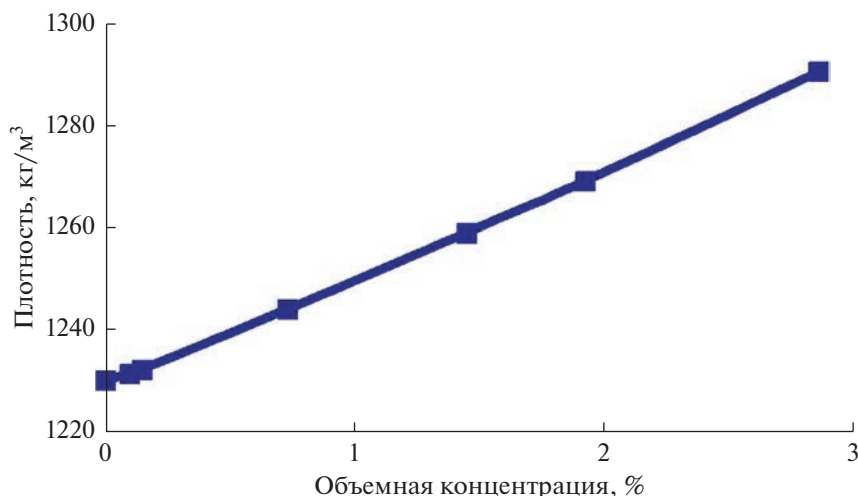


Рис. 1. Экспериментальная зависимость плотности суспензии от объемной концентрации частиц алмаза.

теля и исследуемым объектом создается хороший акустический контакт. Это реализуется автоматически, если исследуемым объектом является жидкость.

Ранее [23] была показана возможность определения поперечного модуля упругости и поперечного коэффициента вязкости суспензий на основе глицерина и частиц синтетического алмаза с различной концентрацией с помощью резонатора с продольным электрическим полем и поперечной акустической модой. Настоящая работа является продолжением этих исследований и посвящена экспериментальному исследованию влияния указанных суспензий на характеристики резонатора с продольным электрическим полем, работающего на продольной акустической моде, и определению продольного модуля упругости и продольного коэффициента вязкости исследуемых образцов.

МАТЕРИАЛЫ И СПОСОБ ПРИГОТОВЛЕНИЯ СУСПЕНЗИЙ

Для исследований использовали чистый глицерин объемом 30 мл, к которому добавляли разное количество алмазного порошка АСМ 2/1 с размером частиц 1–2 мкм. Каждый образец перемешивали на магнитной мешалке в течение 5 ч. Было установлено, что время полного оседания частиц алмаза в глицерине превышало 24 ч при комнатной температуре, что хорошо наблюдалось визуально. В результате было изготовлено шесть различных образцов суспензий с объемными концентрациями частиц 0.098, 0.147, 0.73, 1.45, 1.92 и 2.86%. Для определения плотности полученных образцов фиксированный объем (1 мл)

суспензии взвешивали на аналитических весах РА-214С (“Pioneer”, OHAUS Corporation). Для точного определения объема использовали прецизионную лабораторную пипетку (“Колор”, Ленпипет).

Экспериментальная зависимость плотности суспензии от объемной концентрации частиц представлена на рис. 1. Значения плотности образцов с известной объемной концентрацией алмазного порошка, вычисленные по табличным значениям плотности глицерина и алмаза, оказались в хорошем соответствии с экспериментальными. Проводимость чистого глицерина и полученных на его основе суспензий, определяемая при помощи кондуктометра HI8733 (“Hanna”, USA), не превышала 0.1 мкСм/см во всех случаях.

УСТАНОВКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ СУСПЕНЗИЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗОНАТОРОВ С ПРОДОЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Для проведения измерений был использован дисковый резонатор из лангасита X-среза, работающий на продольной акустической волне с круглыми электродами на обеих сторонах пьезоэлектрической пластины, который отличается низким температурным коэффициентом изменения резонансной частоты [22]. Толщина резонатора равнялась 706 мкм, диаметр электродов составлял 7.5 мм. Этот резонатор помещали в пластмассовый контейнер, объемом 30 мл (рис. 2).

Вначале измеряли частотные зависимости реальной и мнимой частей электрического импеданса свободного резонатора. Затем выбранный

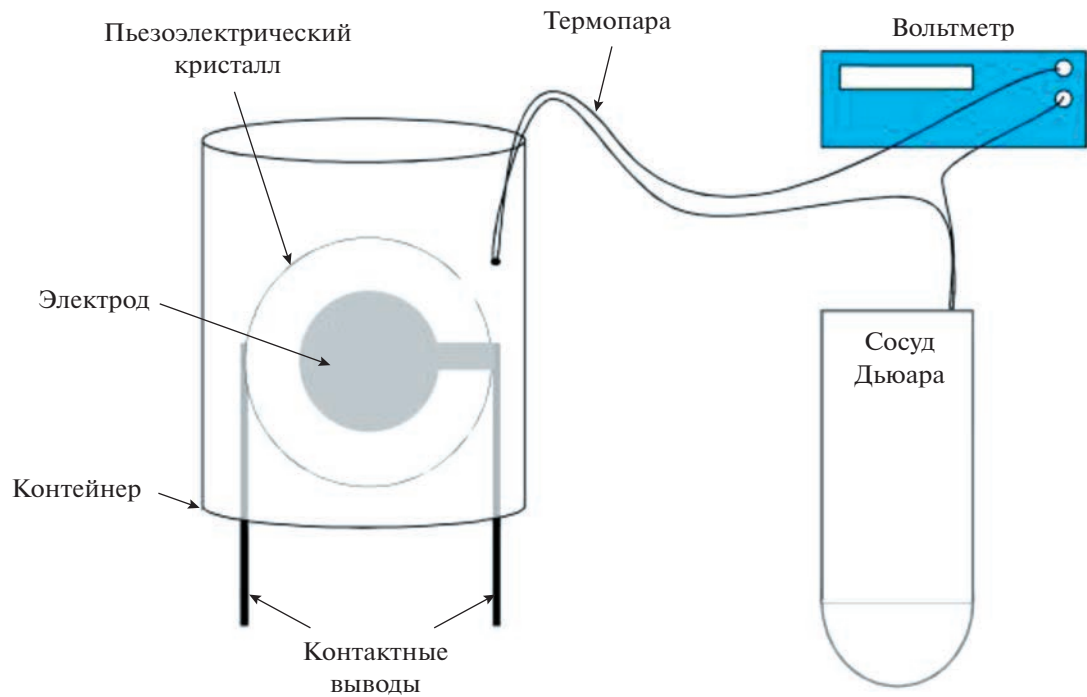


Рис. 2. Установка для проведения исследований с суспензиями.

образец суспензии перемешивали на магнитной мешалке в течение одного часа и добавляли в контейнер с резонатором так, чтобы резонатор был полностью погружен в суспензию с обеих сторон. Так как вязкость глицерина сильно зависит от его температуры [24], непосредственно перед каждым измерением в контейнер с суспензией опускали спай хромель–алюмелевой термопары, второй спай которой находился в сосуде Дьюара с тающим льдом при температуре 0°С. Концы термопары были подключены к вольтамперметру (GDM-78251A, GW Instek, Taiwan), как показано на рис. 2. Резонатор с контейнером помещали в термостат, в котором поддерживалась температура $27.30 \pm 0.05^\circ\text{C}$. Эта температура оказалась оптимальной в плане ее стабильного поддержания в термостате. Температура в помещении, где проводились измерения, поддерживалась равной $27.0 \pm 0.5^\circ\text{C}$ при атмосферном давлении 760 мм рт. ст. Спай термопары погружался в суспензию на 2 мин для измерения точного значения температуры суспензии. После извлечения термопары измеряли частотные зависимости реальной и мнимой частей электрического импеданса резонатора с помощью анализатора импедансов E4990A (Keysight Technologies, Santa Rosa, CA, USA). Время одного измерения не превышало 2 с.

В результате были построены зависимости резонансной частоты и добротности параллельного и последовательного резонансов, а также макси-

мальных значений электрического импеданса и адмиттанса резонатора от объемной концентрации частиц алмаза в суспензии. Оказалось, что максимальные значения электрического импеданса и адмиттанса вначале резко увеличиваются до достижения объемной концентрации частиц 0.098%, затем уменьшаются и по достижению концентрации 1.45% частиц алмаза снова увеличиваются (табл. 1). При этом частоты параллельного (4.057 МГц) и последовательного (4.06 МГц) резонансов не зависели от объемной концентрации частиц в суспензии в пределах погрешности измерений. Такая же ситуация наблюдалась для

Таблица 1. Максимальные значения электрического импеданса R_{max} и адмиттанса G_{max} резонатора из лангсита, погруженного в суспензию с частицами алмаза с различной объемной концентрацией β и различной плотностью ρ^s

β , %	ρ^s , кг/м ³	R_{max} , Ом	G_{max} , мкСм
0.0	1230.3	62.5	16.44
0.098	1231.6	64.76	17.3
0.147	1232.44	63.92	17.22
0.73	1244.27	62.64	16.8
1.45	1259.3	62.15	16.3
1.923	1269.35	63.3	16.55
2.857	1290.8	64.2	16.6

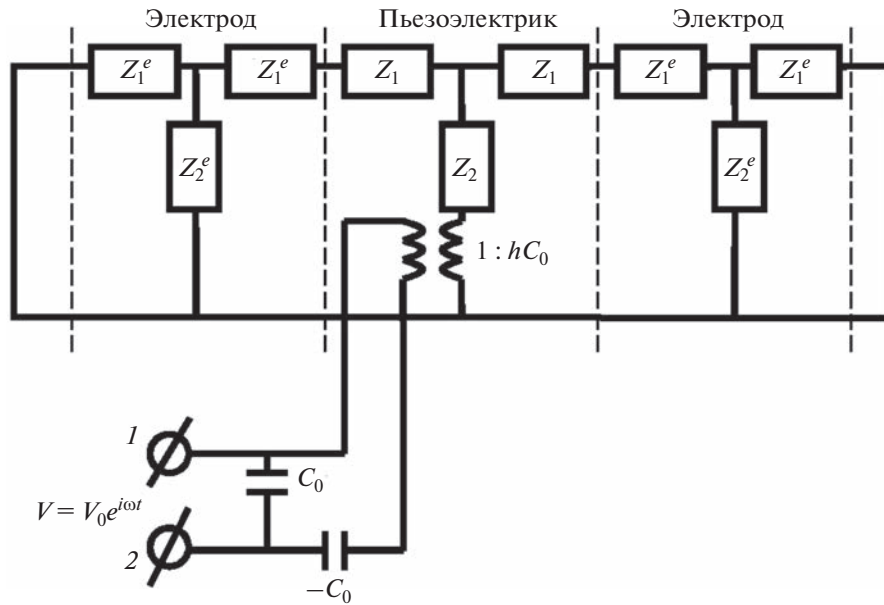


Рис. 3. Эквивалентная схема свободного резонатора с электродами.

добротностей параллельного (~ 16) и последовательного (~ 16) резонансов.

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ СХЕМА РЕЗОНАТОРА

Для теоретического анализа частотных зависимостей электрического импеданса свободного пьезоэлектрического резонатора была использована эквивалентная электромеханическая схема [22, 25], представленная на рис. 3. Эквивалентная схема состоит из электромеханического трансформатора, электрической и механической частей. Электрическая часть включает в себя первичную обмотку трансформатора и электрические емкости C_0 и $-C_0$, а механическая состоит из вторичной обмотки, акустических импедансов материала пьезоэлектрика Z_1 , Z_2 и электродов Z_1^e , Z_2^e [22]. Механическая часть эквивалентной схемы, соответствующая границе воздух–электрод, считалась закороченной из-за низкого акустического импеданса воздуха. Механические импедансы пьезоэлектрика Z_1 , Z_2 и электродов Z_1^e , Z_2^e на эквивалентной схеме представлены известными выражениями [23]

$$Z_1 = iz \text{Stg}(kd/2), \quad (1)$$

$$Z_2 = -izS/\sin(kd), \quad (2)$$

$$Z_1^e = iz_e \text{Stg}(k^e d^e/2), \quad (3)$$

$$Z_2^e = -iz_e S/\sin(k^e d^e). \quad (4)$$

Здесь S – площадь электродов, k и k^e – волновые числа для материалов пьезоэлектрика и электрода, d и d^e – толщина пьезоэлектрической пластины и электрода, i – мнимая единица, z и z^e – удельные механические импедансы пьезоэлектрика и электродов, которые выражаются следующим образом

$$z = \{(C + e^2/\epsilon + i\omega\eta)\rho\}^{1/2}, \quad (5)$$

$$z^e = \{(C^e + i\omega\eta^e)\rho^e\}^{1/2}. \quad (6)$$

Здесь C – модуль упругости, e – пьезоконстанта, ϵ – диэлектрическая проницаемость, η – коэффициент вязкости, ρ – плотность, ω – круговая частота. Индекс “ e ” означает принадлежность величины к электроду. Запишем еще выражения для скорости акустической волны в пьезоэлектрике v и электродах v^e :

$$v = \{(C + e^2/\epsilon + i\omega\eta)/\rho\}^{1/2}, \quad (7)$$

$$v^e = \{(C^e + i\omega\eta^e)/\rho^e\}^{1/2}. \quad (8)$$

Полагая, что толщина пьезоэлектрической пластины существенно меньше диаметра электрода, электрическую емкость можно представить, как $C_0 = \epsilon S/d$. При этом коэффициент трансформации определялся как $N = hC_0$, где $h = e/\epsilon$ [25]. В выражениях (1)–(8) для продольной волны в кристалле лангасита будем полагать $C = C_{11}$, $e = e_{11}$, $\eta = \eta_{11}$ и $\epsilon = \epsilon_{11}$ в системе координат, соответствующей X -срезу. В этом случае ось X_1 , нормальная к

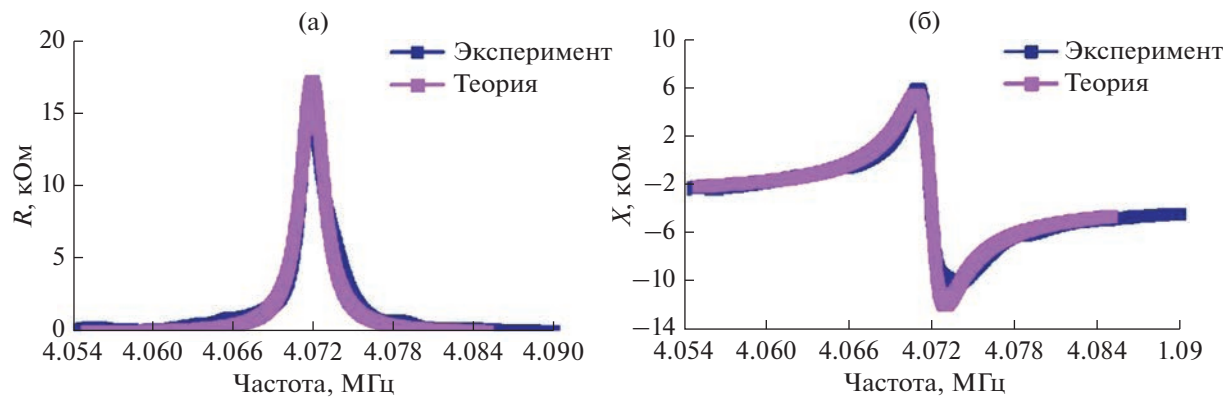


Рис. 4. Частотные зависимости (а) – реальной и (б) – мнимой частей электрического импеданса свободного резонатора из лангасита X-среза (фиолетовый цвет – эксперимент, синий цвет – теория).

поверхности пластины, определяет направление распространения волны и параллельна вектору поляризации волны. Соответственно для изотропного материала электрода $C^e = C_{11}^e$ и $\eta^e = \eta_{11}^e$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ
КОНСТАНТ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
МАТЕРИАЛА РЕЗОНАТОРА ИЗ ЛАНГАСИТА
X-СРЕЗА**

Вначале определяли модуль упругости C_{11} , коэффициент вязкости η_{11} , пьезоэлектрическую константу e_{11} , и диэлектрическую проницаемость ϵ_{11} лангасита, соответствующие выбранной системе координат. Для этого использовали измеренные частотные зависимости реальной и мнимой частей электрического импеданса свободного резонатора. Путем анализа эквивалентной схемы (рис. 3) с использованием обозначений (1)–(8) с помощью уравнений Кирхгофа была разработана программа, позволяющая определять частотные зависимости реальной и мнимой частей электрического импеданса в точках 1 и 2 электрической части эквивалентной схемы. Затем, в соответствии с методом наименьших квадратов, строилась целевая функция F по 7 точкам частотного диапазона:

$$F = \sqrt{\sum_{n=1}^7 \left\{ \left[R_{\text{theor}}^n - R_{\text{exper}}^n \right]^2 + \left[X_{\text{theor}}^n - X_{\text{exper}}^n \right]^2 \right\}}. \quad (9)$$

Здесь R_{theor}^n и R_{exper}^n это теоретическое и экспериментальное значения реальной части электрического импеданса на n шаге. Соответственно, X_{theor}^n и X_{exper}^n это теоретическое и экспериментальное значения мнимой части электрического импеданса на n шаге. Путем перебора неизвестных констант C_{11} , η_{11} , e_{11} , и ϵ_{11} лангасита определялся такой набор параметров, который соответствовал минимуму целевой функции. В этом случае экспериментальные частотные зависимости реальной R и мнимой X частей электрического импеданса резонатора максимально совпадали с теоретическими (рис. 4). В табл. 2 представлены исходные справочные [26] и полученные в результате фитинга значения материальных констант лангасита X-среза.

Очевидно, что данную методику можно также применить для определения материальных констант среды, которая находится в хорошем акустическом контакте с одной или двумя сторонами резонатора [22, 23, 25].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ
КОНСТАНТ ИССЛЕДУЕМЫХ СУСПЕНЗИЙ**

Определение механических характеристик суспензий было основано на использовании эквивалентной схемы нагруженного с обеих сторон резонатора (рис. 5) и полученных на первом этапе материальных констант X-среза лангасита. В слу-

Таблица 2. Значения материальных констант лангасита X-среза

	ρ , кг/м ³	C_{11} , 10 ¹⁰ Па	η_{11} , Па с	e_{11} , С/м ²	ϵ_{11} , 10 ⁻¹¹ Ф/м
Справочные данные [26]	5743	18.93	0	-0.431	16.79
Результаты фитинга	5743	18.88	3.8	-0.35	17.56

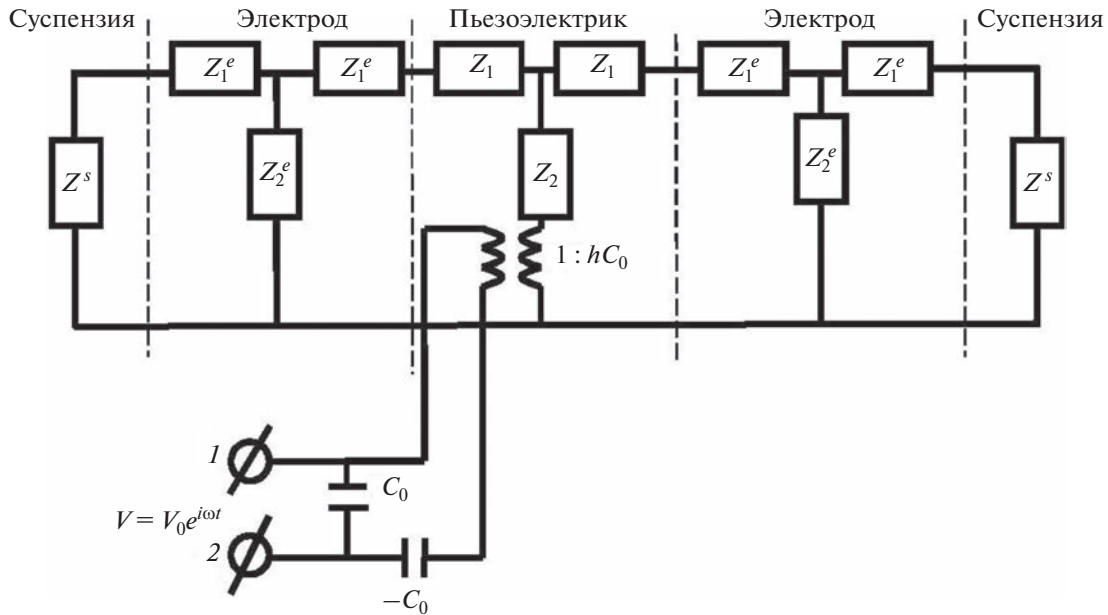


Рис. 5. Эквивалентная схема резонатора, нагруженного с обеих сторон исследуемой суспензией.

чае эквивалентной схемы, представленной на рис. 5, к обозначениям (1)–(8) следует добавить обозначения для акустического импеданса Z^s и скорости акустической волны v^s в суспензии [23]:

$$Z^s = z^s S, \quad (10)$$

$$v^s = \{(C_{11}^s + i\omega\eta_{11}^s)/\rho^s\}^{1/2}, \quad (11)$$

$$z^s = \{(C_{11}^s + i\omega\eta_{11}^s)\rho^s\}^{1/2}. \quad (12)$$

Здесь принадлежность величины к суспензии обозначена индексом s .

Путем анализа эквивалентной схемы нагруженного суспензией резонатора (рис. 5) с использованием обозначений (1)–(8) и (10)–(12) с помощью уравнений Кирхгофа была разработана программа, позволяющая определять частотные зависимости реальной и мнимой частей электрического импеданса в точках 1 и 2 электрической части схемы. По аналогии со свободным резонатором в соответствии с методом наименьших квадратов строилась целевая функция F (9) по 7 точкам частотного диапазона. Путем перебора неизвестных констант C_{11}^s и η_{11}^s суспензии определяли такую пару параметров, которая соответствовала минимуму целевой функции. В этом случае экспериментальные частотные зависимости реальной R и мнимой X частей электрического импеданса нагруженного резонатора максимально совпадали с теоретическими. Рис. 6 демонстрирует хорошее соответствие теоретических и

экспериментальных частотных зависимостей реальной R и мнимой X частей электрического импеданса резонатора из лангсита, погруженного в чистый глицерин и в смесь глицерина с частицами алмаза с объемной концентрацией 1.923%. Для всех остальных образцов суспензий также наблюдалось хорошее соответствие теоретических и экспериментальных частотных зависимостей реальной и мнимой частей электрического импеданса.

ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате проведенных исследований были получены значения продольного модуля упругости C_{11}^s , коэффициента вязкости η_{11}^s , а также скорости продольной акустической волны v_{11}^s для образцов суспензий с различной объемной концентрацией частиц синтетического алмаза с размером частиц 1–2 мкм. Эти данные представлены в табл. 3.

По известным материальным константам образцов суспензий C_{11}^s , η_{11}^s и ρ^s , скорость продольной волны v_{11}^s для каждого образца вычислялась по хорошо известной формуле [22]

$$v_{11}^s = \text{Re} \left(\sqrt{\frac{C_{11}^s + i2\pi f_w \eta_{11}^s}{\rho^s}} \right). \quad (13)$$

Символом f_w в уравнении (13) обозначена центральная рабочая частота.

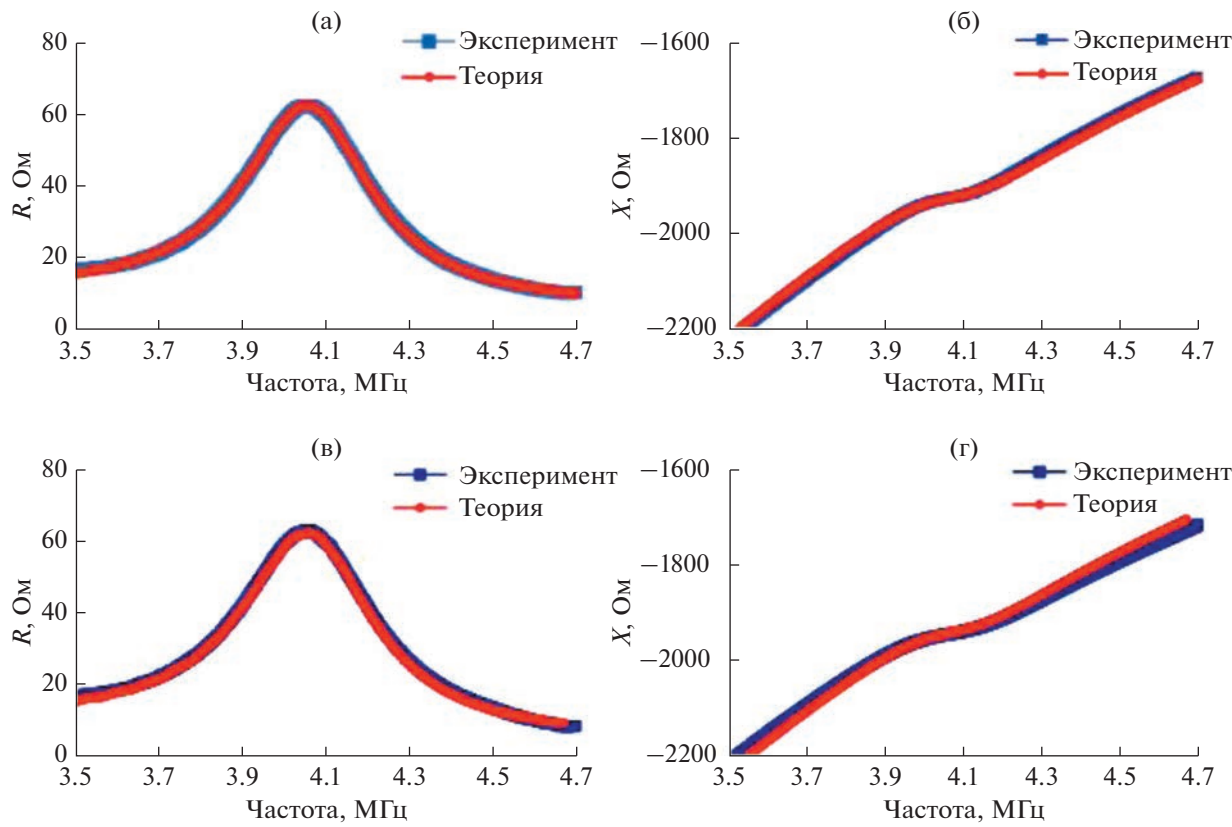


Рис. 6. Частотные зависимости (а, в) – реальной и (б, г) – мнимой частей электрического импеданса резонатора из лангасита, нагруженного с обеих сторон (а, б) – глицерином и (в, г) – смесью глицерина с частицами алмаза с концентрацией 1.923% (синий цвет – эксперимент, красный цвет – теория).

Скорость распространения продольной акустической волны в суспензиях можно также определить, используя известные формулы Урика (14) и Вуда (15) [27]:

$$v_{11}^s = \frac{1}{\sqrt{(\rho^p \varphi + \rho^{lq} (1 - \varphi)) \left(\varphi \left(\frac{1}{C_{11}^p} \right) + (1 - \varphi) \left(\frac{1}{C_{11}^{lq}} \right) \right)}}, \quad (14)$$

$$v_{11}^s = \frac{1}{\sqrt{\rho^s \left(\frac{1 - \varphi}{\rho^{lq} (v_{11}^{lq})^2} + \frac{\varphi}{\rho^p (v_{11}^p)^2} \right)}}, \quad (15)$$

где ρ^{lq} и ρ^p – плотности, C_{11}^{lq} и C_{11}^p – модули упругости, а v_{11}^{lq} и v_{11}^p – скорости продольной акустической волны в глицерине и алмазе соответственно.

Таблица 3. Значения продольного модуля упругости C_{11}^s , коэффициента вязкости η_{11}^s , скорости продольной акустической волны v_{11}^s и плотности ρ^s образцов суспензий с различной объемной концентрацией β частиц синтетического алмаза

β , %	ρ^s , кг/м ³	C_{11}^s , 10 ⁹ Па	η_{11}^s , Па с	v_{11}^s , м/с (4.06 МГц)
0.0	1230.3	4.472	6.8	1907
0.098	1231.6	4.474	6.7	1906.3
0.147	1232.44	4.476	6	1906
0.73	1244.27	4.503	6.1	1902.7
1.45	1259.3	4.542	6.1	1899.4
1.923	1269.35	4.563	6.4	1896.3
2.857	1290.8	4.61	6.5	1890

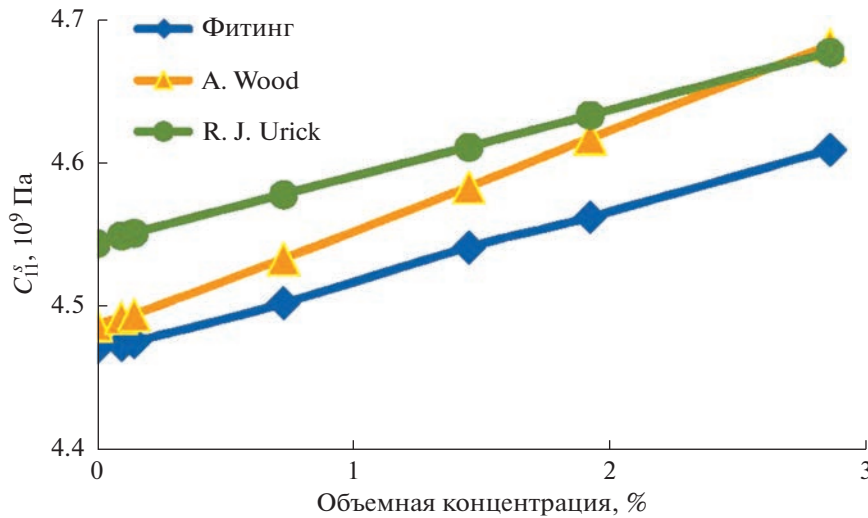


Рис. 7. Зависимость продольного модуля упругости C_{11}^s образцов суспензий от объемной концентрации частиц алмаза с размером частиц 1–2 мкм (зеленый цвет — использовано уравнение (16) (R.J. Urick), оранжевый цвет — использовано уравнение (17) (A. Wood), синий цвет — результат фитинга).

ской волны. Индексы “ lq ” и “ p ” означают принадлежность величины к жидкости и материалу частиц, а “ s ” принадлежность величины к суспензии, соответственно. Символом ϕ обозначена объемная доля частиц в суспензии.

Согласно уравнению Урика для скорости продольной акустической волны в суспензии (14), модуль упругости смеси может быть определен по формуле:

$$C_{11}^s = \frac{1}{\phi \left(\frac{1}{C_{11}^p} \right) + (1 - \phi) \left(\frac{1}{C_{11}^{lq}} \right)}. \quad (16)$$

Из уравнения Вуда (15) для модуля упругости можно получить следующее выражение:

$$C_{11}^s = \frac{1}{\frac{1 - \phi}{\rho^{lq} (v_{11}^{lq})^2} + \frac{\phi}{\rho^p (v_{11}^p)^2}}. \quad (17)$$

На рис. 7 представлены зависимости продольного модуля упругости C_{11}^s образцов суспензий от объемной концентрации частиц синтетических алмазов с размером частиц 1–2 мкм, полученные в результате фитинга (синий цвет) и рассчитанные в соответствии с формулой (16) (зеленый цвет) и формулой (17) (оранжевый цвет). Следует отметить, что при вычислении C_{11}^s по формуле (16) использовались справочные значения модуля упругости глицерина при температуре около 15°C [28] и алмаза [29]. А при вычислении C_{11}^s по формуле (17) были использованы экспериментальные значения плотности и скорости продольной

акустической волны для глицерина и справочные значения плотности и скорости волны для алмаза. В расчетах использовалось справочное значение плотности алмаза 3400 кг/м³ [29]. Значения плотности глицерина как экспериментально полученное, так и известное из литературы [29], оказались равными 1230.3 и 1260 кг/м³, соответственно. Скорость продольной акустической волны в чистом глицерине определяли экспериментально путем измерения времени задержки, затрачиваемого на прохождение волны от излучающего преобразователя к приемному на частоте ~1 МГц при известном расстоянии между ними [30]. Последняя процедура осуществлялась многократно при комнатной температуре 22–27°C. Различие справочных и реальных значений материальных констант, а также различие температур, при которой указаны эти материальные константы, в пределах 13°C являются причиной отличия зависимостей, представленных на рис. 7. Это отличие не превышает ±3%.

При вычислении v_{11}^s по формуле (13) использовались значения продольного модуля упругости C_{11}^s , коэффициента вязкости η_{11}^s и плотности, представленные в табл. 3. При вычислении v_{11}^s с помощью выражения (14) использовались экспериментальные значения плотности глицерина и справочные значения модуля упругости глицерина (при $T \approx 15^\circ\text{C}$), а также справочные значения плотности и продольного модуля упругости алмаза.

Для определения v_{11}^s по формуле (15) были использованы экспериментальные значения плотности и скорости продольной акустической волны

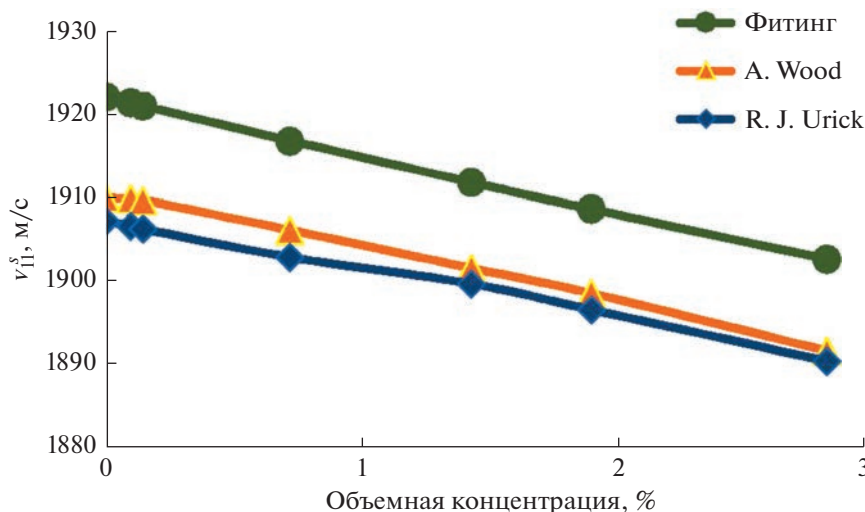


Рис. 8. Зависимость скорости продольной акустической волны v_{l1}^s в суспензии от объемной концентрации частиц алмаза с размером частиц 1–2 мкм (зеленый цвет — использовано уравнение (14) (R.J. Urick), оранжевый — использовано уравнение (15) (A. Wood), синий — уравнение (13) с использованием результатов фитинга).

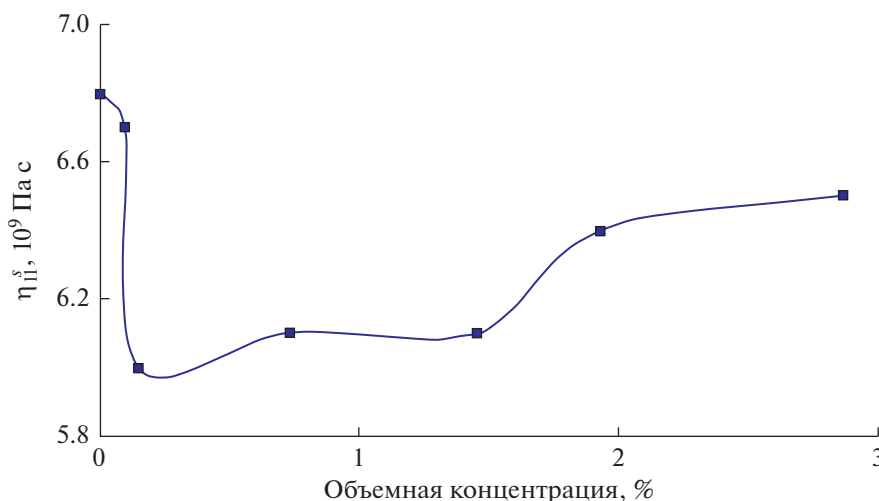


Рис. 9. Зависимость поперечного коэффициента вязкости η_{t1}^s образцов суспензий от объемной концентрации частиц алмаза с размером частиц 1–2 мкм, построенная по результатам фитинга.

для чистого глицерина, экспериментальные значения плотности образцов суспензий и справочные значения плотности и скорости волны продольной акустической волны для алмаза. Эти зависимости представлены на рис. 8. Оценки показали, что отличие представленных зависимостей не превышает $\pm 2\%$.

На рис. 8 представлена зависимость продольного коэффициента вязкости, определенного с помощью резонатора с продольным электрическим полем, от концентрации частиц алмаза. Видно, что с ростом объемной концентрации частиц вязкость вначале уменьшается с ростом объемной концентрации частиц алмаза до достиже-

ния концентрации 0.147%, после чего монотонно увеличивается. Причина такого поведения требует проведения дополнительных исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние суспензий на основе чистого глицерина и алмазного порошка ACM 2/1 с размером частиц 1–2 мкм с различной объемной концентрацией частиц на характеристики резонатора с продольным электрическим полем, изготовленного из пластины лангасита X-среза и работающего с продольной акустической волной. Получены зависимости максимальных значений

электрического импеданса и адмиттанса лангаситового резонатора, погруженного в суспензию, от объемной концентрации частиц алмаза. Показано, что максимальные значения электрического импеданса и адмиттанса сначала увеличиваются при изменении объемной концентрации частиц от 0 до 0.098%, затем уменьшаются, а по достижении концентрации 1.45% снова увеличиваются. Частоты и добротности параллельного и последовательного резонансов практически не зависят от объемной концентрации частиц в суспензии.

С помощью эквивалентной схемы свободного резонатора и резонатора, погруженного в суспензию, а также с использованием измеренных частотных зависимостей реальной и мнимой частей электрического импеданса были получены значения продольного модуля упругости, продольного коэффициента вязкости и скорости распространения продольной акустической волны для исследуемых образцов суспензий. Материальные константы определялись путем подгонки теоретических частотных зависимостей действительной и мнимой частей электрического сопротивления резонатора, которые рассчитывались с использованием эквивалентной схемы, к экспериментальным. Было установлено, что с ростом объемной концентрации частиц синтетического алмаза с размером частиц 1–2 мкм в суспензии на основе чистого глицерина от 0 до 2.86% значение продольного модуля упругости образцов суспензий увеличивается, а значение скорости продольной акустической волны уменьшается. Продольный коэффициент вязкости исследуемых образцов суспензий с ростом объемной концентрации частиц синтетических алмазов вначале уменьшается до достижения концентрации 0.147%, а с дальнейшим ростом концентрации частиц увеличивается.

Проведено сравнение значений скорости распространения продольной акустической волны в образцах исследуемых суспензий, полученных на основе фитинга и по формулам Урика и Вуда с использованием справочных значений материальных констант чистого глицерина и материала частиц. Оказалось, что максимальное относительное отклонение значений скорости во всех случаях не превышает 2%. При этом максимальное относительное отклонение значений продольного модуля упругости образцов суспензии равно $\pm 3\%$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 21-49-00062.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mayer A.E., Pogorelko V.V., Yalovets A.P. Elastic waves in suspensions // *Acoust. Phys.* 2011. V. 57. № 2. P. 136–143.
2. Егошина В.Д., Гонгальский М.Б., Цурикова У.А., Свиридов А.П., Осминкина Л.А., Андреев В.Г. Кавитационная активность водных суспензий пористых кремниевых наночастиц с различной степенью гидрофобности поверхности // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 1. С. 92–100.
3. Minakov A.V., Pryazhnikov M.I., Damdinov B.B., Nemtsev I.V. Acoustic Spectroscopy Study of the Bulk Viscosity of Nanosuspensions // *Acoust. Phys.* 2022. V. 68. № 2. P. 155–161.
4. Казаков Л.И. Ячеечные модели вязкоупругой среды с твердыми сферическими включениями // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 2. С. 173–181.
5. Шамсутдинова Е.С., Анисимкин В.И., Фионов А.С., Смирнов А.В., Колесов В.В., Кузнецова И.Е. Совершенствование методов исследования электрофизических и вязкостных свойств жидкостей // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 1. С. 56–62.
6. Lebedev-Stepanov P.V., Rudenko O.V. Sound attenuation in a liquid containing suspended particles of micron and nanometer dimensions // *Acoust. Phys.* 2009. V. 55. № 6. P. 729–734.
7. Zaitsev B.D., Borodina I.A., Teplykh A.A. Compact liquid analyzer based on a resonator with a lateral excitation electric field // *Ultrasonics*. 2022. V. 126. P. 106814.
8. Zaitsev B.D., Teplykh A.A., Borodina I.A., Kuznetsova I.E., Verona E. Gasoline sensor based on piezoelectric lateral electric field excited resonator // *Ultrasonics*. 2017. V. 80. P. 96–100.
<https://doi.org/10.1016/j.ultras.2017.05.003>
9. Kondoh J., Nakayama K., Kuznetsova I. Study of frequency dependence of shear horizontal surface acoustic wave sensor for engine oil measurements // *Sensors and Actuators A: Physical*. 2021. V. 325. P. 112503.
<https://doi.org/10.1016/j.sna.2020.112503>
10. Song S., Chen D., Wang H., Guo Q., Yu W. Shear mode bulk acoustic viscosity sensor for blood coagulation monitoring in oral anticoagulant therapy // *J. Nanoscience Nanotech.* 2018. V. 18. P. 8099–8104.
<https://doi.org/10.1166/jnn.2018.16425>
11. Бородин И.А., Зайцев Б.Д., Алсөзйди А.К.М., Караваева О.А., Гулий О.И. Биологический датчик на основе акустической щелевой моды с использованием микробных клеток для определения ампициллина // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 6. С. 583–588.
12. Zaitsev B.D., Joshi S.G., Kuznetsova I.E., Borodina I.A. Acoustic waves in piezoelectric plates bordered with viscous and conductive liquids // *Ultrasonics*. 2001. V. 39. № 1. P. 45–50.
[https://doi.org/10.1016/S0041-624X\(00\)00040-8](https://doi.org/10.1016/S0041-624X(00)00040-8)
13. Guo F.L., Sun R. Propagation of Bleustein–Gulyaev wave in 6 mm piezoelectric materials loaded with viscous liquid // *Int. J. Solids and Structures*. 2008. V. 45. № 13. P. 3699–3710.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.09.018>
14. Anisimkin V., Shamsutdinova E., Li P., Wang B., Zhu F., Qian Z., Kuznetsova I. Selective detection of liquid viscosity using acoustic plate waves with in-plate polarization // *Sensors*. 2022. V. 22. P. 2727.
<https://doi.org/10.3390/s22072727>

15. Zhao Z., Qian Z., Yong Y.-K. Frequency shift prediction of a shear mode multi-layered FBAR sensor in viscous media using transfer matrix method // *Appl. Math. Model.* 2021. V. 99. P. 555–565.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.07.009>
16. Caliendo C., Hamidullah M. Guided acoustic wave sensors for liquid environments // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2019. 52. P. 153001.
<https://doi.org/10.1088/1361-6463/aafd0b>
17. Chen D., Xu Y., Li D., Zhang L., Liu W., Wang J. A lateral field excited ZnO film bulk acoustic wave sensor working in viscous environments // *J. Micromech. Microeng.* 2013. V. 23. № 9. P. 095032
18. Wang M., Shi H., Ma T., Yuan L., Wang J., Du J., Qian Z., Kuznetsova I., Zhang C. High-frequency vibration analysis of LiTaO₃ piezoelectric plates excited by lateral electric fields produced by surface electrodes under viscous liquid loadings for sensing // *Smart Materials and Structures.* 2020. V. 29. № 4. P. 045004.
19. Hu Y., French L.A., Radecsky K., Da Cunha M.P., Millard P. and Vetelino J.F. A lateral field excited liquid acoustic wave sensor // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2004. V. 51. № 11. P. 1373–1380.
20. Зайцев Б.Д., Теплых А.А., Шихабудинов А.М. Датчик вязкой и проводящей жидкости на основе пьезоэлектрического резонатора с поперечным электрическим полем // *Нелинейный мир.* 2016. Т. 14. № 1. С. 61–63.
21. Durning C.J., Nwankwo E. Mechanical response of thickness-shear mode quartz-crystal resonators to linear viscoelastic fluids // *Sensors and Actuators A: Physical.* 1998. V. 64. № 2. P. 119–124.
22. Kuznetsova I.E., Zaitsev B.D., Shikhabudinov A.M. Elastic and viscosity properties of Nanocomposite Films Based on Low-Density Polyethylene // *Trans. Ultrason. Ferroel. Freq. Control.* 2010. V. 57. № 9. P. 2099.
23. Semyonov A., Zaitsev B., Teplykh A., Borodina I. The Effect of Glycerol-Based Suspensions on the Characteristics of Resonators Excited by a Longitudinal Electric Field // *Sensors.* 2023. V. 23. P. 608.
24. Singh A., Walvekar R., Khalid M., Wong W.Y., Gupta T.C.S.M. Thermophysical properties of glycerol and polyethylene glycol (PEG600) based DES // *J. Mol. Liquids.* 2018. V. 252. P. 439–444.
25. Kuznetsova I., Zaitsev B., Krasnopol'skaya L., Teplykh A., Semyonov A., Avtonomova A., Ziangirova M., Smirnov A., Kolesov V. Influence of humidity on the acoustic properties of mushroom mycelium films used as sensitive layers for acoustic humidity sensors // *Sensors.* 2020. V. 20. P. 2711.
26. Chilla E., Flannery C.M., Fröhlich H.-J., Straube U. Elastic properties of langasite-type crystals determined by bulk and surface acoustic waves // *J. Appl. Phys.* 2001. V. 90. № 12. P. 6084.
<https://doi.org/10.1063/1.1409574>
27. Harker A.H., Temple J.A.G. Velocity and attenuation of ultrasound in suspensions of particles in fluids // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1988. V. 21. P. 1576–1588.
28. Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. Физические величины. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
29. Енохович А.С. Справочник по физике и технике. М.: Просвещение, 1983. 255 с.
30. Зайцев Б.Д., Семенов А.П., Теплых А.А., Бородина И.А. Исследование продольной акустической волны в суспензии “глицерин–микрочастицы синтетического алмаза” // *СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии (КрыМиКо'2022).* Вып. 4. С. 187–188.

МЕТОД КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ШУМА, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ОБТЕКАНИИ УПРУГИХ ТЕЛ

© 2023 г. А. С. Суворов^а, Е. М. Соков^а, А. Л. Вировлянский^а, В. О. Еремеев^{а, *}, Н. В. Балакирева^а

^аИнститут прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603950 Россия

*e-mail: eremeev.vladimir.o@ipfran.ru

Поступила в редакцию 17.04.2023 г.

После доработки 16.08.2023 г.

Принята к публикации 19.09.2023 г.

Представлен конечно-элементный метод расчета гидродинамического шума, возбуждаемого турбулентными пульсациями жидкости в присутствии упругого тела. Традиционный подход к решению этой задачи на основе прямого решения уравнения Лайтхилла требует большого объема вычислений. Показано, что ситуация существенно упрощается при расчете компонент шума на относительно низких частотах, которые отвечают длинам волн, превышающим размеры турбулентной области. В этом случае шумовое поле удастся выразить через давление турбулентных пульсаций на поверхности упругого тела, найденное в приближении несжимаемой жидкости. Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на IX Российской конференции “Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике”, г. Светлогорск, 26 сентября–1 октября 2022 г.

Ключевые слова: гидродинамический шум, конечно-элементное моделирование, излучение звука

DOI: 10.31857/S0320791923600440, **EDN:** COYNPT

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается одна из классических задач аэро- и гидроакустики: расчет звукового поля, возбуждаемого турбулентными пульсациями скорости с малыми числами Маха в присутствии упругого тела. Данный класс задач успешно решается методом физического эксперимента, однако он отличается дороговизной и требует много времени и подготовки к проведению эксперимента. Некоторые сложности, связанные с проведением физического эксперимента, изложены в [1–3]. В связи с этим большую популярность набирают численные эксперименты, что позволяет в настоящее время решать задачи, связанные с анализом генерации звука турбулентностью, с помощью так называемого гибридного подхода [4, 5]. Он базируется на предположении о том, что возбуждаемое звуковое поле столь слабо, что его обратным влиянием на турбулентность можно пренебречь. Задача решается в два этапа.

На первом этапе турбулентные пульсации рассчитываются путем численного решения уравнения Навье–Стокса. В зависимости от поставленной задачи и располагаемых вычислительных ресурсов используют либо метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [6–8], позволяющий описать вихревые структуры с мини-

мальным размером, связанным с размером ячейки сеточной модели, либо RANS, описывающий только крупные энергонесущие вихревые структуры.

На втором этапе результаты этих вычислений применяются для оценки генерируемых звуковых полей. Это делается с помощью акустической аналогии Лайтхилла [9], подхода Фокса Вильямса и Хоукингса [10], соотношений, описывающих генерацию звука вихрями (vortex sound) [11] и многочисленных методов, основанных на использовании гидродинамической теории возмущений [3, 12]. Пример применения одного из гибридных подходов приведен в [13].

Решение обсуждаемой здесь задачи существенно упрощается в ситуации, когда вызванная турбулентностью деформация упругого тела пренебрежимо мала и поверхность тела можно считать твердой. В этом случае, как впервые было показано в работе [14], звуковое поле удастся аналитически выразить через параметры турбулентных пульсаций скорости и давления на поверхности тела.

Учет деформации упругого тела требует применения другого подхода. В работах [15, 16] описано решение данной задачи с использованием метода конечных элементов. На этапе гидродинамического расчета определяются источники гидродинамического шума в виде тензора Лайтхилла,

при этом поверхность обтекаемого тела считается абсолютно твердой. При расчете генерируемого звукового поля, на основе определенных источников, предполагается, что давление в жидкости описывается уравнением Лайтхилла, а смещения частиц среды внутри упругого тела задаются обычными уравнениями линейной теории упругости [17]. Совместное решение этих уравнений выполняется методом конечных элементов [15, 16]. Преимуществом данного метода, кроме учета вклада упругости конструкции в акустическое поле, является возможность подавления влияния граничных условий гидродинамической части задачи за счет наложения плавного пространственного фильтра. Кроме того, в классе задач, где относительно локальная неоднородность обтекаемого тела является интенсивным источником шумоизлучения, применяют подход с искусственной турбулизацией потока на входной границе расчетной области. В таких задачах без применения пространственной фильтрации искусственных турбулентных источников данные источники приводят к значительному искажению определяемого акустического поля. Однако практическая реализация данного подхода требует большого объема вычислений, так как расчет акустического поля базируется на использовании массива данных, включающих значения поля скорости во всех узлах гидродинамической модели среды для всех временных отсчетов.

Ниже показано, что в случае, когда обтекаемое тело целиком находится внутри расчетной области LES и вдали от входной границы, можно существенно уменьшить объем данных, передаваемых в акустическую часть задачи. Это реализуется за счет выражения комплексной амплитуды шумового поля через давление на поверхности обтекаемого тела.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается ситуация, когда упругое тело — объем V_e , заполненный однородной упругой средой, — находится внутри турбулентной жидкости. Жидкость занимает все бесконечное пространство V вне области V_e . Турбулентные пульсации скорости жидкости заданы полем $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}$ — радиус-вектор точки среды, t — время. Декартовы координаты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{x}$ обозначим соответственно v_i и x_i , $i = 1, 2, 3$. Компоненты вектора деформации в области V_e обозначим $u_i(\mathbf{x}, t)$. Границу раздела жидкой и упругой сред обозначим символом S .

Предполагается, что турбулентные пульсации сосредоточены в некоторой окрестности упругого тела, характерный размер которой обозначим D . Нашей целью является расчет возбуждаемого турбулентностью гидродинамического шума на ди-

станциях $r \gg D$ от центра турбулентной области. В соответствии со сказанным во Введении, решение этой задачи для турбулентности с малыми числами Маха выполняется в два этапа.

1. *Гидродинамический этап.* Турбулентное движение жидкости численно рассчитывается в предположениях о том, что жидкость несжимаема, а поверхность упругого тела S является твердой. Результатом расчета являются функции $v_i(\mathbf{x}, t)$ и $p_j(\mathbf{x}, t)$, представляющие компоненты скорости и давления в турбулентной жидкости. Далее при выводе аналитических соотношений мы учитываем то обстоятельство, что нормальная производная давления p_j на твердой поверхности S пропорциональна Re^{-1} , где Re — число Рейнольдса [15, 18]. Ограничиваясь рассмотрением ситуаций, когда числа Рейнольдса достаточно велики, мы, следуя [18], приближенно считаем нормальную производную давления на поверхности S равной нулю.

2. *Акустический этап.* Расчет поля звукового давления $p(\mathbf{x}, t)$ путем решения уравнения Лайтхилла

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1)$$

где $T_{ij}(\mathbf{x}, t)$ — тензор Лайтхилла, который в случае малых чисел Маха выражается приближенным соотношением [1, 2]

$$T_{ij} = \rho_0 v_i v_j, \quad (2)$$

где ρ_0 — плотность невозмущенной жидкости. Здесь и далее по повторяющимся индексам выполняется суммирование. Оставаясь в рамках традиционного подхода [4], правую часть уравнения Лайтхилла (1) рассматриваем как заданный источник звукового поля. Она находится подстановкой в (2) поля скорости турбулентных пульсаций, найденного на этапе 1.

Уравнение (1) для давления $p(\mathbf{x}, t)$ следует решать совместно с линейным уравнением для компонент вектора деформации (смещения) частиц упругого тела $u_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, 2, 3$ [17]. Связь между p и u_i устанавливается приведенными ниже граничными условиями на поверхности S .

Пользуясь линейностью задачи, от величин, задающих поля в жидкости и упругой среде, перейдем к Фурье-образам этих величин по времени. Фурье-образ каждой величины будем обозначать добавлением знака тильда над соответствующим символом. Так, для давления имеем

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt.$$

Линейное волновое уравнение (1) для давления p переходит в уравнение Гельмгольца

$$\Delta \tilde{p}(\mathbf{x}) + k^2 \tilde{p}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3)$$

где $k = \omega/c$, c – скорость звука в жидкости. Здесь и далее аргумент ω для краткости опускаем. Внутри упругого тела уравнения для компонент вектора смещения [17] имеют вид

$$-\omega^2 \rho_e \tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad (4)$$

где ρ_e – плотность упругой среды, $\tilde{\sigma}_{ij}$ – компоненты тензора напряжений. В самом общем виде компоненты тензора напряжений в линейном приближении выражаются через компоненты вектора деформации соотношением [17]

$$\tilde{\sigma}_{ij} = A_{iji'j'} \frac{\partial \tilde{u}_{i'}}{\partial x_{j'}}, \quad (5)$$

где $A_{iji'j'}$ – постоянные коэффициенты.

Уравнения (3) и (4) следует решать совместно с граничными условиями, заданными на поверхности S . Эти условия выражают непрерывность нормальной компоненты скорости

$$\left[\frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{x})}{\partial x_i} n_i(\mathbf{x}) - \omega^2 \rho \tilde{u}_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x} \in S} = 0 \quad (6)$$

и нормальной компоненты тензора напряжений

$$[\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) + \tilde{p}(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x})]_{\mathbf{x} \in S} = 0. \quad (7)$$

Здесь $n_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$ – компоненты единичного вектора $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, направленного по нормали к поверхности S внутрь жидкости.

Уравнения (3) и (4) с граничными условиями (6) и (7) могут быть решены методом конечных элементов. Соответствующие процедуры описаны и протестированы в статьях [16, 18, 19] и ряде других работ (см. [4] и имеющиеся там ссылки). Однако, как указано во Введении, практическая реализация данного подхода требует большого объема вычислений. В следующем разделе показано, что при расчете низкочастотных компонент звукового поля объем вычислений можно существенно уменьшить. Это достигается благодаря тому, что искомое звуковое поле удастся приближенно выразить через давление $\tilde{p}_f$ на поверхности тела S , найденное на этапе 1.

Искомое решение уравнения (3) представим в виде суперпозиции

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = \tilde{p}_I(\mathbf{x}) + \tilde{p}_S(\mathbf{x}), \quad (8)$$

где $\tilde{p}_I(\mathbf{x})$ и $\tilde{p}_S(\mathbf{x})$ интерпретируются как падающая на поверхность S и рассеянная на этой поверхности компоненты полного поля соответ-

ственно. Компонента $\tilde{p}_I(\mathbf{x})$ представляет поле, которое возбудили бы источники в правой части (3) в отсутствие упругого тела. Компонента $\tilde{p}_S(\mathbf{x})$ представляет собой решение (3) с нулевой правой частью и граничными условиями на S , обеспечивающими выполнение условий (6) и (7) для суммарного поля (8).

ПАДАЮЩЕЕ ПОЛЕ

Падающее поле выражается соотношением

$$\tilde{p}_I(\mathbf{x}) = -\int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y})}{\partial x_i \partial x_j} dV(\mathbf{y}), \quad (9)$$

где $dV(\mathbf{y})$ – элемент объема с центром в точке $\mathbf{y}$, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – функция Грина уравнения Гельмгольца. Поскольку источники являются акустически компактными (расстояние между источниками пренебрежимо мало), функцию Грина можно записать в виде:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (10)$$

Покажем, что в этом случае падающее поле $\tilde{p}_I(\mathbf{x})$ относительно просто выразится через давление $\tilde{p}_f(\mathbf{x})$, найденное в приближении несжимаемой жидкости на этапе 1. Воспользуемся уравнением Эйлера несжимаемой жидкости [20]:

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho_0 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_f}{\partial x_i}.$$

Взяв дивергенцию от обеих частей этого уравнения, т.е. вычислив производные $\partial/\partial x_i$, с учетом условия несжимаемости $\partial v_i/\partial x_i = 0$ получаем

$$\rho_0 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 (v_i v_j)}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial^2 p_f}{\partial x_i^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = -\Delta \tilde{p}_f.$$

Подставляя это выражение в (9), находим

$$\tilde{p}_I(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{p}_f(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}). \quad (11)$$

Воспользуемся формулой Грина

$$\int_V [\tilde{p}_f(\mathbf{y}) \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{p}_f(\mathbf{y})] dV(\mathbf{y}) = \int_S \left[-\tilde{p}_f(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} + G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \tilde{p}_f(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right] n_i(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}),$$

где V – весь объем, занятый жидкостью, $dS(\mathbf{y})$ – элемент поверхности S с центром в точке $\mathbf{y}$. Учитывая (11) и принимая во внимание, что внутри жидкости $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, а нормальная про-

изводная $\tilde{p}_f$ на границе S обращается в нуль, получаем искомое выражение для $\tilde{p}_I$ через $\tilde{p}_f$:

$$\tilde{p}_I(\mathbf{x}) = \tilde{p}_f(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_S \tilde{p}_f(\mathbf{y}) n_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS(\mathbf{y}). \quad (12)$$

Далее при формулировке граничного условия для рассеянной компоненты $\tilde{p}_S$ нам понадобится нормальная производная падающей компоненты $\tilde{p}_I$ на границе S . Дифференцируя (12) и вновь пользуясь обращением в нуль нормальной производной $\tilde{p}_f$ на S , получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_I(\mathbf{x})}{\partial x_i} n_i(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \tilde{p}_f(\mathbf{y}) n_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) \times \\ &\times \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) dS(\mathbf{y}) = \\ &= \frac{n(\mathbf{x})}{4\pi} \int_S \tilde{p}_f(\mathbf{y}) (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \nabla) \nabla \frac{1}{R} dS(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (13)$$

где $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, а оператор $\nabla = \partial/\partial \mathbf{x}$, т.е. он действует только на координаты $\mathbf{x}$. Мы ищем значения нормальной производной (13) в точках $\mathbf{x}$, находящихся вблизи границы, но все же в толще воды. Поэтому можем воспользоваться соотношением $\Delta \frac{1}{R} = 0$. С его помощью легко проверить, что

$$(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \nabla) \nabla \frac{1}{R} = -\nabla \times (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \nabla \frac{1}{R})$$

и представить (14) в виде

$$\frac{\partial p_I(\mathbf{x})}{\partial x_i} n_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n}(\mathbf{x}) (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x})), \quad (14)$$

где

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\int_S \tilde{p}_f(\mathbf{y}) \left(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \nabla \frac{1}{R} \right) dS(\mathbf{y}). \quad (15)$$

Таким образом, мы получили формулу, выражающую нормальную производную падающего поля p_I на границе S через $\tilde{p}_f$.

РАССЕЯННОЕ ПОЛЕ

Перейдем к вычислению рассеянной компоненты $\tilde{p}_S$, которая подчиняется уравнению Гельмгольца

$$\Delta \tilde{p}_S + k^2 \tilde{p}_S = 0 \quad (16)$$

со следующим из (8) и (6) граничным условием на поверхности S

$$n_q(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \tilde{p}_S(\mathbf{x})}{\partial x_q} + \frac{\partial \tilde{p}_I(\mathbf{x})}{\partial x_q} - \omega^2 \rho_0 \tilde{u}_q(\mathbf{x}) \right) \Big|_{\mathbf{x} \in S} = 0. \quad (17)$$

Вдали от области турбулентных пульсаций поле $\tilde{p}_S$ удовлетворяет условию излучения [5].

Для решений уравнений (16) и (4) воспользуемся методом конечных элементов. При этом учтем, что связь между искомыми функциями $\tilde{p}_S$ и $\tilde{u}_i$ задается граничными условиями на поверхности S : условием (17) и следующим из (7) условием

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x} \in S} = -[\tilde{p}_I(\mathbf{x}) + \tilde{p}_S(\mathbf{x})] n_i(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x} \in S}. \quad (18)$$

Компоненту поля давления в жидкости $\tilde{p}_S(\mathbf{x})$ представим в виде суперпозиции функций формы $\varphi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, J$, определенных в области V :

$$\tilde{p}_S(\mathbf{x}) = P_j \varphi_j(\mathbf{x}). \quad (19)$$

Аналогично, компоненты вектора деформации в упругой среде $\tilde{u}_i(\mathbf{x})$ представим в виде суперпозиции функций формы $\psi_l(\mathbf{x})$, $l = 1, \dots, L$, определенных внутри области V_e :

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}) = U_{il} \psi_l(\mathbf{x}). \quad (20)$$

Наша задача сводится к отысканию J неизвестных коэффициентов P_j и $3 \times L$ коэффициентов U_{il} .

Умножим (16) на $\varphi_j(\mathbf{x})$ и проинтегрируем полученное выражение по области V . Пользуясь теоремой Грина, находим

$$\int_V [-\nabla \varphi_j \nabla \tilde{p}_S + k^2 \varphi_j \tilde{p}_S] dV + \int_S \varphi_j \frac{\partial \tilde{p}_S}{\partial x_q} n_q dS = 0. \quad (21)$$

Здесь и далее для краткости опускаем аргумент $\mathbf{x}$ в подынтегральных выражениях. Учитывая условие (17), перепишем (21) в виде

$$\begin{aligned} \int_V [-\nabla \varphi_j \nabla \tilde{p}_S + k^2 \varphi_j \tilde{p}_S] dV = \\ = \int_S \varphi_j \frac{\partial \tilde{p}_I}{\partial x_q} n_q dS - \omega^2 \rho_0 \int_S \varphi_j \tilde{u}_q n_q dS. \end{aligned} \quad (22)$$

Первое слагаемое в правой части (22) преобразуем с помощью (14). Получаем

$$\int_S \varphi_j \frac{\partial \tilde{p}_I}{\partial x_q} n_q dS = \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) (\nabla \times \mathbf{B}) dS(\mathbf{x}). \quad (23)$$

С использованием формулы

$$\nabla \times \varphi_j \mathbf{B} = \nabla \varphi_j \times \mathbf{B} + \varphi_j \nabla \times \mathbf{B}$$

и с учетом того, что вследствие замкнутости поверхности S из теоремы Стокса [21] следует равенство

$$\int_S [\nabla \times (\varphi_j \mathbf{B})] dS = 0,$$

можно получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) (\nabla \times \mathbf{B}) dS(\mathbf{x}) = \\ = -\frac{1}{4\pi} \int_S [\nabla \varphi_j(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})] \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя найденное выражение в (22) и заменяя $\tilde{p}_s(\mathbf{x})$ и $\tilde{u}_i(\mathbf{x})$ суммами (19) и (20) соответственно, находим

$$Z_{ji'} P_{j'} + Y_{j,i,l} U_{i,l} = f_j, \quad (25)$$

где

$$Z_{ji'} = \int_V [-\nabla \varphi_j \nabla \varphi_{j'} + k^2 \varphi_j \varphi_{j'}] dV,$$

$$Y_{j,i,l} = \omega^2 \rho \int_S \varphi_j n_i \psi_l dS,$$

$$f_j = -\frac{1}{4\pi} \int_S [\nabla \varphi_j \times \mathbf{B}] \mathbf{n} dS.$$

Таким образом, мы получили J алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов P_j и $U_{i,l}$.

Теперь обратимся к уравнению (4). Выражение (5) представим в виде

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) = A_{iji'j'} \frac{\partial \psi_{l'}(\mathbf{x})}{\partial x_{j'}} U_{i'l'}.$$

Умножаем (4) на $\psi_l(\mathbf{x})$ и интегрируем по V_e . Применяя теорему Гаусса, находим

$$-\omega^2 \rho_e \int_{V_e} \tilde{u}_i \psi_l dV = -\int_{V_e} \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} dV + \int_S \tilde{\sigma}_{ij} n_j \psi_l dS.$$

Пользуясь (18), получаем

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho_e \int_{V_e} \tilde{u}_i \psi_l dV = \\ = -\int_{V_e} \sigma_{ij} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} dV - \int_S (\tilde{p}_l + \tilde{p}_s) n_i \psi_l dS. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho_e U_{il'} \int_{V_e} \psi_{l'} \psi_l dV + \int_{V_e} A_{iji'j'} \frac{\partial \psi_{l'}}{\partial x_{j'}} U_{i'l'} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} dV + \\ + P_j \int_S \varphi_j n_i \psi_l dS = -\int_S \tilde{p}_l n_i \psi_l dS. \end{aligned}$$

В дополнение к (25) это выражение дает еще $3L$ линейных алгебраических уравнений, связывающих коэффициенты P_j и Q_{il} :

$$X_{ili'l'} U_{i'l'} + Q_{ij} P_j = q_{il}, \quad (26)$$

где

$$X_{ili'l'} = \int_{V_e} \left(-\omega^2 \rho_e \delta_{il'} \psi_{l'} \psi_l + A_{iji'j'} \frac{\partial \psi_{l'}}{\partial x_{j'}} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} \right) dV,$$

$$Q_{ij} = \int_S \varphi_j n_i \psi_l dS,$$

$$q_{il} = -\int_S \tilde{p}_l n_i \psi_l dS.$$

В итоге для расчета неизвестных амплитуд функций формы, фигурирующих в суммах (19) и (20), мы получили систему алгебраических уравнений, заданную соотношениями (25) и (26). Решение этой системы дает компоненту звукового давления в воде $p_s(\mathbf{x})$ и компоненты вектора деформации в упругой среде $u_i(\mathbf{x})$. Компонента давления $p_l(\mathbf{x})$ вычисляется по формуле (12).

ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДА

Верификация представленного метода проводится на примере задачи о шумоизлучении твердой квадратной пластины с длиной стороны $L = 2$ м и толщиной $h = 0.01$ м, обтекаемой потоком жидкости: скорость звука $c = 1500$ м/с, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 1.006 \times 10^{-6}$ м²/с (рис. 1). Благодаря определенному соотношению сил инерции и вязкости в потоке, обтекание задней кромки пластины сопровождается генерацией периодических вихревых структур в виде дорожки Кармана на конкретной частоте. Соотношение сил инерции и вязкости, при котором возникает дорожка Кармана, характеризуется числом Рейнольдса $Re = UL/\nu$, где U — скорость набегающего потока, L — характерная длина тела, ν — коэффициент кинематической вязкости. Скорости набегающего потока $V_1 = 1.4$ м/с и $V_2 = 35$ м/с соответствуют диапазону чисел Рейнольдса, в котором возникает дорожка Кармана для цилиндра круглого сечения [22], что также справедливо для цилиндра с прямоугольным сечением [23], и в частности для тонкой пластины с выбранными размерами.

На рис. 1 приведена расчетная область для решения гидродинамической задачи. Расчетная область представляет собой объем жидкости в виде цилиндра с радиусом основания $R = L$ и высотой $B = 4L$. Внутри выделенного объема находится квадратная пластина с указанными выше значениями параметров L и h . На входной границе 1 задана скорость набегающего потока V , нормальная к плоскости основания цилиндра. На выходной границе 2 выполняется условие обращения в нуль среднего избыточного давления. Нормальная компонента скорости жидкости на поверхности цилиндра 3 и полная скорость на поверхности пластины 4 принимаются равными нулю. Тем са-

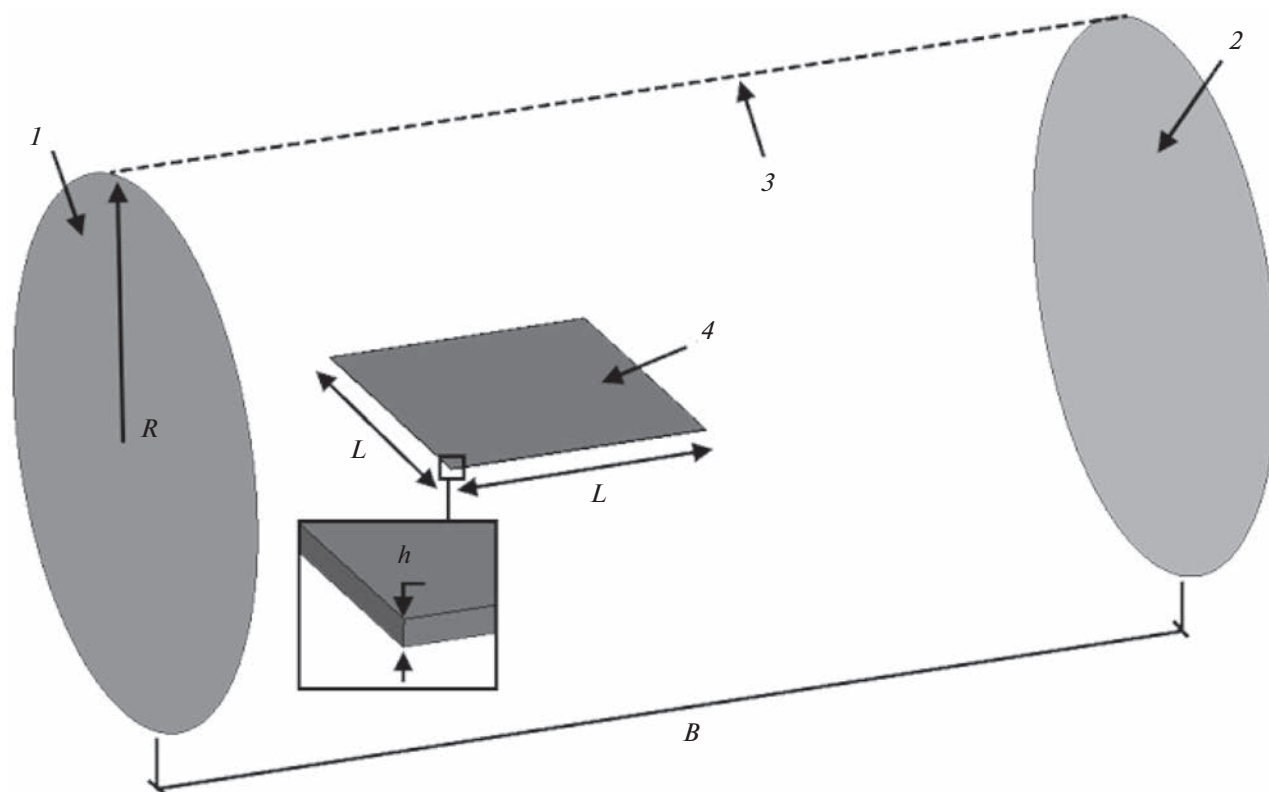


Рис. 1. Расчетная область гидродинамической задачи об обтекании пластины.

мым выполняются условие непротекания жидкости через боковую поверхность расчетной области и условие прилипания на пластине соответственно.

В гидродинамической части задачи движение жидкости описывается системой уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу с замыканием моделью турбулентности SST Ментера [24], зарекомендовавшей себя в задачах поперечного обтекания цилиндров прямоугольного сечения [25, 26]. Жидкость считается вязкой и несжимаемой, а поверхность обтекаемого тела абсолютно твердой. Расчеты выполняются при активированной схеме *High Resolution* по пространству, с использованием неявной схемы интегрирования по времени второго порядка для уравнений переноса массы и импульса и первого порядка для турбулентных характеристик и двумя итерациями на одном временном шаге по рекомендациям, изложенным в работе [27].

На рис. 2б для скорости потока V_2 показано пространственное распределение модуля скорости жидкости в районе задней кромки пластины в фиксированный момент времени.

Полученные таким образом реализации случайных полей скорости и давления использованы для расчета компонент генерируемых акустических полей на заданных частотах f . Расчет средне-

квадратичной амплитуды давления p на поверхности сферы большого радиуса R выполнен следующими тремя способами.

1. Если размер пластины L мал по сравнению с длиной акустической волны $\lambda = c/f$, турбулентная область, включающая твердое тело, представляет эффективный акустический диполь, ось которого перпендикулярна плоскости пластины. В любой плоскости, проходящей через эту ось, зависимость давления от угла θ между направлением на точку наблюдения и плоскостью пластины выражается соотношением

$$p_d = F \frac{k |\sin \theta|}{4\pi R},$$

где F — среднеквадратичная сила, действующая со стороны турбулентных пульсаций на пластину на частоте f [5, 11]. Это выражение дает простейшую оценку возбуждаемого поля p .

2. Второй способ расчета акустического давления p базируется на прямом суммировании вкладов квадрупольных источников в правой части уравнения Лайтхилла (3). Мы использовали численную процедуру решения данной задачи, детально описанную в работе [16].

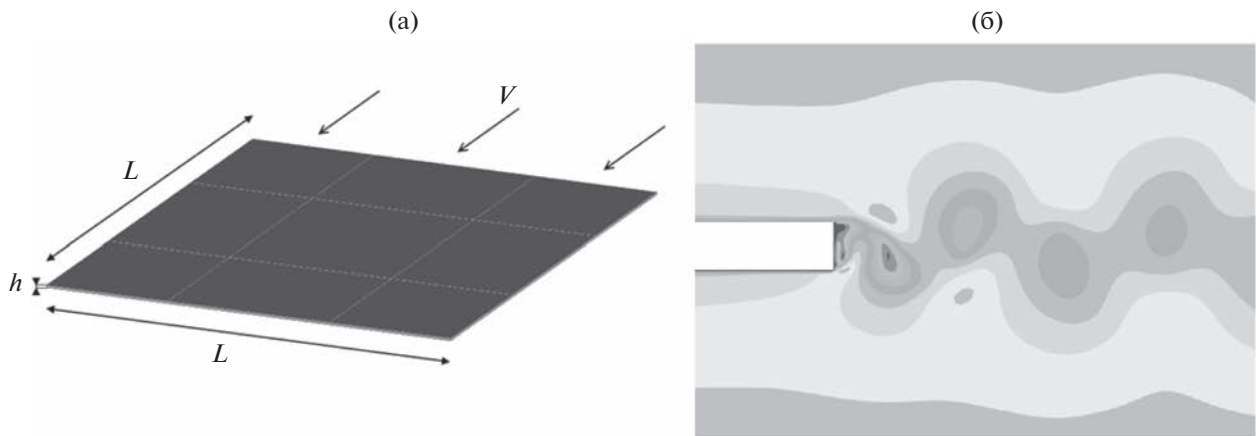


Рис. 2. К постановке гидродинамической задачи об обтекании пластины.

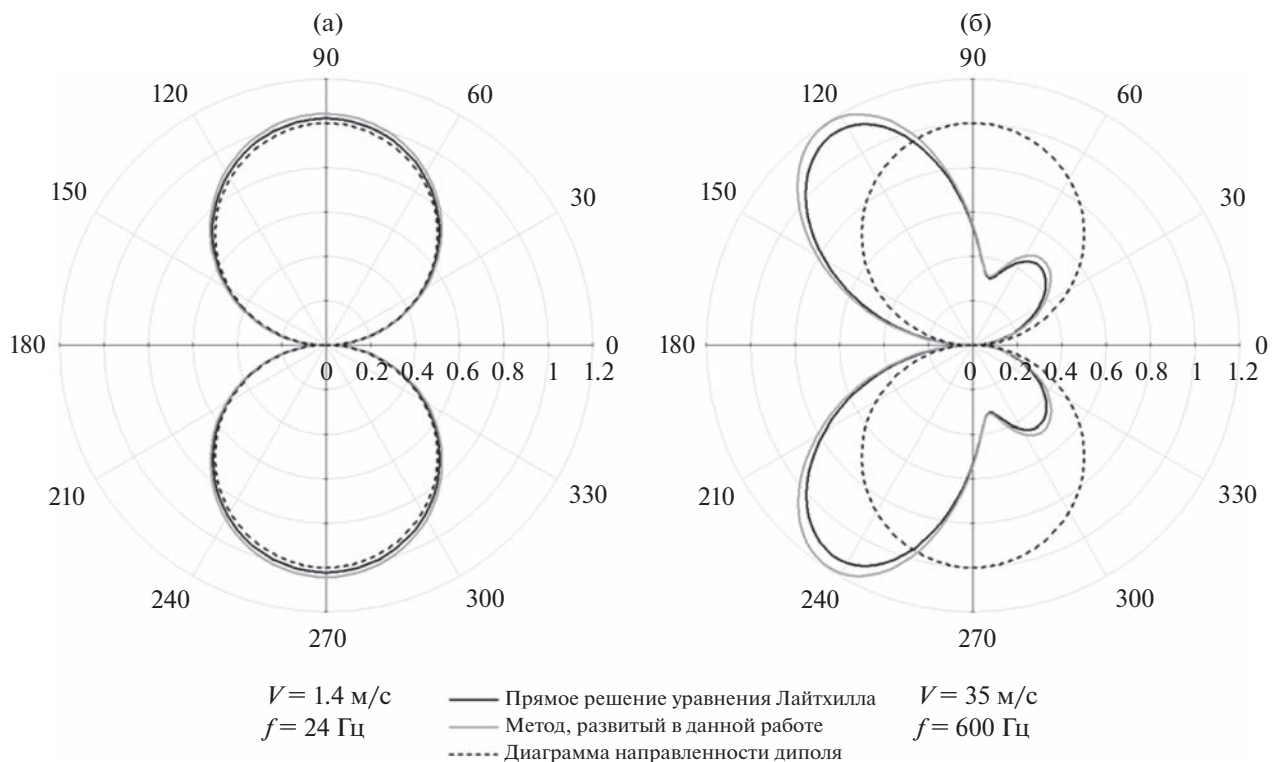


Рис. 3. Угловая зависимость нормированного звукового давления p/p_d в плоскости, проходящей через перпендикуляр к центру пластины. (а) — Скорость потока 1.4 м/с, частота 24 Гц. (б) — Скорость потока 35 м/с, частота 600 Гц.

3. Наконец, в качестве третьего способа расчета давления p использован подход, развитый в данной работе.

На рис. 3 сравниваются результаты, полученные указанными тремя способами. На всех графиках представлены зависимости нормированного давления p/p_d на сфере большого радиуса от угла θ . Здесь показаны результаты расчета на ча-

стоте $f_1 = 24 \text{ Гц}$ для скорости потока V_1 (рис. 3а) и на частоте $f_2 = 600 \text{ Гц}$ для скорости потока V_2 (рис. 3б).

Пунктирными линиями показаны диаграммы направленности диполя, интенсивность которого определяется вертикальной интегральной гидродинамической силой на пластине. При расчетах мы не учитываем рефракцию генерируемого турбулентностью звукового поля на течении жидко-

сти. В монографии [5] показано, что это можно сделать путем перехода от (1) к “конвективному” уравнению Лайтхилла. Однако в наших примерах элементарные оценки показывают, что вследствие малости чисел Маха влияние рефракции на диаграммы направленности пренебрежимо мало. Сплошные черная и серая кривые на графиках получены с помощью прямого суммирования вкладов квадрупольных источников [16] и метода, предложенного в данной работе, соответственно. Расхождение между этими линиями не превышает 2% на частоте 24 Гц и 5% на частоте 600 Гц. Увеличение погрешности с частотой, по-видимому, отражает то обстоятельство, что с ростом частоты растет и отклонение точной функции Грина от используемого в нашем подходе приближенного выражения (10). На частоте 600 Гц угловая зависимость диаграммы направленности излучения существенно отличается от дипольной. Максимум излучения при этом отвечает углу 125° (направление 0° соответствует положению задней кромки пластины). Данный результат хорошо согласуется с теоретическими расчетами, представленными в работах [28, 29].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Традиционный метод расчета генерации шума турбулентностью с помощью конечно-элементного моделирования [15, 16] с использованием в качестве источников тензора Лайтхилла, как правило, требует хранения и обработки большого объема данных, включающих значения поля скорости во всех узлах гидродинамической модели для всех временных отсчетов. В данной статье показано, что объем вычислений можно существенно сократить при анализе возбуждения низкочастотного звука с длиной волны, превышающей размер области турбулентных пульсаций, дающих основной вклад. Ключевая идея нашего подхода заключается в том, что при расчете компоненты звукового давления $\tilde{p}_l$, описывающей падающее поле, в низкочастотном приближении используется упрощенное выражение для функции Грина (10). В конечном итоге это позволяет вычислить компоненты звукового давления $\tilde{p}_l$ и $\tilde{p}_s$, а также компоненты вектора деформации $\tilde{y}_i$ по найденным в приближении несжимаемой жидкости значениям турбулентных пульсаций давления $\tilde{p}_f$ на поверхности обтекаемого тела S . Информация о пульсациях скорости при этом не используется.

Ранее близкий подход был предложен в работе [18] для описания генерации звука при обтекании абсолютно твердого тела. Он также базируется на использовании приближенного выражения (10) для функции Грина звукового поля. Наши основные результаты, выраженные соотношениями (12), (25) и (26), фактически обобща-

ют этот подход на случай обтекания упругого тела. При построении конечно-элементной схемы расчета функций $\tilde{p}_s(x)$ и $\tilde{y}_i(x)$ важную роль сыграл вывод соотношения (14), позволившего избежать численного дифференцирования при вычислении фигурирующей в граничном условии (17) нормальной производной компоненты $\tilde{p}_l$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проект 0030-2022-0003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишняков А.Н., Макашов С.Ю. Метод оптимальной аналитической аппроксимации временных выборок в применении к анализу нестационарных периодических сигналов // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 2. С. 155–164.
2. Зайцев М.Ю., Конев В.Ф., Величко С.А., Беляев И.В. Локализация и ранжирование источников шума самолета в летных испытаниях и сравнение с акустическими измерениями крупномасштабной модели крыла // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 2. С. 165–176.
3. Артельный В.В., Родионов А.А., Стуленков А.В. Повышение частотного разрешения при измерении вибраций вращающихся тел с помощью лазерной виброметрии с неподвижным лучом // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 3. С. 351–356.
4. Schoder S., Kaltenbacher M. Hybrid aeroacoustic computations: state of art and new achievements // J. Theor. Comput. Acoust. 2019. V. 27. № 4. P. 1950020–1–1950020–33.
5. Glegg S. and Devenport W. Aeroacoustics of Low Mach Number Flows. Academic Press, London, 2017. 529 p.
6. Снегушев А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений. Санкт-Петербург, 2009. 143 с.
7. Kajishima T., Taira K. Computational fluid dynamics: Incompressible turbulent flows. Springer, Cham, Switzerland, 2017. 364 p.
8. Sagaut P., Deck S., Terracol M. Multiscale and multiresolution approaches in turbulence. LES, DES and hybrid RANS/LES methods: applications and guidelines. Imperial College Press, London, 2013.
9. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. R. Soc. Lond. 1952. V. 211(A). P. 564–587.
10. Ffowcs J.E.W., Hawkings D.L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion // Proc. R. Soc. Lond. 1969. V. 264(A). P. 321–342.
11. Howe M.S. Theory of vortex sound. Cambridge U.P., New York, 2003. 216 p.
12. Ewert R., Schröder W. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering // J. Comput. Phys. 2003. V. 188. № 2. P. 365–398.
13. Титарев В.А., Фараносов Г.А., Чернышев С.А., Батраков А.С. Численное моделирование влияния взаимного расположения винта и пилона на шум турбовинтового самолета // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 737–751.

14. *Curle N.* The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // *Proc. R. Soc. Lond.* 1955. V. 231(A). P. 505–514.
15. *Oberai A.A., Roknaldin F., Hughes T.J.R.* Computational procedures for determining structural-acoustic response due to hydrodynamic sources // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2000. V. 190. № 3. P. 345–361.
16. *Суворов А.С., Коротин П.И., Соков Е.М.* Метод конечно-элементного моделирования шумоизлучения, генерируемого неоднородностями тел, движущихся в турбулентном потоке жидкости // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 6. С. 756–757.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
18. *Oberai A.A., Wang M.* Computation of trailing edge noise from an incompressible flow calculation. Center for Turbulence Research: Proc. of the Summer Program 2000. 2000. P. 343–352.
19. *Oberai A.A., Roknaldin F., Hughes T.J.R.* Computation of trailing-edge noise due to turbulent flow over an airfoil // *AIAA J.* 2002. V. 40. № 11. P. 2206–2216.
20. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1976.
21. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1974.
22. *Lienhard J.H.* Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders. Washington State University College of Engineering Research Division Bulletin 300. 1966. P. 1–32.
23. *Девнин С.И.* Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций: Справочник. Л.: Судостроение, 1983. 320 с.
24. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA J.* 1994. V. 32. № 8. P. 1598–1605.
25. *Tian X., Ong M.C., Yang J., Myrhaug D.* Unsteady RANS simulations of flow around rectangular cylinders with different aspect ratios // *Ocean Eng.* 2013. V. 58. № 58. P. 208–216.
26. *Wang S., Cheng W., Du R., Wang Y.* Unsteady RANS modeling of flow around two-dimensional rectangular cylinders with different side ratios at Reynolds number 6.85×10^5 // *Mathematical Problems in Engineering.* 2020. V. 2020. № 3. P. 1–13.
27. *Menter F.R., Sechner R.* Best Practice: RANS Turbulence Modeling in Ansys CFD. Ansys Germany GmbH. Matyushenko A., NTS, St. Petersburg, Russia.
28. *Roger M., Moreau S.* Back-scattering correction and further extensions of Amiet's trailing-edge noise model. Pt. 1: theory // *J. Sound Vib.* 2005. V. 286. P. 477–506.
29. *Roger M., Moreau S.* Back-scattering correction and further extensions of Amiet's trailing-edge noise model. Pt. 2: application // *J. Sound Vib.* 2009. V. 323. P. 397–425.

УДК 533.6, 532.5, 534.2

ЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ЗВУКОВЫХ И ПСЕВДОЗВУКОВЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ

© 2023 г. О. П. Бычков^а, Г. А. Фараносов^{а, *}

^аФАУ ЦАГИ, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, Москва, Россия

*e-mail: georgefalt@rambler.ru

Поступила в редакцию 19.04.2023 г.

После доработки 23.05.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Предложен новый способ разделения звуковых и псевдозвуковых пульсаций давления, основанный на анализе сигналов в паре близкорасположенных точек, так что общий размер измерительной зоны много меньше масштаба корреляции псевдозвуковых возмущений. Предполагается, что гидродинамические пульсации распространяются со скоростью, существенно меньшей скорости звука, и подчиняются модели “вмороженных” возмущений, что позволяет в режиме реального времени или при постобработке данных преобразовать пространственную производную сигнала во временную, которая после интегрирования по времени дает оценку псевдозвуковых возмущений в точке измерения. Представлены теоретическая модель предложенного подхода, результаты тестов на модельных примерах и данные численного моделирования.

Ключевые слова: звуковые пульсации, псевдозвуковые пульсации, фильтрация сигнала

DOI: 10.31857/S0320791923600452, **EDN:** ZUYETE

ВВЕДЕНИЕ

В прикладных задачах гидро- и аэроакустики часто возникает проблема разделения звуковых (акустических) и псевдозвуковых (гидродинамических) пульсаций давления, часто одновременно присутствующих в турбулентных течениях [1–5]. Под акустическими пульсациями понимаются линейные возмущения, распространяющиеся в среде со скоростью звука, под псевдозвуковыми — линейные или нелинейные возмущения, распространяющиеся со скоростью порядка скорости основного потока, которая для дозвуковых течений может быть существенно ниже скорости звука. Большой опыт в задачах подобного рода накоплен применительно к проблеме выделения пристенных пульсаций в турбулентном пограничном слое на фоне акустических помех [5–10]. Похожая проблема возникает в исследованиях шума обтекания планера самолета при акустических измерениях модели в аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью микрофонами, расположенными на стенке трубы. В этом случае уже акустический сигнал является полезным, а пульсации пограничного слоя на стенке трубы — помехой [3, 5].

Обычный микрофон или поверхностный датчик давления измеряет лишь суммарные пульсации (искажая при этом каждую их компоненту в соответствии с собственными характеристиками), и

для разделения акустической и псевдозвуковой составляющих приходится прибегать к специальным методам измерений и обработки сигналов [5–9]. Наиболее надежным способом является применение частотно-волновой фильтрации, которая в общем случае требует использования систем, протяженность которых сравнима с длинами волн низкочастотных акустических возмущений, что делает практическую реализацию такого подхода затруднительной [5]. Практически реализуемые способы, как правило, основаны на существенном различии масштабов корреляции псевдозвуковых и звуковых возмущений в медленных течениях, поскольку первые обычно существенно меньше последних [2, 3, 6, 8, 9]. Это позволяет для измерения псевдозвуковой составляющей использовать так называемый эффект пространственной фильтрации. При использовании специальных датчиков или систем датчиков, линейные размеры которых превышают масштаб корреляции псевдозвуковых возмущений, оказывается возможным оценить вклад звуковой компоненты пульсаций за счет взаимного сокращения некоррелированных псевдозвуковых возмущений, после чего вычитанием ее из суммарного спектра сигнала на одиночном малоразмерном датчике определить характеристики псевдозвуковой составляющей [8, 9]. В этом случае размер измерительной системы все еще много меньше масштаба

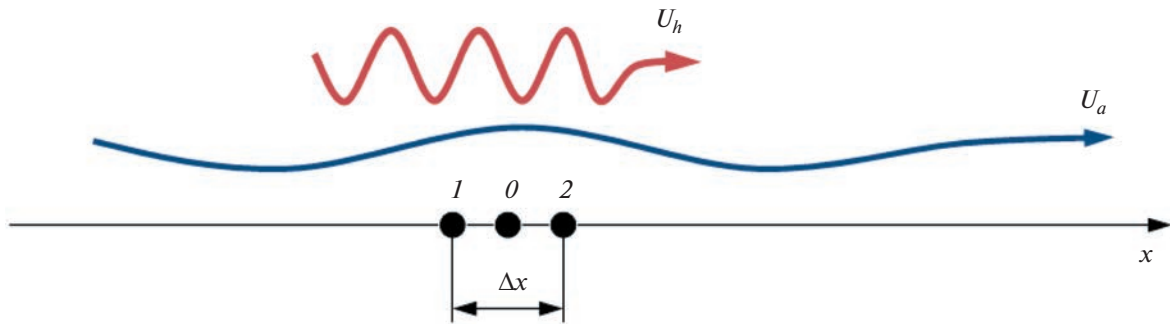


Рис. 1. Геометрия задачи и схема расстановки датчиков давления.

корреляции акустических пульсаций, а значит, она остается достаточно компактной.

Однако использование подобного подхода становится затруднительным, когда поле пульсаций существенно неоднородно и/или когда масштаб корреляции псевдозвуковых возмущений сравним с масштабом корреляции акустических возмущений [11]. Оба этих фактора имеют место, например, в поле пульсаций вблизи границы дозвуковой турбулентной струи, где присутствуют акустические возмущения, связанные с шумом, излучаемым струей, и псевдозвуковые возмущения, связанные с крупномасштабными когерентными структурами — волнами неустойчивости Кельвина—Гельмгольца [11–13]. При исследовании процессов шумообразования в турбулентных струях возможность разделения акустических и гидродинамических возмущений в ближнем поле важна с точки зрения идентификации механизмов генерации шума [14–18], причем обычно применяется стандартный метод частотно-волновой фильтрации с использованием протяженных линейных массивов датчиков [14, 15, 17]. В последнее время развиваются также методы, основанные на использовании вэйвлет-преобразования, параметры которого эмпирически настраиваются на фильтрацию желаемой составляющей сигнала, что позволяет существенно сократить размер измерительной системы [17, 18]. Описанные выше способы требуют использования протяженных измерительных систем и/или специальной постобработки измеренных данных и не подходят для применения, например, в системах активного управления волнами неустойчивости [19–22], где требуется определение целевого сигнала в реальном времени, при этом акустическая часть сигнала может являться помехой для системы управления.

В настоящей работе предложен новый способ разделения звуковых и псевдозвуковых пульсаций давления, основанный на различии их свойств при измерении в паре близкорасположенных точек. Предложенный способ может быть реализован в виде компактной измерительной системы

как в режиме реального времени, так и в режиме постобработки измеренных данных.

В разделе 1 описана идея метода, в разделе 2 приведены результаты теоретического анализа алгоритма и результаты его тестов на модельном примере, а в разделе 3 — на данных численного моделирования. В Заключение сформулированы основные результаты работы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Пусть имеется дозвуковое течение с ярко выраженным конвективным переносом гидродинамических возмущений в некотором направлении x (рис. 1). Пусть в среде существуют также акустические возмущения, вызванные внешними источниками или самим течением. Параметры, соответствующие гидродинамическим или акустическим возмущениям, будем отмечать индексами h и a соответственно.

Пусть в точках 1 и 2 на оси x расположена пара “точечных” датчиков давления (рис. 1), регистрирующих соответственно сигналы $s(x_1, t)$ и $s(x_2, t)$, в которых содержится акустическая (a) и гидродинамическая (h) составляющие, так что

$$s(x_1, t) = a(x_1, t) + h(x_1, t),$$

$$s(x_2, t) = a(x_2, t) + h(x_2, t).$$

Рассматриваемые датчики смещены друг относительно друга на расстояние $\Delta x = x_2 - x_1$, которое будем предполагать малым по сравнению с масштабом корреляции акустических возмущений l_a , имеющим порядок длины звуковой волны: $\Delta x \ll l_a \sim \lambda_a$. Предположим также, что скорость конвекции U_h гидродинамических возмущений мала по сравнению с фазовой скоростью переноса акустических возмущений, $U_h \ll U_a$ (при этом обычно $U_a > c$ [13], где c — скорость звука). Это означает, что длины волн гидродинамических возмущений λ_h при заданной частоте малы по сравнению с акустическими длинами волн, $\lambda_h \ll \lambda_a$. Тогда в главном приближении ампли-

трудно-фазовым различием акустического сигнала на датчиках 1 и 2 можно пренебречь и считать, что $a(x_1, t) \approx a(x_2, t)$. Основное различие сигналов в точках 1 и 2 будет связано с гидродинамической составляющей сигнала

$$s(x_2, t) - s(x_1, t) \approx h(x_2, t) - h(x_1, t). \quad (1)$$

Последнее соображение о взаимной компенсации акустической компоненты при вычитании сигналов в близкорасположенных точках, по-видимому, было впервые высказано в работе [6] и носит название метода антикорреляции [2]. Однако, в отличие от работы [6], мы не предполагаем, что масштабы корреляции гидродинамических (l_h) и акустических пульсаций и величина смещения датчиков находятся в соотношении $l_h \ll \Delta x \ll l_a$. Напротив, положим, что величина Δx существенно меньше характерного масштаба корреляции обоих типов пульсаций, $\Delta x \ll l_h, l_a$, тогда можно считать, что выполняется гипотеза Тэйлора о “вмороженных” возмущениях [23], согласно которой поле пульсаций переносится со скоростью U_h , оставаясь неизменным, т.е. $h(x, t) \approx h(x - U_h t)$. Отсюда, используя (1), получим следующую оценку

$$\begin{aligned} s(x_2, t) - s(x_1, t) &\approx \\ &\approx h(x_2 - U_h t) - h(x_1 - U_h t) \approx -\frac{dh \Delta x}{dt U_h}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подобный подход использовался, например, в работе [24] для восстановления пространственной производной поля пульсаций по их временной производной. Здесь же предлагается, наоборот, оценивать временную производную сигнала по пространственной, считая, что при вычислении последней акустическая составляющая взаимно сокращается.

Соотношение (2) можно использовать для восстановления временной реализации сигнала (с точностью до постоянной) в окрестности точек x_1 и x_2 путем интегрирования его производной:

$$h(x_0, t) \approx \int_0^t \frac{s(x_1, t) - s(x_2, t)}{\Delta x} U_h dt + C, \quad (3)$$

где x_0 — координата точки 0, лежащей вблизи точек 1 и 2 (рис. 1), C — значение h в момент начала интегрирования. Значение C , вообще говоря, неизвестно, однако поскольку оно не влияет на спектр пульсаций, без потери общности можно положить $C = 0$. Отметим, что в данном методе имеет место неопределенность координаты порядка Δx , которая приводит к ограничению его работоспособности сверху по частотам.

После нахождения указанным образом гидродинамической части пульсаций акустическая со-

ставляющая может быть оценена как $a = s - h$. Процедура, описываемая выражением (3), является локальной в том смысле, что характерный размер измерительной системы мал ($\Delta x \ll l_h, l_a$), и, кроме того, она может быть реализована в реальном времени, а значит, в целом пригодна для задач активного управления.

2. АНАЛИЗ И ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА НА МОДЕЛЬНЫХ ПРИМЕРАХ

Рассмотрим некоторые особенности практической реализации предложенного метода и связанные с этим ограничения. В реальных системах сигнал s , измеренный в точке x , представляется как последовательность отсчетов $\{s_n(x)\}$ с некоторой частотой дискретизации $f_s = 1/\Delta t$, индекс n соответствует номеру отсчета. В дискретном представлении предложенная процедура (3) является линейным рекурсивным фильтром [25] и принимает вид

$$y_n = y_{n-1} + \frac{s_n(x_1) - s_n(x_2)}{N_h}, \quad (4)$$

где y_n — отсчеты выходного сигнала фильтра, а число N_h характеризует временную задержку $t_{del} = \Delta x/U_h \approx N_h \Delta t$ между гидродинамическими пульсациями в точках 1 и 2. Исходя из приведенных выше соображений, можно ожидать, что последовательность y_n будет в некотором смысле близка к гидродинамической составляющей h_n сигнала s_n . Если акустическая компонента отсутствует ($s_n = h_n$), т.е. сигнал s_n представляет собой конвектирующее со скоростью U_h поле, то его зависимость от x выражается в простом смещении сигнала по времени сообразно гидродинамической задержке. Тогда для точки 0, равноудаленной от точек 1 и 2 (рис. 1), (4) сводится к выражению

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h_{n+N_h/2} - h_{n-N_h/2}}{N_h}. \quad (5)$$

Несложно также показать, что в этом случае частотная передаточная функция $W(\omega)$ фильтра (5) имеет вид

$$W(\omega) = e^{i\frac{\omega}{2} \sin\left(\frac{\omega N_h}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\omega N_h}{2}\right)}{N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \quad (6)$$

где $\omega = 2\pi f/f_s$ — безразмерная круговая частота, выраженная через циклическую частоту f и частоту дискретизации f_s . Из рассмотрения передаточной функции $W(\omega)$ становится ясен характер описанной процедуры, которая, по существу, является фильтром нижних частот для входного сигнала ти-

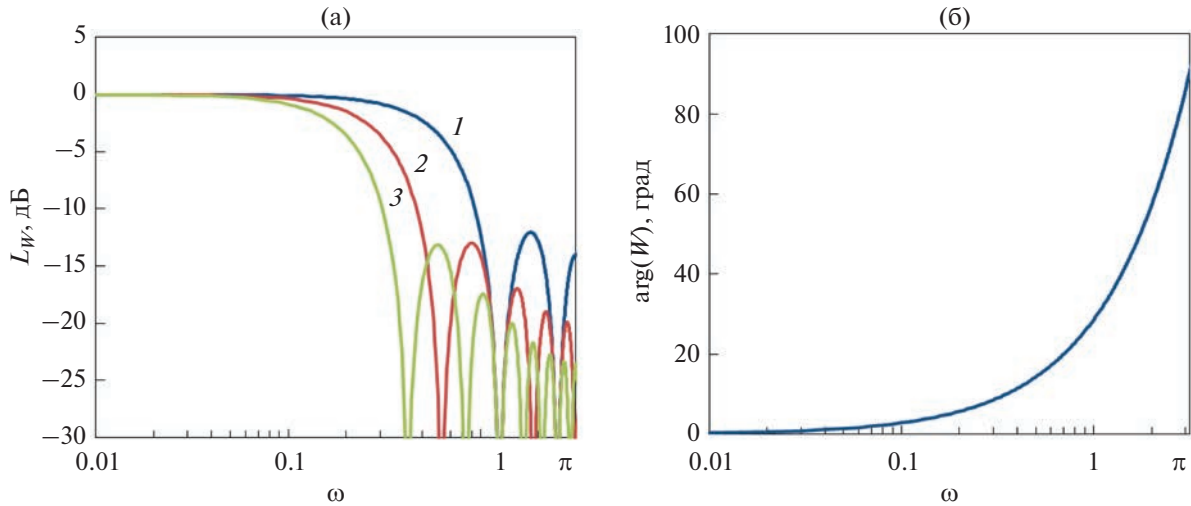


Рис. 2. Расчетные характеристики фильтра (4). (а) — Амплитудно-частотная характеристика ($20 \lg |W|$) при различных параметрах задержки: 1 — $N_h = 5$; 2 — 10, 3 — 15; (б) — фазово-частотная характеристика ($\arg(W)$).

па h_n . В случае расположения точки θ несимметрично относительно точек 1 и 2, в (6) появится фазовый множитель вида $\exp(i\omega(N_1 - N_h/2))$, где N_1 — задержка сигнала между точками 1 и θ . Таким образом, наименьшее фазовое искажение достигается при $N_1 = N_h/2$, т.е. при $x_0 = (x_1 + x_2)/2$.

Для лабораторных параметров при исследовании дозвуковых струй [11] типичные значения, которые обычно реализуются или могут быть реализованы в эксперименте, можно оценить как $f_s \sim 10^5$ Гц, $U_h \sim 10^1 \dots 10^2$ м/с, $\Delta x \sim 10^{-2}$ м, тогда $N_h \sim 10$ — типичное число отсчетов сигнала, характеризующее его задержку при конвекции от точки 1 к точке 2. На рис. 2 показаны амплитудно- и фазово-частотные характеристики фильтра (6)

для нескольких значений N_h при $f_s = 10^5$ Гц и $x_0 = (x_1 + x_2)/2$. Амплитудная характеристика показана в логарифмическом масштабе $L_W = 20 \lg |W|$. Видно, что частота среза фильтра увеличивается при уменьшении задержки, кроме того, при $x_0 = (x_1 + x_2)/2$ фазовая характеристика не зависит от задержки и имеет приемлемые значения (с искажением фазы исходного сигнала в пределах 20° – 30°) до частоты $\omega \approx 1$.

Далее оценим явным образом влияние акустической компоненты на результат операции (4). Если $s_n = h_n + a_n$, где сигнал a_n представляет собой конвективно перемещающееся со скоростью U_a поле и является некоррелированным с сигналом h_n , то выражение (4) сводится к

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h_{n+N_h/2} - h_{n-N_h/2}}{N_h} + \frac{a_{n+N_a/2} - a_{n-N_a/2}}{N_h}, \quad (7)$$

где N_a характеризует временную задержку $t_{\text{del}} = \Delta x/U_a \approx N_a \Delta t$ между акустическими пульсациями в точках 1 и 2. Из выражения (7) следует, что квадрат соответствующей амплитудно-частотной передаточной функции W , после осреднения по набору реализаций сигналов a_n и h_n (для учета их некоррелированности), будет определяться выражением

$$\overline{|W|^2} = \frac{1}{\left(N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2} \times \left(\frac{\overline{|H|^2}}{\overline{|S|^2}} \sin^2\left(\frac{\omega N_h}{2}\right) + \frac{\overline{|A|^2}}{\overline{|S|^2}} \sin^2\left(\frac{\omega N_a}{2}\right) \right), \quad (8)$$

в котором $\overline{|S|^2}$, $\overline{|H|^2}$ и $\overline{|A|^2}$ — спектры мощности полного сигнала и его гидродинамической и акустической компонент соответственно. Отметим, что выражение (7) получено из более общих рассуждений, чем выражение (1), без предположения о пренебрежимо малой величине разности акустических компонент. Ослабление акустической компоненты в рамках рассматриваемого алгоритма возникает после трансформации пространственной производной во временную и последующего интегрирования по времени. Из (8) ясно видно, что предложенный алгоритм выделяет гидродинамические пульсации тем точнее, чем меньше второе слагаемое в скобках по сравнению с первым — в этом случае он сводится к рассмотренным выше выражениям (5)–(6). Возможность отбрасывания второго слагаемого в (8) для умеренных значений ω , N_a и N_h приближенно определяется выполнением неравенства

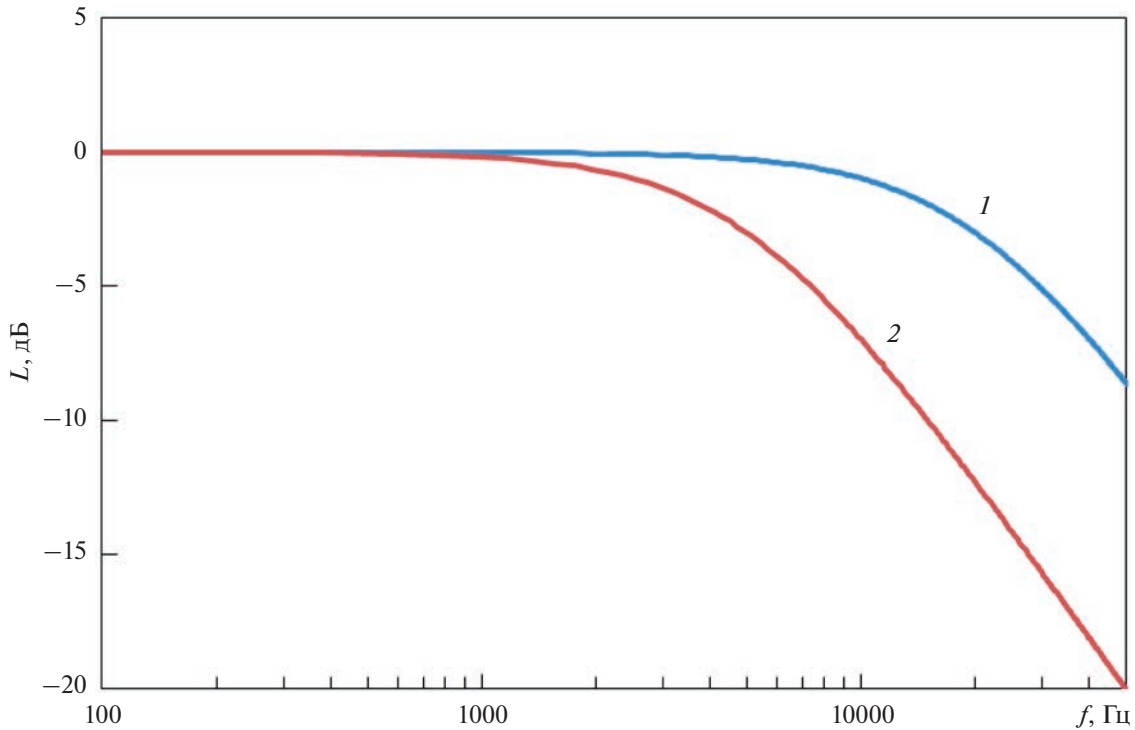


Рис. 3. Модельные спектральные функции в логарифмическом масштабе: 1 – F_a ; 2 – F_h .

$\overline{|A|^2}/\overline{|H|^2} \ll (N_h/N_a)^2 = (U_a/U_h)^2$, т.е. связано с соотношением фазовых скоростей возмущений: чем больше различаются скорости, тем больше динамический диапазон алгоритма. Отметим также, что в области доминирования акустических возмущений (8) сведется к выражению

$$\overline{|W|^2} \approx \frac{\sin^2\left(\frac{\omega N_a}{2}\right)}{\left(N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}, \quad (9)$$

которое отражает искажение акустической компоненты сигнала рассматриваемым фильтром.

Для первичной проверки работы алгоритма было сгенерировано два типа тестовых псевдослучайных сигналов, моделирующих сносящиеся вдоль оси x возмущения, в виде суперпозиции конечного числа гармоник со случайными фазами:

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^M \sqrt{F_h(i\Delta f)} \times \cos(2\pi i\Delta f((n-1)/f_s - x/U_h) + \psi_i), \quad (10)$$

$$a_n(x) = \sum_{i=1}^M \sqrt{F_a(i\Delta f)} \times \cos(2\pi i\Delta f((n-1)/f_s - x/U_a) + \phi_i), \quad (11)$$

где $\Delta f = 80$ Гц, $f_s = 10^5$ Гц, $U_h = 100$ м/с, $U_a = 500$ м/с, $M = 10^4$, ψ_i и ϕ_i – случайные фазы гармоник, а распределение амплитуд гармоник по частотам задается функциями $F_h(f) = \left(1 + (f/f_h)^2\right)^{-1}$ и $F_a(f) = \left(1 + (f/f_a)^2\right)^{-1}$ с частотами среза $f_h = 5$ кГц и $f_a = 20$ кГц соответственно (рис. 3). Последовательность (10) моделирует одномерное поле гидродинамических пульсаций, а последовательность (11) – акустических. В данном примере предполагается, что на низких частотах интенсивности пульсаций одинаковы, а на высоких – доминируют акустические пульсации. Качественно эта простейшая модель соответствует ситуации, которую можно наблюдать в некоторых точках ближнего поля струи.

На рис. 4 показан результат применения операции (4) к сигналу (10) в отсутствие акустической компоненты пульсаций ($s_n = h_n$). Амплитудно-частотную передаточную функцию фильтра (4) можно найти как модуль отношения спектров выходного $Y(\omega)$ и входного $S(\omega)$ сигналов: $L_Y = 20 \lg |Y/S|$, при этом она совпадает с вычисленной теоретически функцией (6), как показано на рис. 4б, поскольку входной сигнал полностью соответствует заложенной в вычисление (6) модели.

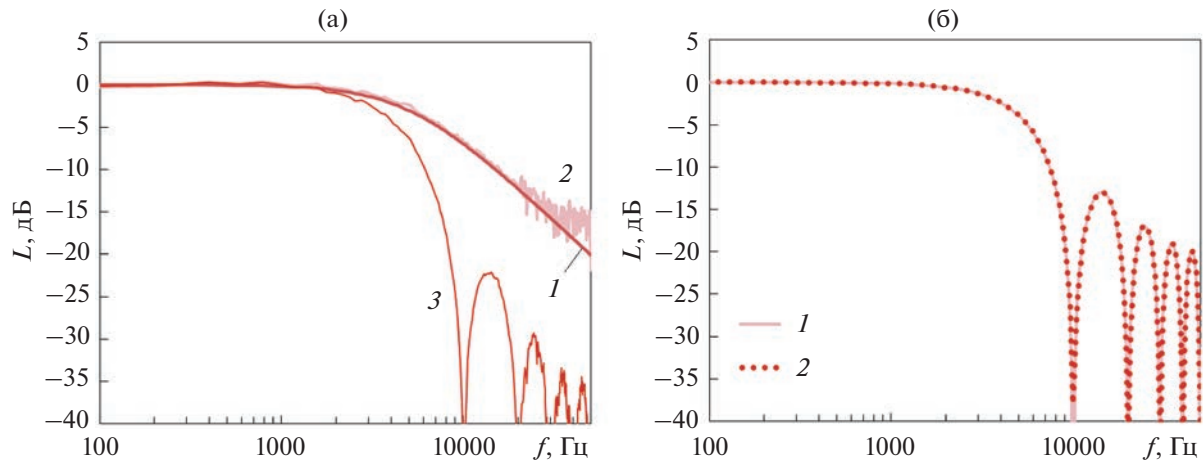


Рис. 4. Результат восстановления спектра сигнала h с помощью алгоритма (4): (а) — 1 — исходный модельный спектр F_h , 2 — спектр реализации сигнала (10), 3 — спектр сигнала (10), прошедшего преобразование (4); (б) — 1 — амплитудно-частотная передаточная функция, полученная в модельном примере, 2 — рассчитанная в соответствии с (6).

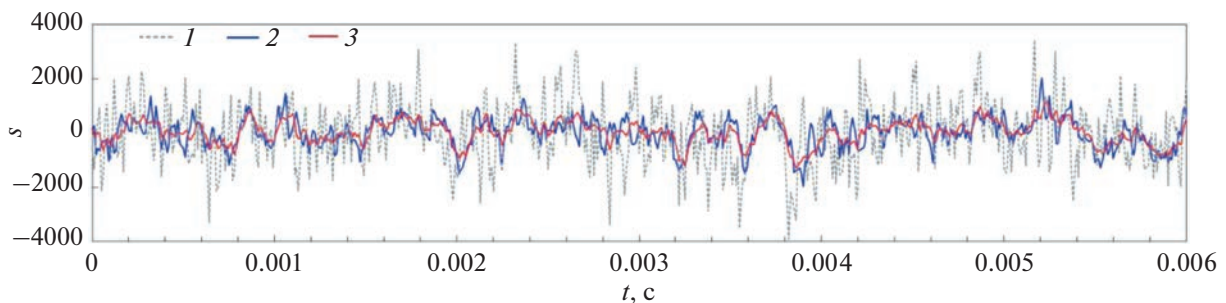


Рис. 5. Временные реализации сигналов: 1 — суммарный; 2 — исходная гидродинамическая компонента; 3 — гидродинамическая компонента, восстановленная с помощью предлагаемого метода.

Рассмотрим далее более реалистичный входной сигнал в виде суммы (10) и (11): $s_n = h_n + a_n$. На рис. 5 показаны временные реализации суммарного сигнала и его гидродинамической компоненты: исходной и восстановленной с помощью описанной в работе процедуры. Видно, что восстановленный сигнал повторяет в целом исходный, за исключением высокочастотных составляющих, что связано с обсуждавшимися выше особенностями алгоритма.

Количественный анализ качества восстановления гидродинамической компоненты приведен на рис. 6. На рис. 6а показаны модельные спектральные функции, а также спектры H и A конкретных реализаций случайных сигналов для гидродинамической и акустической компонент соответственно. Там же приведен спектр Y сигнала u_n , получающегося на выходе фильтра (4). Как видно, в области низких частот спектры Y и H совпадают с точностью около 1 дБ, частота среза при этом для рассмотренных в примере параметров составляет около 4 кГц и соответствует частоте

среза функции (6). Тот факт, что в модельном примере заранее известны обе компоненты сигнала, позволяет оценить фактические и расчетные передаточные функции для предложенного метода их разделения.

На рис. 6б показана передаточная функция рассматриваемого фильтра, рассчитанная на основании спектров входного и выходного сигналов $L_Y = 20 \lg |Y/S|$. Там же приведена ее теоретическая оценка, полученная на основании выражения (8), которая хорошо совпадает с L_Y . Видно, что на высоких частотах, где доминируют акустические возмущения, передаточная функция выходит на предел, соответствующий выражению (9). На рис. 6б показана также передаточная функция гидродинамической компоненты сигнала $L_H = 20 \lg |Y/H|$ и видно, что ее низкочастотная часть совпадает с теоретической оценкой (6), как это и должно быть — именно в этой области частот осуществляется корректное восстановление гидродинамической составляющей сигнала.

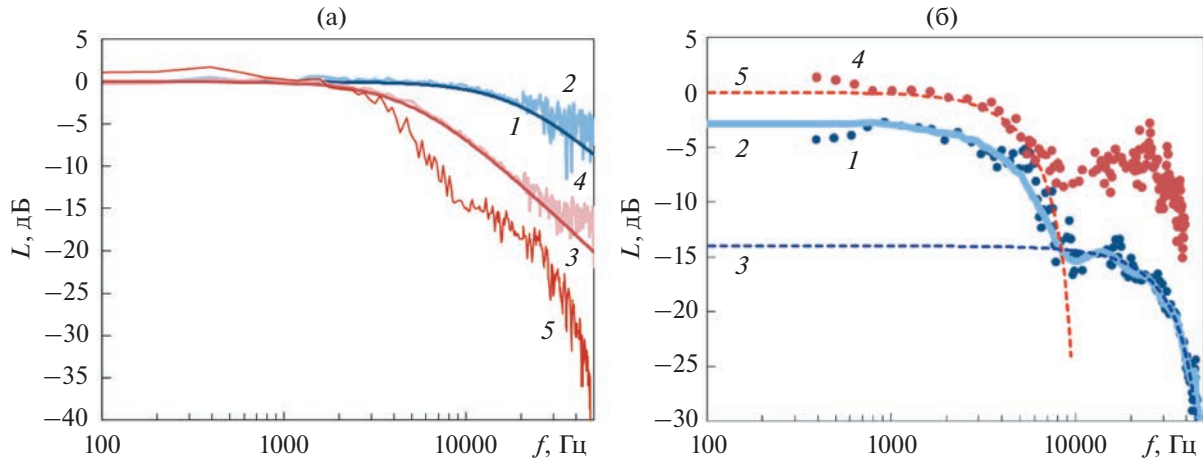


Рис. 6. Результат выделения спектра сигнала h из суммы $s = h + a$ с помощью выражения (4). (а) — 1 — исходный модельный спектр F_a акустической компоненты, 2 — спектр A реализации сигнала (11), 3 — исходный модельный спектр F_h гидродинамической компоненты, 4 — спектр H реализации сигнала (10), 5 — спектр Y сигнала s , прошедшего преобразование (4); (б) — 1 — передаточная функция L_Y , 2 — оценка L_Y на основании (8), 3 — высокочастотная асимптотика (9), 4 — передаточная функция L_H , 5 — оценка L_H на основании (6).

Таким образом, теоретически и на модельных примерах показано, что предложенный алгоритм позволяет восстанавливать гидродинамическую составляющую сигнала в области умеренных частот. При этом алгоритм работает тем точнее, чем больше различаются фазовые скорости акустических и гидродинамических возмущений.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА К АНАЛИЗУ ДАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Тестирование предложенного метода для реалистичных полей пульсаций проводилось с использованием данных вычислительного эксперимента, в котором было выполнено численное моделирование дозвуковой турбулентной струи методом крупных вихрей (LES), реализованным на базе схемы КАБАРЕ [26, 27]. Рассматривалась струя, истекающая из круглого профилированного сопла диаметром $D = 0.04$ м/с со скоростью $V_j = 180$ м/с. Струя с такими параметрами исследовалась экспериментально в работах [11, 13]. В настоящей работе использовалась расчетная сетка объемом 36 млн ячеек, расчетная область имела длину около $155D$, ее поперечный размер составлял около $110D$. В работах [28, 29] показано, что при данных параметрах результаты расчета указанным методом хорошо соответствуют результатам измерений.

В процессе расчета для целей настоящей работы сохранялись временные истории пульсаций давления на участке образующей конической поверхности $0 \leq x/D \leq 29$ с начальным радиусом

$r/D \approx 0.81$ и углом полураствора 9° (рис. 7а). Данные сохранялись в точках с шагом $\Delta x/D = 0.1$ с частотой 10^5 Гц. Данная поверхность на начальном участке $0.5 \leq x/D \leq 7.5$ совпадала с поверхностью, на которой измерялось ближнее поле такой струи в эксперименте в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ [13], что позволило провести прямое сравнение данных физического [11, 13] и численного эксперимента, показавшее их приемлемое соответствие как в ближнем, так и в дальнем поле (рис. 7б) в широком диапазоне частот. Это обосновывает возможность использования результатов вычислительного эксперимента для тестирования предложенного в данной работе метода разделения пульсаций.

Из рис. 7б видно, что спектр пульсаций давления в ближнем поле характеризуется выраженным пиком в области средних частот. Согласно результатам работ [11–14] этот пик соответствует возмущениям от волн неустойчивости, и он тем более выражен в общем спектре сигнала, чем ближе точка наблюдения находится к слою смешения. В области высоких частот спектр сигнала становится более пологим и соответствует акустическим возмущениям (в этой области частот спектры ближнего и дальнего поля подобны друг другу).

Оценим сначала общую структуру ближнего поля на рассматриваемой линии с помощью частотно-волновой фильтрации. Для заданного на указанной линии одномерного среза поля давления $p(x, t)$ вычислялся частотно-волновой спектр

$$P(k, \omega) = \iint p(x, t) e^{i\omega t + ikx} dt dx.$$

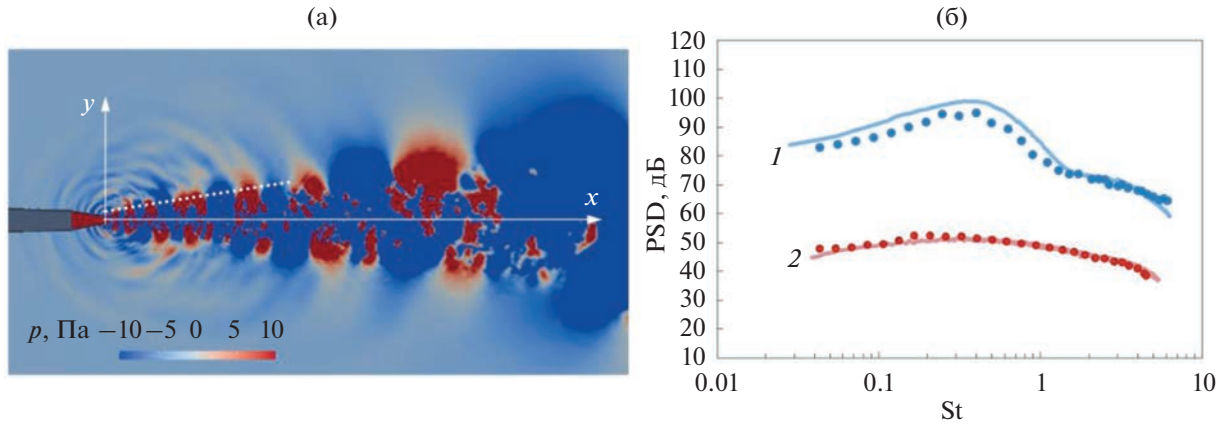


Рис. 7. (а) — Мгновенное поле давления турбулентной струи, полученное в численном моделировании, пунктиром показана образующая конической поверхности, на которой сохранялись пульсации давления; (б) — сравнение измеренных в эксперименте (линии) и полученных в расчете (точки) спектров пульсаций давления в ближнем поле (1) в точке $x/D = 1.5$, $y/D = 1$ и в дальнем поле (2) в точке $x/D = 1.5$, $y/D = 20$.

На рис. 8 показана карта спектральной плотности мощности $|P|^2$ в логарифмическом масштабе с нормировкой на максимум спектра. Волновое число обезразмерено с помощью диаметра сопла, в качестве безразмерной частоты используется число Струхала $St = fD/U_j$. На карте отмечены линии звуковой фазовой скорости возмущений $|U_c| = c$, которые служат формальной границей между акустическими и гидродинамическими пульсациями. В спектре также явно выделяется направление, соответствующее фазовой скорости $U_c \approx 0.65U_j$, с которой преимущественно перемещаются гидродинамические возмущения.

После частотно-волнового разложения в полученном спектре были выделены зоны дозвуковых и сверхзвуковых возмущений (см. рис. 8), от которых было взято обратное преобразование Фурье, что позволило явным образом оценить гидродинамическую p_h и акустическую p_a составляющие поля давления:

$$p_h(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{|\omega| < |k|c} P(k, f) e^{-i2\pi f t - ikx} df dk, \quad (12)$$

$$p_a(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{|\omega| \geq |k|c} P(k, f) e^{-i2\pi f t - ikx} df dk. \quad (13)$$

На рис. 9 приведены пространственно-временные карты поля пульсаций давления для исходного сигнала и его гидродинамической и акустической составляющих, полученные с помощью фильтрации (12), (13). Такие карты, в совокупности с частотно-волновым спектром, наглядно демонстрируют структуру пульсаций ближнего поля струи: в области низких частот наблюдается доминирование медленных гидродинамических возмущений, сносящихся вниз по направлению

истечения струи, причем их характерный масштаб растет по мере удаления от сопла, а скорость конвекции — убывает. Высокочастотные же возмущения преимущественно являются акустическими — их фазовая скорость на рассматриваемой линии ближнего поля в основном превышает скорость звука, причем пульсации могут распространяться как вверх, так и вниз по направлению истечения струи.

Для дальнейшего анализа рассмотрим точку ближнего поля $\bar{x}_0 \equiv x_0/D = 1.5$, $\bar{y}_0 \equiv y_0/D = 1$ (далее будем обозначать эту точку как θ , черта сверху означает нормировку на D). Область $x/D \sim y/D \sim 1$ интересна тем, что в ней часто оказываются элементы конструкции самолета (крыло, закрылок, пилон двигателя [30–32]), и задача снижения нагрузок от струи и акустического поля, возникающего при рассеянии гидродинамических возмущений на кромках конструкции, в том числе методами активного управления, является актуальной именно для данной зоны.

Оценим масштабы корреляции акустических и гидродинамических возмущений в области точки θ . Для этого вычислялись двухточечные нормированные взаимные спектры между точкой θ (взятой за опорную точку) и всеми остальными точками на рассматриваемой линии

$$\gamma(x_0, x_1, f) = \frac{P(x_0, f) P^*(x_1, f)}{|P(x_0, f)| |P(x_1, f)|}, \quad (14)$$

где $P(x_0, f)$ — спектр в точке θ , $P(x_1, f)$ — спектр в произвольной точке на рассматриваемой линии (координата y для краткости опущена, т.к. координаты x достаточно для определения положения точки на линии). Модуль функции γ характеризует когерентность сигналов, а фаза — фазовую ско-

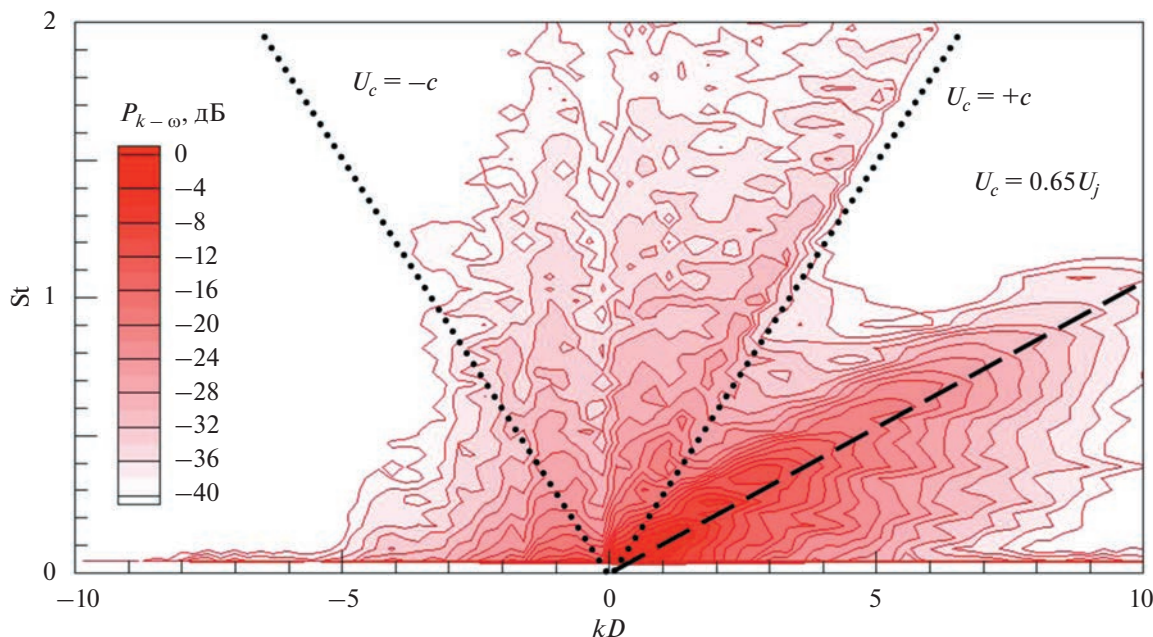


Рис. 8. Частотно-волновая карта спектральной плотности мощности в логарифмическом масштабе: построены линии уровня величины $P_{k-\omega} = 10 \lg(|P|^2/|P|_{\max}^2)$. Штриховой линии соответствует фазовая скорость $U_c = 0.65U_j$, пунктирными линиями — скорость $|U_c| = c$.

рость распространения возмущений. Функция γ вычислялась отдельно для гидродинамической и акустической составляющих полного сигнала. На рис. 10 приведены линии уровня модуля функции γ для обеих компонент сигнала, и видно, что их пространственные масштабы корреляции в области средних частот $St = 0.1 \dots 1.5$ действительно сравнимы друг с другом, что не позволяет использовать для разделения пульсаций стандартный подход, основанный на пространственной фильтрации.

На рис. 11а показан спектр полного сигнала в точке 0 и спектры его акустической и гидродинамической составляющих, полученные путем частотно-волновой фильтрации. Как видно, в области низких и средних частот доминируют гидродинамические возмущения, в области высоких — акустические. Отметим, что в зоне самых низких частот процедура фильтрации не является вполне точной из-за конечности длины линии, на которой рассматривается поле пульсаций, кроме того, само поле пульсаций является неоднородным по продольной координате, что также может влиять на точность разделения возмущений в данной точке. Тем не менее, именно такой способ обеспечивает наиболее достоверное разделение возмущений, и далее мы будем называть его “эталонным” и использовать для тестирования разработанного “локального” алгоритма.

На рис. 11б приведена оценка фазовой скорости пульсаций U_c , выполненная по фазе когерентности сигналов в двух точках 1 и 2, расположенных вблизи точки 0 (для точки 1: $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - 0.1$, для точки 2: $\bar{x}_2 = \bar{x}_0 + 0.1$):

$$U_c(x_0, f) = \frac{2\pi f D(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{\arg[\gamma(x_1, x_2, f)]}. \quad (15)$$

Скорость акустических возмущений, доминирующих на высоких частотах, превышает скорость звука: она составляет 500 м/с и более. Скорость гидродинамических возмущений составляет около $0.65U_j$ в области максимума их спектра и, вообще говоря, зависит от частоты, т.е. имеет место дисперсия. Эта зависимость может быть приближенно описана формулой

$$U_h(x_0, f) \approx u_0 + (0.65U_j - u_0)(1 - \exp(-(f/f_0)^{1.5})), \quad (16)$$

где $u_0 = 50$ м/с, $f_0 = 1.4$ кГц.

В предлагаемом в настоящей работе методе разделения пульсаций их конвективная скорость предполагается не зависящей от частоты — именно это обстоятельство позволяет реализовать процедуру (4) в реальном времени. Выражение (16) позволит оценить, насколько сильно предположение о постоянстве скорости пульсаций влияет на точность их выделения. Учет дисперсии гидродина-

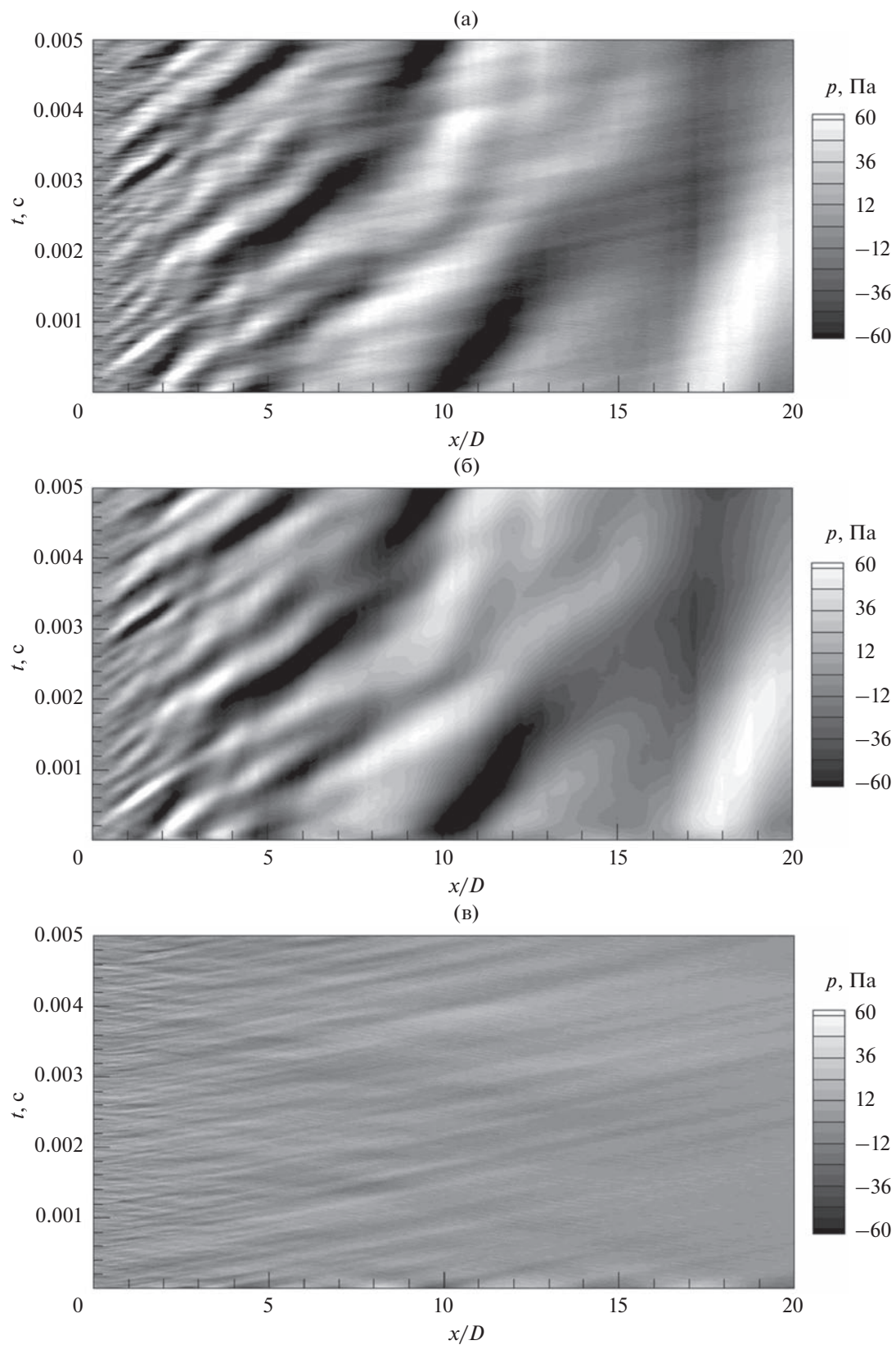


Рис. 9. Пространственно-временные карты поля пульсаций давления $p(x, t)$: (а) — исходный сигнал; (б) — гидродинамическая составляющая; (в) — акустическая составляющая.

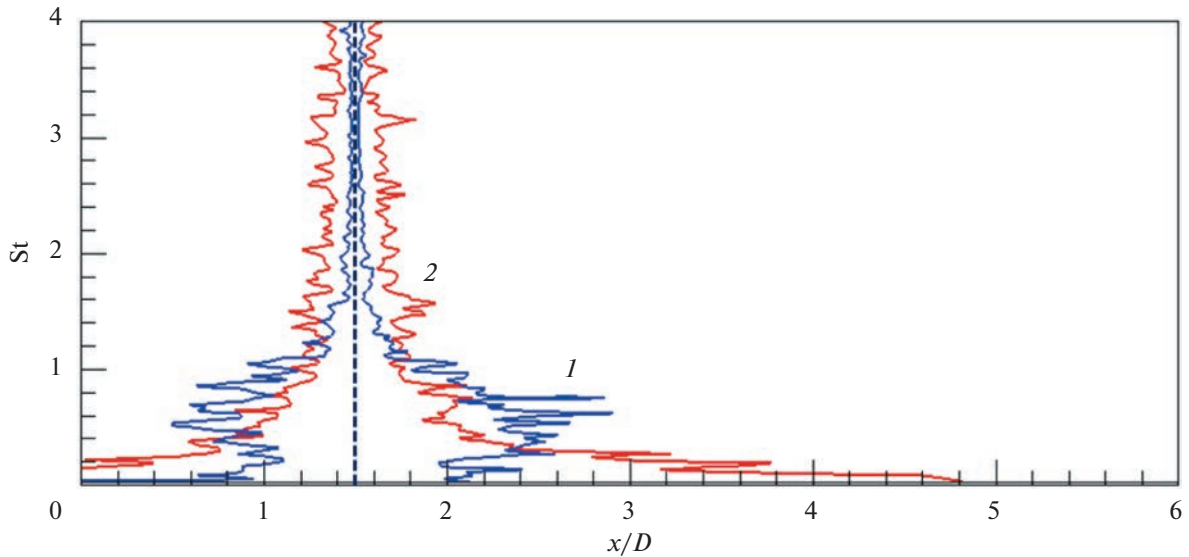


Рис. 10. Линии уровня $|\gamma| = 0.85$ для 1 – гидродинамической и 2 – акустической компонент сигнала.

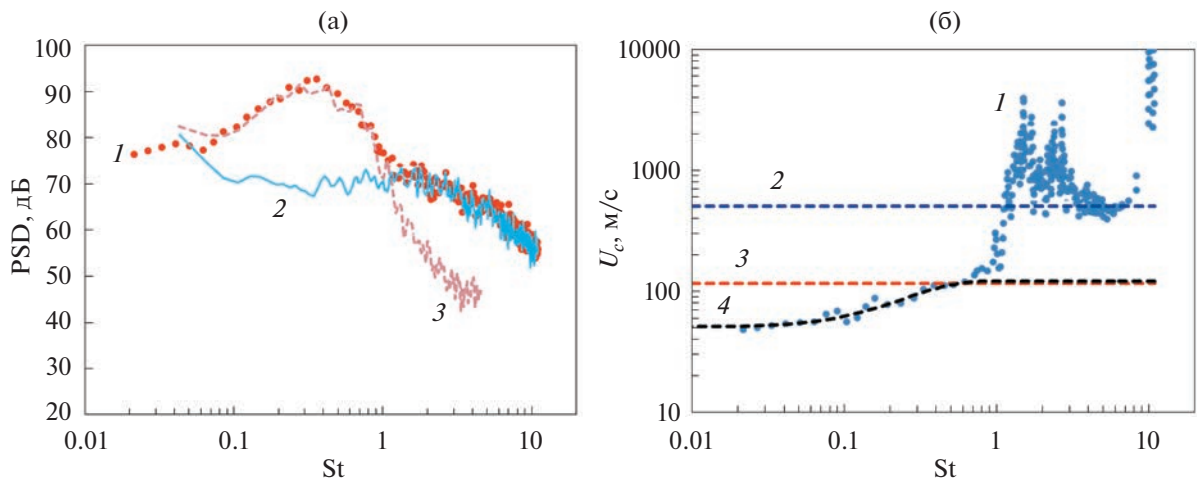


Рис. 11. (а) – Спектры сигнала в точке θ : 1 – суммарный спектр, 2 – акустическая компонента, 3 – гидродинамическая компонента; (б) – фазовые скорости возмущений в точке θ : 1 – оценка на основании фазы взаимного спектра, 2 – линия $U_c = 500$ м/с, 3 – линия $U_c = 0.65U_j \approx 120$ м/с, 4 – оценка скорости гидродинамических возмущений на основе эмпирической зависимости (16).

мических волн может быть реализован при пост-обработке сигналов, если процедуру (3) и соответствующую ей дискретную версию (4) реализовать для отдельных фурье-гармоник $S(x, f)$ исходного сигнала $s(x, t)$, используя для каждой гармоники соответствующее ей значение фазовой скорости (16):

$$h(x_0, t) \approx \int_0^t \int_f \frac{S(x_1, f) - S(x_2, f)}{\Delta x} U_h(x_0, f) e^{-i2\pi f t} df dt. \quad (17)$$

На рис. 12 показаны временные реализации исходного сигнала в точке θ , его гидродинамиче-

ской составляющей, определенной на основании частотно-волновой фильтрации (12), гидродинамической составляющей, определенной с помощью предлагаемого в данной работе локального метода (3) (в предположении постоянной скорости конвекции возмущений), и с помощью варианта (17) этого метода, учитывающего дисперсию волн. Уже из сопоставления временных историй сигналов видно, что метод частотно-волновой фильтрации обеспечивает наиболее точное (“эталонное”) выделение гидродинамической составляющей, а метод (3) показывает заметные низкочастотные отклонения от эталонного результата.

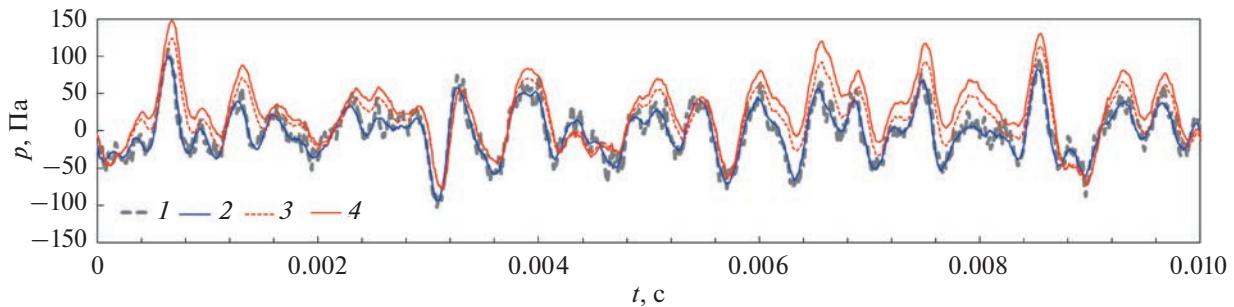


Рис. 12. Временные реализации пульсаций давления в точке 0. 1 – суммарный сигнал; 2 – гидродинамическая компонента, восстановленная с помощью частотно-волновой фильтрации; 3 – гидродинамическая компонента, восстановленная с помощью выражения (17) (с учетом дисперсии); 4 – гидродинамическая компонента, восстановленная с помощью выражения (3) (при $U_c = 0.65U_j$).

Учет дисперсии приближает результат к эталонному, однако низкочастотные колебания полностью не устраняются.

Указанные качественные выводы подтверждаются количественным анализом спектров и передаточных характеристик используемого фильтра, показанных на рис. 13. На рис. 13а приведены спектры пульсаций для полного сигнала и его гидродинамической составляющей, полученной тремя указанными выше способами. Как видно, оба варианта метода локального разделения пульсаций обеспечивают корректное восстановление спектра в достаточно широком диапазоне частот (приблизительно в пределах одной декады, где $St = 0.2...2$). В области низких частот наблюдается завышение сигнала, причем для варианта с постоянной скоростью конвекции оно превышает 10 дБ при $St < 0.1$. Учет дисперсии улучшает качество восстановления, однако различие с эталонным спектром, полученным частотно-волновой фильтрацией, остается заметным (~5 дБ на низких частотах). В высокочастотной области “глубина” корректного восстановления гидродинамической компоненты (динамический диапазон метода) на фоне доминирующей акустической составляет около 15 дБ. Восстановление высокочастотной области спектра гидродинамических возмущений важно с точки зрения задач активного подавления шума взаимодействия струи и крыла в области экранирования прямого излучения от струи [11], где вклад именно данной частотной зоны может быть определяющим. Отметим, что динамический диапазон определяется соотношением фазовых скоростей гидродинамических и акустических возмущений (см. (8)), которое для рассмотренных условий является достаточно умеренным (около 1/5). При рассмотрении более медленных потоков, в которых это отношение может достигать 0.1 и менее, точность работы предложенного метода будет выше.

Более полно картина работоспособности предложенного алгоритма отражена на рис. 13б,

где показана полная передаточная функция L_Y , рассчитанная по отношению спектра выхода к спектру входа ($L_Y = 20 \lg |Y/S|$), а также различные асимптотические оценки, поясняющие особенности функции L_Y и их связь с физическими эффектами и эффектами обработки. Поскольку частотно-волновая фильтрация показывает, что в области низких частот доминируют гидродинамические пульсации, а в области высоких – акустические, то можно ожидать, что, в соответствии с моделью (8), L_Y будет определяться соотношением (6) для низких частот и соотношением (9) – для высоких. В качестве конвективных скоростей пульсаций при теоретических оценках были приняты постоянные значения $U_h = 0.65U_j \approx 120$ м/с и $U_a = 500$ м/с. На высоких частотах действительно наблюдается хорошее соответствие с моделью (9) – здесь передаточная функция полностью определяется вкладом акустических пульсаций. На низких же частотах передаточная функция существенно отклоняется от расчетного значения, что соответствует видимому на рис. 13а завышению восстановленных гидродинамических спектров. Учет дисперсии при общем улучшении поведения L_Y на низких частотах не устраняет полностью видимое расхождение. Анализ показывает, что низкочастотное завышение восстановленной с помощью предложенного метода гидродинамической составляющей сигнала связано с нарушением гипотезы о “вмороженности” возмущений. Действительно, даже при рассмотрении достаточно близких точек 1 и 2, расстояние между которыми составляет $\Delta x = 0.2D$, когерентность между ними все же меньше 1 и составляет около $|\gamma| \approx 0.97$ в области низких частот (рис. 14).

Оценим влияние эффекта потери когерентности. Если на вход фильтра (4) подать два единичных некоррелированных друг с другом сигнала, то его амплитудно-частотная передаточная функ-

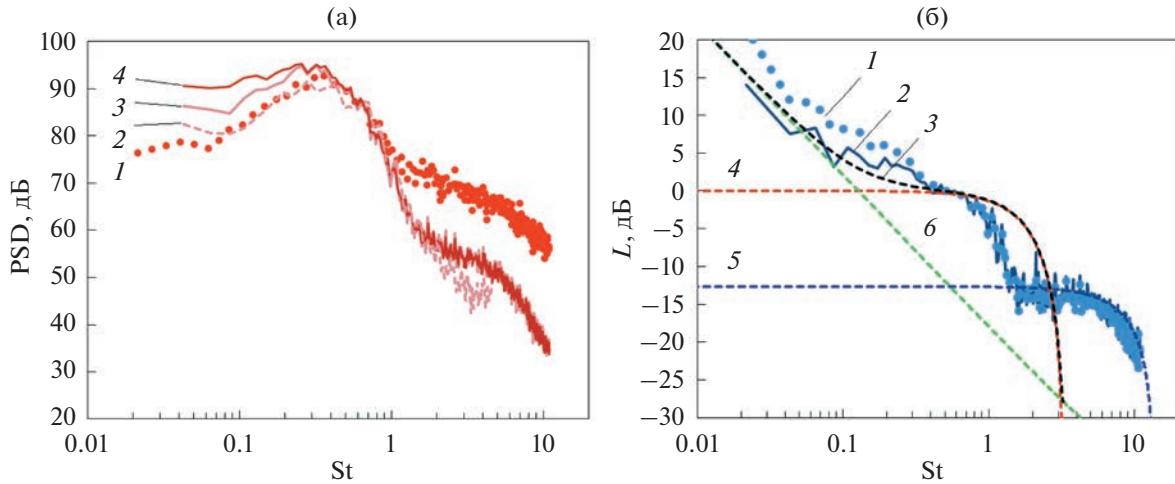


Рис. 13. (а) – Спектры сигнала в точке 0 (нумерация кривых соответствует рис. 12); (б) – передаточные функции: 1 – передаточная функция L_Y (без учета дисперсии), 2 – передаточная функция L_Y (с учетом дисперсии), 3 – теоретическая низкочастотная асимптотика (19) с учетом эффекта потери когерентности (при $|\gamma| \approx 0.97$), 4 – теоретическая низкочастотная асимптотика (8), 5 – теоретическая высокочастотная асимптотика (9), 6 – вклад эффекта потери когерентности (18).

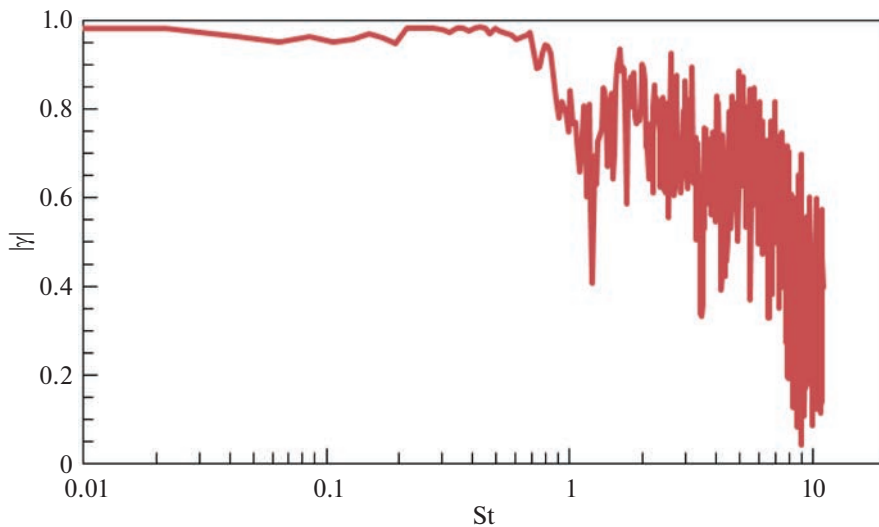


Рис. 14. Модуль когерентности для сигналов в точках 1 и 2.

ция примет вид $\overline{|W|^2} = \left(\sqrt{2} N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)^{-2}$, из чего следует, что она неограниченно возрастает при $\omega \rightarrow 0$. В нашем случае интенсивность некоррелированного сигнала в общем уровне определяется значением $1 - |\gamma|$, а значит, эффект потери когерентности дает следующий вклад в передаточную функцию L_Y

$$L_{Y\gamma} = \frac{1 - |\gamma|}{2 \left(N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)^2}, \quad (18)$$

а низкочастотная асимптотика полной передаточной функции может быть записана как

$$L_Y|_{\omega \rightarrow 0} \approx 10 \lg \frac{1 - |\gamma| + 2|\gamma| \sin^2\left(\frac{\omega N_a}{2}\right)}{2 \left(N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)^2}. \quad (19)$$

Соответствующие оценки для эффекта потери когерентности показаны на рис. 13б и они позволяют корректно описать данные вычислительного эксперимента.

Таким образом, для предложенного локального способа выделения гидродинамической составляющей сигнала имеются естественные ограничения, позволяющие ему корректно работать в конечном частотном диапазоне. В области низких частот его работоспособность ограничена потерей пространственной когерентности сигналов в двух рассматриваемых точках. Соответствующая граница может быть определена с использованием выражения (19). В области высоких частот работоспособность метода ограничивается частотой среза фильтра (6). Наконец, существует общее ограничение на динамический диапазон метода, связанное с соотношением различия мощностей акустической и гидродинамической составляющей и различия их фазовых скоростей (см. (8)) — чем больше различаются скорости конвекции двух типов возмущений, тем больше динамический диапазон метода.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый способ разделения звуковых и псевдозвуковых пульсаций, основанный на анализе сигналов в близкорасположенных точках. Отличительной особенностью способа является малый размер измерительной зоны: он много меньше масштаба корреляции псевдозвуковых возмущений. Способ основан на допущении о том, что гидродинамические пульсации подчиняются модели “вмороженных” возмущений, что позволяет в режиме реального времени преобразовать пространственную производную сигнала во временную, которая после интегрирования по времени дает оценку псевдозвуковых возмущений. С помощью разработанной теоретической модели предложенного подхода и на основании результатов его тестирования на модельных примерах и реалистичных сигналах, соответствующих возмущениям ближнего поля турбулентной струи, проведен анализ эффективности и границ применимости метода. Показано, что в области умеренных частот предложенный метод позволяет с приемлемой точностью выделять гидродинамическую составляющую из полного сигнала.

Авторы выражают благодарность В.Ф. Копьеву за внимание к работе и полезные обсуждения, а также И.А. Солнцеву за построение расчетной сетки для проведения численного моделирования.

В работе использованы данные измерений, проведенных на базе УНУ “Заглушенная камера с потоком АК-2” ФАУ ЦАГИ, модернизируемой при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-15-2022-1036.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 19-71-10064).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bull M.K. Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers: some reflections on forty years of research // J. Sound Vib. 1996. V. 190. № 3 P. 299–315.
2. Смольяков А.В., Ткаченко В.М. Измерение турбулентных пульсаций. Л.: Энергия, 1980.
3. Koop L., Kröber S., Ahlefeldt T., Ehrenfried K., Spehr C. Microphone-array Measurements in wind tunnels: Challenges and Limitations // Berlin Beamforming Conference. 2012. № 18. P. 22–23.
4. Голубев А.Ю., Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р. Турбулентные пульсации давления в акустике и аэродинамике. М.: Физматлит, 2019. 424 с.
5. Flinovia: Flow Induced Noise and Vibration Issues and Aspects-III. Ciappi E., De Rosa S., Franco F., Hambric S.A., Leung R.C.K., Clair V., Maxit L., Totaro N. (Eds.). Springer Nature, 2021.
6. Wilson L.N. Experimental investigation of the noise generated by the turbulent flow around a rotating cylinder // J. Acoust. Soc. Am. 1960. V. 32. № 10. P. 1203–1207.
7. Arguillat B., Ricot D., Bailly C., Robert G. Measured wavenumber: Frequency spectrum associated with acoustic and aerodynamic wall pressure fluctuations // J. Acoust. Soc. Am. 2010. V. 128. № 4. P. 1647–1655.
8. Кудашев Е.Б. Подавление акустических шумов при измерении пристеночных пульсаций давления // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 5. С. 644–649.
9. Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р. Регистрация частотного спектра пристеночных турбулентных давлений на фоне акустического шума // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 6. С. 632–637.
10. Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р. Развитие экспериментальных исследований турбулентных пристеночных пульсаций давления. Критический анализ и обобщение накопленных опытных данных // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 6. С. 639–649.
11. Бычков О.П., Фараносов Г.А. Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование шума взаимодействия струи и крыла самолета // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 4. С. 437–453.
12. Suzuki T., Colonius T. Instability waves in a subsonic round jet detected using a near-field phased microphone array // J. Fluid Mech. 2006. V. 565. P. 197–226.
13. Беляев И.В., Бычков О.П., Зайцев М.Ю., Копьев В.А., Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Фараносов Г.А., Чернышев С.А. Разработка стратегии активного управления волнами неустойчивости в невозбужденных турбулентных струях // Изв. Росс. Акад. наук. МЖГ. 2018. № 3. С. 14–27.
14. Kervhervé F., Guittou A., Jordan P., Delville J., Fortuné V., Gervais Y., Tinney C. Identifying the dynamics underlying the large-scale and fine-scale jet noise similarity spectra // AIAA Paper. 2008. AIAA-2008-3027.
15. Tinney C.E., Jordan P. The near pressure field of co-axial subsonic jets // J. Fluid Mech. 2008. V. 611. P. 175–204.
16. Kervhervé F., Jordan P., Cavalieri A.V., Delville J., Bogey C., Juvé D. Educating the source mechanism associated with

- downstream radiation in subsonic jets // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 710. P. 606–640.
17. Grizzi S., Camussi R. Wavelet analysis of near-field pressure fluctuations generated by a subsonic jet // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 698. P. 93–124.
 18. Camussi R., Meloni S. On the application of wavelet transform in jet aeroacoustics // *Fluids.* 2021. V. 6. № 8. P. 299.
 19. Kopiev V., Faranosov G., Bychkov O., Kopiev V.I., Moralev I., Kazansky P. Active control of jet-plate interaction noise for excited jets by plasma actuators // *J. Sound Vib.* 2020. V. 484. P. 115515.
 20. Копьев В.Ф., Бычков О.П., Копьев В.А., Фараносов Г.А., Моралев И.А., Казанский П.Н. Управление волнами неустойчивости в невозбужденной турбулентной струе с помощью плазменных актуаторов в узкой полосе частот // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 4. С. 431–439.
 21. Копьев В.Ф., Бычков О.П., Копьев В.А., Фараносов Г.А., Моралев И.А., Казанский П.Н. Активное управление шумом взаимодействия струи и крыла с помощью плазменных актуаторов в узкой полосе частот // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 2. С. 177–190.
 22. Karban U., Martini E., Jordan P. Modeling closed-loop control of installation noise using Ginzburg-Landau equation // *arXiv preprint.* 2023. arXiv:2303.03176. P. 1–30.
 23. Taylor G.I. The Spectrum of Turbulence // *Proc. Royal Soc. A.* 1938. V. 164. P. 476–490.
 24. Kuznetsov V.R., Praskovsky A.A., Sabelnikov V.A. Fine-scale turbulence structure of intermittent shear flows // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 243. P. 595–622.
 25. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. Пер. с англ. Под ред. Трахтмана А.М. М.: Сов. радио, 1980.
 26. Faranosov G.A., Goloviznin V.M., Karabasov S.A., Kondakov V.G., Kopiev V.F., Zaitsev M.A. CABARET method on unstructured hexahedral grids for jet noise computation // *Computers & Fluids.* 2013. V. 88. P. 165–179.
 27. Markesteijn A.P., Semiletov V.A., Karabasov S.A. CABARET GPU Solver for Fast-Turn-Around Flow and Noise Calculations // *AIAA Paper.* 2015. AIAA-2015-2223.
 28. Faranosov G., Bychkov O.P., Kopiev V., Soares L.F., Cavalieri A.V. The Modeling of Jet-Plate Interaction Noise in the Presence of Co-Flow // *AIAA Paper.* 2019. AIAA-2019-2492.
 29. Бычков О.П., Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Фараносов Г.А., Чернышев С.А. О двух подходах к моделированию шума низкоскоростных дозвуковых струй // *Докл. Росс. Акад. наук. Физика, Технические Науки.* 2022. Т. 506. № 1. С. 16–25.
 30. Mengle V.G. The Effect of Nozzle-to-Wing Gulley Height on Jet Flow Attachment to the Wing and Jet-Flap Interaction Noise // *AIAA Paper.* 2011. AIAA-2011-2705.
 31. Faranosov G.A., Kopiev V.F., Ostrikov N.N., Kopiev V.A. The effect of pylon on the excess jet-flap interaction noise // *AIAA Paper.* 2016. AIAA-2016-3043.
 32. Бычков О.П., Фараносов Г.А. Валидация двухточечной модели шума взаимодействия струи и крыла для реалистичной конфигурации // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 2. С. 146–154.

УДК 534.83

ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГОФРИРОВАННЫХ СОПЕЛ

© 2023 г. В. Ф. Копьев^а, И. В. Храмцов^{б, *}, Е. С. Черенкова^б, М. Ю. Зайцев^а, Ю. В. Берсенева^а,
В. В. Ершов^б, О. Ю. Кустов^б, Р. В. Бульбович^б

^аФАУ ЦАГИ, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ,
ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия

^бПермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр. 29, Пермь, 614990 Россия

*e-mail: lmgsh@pstu.ru

Поступила в редакцию 17.03.2023 г.

После доработки 17.03.2023 г.

Принята к публикации 18.05.2023 г.

Приводятся результаты исследования снижения шума дозвуковой турбулентной струи за счет использования гофрированной формы сечения сопла. Рассматривались гофрированные сопла с числом гофров от 6 до 12 различной высоты. Эксперименты проводились в двух заглушенных камерах: заглушенной камере с аэродинамическими источниками шума Лаборатории механизмов генерации шума и модального анализа ПНИПУ и заглушенной камере с потоком АК-2 ЦАГИ. Звуковое поле дозвуковой струи, истекающей из гофрированного сопла, сравнивалось со звуковым полем эквивалентной круглой струи. В работе демонстрируются способы расширения частотного диапазона, в котором достигается снижение шума струй при использовании гофрированных сопел. Приводится оценка потерь тяги в гофрированных соплах на основе RANS расчета.

Ключевые слова: аэроакустика, шум струи, турбулентная струя, гофрированная форма сопла, заглушенная камера, потери тяги

DOI: 10.31857/S0320791923600397, **EDN:** BAWBXC

ВВЕДЕНИЕ

Шум реактивной струи остается значительным источником шума при взлете самолета [1], и его снижение представляет собой серьезную проблему. Отчасти причина кроется в сложности точного моделирования турбулентности, которая, как известно, является источником шума струи. Тем не менее, давно известно, что мощность шума дозвуковой струи масштабируется как восьмая степень скорости истечения струи [2, 3]. Как следствие, в течение последних нескольких десятилетий основным и, возможно, наиболее эффективным методом снижения шума являлось снижение скорости истечения струи за счет увеличения диаметра авиационного двигателя.

Наиболее распространенным направлением работ для дальнейшего снижения шума струи является изменение конструкции выхлопных устройств двигателей, приводящих к изменению условий истечения струй и их смешения с окружающей средой. В этом случае, в основном, производится интенсификация смешения, что изменяет свойства крупномасштабных вихревых структур и уменьшает длину начального участка струи. К та-

ким методам стоит отнести щелевидные (прямоугольные), шевронные, скошенные и гофрированные сопла [4–10]. Данные методы являются одними из самых эффективных. Кроме того, они являются простыми — обычно не требуется дополнительной аппаратуры, и их применение не приводит к существенному увеличению массы авиационного двигателя.

Шевронные сопла имеют треугольные зубцы вдоль кромки сопла, которые приводят к интенсификации вихреобразования в сдвиговом слое и улучшают смешение потоков. При этом шевроны эффективно снижают шум в области низких частот, но приводят к усилению шума в области высоких частот. В работе [7], например, проведено параметрическое исследование влияния геометрических параметров шевронов (длина шеврона, количество шевронов и их асимметрия) на профиль скорости и излучение шума в дальнем поле. Стоит отметить, что шевроны в настоящее время применяются на реальных авиационных двигателях, как на внутреннем контуре, так и на внешнем.

Другим типом сопла, которое может быть использовано на авиационном двигателе, является

гофрированное сопло. Такие сопла имеют слабую синусоидальную гофрировку в окружном направлении. Исследования влияния на шум струи гофрированной формы сопла, в настоящее время, проводятся на модельных струйных установках [6, 9]. При этом рассматривается только малое число гофр, 4–6. Эффект снижения шума, который удается достичь авторам данных работ, составляет 1–2 дБ в области максимума шума излучения струи, при этом шум на высоких частотах увеличивается так же, как и у шевронных сопел.

Стоит отметить, что изменение формы сопла оказывает влияние на поток и, соответственно, приводит к ухудшению тяговых характеристик сопла [5, 11–17]. Потери тяги при использовании сопел альтернативной формы являются одной из важнейших проблем для их использования в реальных авиационных двигателях. Требуется найти баланс между ухудшением тяговых характеристик и снижением шума. Для определения потерь тяги могут использоваться экспериментальные [15, 16] и расчетные методы [5, 13, 14, 17].

В данной работе приводятся результаты экспериментального исследования шума струй, истекающих из базового конического и различных гофрированных сопел. Эксперименты проводились в двух заглушенных камерах: заглушенной камере с аэродинамическими источниками шума Лаборатории механизмов генерации шума и модального анализа ПНИПУ и заглушенной камере с потоком АК-2 ЦАГИ. В работе демонстрируются способы расширения частотного диапазона, в котором достигается снижение шума струй при использовании гофрированных сопел. На основе численного моделирования проводятся исследования потерь тяги в гофрированных соплах.

ОТРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ ШУМА СТРУИ В ЗАГЛУШЕННЫХ КАМЕРАХ ПНИПУ И ЦАГИ ДЛЯ КОНИЧЕСКОГО СОПЛА

Исследования проводились в двух заглушенных камерах, оснащенных струйными установками. Данные установки отличаются способом создания потока. В заглушенной камере ПНИПУ поток создается с помощью двух последовательно соединенных вентиляторов [18]. Для предотвращения проникновения шума вентилятора в заглушенную камеру в сети воздухопроводов предусмотрены глушители. В заглушенной камере АК-2 ЦАГИ для создания потока используется хранящийся в газгольдерах сжатый воздух.

Для повышения качества результатов, отработка измерений проводилась с использованием одного и того же конического сопла, которое последовательно использовалось в обеих заглушенных камерах. Сопло имело следующие параметры:

диаметр среза сопла 50 мм; диаметр входа 64 мм; длина 64 мм.

Перед проведением экспериментов производилась настройка систем, создающих поток. Для этого устанавливались трубки Пито–Прандтля на расстоянии 1 калибра от среза сопла по центру потока, и подбирались параметры подвода воздуха, чтобы скорость в данной точке составляла 0.6 М.

Для исследования шума струи использовались 6 микрофонов, расположенных на расстоянии $R = 2$ м от среза сопла под углами наблюдения $\alpha = 15^\circ - 90^\circ$ с равным шагом между микрофонами. Схема и фотографии экспериментов представлены на рис. 1. При измерениях в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ использовались полудюймовые микрофоны Briel & Kjaer, тип 4189С. При измерениях в заглушенной камере ПНИПУ использовались четвертьдюймовые микрофоны Briel & Kjaer, тип 4958. Для снижения эффектов отражения струи от вертикальных стоек, микрофоны располагались на тонких державках длиной 30 см. Перед началом измерений производилась калибровка микрофонов с помощью пистонфона тип 4228 (Briel & Kjaer).

На рис. 2 представлено сравнение спектральной плотности мощности шума струи под 3 различными углами наблюдения, при одной и той же скорости истечения струи. Как можно увидеть, полученные результаты на двух струйных установках хорошо соответствуют друг другу. Отличие результатов не превышает 1 дБ и может быть объяснено погрешностями измерения скорости струи и различной конфигурацией воздухопроводов установок.

СНИЖЕНИЕ ШУМА СТРУИ ЗА СЧЕТ ГОФРИРОВАННОЙ ФОРМЫ СОПЛА

Выполнены исследования влияния числа гофров и их высоты на шум турбулентной струи. Гофрированные сопла имели в области среза сопла синусоидальную гофрировку с необходимым числом гофр и их высотой. Гофрировка плавно уменьшалась в направлении входа в сопло. На входе в сопло геометрия была эквивалентна базовому коническому соплу. Были спроектированы сопла с одинаковой высотой лепестка 3 мм и различным числом лепестков 6; 9; 12; и для варианта с 12 лепестками дополнительно были изготовлены сопла с высотой лепестка 1.5 и 4.5 мм. При проектировании уделялось особое внимание сохранению площади среза сопла. У всех гофрированных сопел она была равна площади среза базового конического сопла. Общая длина всех гофрированных сопел также была равна длине базового сопла.

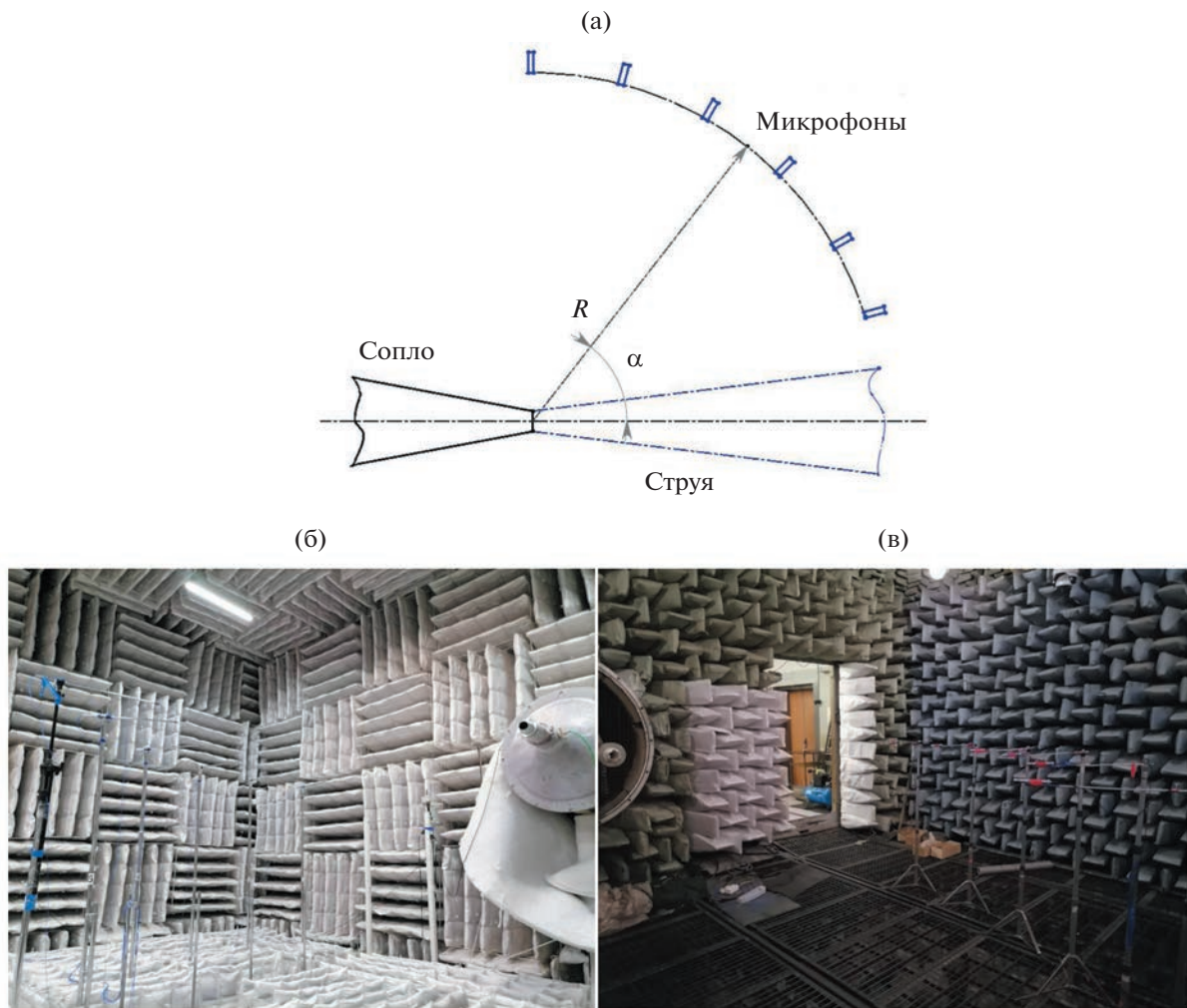


Рис. 1. Схема и фотографии проведения эксперимента: (а) — схема установки микрофонов, (б) — измерения в заглушенной камере ПНИПУ, (в) — измерения в заглушенной камере ЦАГИ.

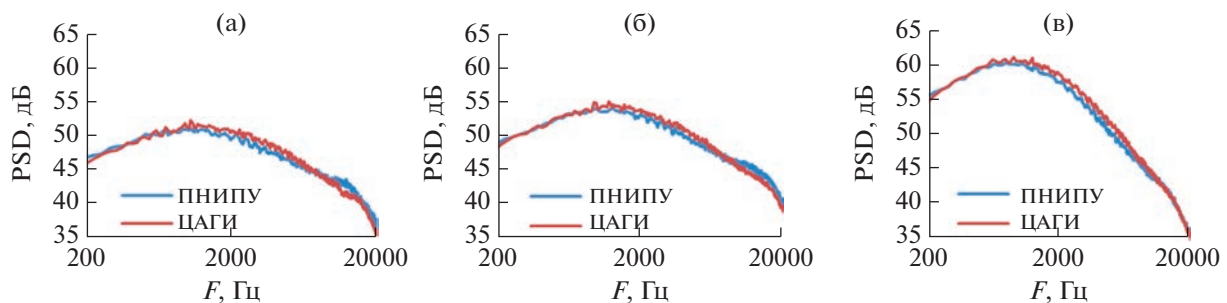


Рис. 2. Сравнение результатов измерений для конического сопла: (а) — угол наблюдения 90° , (б) — угол наблюдения 60° , (в) — угол наблюдения 30° .

Такая геометрия является достаточно сложной для традиционных методов изготовления, поэтому в данной работе использовались аддитивные технологии для создания сопел [19]. Созданные на 3D принтере из материала ПЭТ сопла пред-

ставлены на рис. 3. Измерения проводились для одних и тех же сопел в заглушенных камерах ПНИПУ и АК-2 ЦАГИ.

Акустические измерения проводились при условиях, описанных в разделе 1 данной статьи.

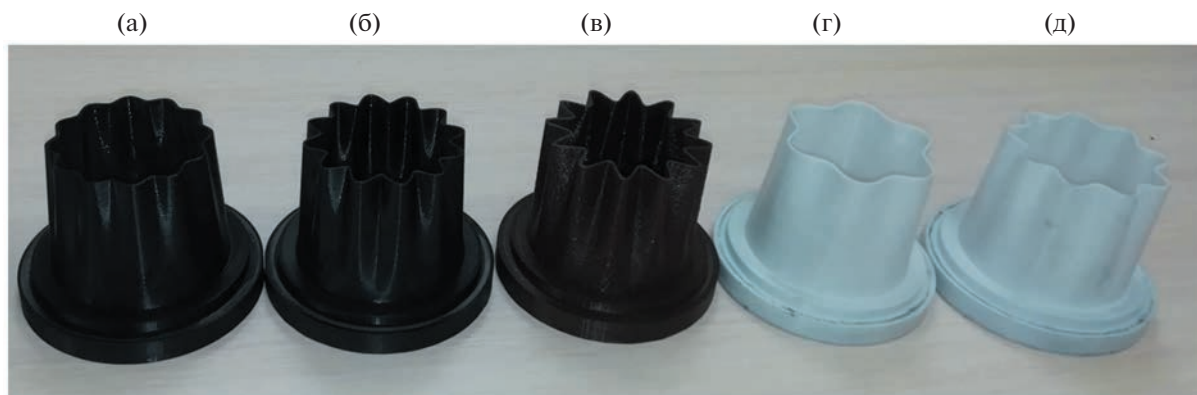


Рис. 3. Созданные сопла: (а) — 12 лепестков высотой 1.5 мм, (б) — 12 лепестков высотой 3 мм, (в) — 12 лепестков высотой 4.75 мм, (г) — 6 лепестков высотой 3 мм, (д) — 9 лепестков высотой 3 мм.

В результате были получены спектры шума струй, истекающих из различных сопел. Для анализа эффективности снижения шума струи с помощью данных сопел проводилась количественная оценка снижения шума:

$$\Delta L = L_{\text{гофрированное}} - L_{\text{коническое}},$$

где $L_{\text{гофрированное}}$ — выраженный в дБ уровень звукового давления струи, истекающей из гофрированного сопла; $L_{\text{коническое}}$ — выраженный в дБ уровень звукового давления струи, истекающей из конического сопла.

На рис. 4 представлены результаты измерений шума в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ. Как можно увидеть, сопло с 6 лепестками снижает шум в области максимума струи, и происходит увеличение шума на высоких частотах. Увеличение числа лепестков приводит к расширению частотного диапазона снижения шума. Увеличение амплитуды гофров приводит к плавному нарастанию эффекта снижения шума. Аналогичные результаты были получены при измерениях в заглушенной камере ПНИПУ.

ОЦЕНКА ПОТЕРЬ ТЯГИ В ГОФРИРОВАННЫХ СОПЛАХ

Движение летательного аппарата с реактивным двигателем осуществляется под воздействием реактивной силы (реактивной тяги), которая возникает в результате истечения из реактивного сопла выходящих газов. В идеальном случае при расчетах течения в сопле процесс считают адиабатическим и изоэнтропическим. В реальных соплах процесс расширения газа в сопле является достаточно сложным и сопровождается наличием различных потерь (на трение, неравномерность, коничность потока в выходном сечении сопла и др.). Использование различных устройств по снижению шума струй приводит к увеличению потерь тяги сопел. В работе [11] указано, что потери тяги

в соплах с шумоглушением могут быть в несколько раз больше, чем в обычных круглых (стандартных) соплах. Уровень потерь в некоторых случаях может достигать пяти и более процентов.

Количественная оценка потерь тяги в соплах производится с помощью выражения:

$$\Delta \bar{P}_c = 1 - \bar{P}_c, \quad (1)$$

где $\bar{P}_c = P/P_{c_{ид}}$ — коэффициент тяги сопла, связанный с эффективностью преобразования энергии давления в кинетическую энергию газов; P — тяга сопла, измеренная в эксперименте или полученная с помощью численного моделирования; $P_{c_{ид}}$ — идеальная тяга сопла.

Выражение для идеальной тяги, соответствующей идеальному процессу расширения газов (адиабатическому, изоэнтропическому) или истечению газов из идеального сопла, т.е. идеальной тяги, определенной по идеальному расходу газа через сопло, имеет вид:

$$P_{ид_m} = G_{ид} V_{ид}.$$

Полученную с помощью данного выражения идеальную тягу по значениям идеального расхода $G_{ид}$ и идеальной скорости истечения $V_{ид}$ можно охарактеризовать как теоретическую. Идеальный расход газа в выходном сечении сопла определяется выражением:

$$G_{ид} = \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{F q(\lambda) p_0}{\sqrt{T_0}}},$$

где k — показатель адиабаты; R — газовая постоянная; F — площадь среза сопла; $q(\lambda)$ — приведенный расход; p_0 — давление торможения; T_0 — температура торможения.

Идеальная скорость истечения:

$$V_{ид} = \lambda \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_0},$$

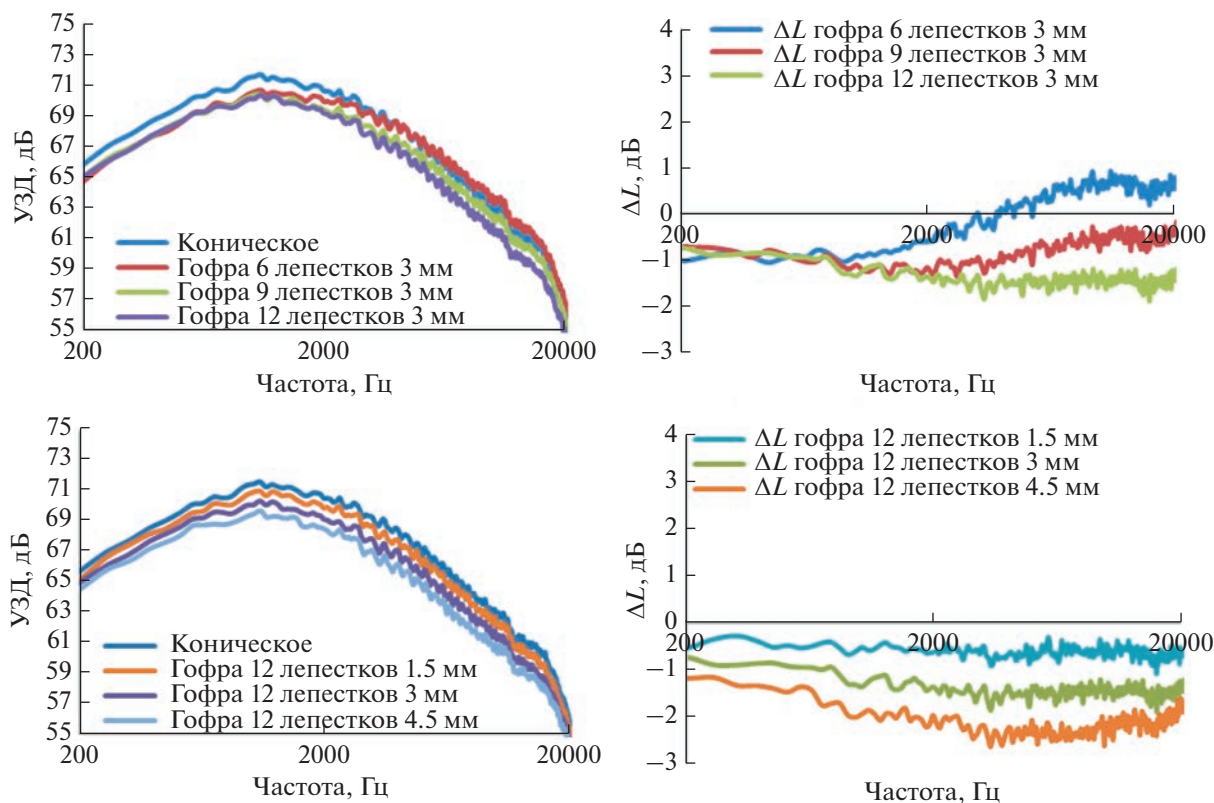


Рис. 4. Спектры шума и эффективность снижения шума гофрированными соплами под углом наблюдения 90° .

где λ — приведенная скорость истечения газа из сопла.

В реальных соплах тяга зависит также от пропускной способности сопла, которая характеризуется коэффициентом расхода сопла:

$$\mu_c = G / G_{ид}, \quad (2)$$

где G — расход газа, измеренный в эксперименте или полученный с помощью численного моделирования. Идеальная тяга с учетом действительного расхода газа через сопло определяется выражением:

$$P_{сид} = \mu_c P_{идм} = \mu_c G_{ид} V_{ид}.$$

В данной работе для определения действительного расхода газа в соплах G и тяги P использовалось численное решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса (RANS) в программном комплексе Ansys Fluent. Для замыкания системы уравнений использована модель турбулентности SST. Данная модель турбулентности некорректно предсказывает среднее поле течения струи, однако позволяет прогнозировать коэффициент потери тяги с точностью, близкой к разбросу экспериментальных данных [13, 17]. Расчеты проводились с учетом сжимаемости потока.

Расчетная область представляла собой внутреннюю область сопла и внешнюю область, в которой распространялась струя. Расчеты проводи-

лись для 10 моделей сопел. В качестве базового использовалось коническое сопло, геометрические параметры которого совпадали с используемым в эксперименте. В качестве шумоглушащих сопел использовались гофрированные сопла с числом гофр 6, 9, 12. В расчетах варьировалась высота гофр от 1.5 до 4.5 мм. Площадь среза сопла была одинаковой для всех сопел. Длина сопла и диаметр входа были аналогичны коническому соплу. Внешние границы расчетной области были удалены от среза сопла на 12 калибров вдоль оси сопла и 5–6 калибров в перпендикулярном направлении. Для экономии вычислительных ресурсов расчеты проводились для 1/3 части сопла в окружном направлении. Схема расчетной области и граничных условий представлена на рис. 5.

На входе в сопло (граница 1) задавались параметры заторможенного потока p_0 и T_0 . Расчеты проводились для трех значений скорости струи 0.3М, 0.6М и 0.9М. Давление p_0 на входе в расчетную область определялось в зависимости от числа Маха М для адиабатического изэнтропического процесса расширения газа. Температура T_0 для всех расчетов составляла 300 К. На выходе из расчетной области (граница 2) использовались значения $p_c = 1$ атм и температура $T_c = 300$ К. Для расчета параметров струи в неподвижной среде обычно используется струйное течение в спутном

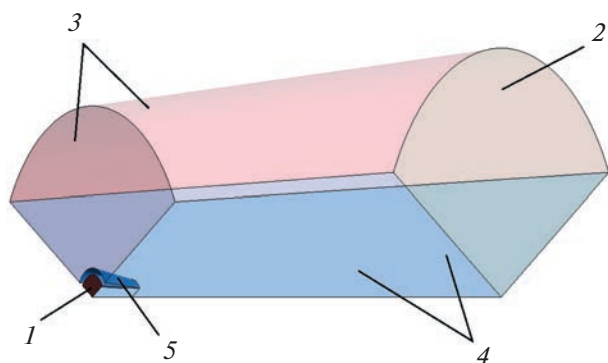


Рис. 5. Схема расчетной области. Описание приведено в тексте.

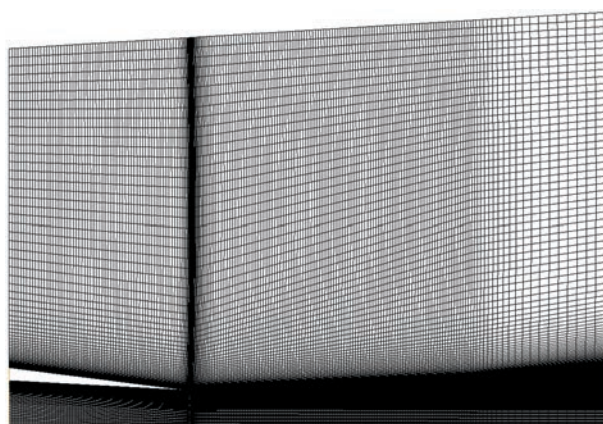


Рис. 6. Особенности сеточной модели.

потоке малой скорости. Для реализации этого условия на границе 3 задавалось значение скорости внешнего спутного потока с числом $M_\infty = 0.025M$. На боковых границах 4 использовалось

условие периодичности. Граница 5 представляла собой жесткую стенку.

Сетка содержит сгущения в сечении выхода из сопла, вблизи сопла на расстоянии 4 калибров по потоку и в окрестности слоя смешения турбулентной струи (рис. 6). Элементы вблизи стенки имеют сгущение для корректного разрешения поперечного градиента скорости. Параметры выбраны таким образом, чтобы обеспечить величину безразмерного расстояния до стенки $y^+ = \frac{U_\tau y}{\nu} < 1$, где U_τ — динамическая скорость; y — расстояние от первого узла сетки до стенки; ν — кинематическая вязкость. Первый пристеночный элемент имел высоту 0.5 мкм, высота последующих элементов увеличивалась в геометрической прогрессии с коэффициентом 1.05. За пределами сопла блок с пристеночными элементами расширяется под углом 8° , обеспечивая качественное разрешение слоя смешения.

При больших высотах лепестков гофрированных сопел с использованием топологии O-grid возникают ячейки с большой скошенностью. Для повышения качества сетки была разработана топология, позволяющая повысить ее качество. Примеры сеточных моделей для гофрированных сопел с малой и большой высотой лепестков представлены на рис. 7. Число элементов в сеточной модели для конического сопла составляло $\approx 4.3 \times 10^6$, для гофрированных сопел с малой высотой лепестков $\approx 5.1 \times 10^6$, для гофрированных сопел с большой высотой лепестков $\approx 12.3 \times 10^6$.

В результате расчета интегрированием по поверхности среза сопла определялись значения расхода и тяги:

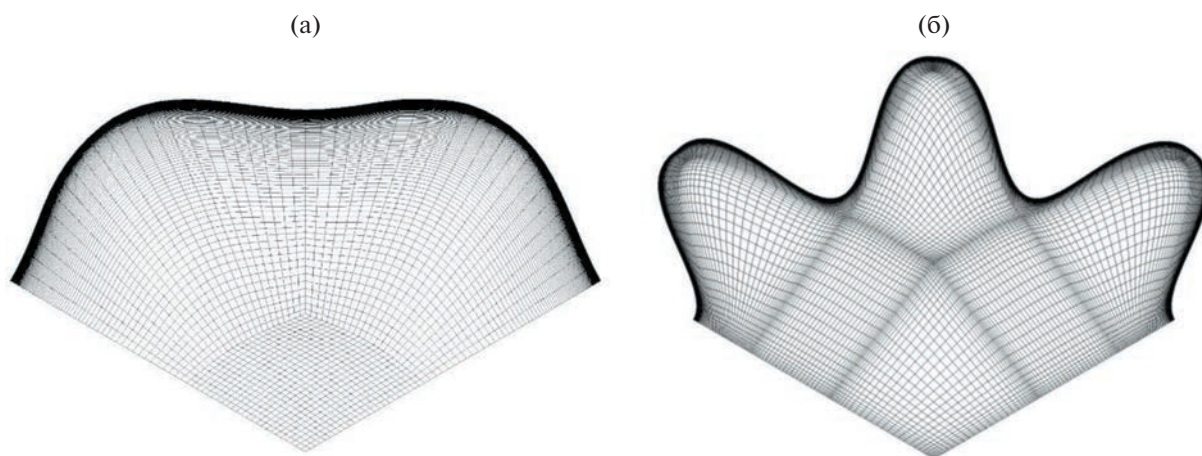


Рис. 7. Сеточная модель гофрированных сопел (а) — с малой высотой лепестков, (б) — с большой высотой лепестков.

$$G = G_{\text{расч}} = \iint_F \rho u dF,$$

$$P = P_{\text{расч}} = \iint_F (p - p_c + \rho u^2) dF,$$

где $G_{\text{расч}}$ и $P_{\text{расч}}$ — расход и тяга сопла, полученные по результатам расчета; ρ — плотность; u — скорость; p — давление на срезе сопла. Полученные в результате расчета значения расхода и тяги использовались в выражениях (1) и (2) для определения коэффициентов расхода и тяги.

На рис. 8 представлены результаты определения потерь тяги в сопле в зависимости от безразмерного размера $D_{\text{гидр}}/D_{\text{экв}}$, где $D_{\text{гидр}}$ — гидравлический диаметр сопла, определяемый с помощью отношения четырех площадей F к периметру сопла; $D_{\text{экв}}$ — диаметр базового конического сопла. Как можно увидеть, с ростом числа лепестков и их размеров происходит увеличение потерь тяги. Меньшие значения скорости струи приводят к большему значению потерь тяги. Если оценивать изменение потерь тяги относительно базового конического сопла, то для всех значений скорости струи приращение потерь для сопла с 12 лепестками гофр и высотой 4.5 мм относительно конического сопла составляет 0.4–0.6%.

Для проведения акустических испытаний шумоглушащих сопел требуется обеспечение равной тяги с эквивалентным базовым соплом. Равную тягу можно обеспечить изменением скорости истечения струи. Однако, в простейшем случае тяга пропорциональна квадрату скорости истечения. Для компенсации 0.5% тяги с помощью увеличения скорости истечения потребуется изменять скорость менее чем на 1 м/с. Однако, такую точность изменения скорости сложно обеспечить в натурном эксперименте. Стоит также отметить, что в соответствии с законом “восьмой степени” уровень шума дозвуковой струи масштабируется как восьмая степень скорости истечения струи или четвертая степень тяги. Соответственно, изменение тяги на 0.5% будет приводить к изменению шума струи менее 0.1 дБ.

В данной работе гофрированное сопло с 12 лепестками высотой 4.5 мм обеспечило снижение шума в среднем по частотному диапазону 20–20000 Гц на 2 дБ при скорости истечения струи 0.6М. Для того чтобы полученный эффект объяснялся только потерями тяги, они должны составлять 12.2%. Соответственно, можно сделать вывод, что снижение шума струй, истекающих из гофрированных сопел, обеспечивается в большей степени изменением структуры течения, а не изменением тяги, однако физический механизм, за счет которого происходит снижение шума, не ясен и требует дальнейшего изучения.

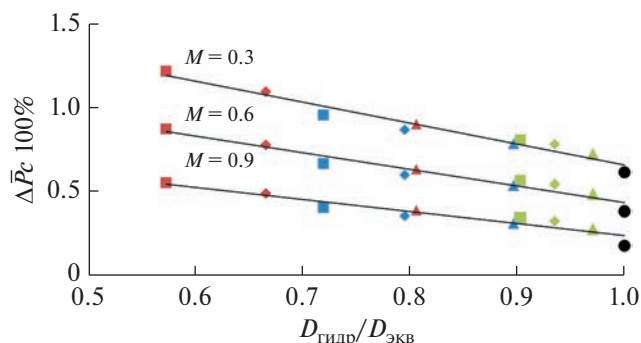


Рис. 8. Потери тяги различных сопел: круг — круглое сопло, треугольник — 6 лепестков, ромб — 9 лепестков, квадрат — 12 лепестков, зеленый — 1.5 мм, синий — 3 мм, красный — 4.5 мм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты совместных измерений одних и тех же сопел в заглушенных камерах ПНИПУ и АК-2 ЦАГИ. Полученные спектры на двух установках отличаются не более чем на 1 дБ. Спроектированы и созданы гофрированные шумоглушащие сопла с различным количеством лепестков и их амплитудой. Проведены параметрические исследования шума струи, истекающей из гофрированных сопел. Экспериментально подтвержден результат, демонстрирующий, что при увеличении амплитуды гофров, при сохранении площади выходного сечения сопла и скорости истечения, усиливается эффект снижения шума турбулентной струи. Получено, что при увеличении числа гофров увеличивается частотный диапазон снижения шума. Использование гофрированных сопел с увеличенным количеством лепестков и их амплитудой позволяет обеспечить снижение шума струи до 2–3 дБ в диапазоне частот 20–20000 Гц.

Проведена оценка потерь тяги при использовании гофрированных сопел. Эффект потери тяги при использовании шумоглушащих сопел определялся на основе RANS расчета течения газа через сопло. Увеличение количества лепестков и высоты гофров приводит к ухудшению тяговых характеристик сопел. Однако, снижение шума струй, истекающих из гофрированных сопел, обеспечивается в большей степени изменением структуры течения, а не изменением тяги.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант РНФ 22-72-00063). Работа выполнена на базе УНУ “Акустическая заглушенная камера с аэродинамическими источниками шума” ФГАОУ ВО “ПНИПУ” и УНУ “Заглушенная камера с потоком АК-2” ФАУ “ЦАГИ”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leylekian L., Lebrun M., Lempereur P.* An overview of aircraft noise reduction technologies // *J. Aerospace Lab.* 2014. V. 7. P. 1–15.
2. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1952. V. 211. № 1107. P. 564–587.
3. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically: II. Turbulence as a source of sound // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1954. V. 222. P. 1–32.
4. *Кузнецов В.М.* Основы теории шума турбулентных струй. М.: Физматлит, 2008. 240 с.
5. *Алексенцев А.А., Бекурин Д.Б., Власов Е.В., Иноземцев А.А., Лаврухин Г.Н., Падучев А.П., Умпелева О.А.* Исследование характеристик сопла ТРДД с регулируемыми шевронами // *Ученые записки ЦАГИ.* 2009. № 6.
6. *Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Остриков Н.Н.* Снижение шума дозвуковой струи за счет гофрированной формы сопла // *Акуст. журн.* 2013. Т. 59. С. 232–234.
7. *Bridges J., Brown C.A.* Parametric testing of chevrons on single flow hot jets // *Proceedings of the 10th Aeroacoustics Conference, Manchester, UK, 2004.* 2824 p.
8. *Ershov V.V., Khramtsov I.V.* Study of the Position of Sound Sources in a Turbulent Jet Using Nozzles of Different Configurations // *MATEC Web of Conferences.* 2020. V. 320. P. 00027.
9. *Lyu B., Dowling A.P.* An experimental study of the effects of lobed nozzles on installed jet noise // *Exp. Fluids.* 2019. V. 60. P. 1–12.
10. *Кузнецов В.М.* Эффективность методов снижения шума реактивных струй пассажирских самолетов // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 1. С. 91–102.
11. *Лаврухин Г.Н.* Аэрогазодинамика реактивных сопел. Т. I. Внутренние характеристики сопел. М.: Физматлит, 2003. 375 с.
12. *Vlasov E.V., Ginevskii A.S., Karavosov R.K., Makarenko T.M., Nalivaiko A.G.* Decrease in the noise of a subsonic turbulent jet ejected from a ring nozzle with longitudinal slots // *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2006. V. 79. № 3. P. 503–505.
13. *Vlasenko V., Bosniakov S., Mikhailov S., Morozov A., Trohin A.* Computational approach for investigation of thrust and acoustic performances of present-day nozzles // *Prog Aerosp Sci.* 2010. V. 46. P. 141–197.
14. *Браилко И.А., Крашенинников С.Ю.* Исследование аэродинамических характеристик шевронных сопел на основе численного расчета течения // *МЖГ.* 2005. № 2. С. 76–88.
15. *Krashenninnikov S.Ju., Mironov A.K., Pavlyukov E.V., Shenkin A.V., Zhitenev V.K.* Mixer-ejector nozzles: acoustic and thrust characteristics // *Int. J. Aeroacoustics.* 2005. V. 4(3). P. 267–288.
16. *Лаврухин Г.Н., Талызин В.А.* Экспериментальные исследования сопел до- и сверхзвуковых самолетов // *Ученые записки ЦАГИ.* 2014. Т. 45. № 5. С. 18–32.
17. *Горбовской В.С., Кажан А.В., Кажан В.Г., Шенкин А.В.* Исследования тяговых характеристик сопла сверхзвукового пассажирского самолета с помощью методов вычислительной газовой динамики // *Вестник Московского авиационного института.* 2019. Т. 26. № 4. С. 7–16.
18. *Копьев В.Ф., Пальчиковский В.В., Беляев И.В., Берсенева Ю.В., Макашов С.Ю., Храмов И.В., Корин И.А., Сорокин Е.В., Кустов О.Ю.* Создание заглушенной установки для аэроакустических экспериментов и исследование ее акустических характеристик // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 1. С. 114–126.
19. *Khramtsov I.V., Cherenkova E.S., Palchikovskiy V.V., Kustov O.Yu.* On applicability of additive technology in producing nozzles for jet noise investigations // *Akustika.* 2019. V. 34. P. 180–184.

МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЯЧЕЕК ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

© 2023 г. П. В. Писарев^а, *, А. А. Паньков^а, А. Н. Аношкин^а, К. А. Ахунзянова^а

^аПермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский проспект 29, Пермь, 614990 Россия

*e-mail: pisarev85@live.ru

Поступила в редакцию 11.11.2021 г.

После доработки 24.04.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Разработаны физические и математические численные модели для прогнозирования эффективных акустических свойств звукопоглощающих сотовых конструкций при уровнях звукового давления 100 и 130 дБ при нормальном падении звуковой волны. Исследованы коэффициенты звукопоглощения и закономерности акустических взаимодействий ячеек, установленных на торце цилиндрического канала при нормальном падении на них звуковых волн, с использованием численного математического и физического моделирования. Дана оценка эффективности звукопоглощения одиночных и групп резонаторов различных форм и размеров, выявлены уникальные сочетания ячеек в группах с учетом их акустических взаимодействий. Представительные образцы фрагментов звукопоглощающих конструкций изготовлены методом 3D-печати, лабораторные испытания образцов проведены с использованием интерферометра с нормальным падением звуковой волны на ячейки при уровне звукового давления 130 дБ.

Ключевые слова: аэроакустика, звукопоглощающие конструкции, ячейка Гельмгольца, структурная оптимизация, математическое моделирование, эксперимент, интерферометр, импеданс, коэффициент звукопоглощения

DOI: 10.31857/S0320791921100142, **EDN:** CJCUFV

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время экология авиационного транспорта стала второй по актуальности проблемой, выделяемой Международной организацией гражданской авиации (ИКАО), уступая первое место лишь безопасности полетов. Одной из доминирующих составляющих вредного воздействия авиационного транспорта на окружающую среду является создаваемый им, например, при полете над местностью акустический шум. Эффективным способом снижения шума авиационных двигательных установок является использование в них звукопоглощающих конструкций (ЗПК). Резонаторные ЗПК представляют собой сотовые конструкции из полимерных композиционных материалов, ячейки (соты) которых — резонаторы Гельмгольца. Акустические характеристики ЗПК зависят от многих геометрических и конструктивных факторов, в частности, формы и величины рабочего объема ячеек, жесткости и демпфирующих свойств материала корпусов ячеек и их взаимодействия между собой в ЗПК [1–6]. Принцип действия звукопоглощающих сотовых

панелей основан на эффекте поглощения и рассеяния излучения отдельными резонансными ячейками [7–14].

Существенным недостатком ЗПК резонансного типа является относительно неширокая частотная полоса звукопоглощения — частот настройки ЗПК, т.к. конструкции этого типа эффективно снижают шум лишь в узком диапазоне частот в окрестности резонансных частот ячеек и, как следствие, внутри одного или нескольких резонансных диапазонов частот настройки ЗПК в целом. Вне диапазонов частот настройки ЗПК, в частности, на промежуточных частотах и/или при значительном удалении от частот настройки эффективность шумогашения ЗПК резко уменьшается. Для расширения частотного диапазона настройки ЗПК и “выравнивания” ее частотной характеристики звукопоглощения (затухания) используются различные методы [15–17]. В работе [15] рассмотрены акустические характеристики комбинированных резонансных ЗПК, позволяющих обеспечить снижение шума в расширенном диапазоне частот. Здесь некоторое увеличение

широкополосности ЗПК достигается использованием в конструкции повторяющихся в двух взаимно перпендикулярных направлениях блоков из нескольких разночастотных резонаторов; решены прямая и обратная задача определения импеданса по геометрическим параметрам. В работах [16, 17] рассмотрены звукопоглощающие конструкции резонансного типа, у которых вместо перфорированных листов используются микропористые структуры на основе гладких металлических сеток саржевого плетения. Показано, что двухслойные сеточные конструкции обладают преимуществом по сравнению с двухслойными облицовками с перфорированными листами по ширине полосы коэффициента звукопоглощения.

Представляет интерес разработка новых способов управления импедансом ячеек и ЗПК в целом, в частности, посредством пьезоактуаторного управления формой и объемом камер резонаторов, конструктивным оформлением горла и перфораций [18–20], схемой размещения резонаторов с учетом их нелокального взаимодействия и наличия газового потока. Актуальны разработка новых математических моделей и проведение расчетно-экспериментальных исследований акустических характеристик одиночных резонаторов Гельмгольца и представительных фрагментов ЗПК с учетом процессов взаимодействий между акустической волной, стенками канала, резонаторами различной формы и размеров, наличием пограничного слоя и диссипации энергии в горле резонатора.

Хорошо известно, что при уровне звукового давления 120 дБ осуществляется переход в нелинейный режим, вызванный отрывом потока при вытекании из горла резонатора, при котором происходят существенные изменения акустического импеданса отверстия [21–26]. Это, в свою очередь, может приводить к заметному изменению акустических характеристик самого резонатора Гельмгольца [21, 27–33]. Исследованию нелинейных свойств отверстий посвящено большое количество работ, которые носят в основном экспериментальный характер [34].

В настоящей работе исследуется нелинейное взаимодействие резонаторов различного объема, а именно взаимодействие соседних резонаторов между собой с учетом нелинейности движения среды в горле каждого резонатора. Цель – расчетно-экспериментальная разработка новой ЗПК для акустического канала с улучшенными характеристиками звукопоглощения на основе предложенных новых резонаторных акустических ячеек с различными по форме и величине рабочими объемами и выявление наиболее эффективных сочетаний (блоков) из этих ячеек с учетом их акустических взаимодействий. Исследование коэффициентов звукопоглощения и закономерностей

акустических взаимодействий ячеек, установленных на торце цилиндрического канала при нормальном падении на них звуковых волн, осуществлено на основе численного математического и физического моделирования.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКУСТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕЗОНАТОРОВ

Для проведения вычислительных экспериментов были построены различные геометрические модели, которые можно разделить на три группы: *A1–3*, *B1–4*, *B1–2*. Все модели состоят из цилиндрического канала круглого сечения (свободный объем интерферометра) и присоединенного свободного объема ячейки или пары ячеек (резонатора) различной формы. Общий вид геометрических моделей представлен на рис. 1. Геометрические модели группы *A* содержат один резонатор: *A1* – базовый призматический резонатор; *A2* – конусообразный резонатор, *A3* – перевернутый конусообразный резонатор. Геометрические модели группы *B* содержат пару резонаторов: *B1* – пара призматических резонаторов, *B2–B4* – пара конусообразных резонаторов. Модель *B2* содержит два близкорасположенных конусообразных резонатора, модель *B3* – два близкорасположенных перевернутых конусообразных резонатора, модель *B4* – сочетание конусообразного и перевернутого конусообразного резонатора. Геометрические модели группы *B* состоят из базового призматического резонатора, а также вспомогательного резонатора, который меньше базового по объему на: *B1* – 70%; *B2* – 30%. Все геометрические модели содержат свободный объем интерферометра (расчетная область) длиной 150 мм. Для всех резонаторов задавался одинаковый свободный внутренний объем ячейки (объем ячейки) и одинаковые характеристики перфорации. Резонаторы размещались в канале круглого сечения (свободный объем интерферометра) диаметром 30 мм. На рис. 2 представлен общий вид базовой геометрической модели, где *1* – канал конечной длины круглого сечения. По центру на одном из торцов расположен резонатор 2, соединенный с каналом “узким” горлом 3 цилиндрической формы (диаметр горла равен 2 мм). В рамках вычислительных экспериментов осуществлялся расчет акустической эффективности представленных резонаторов в диапазоне рабочих частот 500–3000 Гц при уровне звукового давления 130 дБ (нелинейное падение звуковой волны).

Для решения поставленной задачи сформулирована математическая модель, описывающая нелинейные процессы взаимодействия звуковых волн между собой и со стенками канала с резонаторами призматической формы, работающими на нелинейных режимах. Для расчетной области θ

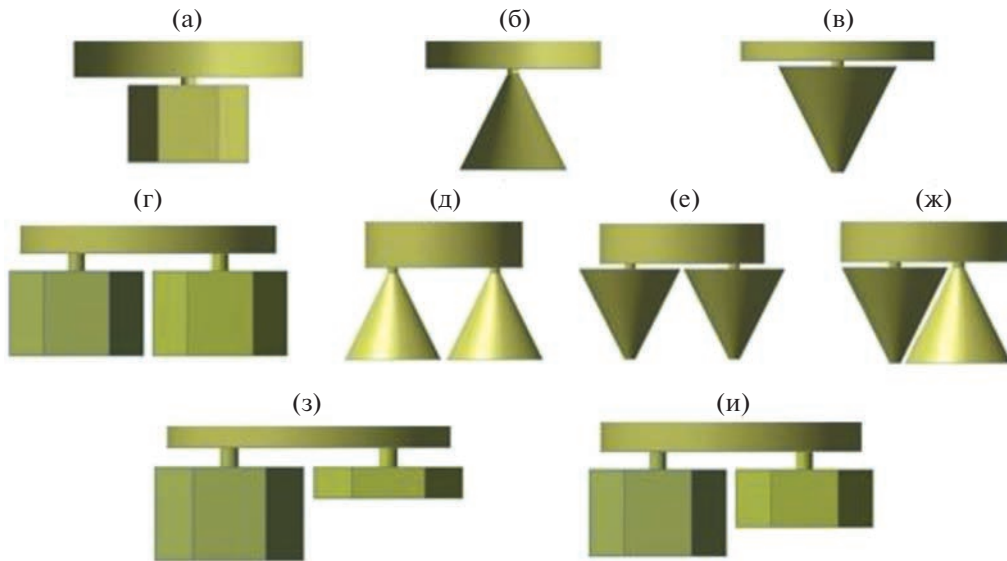


Рис. 1. Общий вид геометрических моделей: (а) – А1, (б) – А2, (в) – А3, (г) – В1, (д) – В2, (е) – В3, (ж) – В4, (з) – В1, (и) – В2.



Рис. 2. Геометрическая модель.

(рис. 2) математическая постановка включает систему нелинейных уравнений Навье–Стокса для вязкого теплопроводного газа

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= -\nabla p + \nabla \tau, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla(\mathbf{v}(\rho E + p)) &= \nabla(\chi \nabla T + \tau \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (1)$$

выражения для тензора вязких напряжений

$$\tau = \eta \left[(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \frac{2}{3} \nabla \mathbf{v} \mathbf{I} \right] \quad (2)$$

и полной энергии

$$E = h - \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}, \quad (3)$$

где ρ – плотность; $\mathbf{v}$ – вектор скорости; p – давление; T – температура; h – энтальпия; η – молекулярная вязкость; χ – теплопроводность; $\mathbf{I}$ – единичный вектор. Для замыкания системы уравне-

ний (1)–(3) используется уравнение состояния идеального газа.

При дискретизации расчетной области использована сетка с ячейками, близкими по форме к треугольной призме, для лучшей сходимости решения и снижения погрешностей получаемых результатов. Сетка адаптировалась в области горла резонатора так, чтобы по высоте горла было 20 ячеек. При удалении от горла происходило увеличение линейных размеров элемента до достижения среднего линейного размера 2 мм. Дополнительно использовалось сгущение на стенке отверстий резонаторов из 20 слоев с коэффициентом роста 1.2. Размер конечного элемента пристеночной резонансной ячейки – 0.0002 мм. В результате была получена расчетная сетка из 496 861 элементов. При измельчении сетки избегались резкие отличия геометрических размеров соседних ячеек, поэтому линейные размеры соседних ячеек отличаются не более чем в 2 раза. В качестве граничных условий на входе цилиндрического канала задавался сигнал, имитирующий белый шум в диапазоне частот 500–3000 Гц.

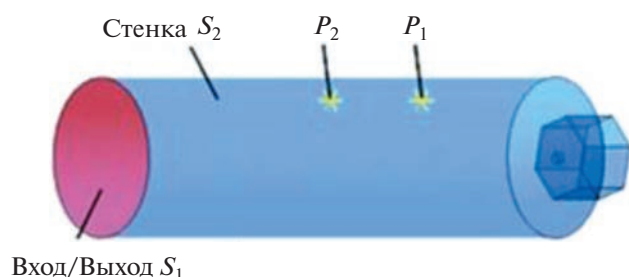


Рис. 3. Схема размещения контрольных точек.

Для вычисления комплексного сопротивления (импеданса) методом передаточной функции в двух контрольных точках (микрофонах) расчетной области осуществлялось измерение (запись) звуковых давлений P_1 , P_2 [8]. Контрольные точки размещались на расстоянии 38 и 58 мм от поверхности ЗПК, что соответствует положению микрофонов в интерферометре при проведении лабораторного эксперимента (рис. 3). При вычислении импеданса осуществлялся расчет акустического давления в точках, соответствующих центральной оси микрофонов натурального интерферометра с нормальным падением звуковой волны. По записанным сигналам давления вычислялись акустические характеристики ЗПК. Численное моделирование проводилось с временным шагом $1/65536$ с в течение 0.5 с. Полученные амплитудно-частотные характеристики обрабатывались методом передаточной функции, аналогично эксперименту [35].

По результатам вычислительных экспериментов были получены зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты (рис. 4, 5). Анализ

зависимостей показал, что коэффициент звукопоглощения конусообразного резонатора равен 0.88 при резонансной частоте 1258 Гц, перевернутого конусообразного резонатора — 0.79 при резонансной частоте 1520 Гц. Для сотового резонатора коэффициент звукопоглощения составил 0.74 при резонансной частоте 1470 Гц. Анализ амплитудно-частотных характеристик исследуемых ячеек ЗПК выявил, что при уровнях звукового давления 130 дБ сотовый резонатор является более широкополосным, чем конусообразный. Диапазон рабочих частот для конусообразного резонатора составил 1200–1350 Гц, для сотового резонатора — 1376–1621 Гц при значении коэффициента звукопоглощения 0.6 при уровне акустического давления 130 дБ.

Сравнительный анализ полученных зависимостей выявил, что единственный конусообразный резонатор акустически эффективнее единичного перевернутого конусообразного резонатора. Коэффициент звукопоглощения единичного конусообразного резонатора выше, чем у единичного перевернутого конусообразного резонатора на 9%. Вместе с тем широкополосность единичного перевернутого конусообразного резонатора больше, чем у единичного конусообразного резонатора. Диапазон рабочих частот для единичного конусообразного резонатора составил 1150–1450 Гц, для единичного перевернутого конусообразного резонатора — 1310–1850 Гц при значении коэффициента звукопоглощения 0.4.

Выявлено, что для конусообразных и перевернутых конусообразных резонаторов не наблюдается эффект взаимовлияния при уровне звукового давления 130 дБ. Коэффициент звукопоглощения модели A2 составил 0.88 при резонансной частоте 1258 Гц, тогда как коэффициент звукопоглощения модели B2 составил 0.98 при резонансной ча-

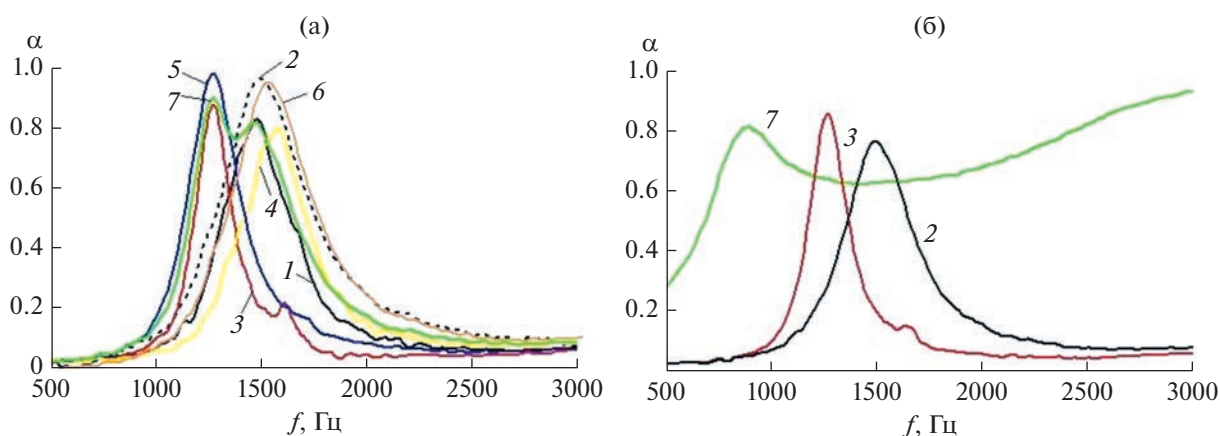


Рис. 4. Графики зависимости акустической эффективности от частоты для резонаторов моделей A1–A3 и B1–B4: (а) — при нелинейном падении волны (130 дБ), (б) — при линейном падении волны (100 дБ), где 1 — пара сотовых резонаторов, 2 — единичный сотовый резонатор, 3 — единичный конусообразный резонатор, 4 — единичный перевернутый конусообразный резонатор, 5 — пара конусообразных резонаторов, 6 — пара перевернутых конусообразных резонаторов, 7 — пара конусообразного и перевернутого конусообразного резонатора.

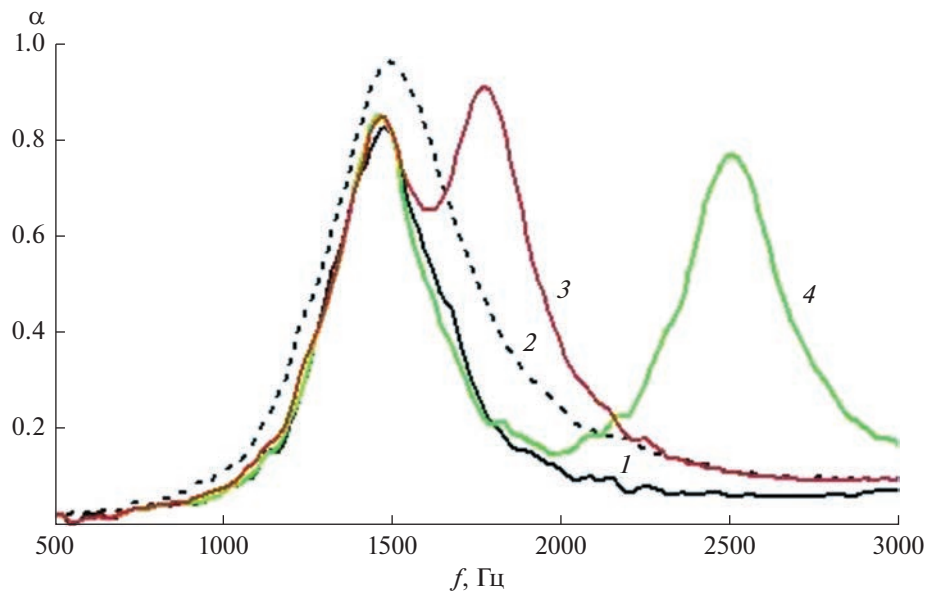


Рис. 5. Графики зависимости акустической эффективности от частоты для резонаторов моделей *A1*, *B1* и *B1–B2*, где *1* — единственный сотовый резонатор, *2* — пара сотовых резонаторов, *3* — единственный сотовый резонатор + 2/3 от объема базового резонатора, *4* — единственный сотовый резонатор + 1/3 от объема базового резонатора.

стоте 1290 Гц. Коэффициент звукопоглощения модели *A3* — 0.79 при резонансной частоте 1500 Гц, тогда как коэффициент звукопоглощения модели *B3* составил 0.97 при резонансной частоте 1520 Гц. Сравнительный анализ единичных и парных конусообразных резонаторов выявил, что эффективность пары конусообразных резонаторов повышается на 12%, а пары перевернутых конусообразных резонаторов повышается на 18%. Коэффициент звукопоглощения модели *B4* имеет значение 0.92 при резонансной частоте 1258 Гц и 0.85 при резонансной частоте 1500 Гц. Анализ результатов, полученных с использованием моделей группы *B*, выявил, что акустическая эффективность пары конусообразного и перевернутого конусообразного резонаторов ниже, чем пары резонаторов с одинаковой формой. Однако обнаружено, что сочетание конусообразного и перевернутого конусообразного резонаторов приводит к увеличению широкополосности группы резонаторов при уровне звукового давления 130 дБ. Диапазон рабочих частот сочетания конусообразного и перевернутого конусообразного резонаторов составил 1110–1710 Гц, для пары конусообразных резонаторов — 1100–1450 Гц, для пары перевернутых конусообразных резонаторов — 1210–1810 Гц при значении коэффициента звукопоглощения 0.4.

Анализ зависимостей показал, что модели группы *B* акустически эффективнее моделей *A1* и *B1*. Так, коэффициент звукопоглощения модели *B1* 0.81 при резонансной частоте 1470 Гц и 0.76 при резонансной частоте 2510 Гц, модели *B2* — 0.8 при резонансной частоте 1470 Гц и 0.9 при резо-

нансной частоте 1650 Гц. Анализ амплитудно-частотных характеристик исследуемых ячеек ЗПК выявил, что при уровнях звукового давления 130 дБ модели группы *B* являются более широкополосными, чем единичная сотовая и пара сотовых резонаторов. Таким образом, при совместной работе группы резонаторов эффективность звукопоглощения зависит не только от объема ячеек, но и от их формы и взаимного сочетания этих параметров и пространственного расположения. При совместной работе группы резонаторов различного объема повышается как эффективность базового резонатора, так и широкополосность звукопоглощения группы.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗВУКОПОГЛОЩЕНИЯ ОБРАЗЦОВ ЗПК

Для верификации разработанной математической численной модели были проведены лабораторные испытания представительных образцов ЗПК на интерферометре с нормальным падением звуковой волны на нелинейных режимах работы ЗПК (130 дБ). Проведение акустических испытаний в интерферометре с нормальным падением звуковых волн широко распространено в связи с относительной простотой реализации эксперимента. Экспериментальная установка представляет собой трубу круглого сечения, на одном конце которой располагается образец ЗПК, на другом — динамик, который облучает образец акустическими волнами (рис. 6). Также на некотором расстоянии от образца ЗПК в канале интерферометра



Характеристики интерферометра:

- звуковое давление до 160 дБ
- частотный диапазон 500–6400 Гц
- размер испытываемого образца 30 мм

Рис. 6. Укомплектованный и готовый к работе интерферометр.

заподлицо со стенкой установлены микрофоны, которые записывают акустическое давление падающих и отраженных волн во времени (рис. 7). Далее записанное давление обрабатывается по алгоритму быстрого преобразования Фурье, в результате которого вычисляется импеданс образца ЗПК.

Импеданс связывает между собой давление и нормальную скорость на границе, акустические свойства которой он характеризует. В большинстве работ влияние высоких уровней звукового давления падающей волны описывается через скорость движения частиц среды в отверстии [25, 36–39]. Основой большинства полуэмпирических моделей служат работы Крэндалла и Меллинга. В работе Крэндалла [39] приводится выражение для импеданса круглого отверстия, а в работе Меллинга [25] исследуется влияние высоких уровней звукового давления, которое приводит к нелинейному поведению ЗПК. Безразмерный удельный акустический импеданс выражается в виде соотношения

$$Z = X + iY = \frac{p}{\rho c u_n}, \quad (4)$$

где p – акустическое давление; ρ – плотность воздуха; c – скорость звука в воздухе; u_n – колебатель-

ная скорость. Несмотря на кажущуюся простоту выражения (4), определение импеданса звукопоглощающей конструкции на практике является сложной задачей. На сегодняшний день предпочтение отдают экспериментальному определению импеданса того или иного образца ЗПК. Обычно для измерения импеданса используют два микрофона, так как в этом случае используемый “метод передаточной функции” имеет наиболее простую численную реализацию при наличии в канале лишь поршневой моды, что ведет к зависимости рассматриваемого частотного диапазона от размеров канала импедансной трубы.

Верификация проводилась на образцах моделей А1–А3. Для проведения лабораторных экспериментов были изготовлены образцы ЗПК методом 3D-печати [40], которые представляют собой цилиндрические образцы диаметром 30 мм (рис. 8). По результатам экспериментальных исследований были получены зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты (рис. 9). Из графиков зависимости следует, что коэффициент звукопоглощения конусообразного резонатора равен 0.77 при резонансной частоте 1264 Гц и перевёрнутого конусообразного резонатора – 0.72 при резонансной частоте 1505 Гц при уровне звукового давления 130 дБ. Для сотового резонатора коэффициент звукопоглощения составил 0.74 при резонансной частоте 1520 Гц. Таким образом, сравнительный анализ результатов численных расчетов с результатами лабораторных испытаний выявил, что при уровне звукового давления 130 дБ расхождение по коэффициенту звукопоглощения составляет не более 10%, по частоте 3%. Сравнительный анализ результатов численных расчетов с результатами лабораторных испытаний выявил, что для модели А1 расхождение по коэффициенту звукопоглощения не превышает 7%, для модели А2 – 10%, для модели А3 – 8%. Погрешность результатов обусловлена отличием геометрических размеров образцов, напечатанных с помощью аддитивных технологий, что может быть связано с “усадкой” материала.

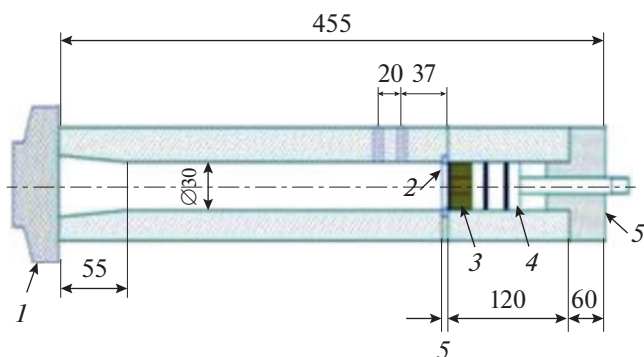


Рис. 7. Внутренний канал интерферометра, где 1 – динамик, 2 – шайба, фиксирующая образец, 3 – образец ЗПК, 4 – шток, 5 – направляющая втулка.

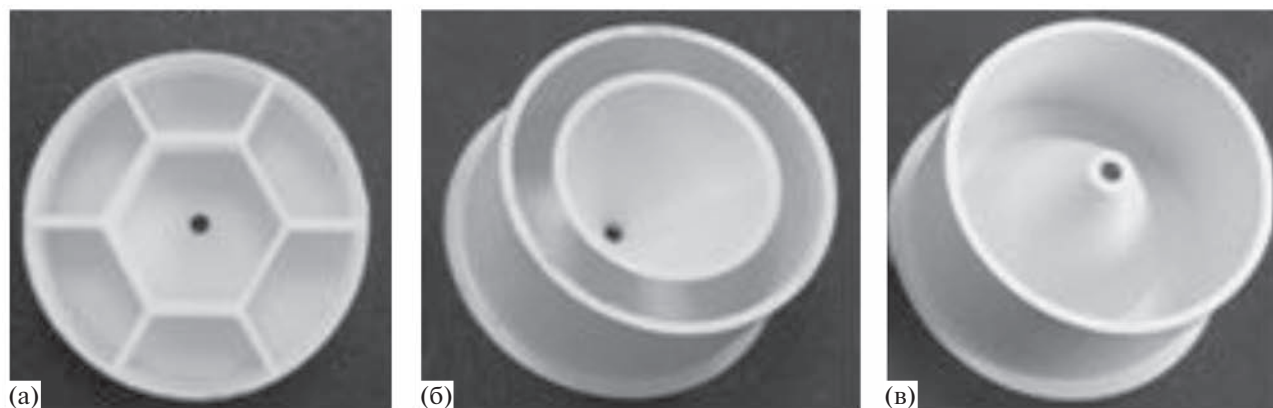


Рис. 8. Образцы ЗПК после печати, где (а) — модель А1, (б) — модель А2, (в) — модель А3.

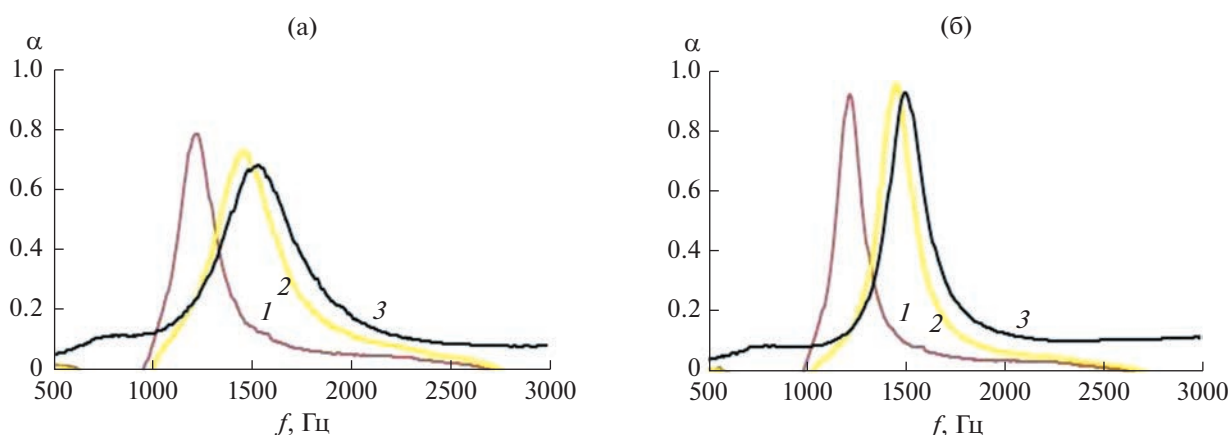


Рис. 9. График зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты: (а) — при нелинейном режиме (130 дБ), (б) — при линейном режиме (100 дБ), где 1 — единичный конусообразный резонатор, 2 — единичный перевернутый конусообразный резонатор, 3 — единичный сотовый резонатор.

РАЗРАБОТКА НОВОЙ АКУСТИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНОЙ КОНСТРУКЦИИ ЗПК

На основе результатов вычислительных экспериментов были выявлены акустически эффективные схемы взаимного расположения резонаторов различной формы по рабочей поверхности представительного фрагмента ЗПК (рис. 10) с целью уменьшения негативного акустического взаимовлияния резонаторов при работе на совместной резонансной частоте. Предложено использовать схему, изображенную на рис. 10а, которая позволяет максимально “развести” резонансные частоты соседних резонаторов, что значительно снижает их негативное взаимовлияние. Для проведения ряда вычислительных экспериментов по моделированию распространения звуковой волны в канале интерферометра были разработаны две геометрические модели резонансных ячеек ЗПК призматической формы (рис. 11). По результатам вычислительных экспериментов были по-

лучены зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты (рис. 12). Анализ зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты резонансных ячеек разного объема показал, что наблюдается несколько пиков. Пик с наибольшим коэффициентом звукопоглощения со значением 0.93 наблюдается при резонансной частоте 1625 Гц. Диапазон рабочих частот резонансной ячейки ЗПК составил 1250–3000 Гц при значении коэффициента звукопоглощения 0.6. Анализ зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты резонансных ячеек одинакового объема показал, что коэффициент звукопоглощения составляет 0.91 при резонансной частоте 1470 Гц. Диапазон рабочих частот резонансной ячейки ЗПК составил 1148–2074 Гц при значении коэффициента звукопоглощения 0.6. При сравнении результатов резонансных ячеек выявлено, что коэффициент звукопоглощения резонансных ячеек разного объема выше на 2%. Кроме того, резо-

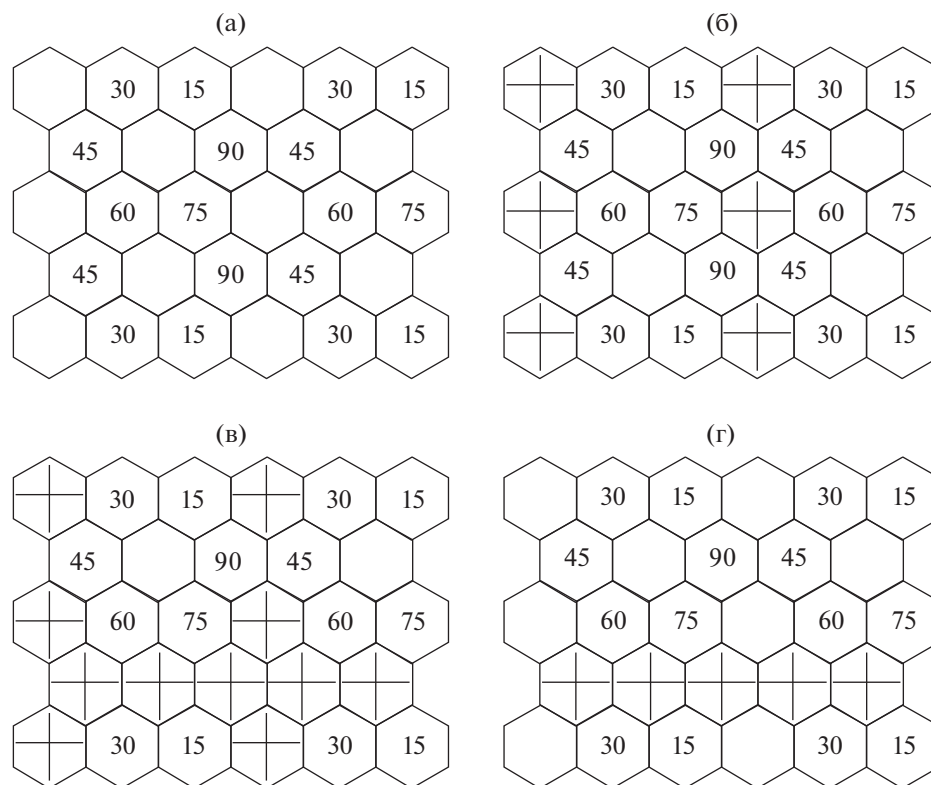


Рис. 10. Схемы размещения призматических резонаторов в ЗПК, где  – базовый призматический резонатор,  – закрытый призматический резонатор,  – призматический резонатор, объемом 15, 30, 45, 60, 75, 90% от базового.

нансные ячейки первой группы имеют больший диапазон рабочих частот.

Для верификации математических моделей по расчету акустической эффективности предложенной ЗПК, проводилось сравнение результа-

тов вычислительных экспериментов с результатами лабораторных испытаний. На рис. 13 представлены образцы после печати. По результатам экспериментальных исследований были получены зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты (рис. 14). Анализ зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты резонансных ячеек разного объема показал, что наблюдается несколько пиков. Пик с наибольшим коэффициентом звукопоглощения со значением 0.95 соответствует резонансной частоте 1496 Гц. Диапазон рабочих частот резонансных ячеек ЗПК составил 1204–2536 Гц. Анализ зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты резонансных ячеек одинакового объема выявил, что коэффициент звукопоглощения равен 0.88 при резонансной частоте 1428 Гц. Диапазон рабочих частот резонансных ячеек ЗПК составил 1168–1720 Гц. Сравнительный анализ результатов численных расчетов с результатами лабораторных исследований выявил, что расхождение по коэффициенту звукопоглощения составляет не более 2–3.5%, по частоте 4–8%.

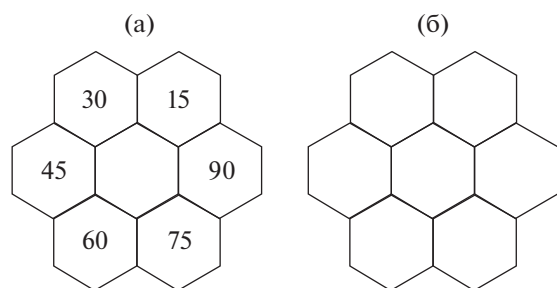


Рис. 11. Общий вид геометрических моделей резонансных ячеек ЗПК призматической формы: (а) – резонансные ячейки разного объема (15/30/45/60/75/90% от базового резонатора), (б) – резонансные ячейки одинакового объема (равномерная ЗПК).

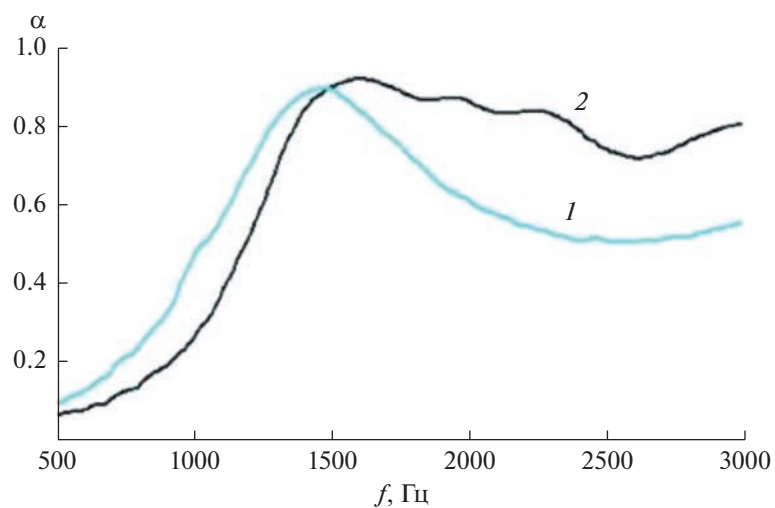


Рис. 12. График зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты, где 1 — равномерная ЗПК, 2 — разновысотная ЗПК.

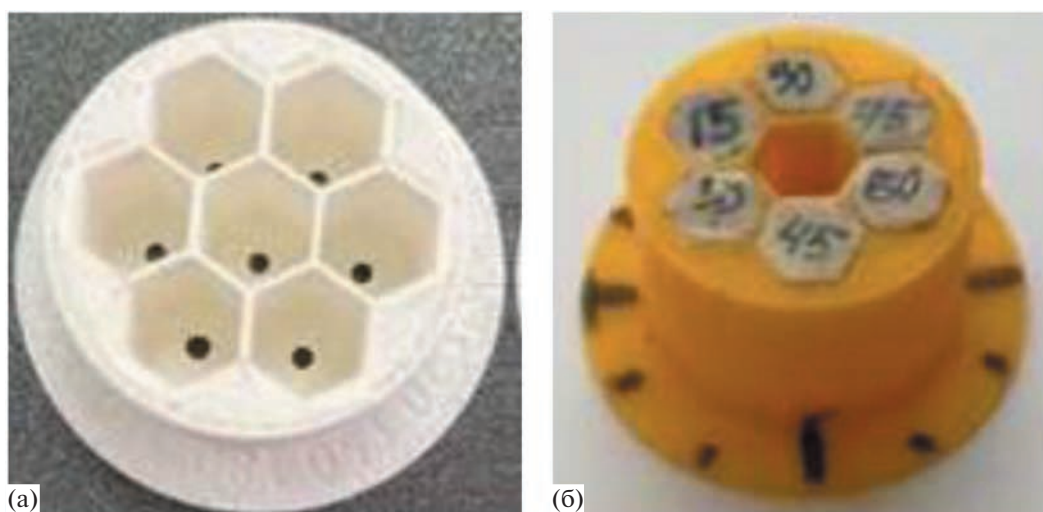


Рис. 13. Образцы ЗПК после печати: (а) — равномерная сотовая ЗПК, (б) — разновысотная ЗПК.

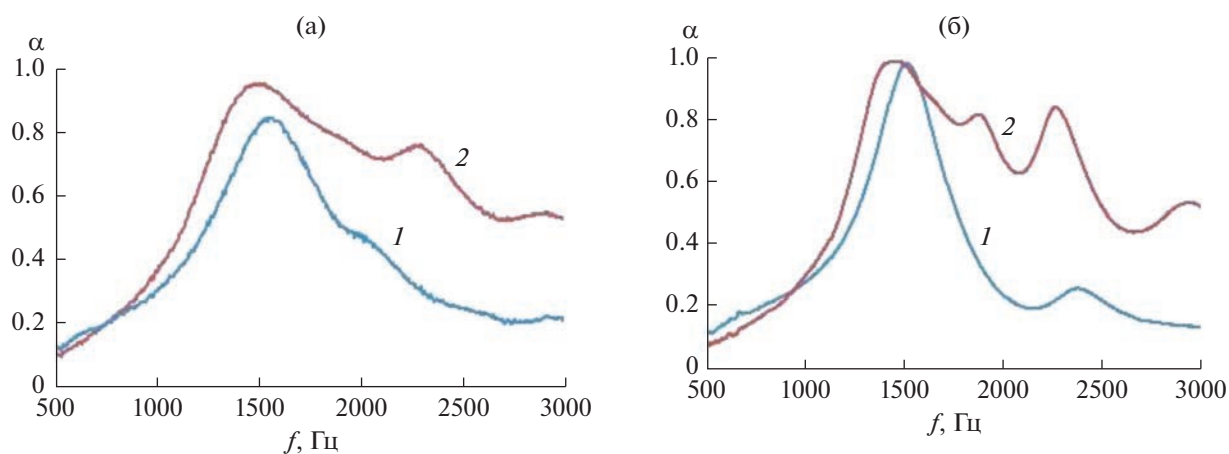


Рис. 14. График зависимости коэффициента звукопоглощения от частоты резонансных ячеек ЗПК: (а) — при нелинейном режиме (130 дБ), (б) — при линейном режиме (100 дБ), где 1 — равномерная ЗПК, 2 — разновысотная ЗПК.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе численно и экспериментально показано влияние формы резонаторов на их акустическую эффективность. На основе математического моделирования процессов распространения звуковой волны в каналах установлено влияние взаимного расположения группы резонаторов различного объема на их общую акустическую эффективность в составе ЗПК (увеличение коэффициента звукопоглощения и расширение диапазона поглощаемых частот). На основе экспериментальных исследований установлена акустическая эффективность комбинированных резонаторов с различным объемом при использовании в составе ЗПК.

По результатам исследований, выполненных в рамках настоящей работы, была разработана широкополосная звукопоглощающая конструкция с заполнителем, содержащая резонаторы различного объема — разновысотная. Проведено сравнение с однослойной равномерной ЗПК. Выявлено, что разработанная конструкция значительно эффективнее однослойной равномерной ЗПК.

Уникальные сочетания резонаторов различной формы позволяют с одной стороны уменьшить взаимовлияние резонаторов на их совместной частоте, а с другой стороны увеличить широкополосность группы резонаторов при уровне звукового давления 100 и 130 дБ.

В настоящий момент проводятся исследования разработанной разновысотной конструкции в канале с потоком для возможности дальнейшего внедрения в авиационную технику.

Исследование выполнено в Пермском национальном исследовательском политехническом университете при поддержке государственного задания (проект No. FSNM-2023-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Захаров А.Г., Аношкин А.Н., Паньков А.А., Писарев П.В. Акустические резонансные характеристики двух- и трехслойных сотовых звукопоглощающих панелей // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. № 46. С. 144–159. <https://doi.org/10.15593/2224-9982/2016.46.08>
- Соболев А.Ф., Ушаков В.Г., Филиппова Р.Д. Звукопоглощающие конструкции гомогенного типа для каналов авиационных двигателей // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 749–759.
- Дубень А.П., Козубская Т.К., Королёв С.И., Маслов В.П., Миронов А.К., Миронова Д.А., Шахпаронов В.М. Исследование акустического течения в горле резонатора // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 1. С. 80–92.
- Mahmud Md.A., Hossain Md.Z., Islam S., Morshed M.M.M. A Comparative Study Between Different Helmholtz Resonator Systems // Acoustique Canadienne. 2016. V. 44. № 4. P. 12–17.
- Xu M.B., Selamet A., Kim H. Dual Helmholtz resonator // Appl. Acoust. 2010. V. 71. P. 822–829.
- Selamet A., Lee I. Helmholtz resonator with extended neck // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113. № 4. P. 1975–1985.
- Аношкин А.Н., Захаров А.Г., Городкова Н.А., Чурсин В.А. Расчетно-экспериментальные исследования резонансных многослойных звукопоглощающих конструкций // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 1. С. 5–20. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.01>
- Pisarev P.V., Anoshkin A.N., Pan'kov A.A. Acoustic resonance in the cylindrical two-chamber cell with the elastic permeable membrane // ISJ Theor. and App. Sci. 2016. V. 44. № 12. P. 55–61.
- Бакланов В.С., Постнов С.С., Постнова Е.А. Расчет резонансных звукопоглощающих конструкций для современных авиационных двигателей // Матем. моделирование. 2007. Т. 19. № 8. С. 22–30.
- Ingard U. On the Theory and Design of Acoustic Resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 55. № 6. P. 1037–1061. <https://doi.org/10.1121/1.1907235>
- Alster M. Improved calculation of resonant frequencies of Helmholtz resonators // J. Sound Vib. 1972. V. 24. № 1. P. 63–85. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(72\)90123-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(72)90123-X)
- Pisarev P.V., Anoshkin A.N., Pan'kov A.A. Effect of neck geometry of resonance cells on noise reduction efficiency in sound-absorbing structures / Ed. by Fomin V. Perm: AIP Conf. Proceedings. 2016. V. 1770. 030119. <https://doi.org/10.1063/1.4964061>
- Selamet A., Radavich P.M., Dickey N.S. and Novak J.M. Circular concentric Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 101. № 1. P. 41–51.
- Selamet A., Dicky N.S., Novak J.M. Theoretical, computational and experimental investigation of Helmholtz resonators with fixed volume: lumped versus distributed analysis // J. Sound Vib. 1995. V. 187. № 2. P. 358–367.
- Соболев А.Ф. Повышение эффективности снижения шума в канале с потоком при наличии звукопоглощающих облицовок // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 3. С. 404–414.
- Соболев А.Ф., Соловьева Н.М., Филиппова Р.Д. Расширение частотной полосы звукопоглощения облицовок силовых установок самолетов // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 1. С. 146–152.
- Соболев А.Ф. Звукопоглощающие конструкции с расширенной полосой затухания для каналов авиационных двигателей // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 4. С. 536–544.
- Патент №179829. Российская Федерация, МПК E04B 1/84. Звукопоглощающая сотовая панель / А.Н. Аношкин, А.А. Паньков, П.В. Писарев, Г.С. Шипунов; патентообладатель А.Н. Аношкин, А.А. Паньков, П.В. Писарев, Г.С. Шипунов. 8л. №2017115461; заявл. 09.02.2016; опубл. 25.05.2018; Бюл. № 15.
- Патент № 2686915 Российская Федерация, МПК B32B 3/12. Звукопоглощающая сотовая панель / А.А. Паньков, А.Н., Аношкин, П.В. Писарев; патентообладатель А.А. Паньков, А.Н. Аношкин,

- П.В. Писарев. 8л. № 2017146121; заявл. 26.12.2017; опубл. 06.05.2019; Бюл. № 13.
20. Патент №2732532 Российская федерация, МПК F02С 7/24, G10К 11/172. Резонансная ячейка для гашения акустических волн / А.А. Паньков, А.Н. Аношкин, П.В. Писарев; патентообладатель ФГБОУ ВО ПНИПУ. 7л. № 2019112286; заявл. 23.04.2019; опубл. 21.09.2020 Бюл. № 27.
 21. Комкин А.И., Миронов М.А., Быков А.И. Поглощение звука резонатором Гельмгольца // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 4. С. 356–363.
 22. Комкин А.И., Быков А.И., Миронов М.А. Инерционная присоединенная длина отверстия при высоких уровнях звукового давления // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 296–301.
 23. Комкин А.И., Быков А.И., Миронов М.А. Акустическое сопротивление отверстия при высоких уровнях звукового давления // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 562–565.
 24. Bykov A.I., Komkin A.I., Mironov M.A. Nonlinear acoustic impedance of orifices // Proc. of the 25-th Int. Congress on Sound and Vibration. Hiroshima, Japan, 8–12 July 2018. P. 1–7.
 25. Melling T.H. The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels // J. Sound Vib. 1973. V. 29. № 1. P. 1–65.
 26. Scarpato A. Linear and nonlinear analysis of the acoustic response of perforated plates traversed by a bias flow // Ph.D. dissertation, Ecole Centrale Paris, 2014. 178 p.
 27. Руденко О.В., Хирных К.Л. Модель резонатора Гельмгольца для поглощения интенсивного звука // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 527–534.
 28. Салливан Дж.У. Моделирование шума выхлопной системы двигателя // Аэродинамический шум в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. С. 233–256.
 29. Терехин А.С. Влияние уровня звукового давления на акустическую эффективность глушителей шума // Труды МВТУ. Вып. 273. М.: Изд-во МВТУ, 1978. С. 68–80.
 30. Энштейн В.Л., Руденко А.Н., Жемуранов А.П. Нелинейное акустическое сопротивление отверстия // Авиационная акустика. Труды ЦАГИ. Вып. 1806. М.: Изд-во ЦАГИ, 1976. С. 74–70.
 31. Bennetta G., Stephens D.B. Resonant mode characterisation of a cylindrical Helmholtz cavity excited by a shear layer // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141. № 1. P. 7–18.
 32. Meissner M. Absorption Properties of Helmholtz Resonator at High Amplitude Incident Sound // Acta Acustica united with Acustica. 2000. V. 86. № 11. P. 985–991.
 33. Wu J., Rudnick I. Measurements of the nonlinear tuning curves of Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1986. V. 80. № 5. P. 1419–1422.
 34. Быков А.И. Исследование акустических характеристик резонаторов Гельмгольца в системах снижения шума: дис. канд. техн. наук. М., 2021. 156 с.
 35. Пальчиковский В.В., Кустов О.Ю., Черепанов И.Е., Храмов И.В. Сравнительные исследования определения акустических характеристик образцов ЗПК в интерферометрах с разным диаметром поперечного сечения канала // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. 2017. Т. 1. С. 188–193.
 36. Elnady T., Bodén H. On the modeling of the acoustic impedance of perforates with flow // AIAA Paper. 2003. № 2003–3304.
 37. Yu J., Ruiz M., Kwan H.W. Validation of Goodrich perforate liner impedance model using NASA Langley test data // AIAA Paper. 2008. № 2008–2930.
 38. Мушин А.Г., Кузнецов В.М., Леонтьев В.Е. Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981. 248 с.
 39. Crandall I. Theory of vibrating systems and sound. New York: D. Van Nostrand & Co. Inc., 1927. 272 с.
 40. Pisarev P.V., Anoshkin A.N. and Merzlyakova N.A. Manufacturing sound-absorbing structures by 3d-printing / Ed by Vorozhtsov A. Tomsk: MATEC Web Conf. 2018. V. 243.
<https://doi.org/10.1051/mateconf/201824300026>

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ. ШУМЫ И ВИБРАЦИИ

УДК 534.83,628.517.2

ОСОБЕННОСТИ УМЕНЬШЕНИЯ УРОВНЯ ЗВУКА ЭКРАНАМИ Т-ОБРАЗНОГО ПРОФИЛЯ

© 2023 г. А. И. Комкин^а, *, Р. Н. Мусаева^а

^аМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская 5, Москва, 105005 Россия

*e-mail: akomkin@mail.ru

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.

После доработки 03.04.2023 г.

Принята к публикации 16.05.2023 г.

Исследованы акустические характеристики экранов Т-образного профиля на основе конечно-элементного моделирования. Установлено, что эффективность уменьшения уровня звука данным экраном связана не только с дифракцией, но также и с интерференцией звука на передней и задней кромках экрана. Показано, что интерференция звука на задней кромке экрана, в отличие от интерференции звука на передней кромке, влияет на звуковое поле только на небольших расстояниях от задней поверхности экрана. Проанализировано влияние на эти процессы частоты звука и геометрических размеров экрана.

Ключевые слова: шумозащитный экран, Т-образный профиль, дифракция, интерференция, моделирование

DOI: 10.31857/S0320791923600233, **EDN:** CAFRCD

ВВЕДЕНИЕ

К числу основных средств защиты от шума относятся акустические экраны. Их используют для защиты как от транспортного шума, так и от шума различного оборудования. Для улучшения эффективности шумозащитных экранов без увеличения их высоты стали предлагать изменения в конструкцию экрана, прежде всего его верхней кромки. Такой подход основывался на том, что наличие на этой кромке двух или более дифрагирующих ребер позволит улучшить шумозащитные свойства экрана. Был проведен значительный объем исследований экранов и их характеристик, в том числе и исследования, посвященные модификации его верхней кромки. Новые конструкции барьеров были впервые предложены Виртом [1], Мзем и Османом [2] и вызвали значительное количество работ, посвященных исследованиям экранов с различными конфигурациями их верхней кромки, например, [3–7]. Обстоятельный обзор публикаций, связанных с историей развития данного направления, представлен в [8, 9].

Существует несколько теоретических методов оценки акустических характеристик экранов, основанных на теории дифракции, которые стали предметом всестороннего обзора Ли и Вонга [10]. Они дают довольно громоздкие выражения даже для простейших конфигураций экранов, что затруднило их широкое применение на практике.

Хотя, например, для случая круглой насадки на верхней кромке экрана было получено аналитическое решение задачи [11–14]. В качестве альтернативы для оценки эффективности экранов в инженерной практике широко применяется эмпирическая формула Маекавы [15], полученная им на основе обширных экспериментальных данных. К настоящему времени эта формула неоднократно корректировалась [10]. Хотя формула Маекавы проста в использовании, она справедлива для случая тонкого, абсолютно жесткого, полубесконечного экрана и потому, как правило, является только грубым инструментом при инженерном проектировании экранов.

Исходя из этого в настоящее время и в ближайшем будущем основными инструментами для анализа характеристик акустических экранов, помимо экспериментального, станут численные методы. Их реализация требует меньше ресурсов, а кроме того, они обладают большими возможностями, связанными, например, с учетом подстилающей поверхности, на которой размещается экран, толщины экрана, свойств материала экрана, конфигурации его верхней кромки. Наиболее распространенным численным методом расчета экранов сложной формы является метод граничных элементов, который начал использоваться с этой целью практически одновременно с появлением такого рода экранов [16]. К настоящему вре-

мени имеется очень много работ, посвященных расчетам экранов этим методом, например, [5, 17, 18]. В [19] проведена верификация аналитических и численных расчетов с экспериментальными результатами. Наряду с методом граничных элементов численные расчеты экранов проводят и методом конечных элементов. Сравнение вычислительной эффективности этих двух методов при решении акустических задач приведено в [20]. Применительно к расчету экранов показано [21], что оба метода приводят практически к одинаковым результатам. Примеры использования метода конечных элементов для решения такого рода задач представлены в [22, 23].

Из всего многообразия экранов со сложной конфигураций верхней кромки одним из наиболее популярных объектов исследования являются экраны Т-образного профиля [24–32]. В этих работах исследовался широкий круг вопросов, связанных с определением влияния на эффективность таких экранов конфигурации верхней кромки, наличия на ней звукопоглощающего материала. В [31] даже исследовались Т-образные экраны с размещенной на них системой активного гашения шума. Кроме того, в этих исследованиях оценивалась зависимость эффективности такого экрана от частоты звука и расположения расчетной точки за экраном. Вместе с тем, следует отметить, что при этом практически не рассматривались вопросы, связанные с физической стороной дела и посвященные механизмам формирования звукового поля за экраном Т-образного профиля. Исключение составляет, пожалуй, работа [30], в которой на основе проведенных численных расчетов делается вывод, что на эффективность таких экранов оказывает влияние и интерференция звука. В этой работе путем численных расчетов была проверена гипотеза об эквивалентности Т-образного экрана прямому экрану эквивалентной толщины и установлена ее неправомерность. Спектр звукового давления в расчетной точке за экраном оказался совсем не таким плавным, как у толстого прямого экрана, а гораздо более неравномерным. Таким образом, требуется более детальное исследование акустических процессов, происходящих в такого рода экранах, как сделано, например, в [33], где исследовался экран с негладкой передней поверхностью.

Данная работа является дальнейшим развитием исследований экранов с насадками на верхней кромке [34] и посвящена выявлению на основе конечно-элементного моделирования механизмов уменьшения уровня звука экраном Т-образного профиля.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ЭКРАНА

Для исследования влияния профиля экрана на его акустическую эффективность и выявления закономерностей дифракции звука на таком экране было проведено численное моделирование экрана в программном пакете COMSOL Multiphysics. При этом использовалась двумерная (2D) конечно-элементная модель экрана. Расчетная область ограничивалась окружностью радиусом 40 м. Граничные условия на окружности, ограничивающей расчетную область, соответствовали согласованной нагрузке с импедансом $Z = \rho c = 411.6$ Па с/м, где ρ – плотность воздуха, c – скорость звука в воздухе. В центре окружности, определяющей расчетную область, располагался точечный источник звука, который с учетом 2D моделирования являлся, по сути, линейным источником и характеризовался интенсивностью I (Вт/м). В конечно-элементной модели использовалось неравномерное разбиение на тетраэдры. При этом для обеспечения приемлемой точности вычислений на длине волны, соответствующей верхней граничной частоте 1000 Гц рассматриваемого частотного диапазона, укладывалось четыре конечных элемента максимального размера.

При моделировании рассматривались две конфигурации экрана: прямой экран и экран с Т-образным профилем (рис. 1). Экраны рассматривались тонкими и абсолютно жесткими. Кроме того, для упрощения последующего анализа наличие подстилающей поверхности, на которую опирается экран, не учитывалось, т.е. экраны рассматривались полубесконечными. Экраны определялись эффективной высотой h , а Т-образный экран характеризовался еще и размером l . Положение верхней кромки экрана относительно источника звука определялось углом α . Эффективность снижения шума Т-образным экраном оценивалась по отношению к прямому экрану с помощью такого показателя как вносимые потери IL , которые при этом определялись соотношением:

$$IL = L_1 - L_T \text{ [дБ]},$$

где L_1 и L_T – уровни звукового давления в расчетной точке соответственно с прямым и Т-образным экранами.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Одним из достоинств исследования акустики экранов численными методами является возможность получения разнообразной информации о характеристиках звукового поля в окрестности экрана, например картины распределения звукового давления в рассматриваемой расчетной области, которые могут дать наглядное представле-

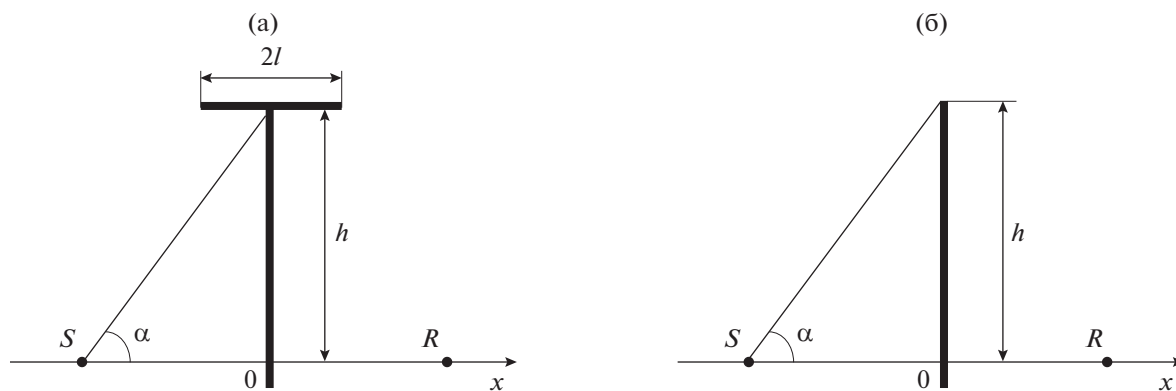


Рис. 1. Конфигурации (а) – Т-образного и (б) – прямого экранов.

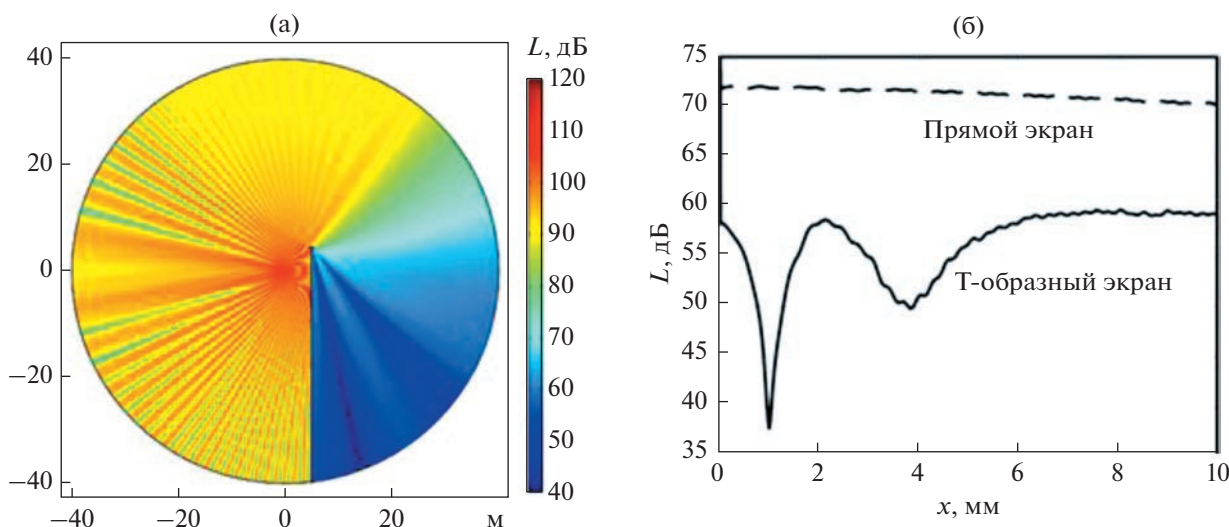


Рис. 2. (а) – Картина распределения звукового давления в расчетной области с экраном и (б) – зависимость звукового давления за экраном вдоль продольной оси x на частоте 800 Гц.

ние о происходящих в ней физических процессах. Такого рода расчеты показывают [34], что независимо от вида экрана в пространстве перед экраном наблюдается сложная интерференционная картина, связанная с отражением падающей на переднюю плоскость экрана звуковой волны. Напротив, картина распределения звукового давления в пространстве за экраном существенно зависит от вида экрана. Для прямого экрана без насадки в этой зоне наблюдается плавное снижение звукового давления по мере приближения к задней поверхности экрана, связанное с дифракцией звука на его верхней кромке. Для экрана Т-образного профиля распределение звукового давления за экраном более сложное, связанное с наличием узких секторов с низким уровнем звукового давления (рис. 2а), что также может быть обусловлено процессом интерференции. Эти особенности наглядно иллюстрируются на рис. 2б, где для

сравнения приведены графики изменения звукового давления за экраном вдоль продольной оси x для прямого экрана и экрана Т-образного профиля.

Чтобы выявить особенности дифракции звука на экране Т-образного профиля, были рассчитаны вносимые потери IL для такого экрана. Так как эти вносимые потери вычисляются по отношению к прямому экрану, то фактически они определяют, насколько изменение формы экрана повышает его эффективность. На рис. 3 для угла $\alpha = 40^\circ$ представлены зависимости IL от расстояния x от расчетной точки R до задней поверхности экрана. Видно, что с изменением расстояния x эффективность насадки может претерпевать существенные изменения. На некоторых расстояниях имеет место значительный рост (локальный пик) эффективности. Положение этого пика зависит от частоты звука. С ростом частоты форма кривой эффективности усложняется и может со-

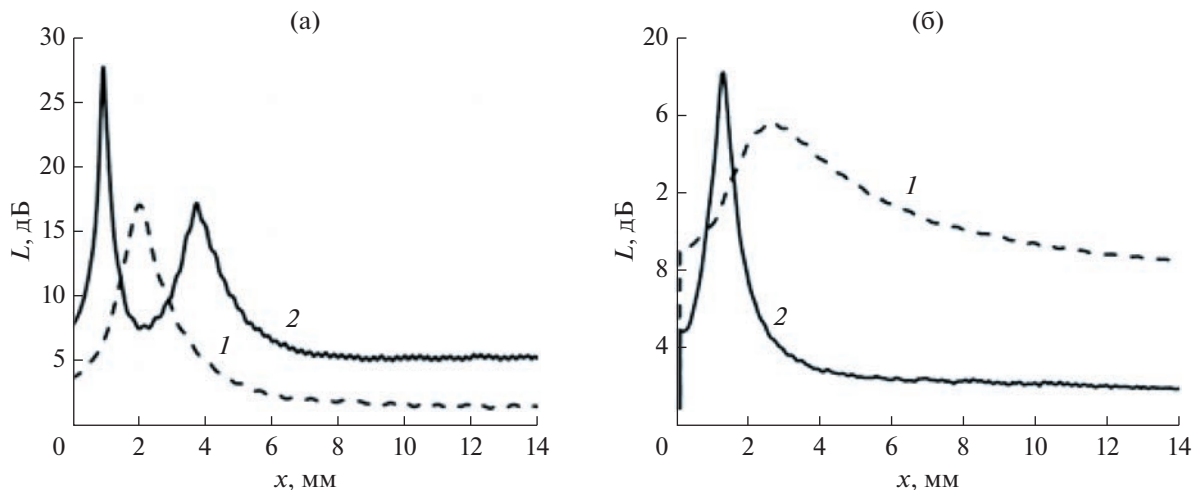


Рис. 3. Зависимость эффективности Т-образного экрана от положения расчетной точки при $\alpha = 40^\circ$ для экранов с (а) — $h = 4.5$ м, $l = 0.5$ м и (б) — $h = 2.25$ м, $l = 0.25$ м на частотах 400 (1) и 800 Гц (2).

держат уже два локальных экстремума. Характерной особенностью такого рода кривых является то, что наблюдаемые экстремумы сосредоточены в ближней области за экраном, при $x < 8$ м. При больших x кривые эффективности выравниваются и практически перестают зависеть от x . Следует отметить, что установившиеся значения вносимых потерь на больших расстояниях от экрана зависят как от частоты, так и от геометрических размеров экрана. Эти зависимости не так просты и очевидны, как для прямого экрана, снижение звукового давления за которым возрастает с увеличением высоты экрана и частоты звуковой волны. Для Т-образного экрана все оказывается сложнее. Так, если для экрана с $h = 4.5$ м и $l = 0.5$ м (рис. 3а) установившееся значение IL увеличивается с ростом частоты, то для экрана с вдвое меньшими значениями этих параметров (рис. 3б) все происходит наоборот: на низкой частоте эффективность насадки больше, чем для высокой. Отметим, что отношение l/h в этих двух конфигурациях экранов было одинаковым: $l/h = 0.1$.

Далее были рассчитаны установившиеся значения вносимых потерь IL на больших расстояниях от экрана ($x = 15$ м), и получены зависимости этих значений от угла α , определяющего положение экрана относительно источника звука. Для двух рассмотренных выше конфигураций Т-образного экрана такие зависимости представлены на рис. 4. Как видим, эти зависимости в значительной степени зависят как от геометрических параметров экрана, так и от частоты звука. Для первой конфигурации экрана (рис. 4а) на частоте 400 Гц вносимые потери IL плавно возрастают с увеличением угла α , а на вдвое большей частоте IL изменяются более сложным образом: сначала IL также плавно возрастают, а затем, до-

стигая некоторого максимума, начинают снижаться. Но в целом IL на более высокой частоте значительно больше, чем на низкой. Для второй конфигурации экрана картина кардинально меняется (рис. 4б). Здесь уже плавное возрастание IL с ростом α происходит на частоте 800 Гц, а на вдвое меньшей частоте зависимость IL от угла α не столь существенна, и IL максимальны при $\alpha = 45^\circ$. В целом, для этой конфигурации, наоборот, вносимые потери на низкой частоте выше, чем на высокой.

Особенности уменьшения уровня звука Т-образным экраном можно выявить, учитывая, что такой экран можно рассматривать как совокупность двух Г-образных экранов, один из которых развернут по направлению к источнику шума. На рис. 5 представлены зависимости IL от координаты расчетной точки x для таких экранов с $h = 4.5$ м и $l = 0.5$ м при $\alpha = 70^\circ$. Как и следовало ожидать, наибольшей эффективностью обладает Т-образный экран. Эффективность развернутого к источнику звука Г-образного экрана на больших расстояниях x приближается к эффективности Т-образного экрана, но не содержит характерных для последнего пиков эффективности на малых расстояниях от экрана. Отсюда следует, что если нас, в первую очередь, интересует эффективность экрана на больших расстояниях от его задней поверхности, то в этом случае вместо Т-образного экрана без потери эффективности можно использовать развернутый к источнику Г-образный экран. В противоположность этому, эффективность обращенной к расчетной точке Г-образного экрана имеет те же локальные пики эффективности на малых расстояниях, как и Т-образный экран, но на больших расстояниях его эффективность заметно ниже, чем у двух дру-

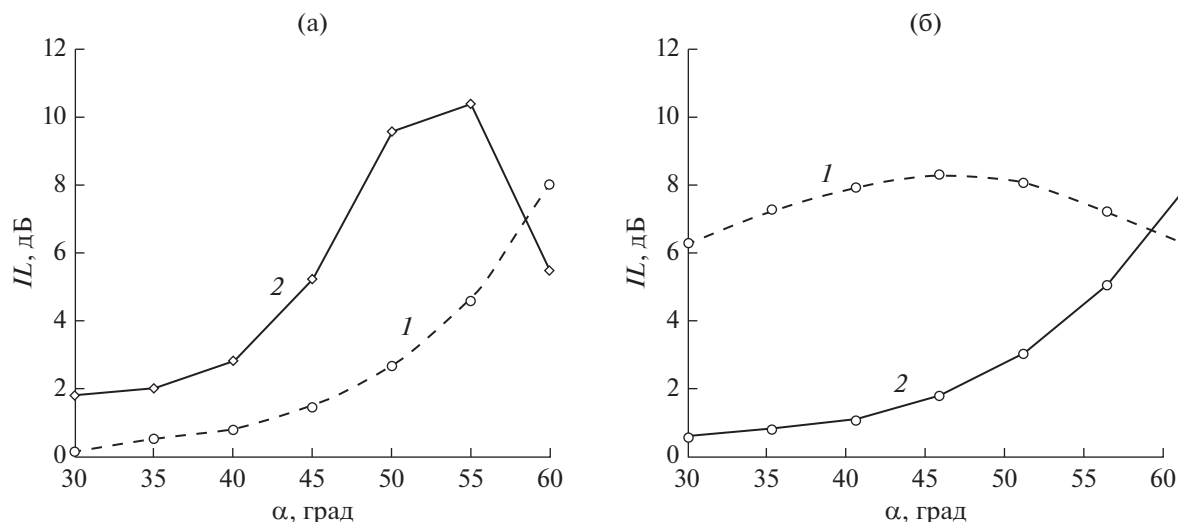


Рис. 4. Зависимость эффективности Т-образного экрана от угла α для экранов с (а) — $h = 5$ м, $l = 0.5$ м и (б) — $h = 2.25$ м, $l = 0.25$ м на частотах 400 (1) и 800 Гц (2).

гих экранов. Следовательно, при небольшом удалении расчетной точки эффективность Т-образного экрана определяется физическими процессами, происходящими на его задней кромке. Появляющиеся здесь локальные пики эффективности обусловлены, по-видимому, тем, что в расчетной точке происходит интерференция звука, который непосредственно после дифракции на задней кромке экрана попадает в расчетную точку, со звуком, который после дифракции сначала отражается от задней поверхности экрана и только потом попадает в расчетную точку. Наоборот, на большом удалении расчетной точки от экрана эффективность Т-образного экрана определяется процессами, происходящими на его передней кромке, обращенной к источнику звука. То обстоятельство, что эта эффективность помимо частоты существенно зависит от угла α , и эта зависимость может содержать некоторые локальные максимумы (рис. 4), позволяет предположить, что при этом также имеет место интерференция звука, но уже на передней кромке Т-образного экрана.

Для того чтобы подтвердить справедливость этого предположения, были проведены дополнительные расчеты для Г-образного экрана, обращенного к источнику звука. Определялись вносимые потери IL такого экрана как функции угла α при различных значениях l и на различных частотах f , когда расчетная точка соответствовала $x = 15$ м. Оказалось, что получаемые при этом графики зависимостей $IL(\alpha)$ практически совпадали при одинаковых значениях безразмерного числа kl , где k — волновое число, $k = 2\pi f/c$. Это позволило перестроить полученные результаты расчетов, получив для различных углов α графические за-

висимости $IL(kl)$. Такие графики для рассматриваемого экрана при двух углах α представлены на рис. 6. Они показывают, что эффективность такого экрана является сложной функцией kl с ярко выраженными максимумами и минимумами.

Положение максимумов на графиках зависит от угла α , так что с уменьшением α эти максимумы смещаются влево, соответствуя меньшим значениям kl . Вместе с тем, для каждого α значения kl , соответствующие максимумам вносимых потерь IL , связаны рядом нечетных чисел. Так, значение kl для первого максимума отличается от значения kl для второго максимума в три раза, значение kl для третьего максимума больше зна-

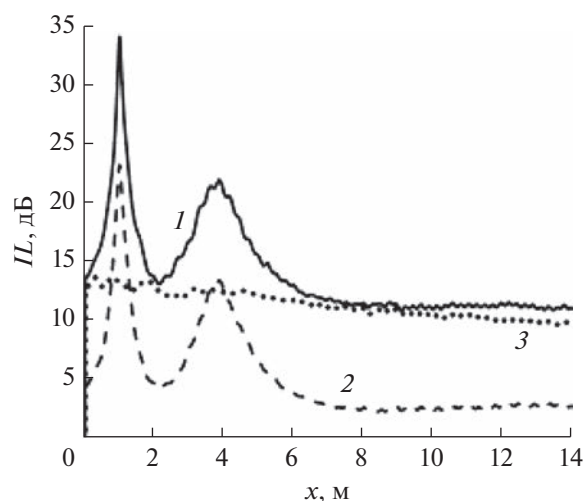


Рис. 5. Эффективность Т-образного (1), Г-образного (2) и развернутого Г-образного (3) экранов при $\alpha = 70^\circ$ на частоте 800 Гц.

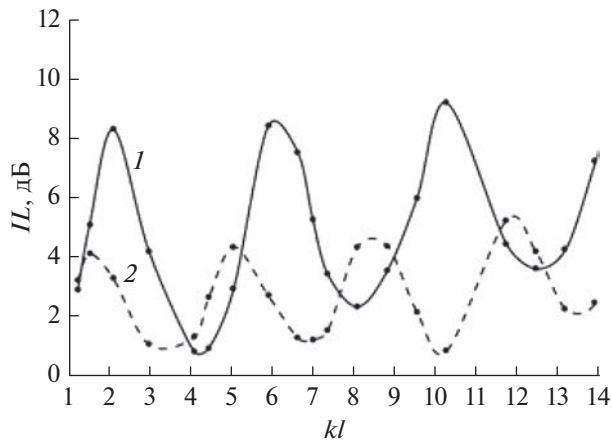


Рис. 6. Эффективность развернутого Г-образного экрана как функция kl при $\alpha = 40^\circ$ (1) и $\alpha = 20^\circ$ (2).

чения kl для первого максимума в пять раз и т.д. Например, как следует из рис. 6, при $\alpha = 40^\circ$ первые три максимума IL соответствуют значениям kl равным 2, 6 и 10, а при $\alpha = 20^\circ$ максимумы IL в первом приближении равны 1.7, 5, 8.5 и 11.9.

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для анализа формирования ближнего звукового поля за экраном, которое по нашим предположениям обусловлено проявлением в этой области интерференционных процессов, была рассмотрена модель Г-образного экрана, представленная на рис. 7. В этой модели не учитывается положение истинного источника звука, которое мы при проведении численных расчетов определяли углом α . В этой модели точечный источник звука S расположен на задней кромке экрана, а звуковое давление в расчетной точке является суперпозицией волн, одна из которых, p_1 , приходит по прямому лучу от источника S , а вторая, p_2 , по лучу, отраженному от поверхности экрана, что эквивалентно наличию мнимого источника S' . Правомерность такого подхода обусловлена тем, что, как показывают приведенные выше результаты численных расчетов (рис. 3а, 5), положение пиков вносимых потерь IL в малой степени зависит от угла α , хотя зависимость их амплитуды от угла α значительна. Нас в последующем качественном анализе и будет интересовать прежде всего положение пиков в ближней зоне за экраном, а не их амплитуда.

Если предположить, что поверхность экрана является абсолютно жесткой, то звуковое давление в расчетной точке в такой модели определится выражением:

$$P_\Sigma = P_1 + P_2 = \frac{A}{r_1} e^{-ikr_1} + \frac{A}{r_2} e^{-ikr_2}, \quad (1)$$

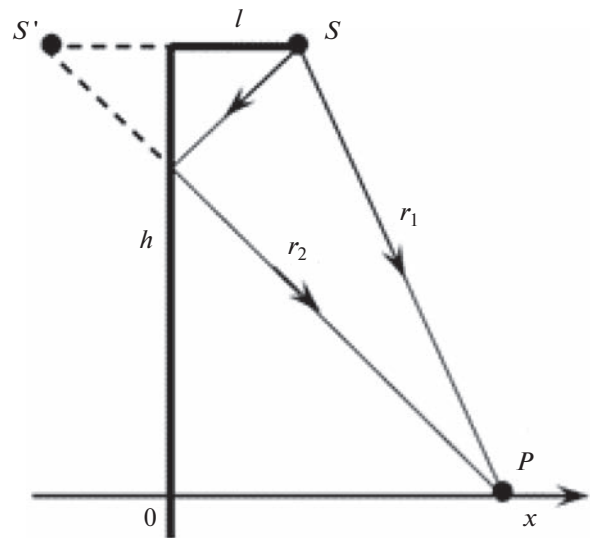


Рис. 7. Расчетная схема для оценки интерференции звуковых волн в области за экраном.

где A — некоторая постоянная, определяющая интенсивность точечного источника, k — волновое число, $r_1 = [h^2 + (x - l)^2]^{1/2}$, $r_2 = [h^2 + (x + l)^2]^{1/2}$.

Интерференция в расчетной точке будет определяться как отношением путей r_1/r_2 , так и их разностью $\Delta r = r_2 - r_1$. Ее влияние на звуковое поле в расчетной точке определим по аналогии с вносимыми потерями в логарифмических единицах соотношением:

$$\Delta L = 10 \lg(|P_1|^2 / |P_\Sigma|^2) = -10 \lg[1 + 2(r_1/r_2) \cos(k\Delta r) + (r_1/r_2)^2]. \quad (2)$$

На рис. 8 представлена зависимость расчетного параметра ΔL от расстояния до расчетной точки, полученная для экрана с $h = 4.5$ м и $l = 0.5$ м. Сравнение представленных на этом рисунке данных с результатами численных расчетов (рис. 3а) показывает их хорошее соответствие друг другу, что в первую очередь относится к значениям координат x , определяющих пиковые (максимальные) значения IL и ΔL , которые на обоих графиках практически совпадают. Это подтверждает сделанное выше предположение о том, что наблюдаемые на приведенных графиках значительные колебания вносимых потерь IL в ближней зоне за Т-образным экраном обусловлены интерференцией звука в этой области.

Далее с помощью модели экрана, представленной на рис. 9, было рассмотрено формирование звукового поля перед экраном, у его передней кромки, за счет наличия в этой области интерференционных процессов. При этом, как и ранее, положение точечного источника звука S характеризуется углом α , а расчетная точка P располагается у передней кромки экрана. Звуковое давле-

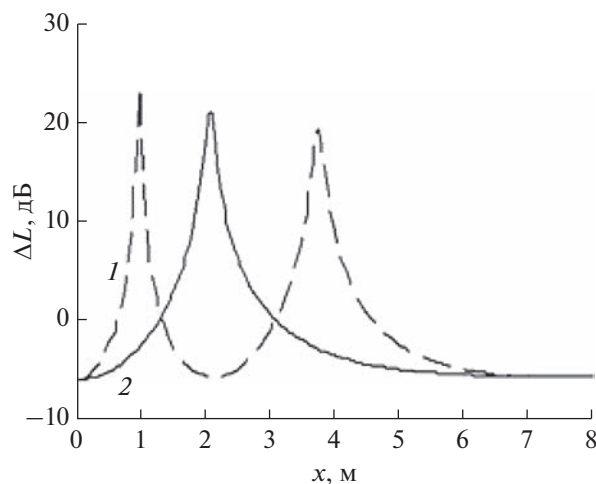


Рис. 8. Изменение уровня звукового давления за экраном из-за интерференции звука на частоте 400 (1) и 800 Гц (2).

ние в расчетной точке P является суперпозицией двух волн, одна из которых приходит туда по прямому лучу от источника звука S , а вторая по лучу, отраженному от передней поверхности экрана. Для описания звукового поля здесь также могут использоваться формулы (1)–(2) с тем отличием, что входящие в эти формулы величины r_1 и r_2 определяются выражениями:

$$r_1 = \left[h^2 + (h/\operatorname{tg}\alpha - l)^2 \right]^{1/2}, \quad r_2 = r_{21} + r_{22},$$

$$r_{21} = \left[(h/\operatorname{tg}\alpha)^2 + (h - h\operatorname{tg}\varphi)^2 \right]^{1/2},$$

$$r_{22} = l(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = (1/\operatorname{tg}\alpha + l/h)^{-1}.$$

На рис. 10 представлена зависимость ΔL от безразмерного параметра kl , полученная при тех же расчетных параметрах, что и при численном моделировании (рис. 6). Сравнение результатов аналитических и численных расчетов показывает, что в обоих случаях характер кривых и положения максимумов на них совпадают. Одинаковы и тенденции в зависимости этих кривых от угла α : с увеличением угла α положения максимумов смещаются к более высоким значениям kl , так что сами графические зависимости становятся более растянутыми.

Заметим, что в предельном случае, когда $\alpha \rightarrow 0$, величина $\Delta r \rightarrow 2l$, а отношение $(r_1/r_2) \rightarrow 1$. Тогда, как следует из (2), появление максимумов функции $\Delta L(kl)$ соответствует условию $\cos(2kl) = -1$, которое приводится к виду: $kl = (2n + 1)\pi/2$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, первый максимум в этом предельном случае соответствует $kl = \pi/2$, а последующие максимумы определяются рядом нечетных чисел, что согласуется с данными, представленными на рис. 6 и 10.

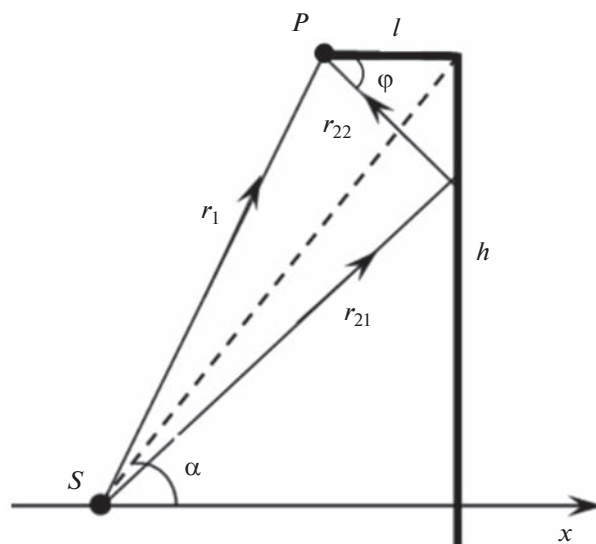


Рис. 9. Расчетная схема для оценки интерференции звуковых волн в области перед экраном.

Конечно, имеют место и отличия в результатах численных и аналитических расчетов. Так, численные расчеты показывают, что с увеличением угла α существенно возрастает и размах колебаний функции $IL(kl)$, а также то, что имеется некоторый тренд возрастания среднего значения вносимых потерь с ростом kl . Очевидно, что эти эффекты обусловлены наличием дифракции звука на Т-образном экране, что не учитывается в рассмотренной простой аналитической модели. В целом, проведенный анализ позволяет сделать заключение, что наблюдаемая при расчетах существенная зависимость установившихся значений вносимых потерь IL в дальней зоне за Т-образным экраном от угла α и параметра kl обусловлена наличием интерференции звука на передней кромке этого экрана.

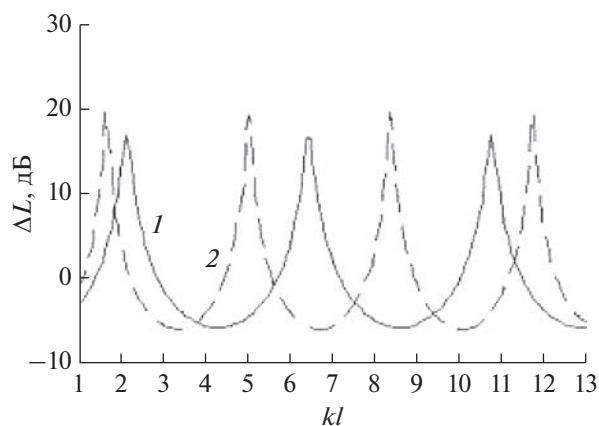


Рис. 10. Изменение уровня звукового давления на передней кромке экрана при $\alpha = 40^\circ$ (1) и $\alpha = 20^\circ$ (2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное моделирование Т-образного экрана показало, что для такого экрана помимо дифракционных процессов существенное значение имеют и процессы интерференции звука, протекающие в пространстве как перед экраном, так и за экраном. При этом пространство за экраном можно разделить на две зоны. В ближней зоне, ограниченной расстоянием порядка 8 м от задней поверхности экрана, существенное значение имеет интерференция звука на задней кромке экрана, что приводит к появлению в этой зоне локальных пиков эффективности экрана. Положение этих пиков является функцией координаты x , существенно зависит от частоты звука и геометрических параметров Т-образного экрана, но практически не зависит от положения источника звука относительно экрана. В дальней зоне, при расстояниях от задней поверхности экрана больших 8 м, эффективность Т-образного экрана заданной конфигурации для данной частоты звука остается практически постоянной, не зависящей от координаты x . Вместе с тем значение этой постоянной существенно зависит от частоты звука, конфигурации экрана, а также положения источника звука. Показано, что такие вариации установившегося значения эффективности экрана в дальней зоне являются периодической функцией безразмерного параметра kl . Они являются следствием интерференции звука на передней кромке Т-образного экрана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wirt L.S. The control of diffracted sound by means of thnadners (shaped noise barriers) // *Acustica*. 1979. V. 42. № 2. P. 73–88.
2. May D.N., Osman M.M. Highway noise barriers-new shapes // *J. Sound Vib.* 1980. V. 71. № 1. P. 73–101.
3. Cohn L.F., Harris R.A., Rolfer R.L., Duncan D.L., Woosley R.L. Special noise barrier // *Transportation research record*. 1993. V. 1416. P. 69–74.
4. Watts G.R., Crombie D.H., Hothersall D.C. Acoustic performance of new designs of traffic noise barriers: Full scale tests // *J. Sound Vib.* 1994. V. 177. № 3. P. 289–305.
5. Fujiwara K., Hothersall D.C., Kim Ch. Noise barriers with reactive surfaces // *Appl. Acoust.* 1998. V. 53. № 4. P. 255–272.
6. Ishizuka T., Fujiwara K. Performance of sound barriers with various edge shapes and acoustical conditions // *Appl. Acoust.* 2004. V. 65. № 2. P. 125–141.
7. Okubo T., Yamamoto K. Simple prediction method for sound propagation behind edge-modified barriers // *Acoust. Sci. & Tech.* 2007. V. 28. № 1. P. 7–15.
8. Samuels S., Ancich E. Recent developments in the design and performance of road traffic noise barriers // *Acoust. Australia*. 2001. V. 29. № 2. P. 73–78.
9. Ekici I., Bougdah H. A review of research on environmental sound barriers // *Build. Acoust.* 2003. V. 10. № 4. P. 289–323.
10. Li K.M., Wong H.Y. A review of commonly used analytical and empirical formulae for predicting sound diffracted by a thin screen // *Appl. Acoust.* 2005. V. 166. № 1. P. 45–76.
11. Fujiwara K., Furuta N. Sound shielding efficiency of a barrier with a cylinder at the edge // *Noise Control Eng. J.* 1991. V. 37. № 1. P. 5–11.
12. Mozer M., Volz R. Improvement of sound barriers using headpieces with finite acoustic impedance // *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. V. 106. № 6. P. 3049–3060.
13. Миронов М.А., Урусовский И.А. Затухающие волны в тени цилиндра // *Акуст. журн.* 2002. Т. 48. № 5. С. 661–665.
14. Урусовский И.А. Дифракция звука на экране с веерной насадкой // *Акуст. журн.* 2013. Т. 59. № 1. С. 86–95.
15. Maekawa Z. Noise reduction by screens // *Appl. Acoust.* 1968. V. 1. № 3. P. 157–173.
16. Sezec R. Diffraction of sound around barriers: use of the boundary elements technique // *J. Sound Vib.* 1980. V. 73. № 2. P. 195–209.
17. Hothersall D.C., Chandler-Wilde S.N., Hajmirzae M.N. Efficiency of single noise barriers // *J. Sound Vib.* 1991. V. 146. № 2. P. 303–323.
18. Egan C.A., Chalekwa V., Oldham D.J. An investigation of the use of top edge treatments to enhance the performance of a noise barrier using the boundary element method // *Proc. ICSV13*. 2006. Vienna, Austria.
19. Gerges S.N.Y., Calza A.J. Acoustic barriers: Analytical methods, Boundary element method and experimental verification // *Build. Acoust.* 2002. V. 9. № 3. P. 167–190.
20. Bolejko R., Dobrucki A. FEM and BEM computing costs for acoustical problems // *Arch. Acoust.* 2006. V. 31. № 2. P. 193–212.
21. Fard S.M.B., Kessissoglou N., Samuels S., Burgess M. Numerical study of noise barrier designs // *Proc. Acoust.* 2013. Victor Harbor, Australia.
22. Kulikina V., Komkin A. Study of acoustic characteristics of noise barriers // *MATEC Web of Conf. ASO-2020*. V. 320. № 00030.
23. Комкин А.И., Назаров Г.М. Особенности дифракции звука на звукопоглощающем экране // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 3. С. 303–307.
24. Hajek J.J., Blaney C.T. Evaluation of T-profile noise barriers // *Transp. Research Record*, 1984. V. 983. P. 8–17.
25. Hothersall D.C., Crombie D.H., Chandler-Wilde S.N. The performance of T-profile and associated noise barriers // *Appl. Acoust.* 1991. V. 32. P. 269–287.
26. Hasebe M. Sound reduction by a T-profile noise barrier // *J. Acoust. Soc. Japan. (E)*. 1995. V. 16. № 3. P. 173–179.
27. Defrance J., Jean P. Integration of the efficiency of noise barrier caps in a 3D ray tracing method. Case of a

- T-shaped diffracting device // *Appl. Acoust.* 2003. V. 64. P. 765–780.
28. *Monazzam M., Lam Y.* Performance of T-shape barriers with top surface covered with absorptive quadratic residue diffusers // *Appl. Acoust.* 2008. V. 69. P. 93–109.
29. *Oldman D., Egan C.* A parametric investigation of the performance of T-profiled highway noise barriers and the identification of a potential predictive approach // *Appl. Acoust.* 2011. V. 72. № 11. P. 803–813.
30. *Okubo T., Yamamoto K.* Equivalence in diffraction-reducing efficiency between T-profile and thick barrier against road traffic noise // *Acoust. Sci. & Tech.* 2013. V. 34. № 4. P. 277–283.
31. *Fan R., Su Z., Cheng L.* Modeling, analysis, and validation of an active T-shaped noise barrier // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 134. № 3. P. 1990–2003.
32. *Monazzam M.R., Abbas M., Yazdanirad S.* Performance Evaluation of T-Shaped Noise Barriers Covered with Oblique Diffusers Using Boundary Element Method // *Arch. Acoust.* 2019. V. 44. № 3. P. 521–531.
33. *Yang C., Pan J., Cheng L.* A mechanism study of sound wave-trapping barriers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 134. № 3. P. 1961–1969.
34. *Комкин А.И., Мусаева Р.Н.* Моделирование акустических экранов с различной конфигурацией верхней кромки // *Сб. трудов XXXIV сессии РАО. М.: ГЕОС, 2022. С. 1124–1128.*

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 612.85

ОЦЕНКА ТРЕКОВ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ РЕЧЕВОГО ТРАКТА

© 2023 г. А. С. Леонов^а, В. Н. Сорокин^{б, *}

^аНациональный исследовательский ядерный университет “МИФИ”,
Каширское ш. 31, Москва, 115409 Россия

^бИнститут проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН,
Большой Каретный пер. 19, стр. 1, Москва, 127051 Россия

*e-mail: vns@iitp.ru

Поступила в редакцию 23.01.2023 г.

После доработки 23.01.2023 г.

Принята к публикации 18.05.2023 г.

Предлагается новый метод оценки треков формантных частот речевого тракта для произвольных речевых сегментов. Метод использует отношение двух преобразований Фурье речевого сигнала со специальными окнами экспоненциального типа, зависящими от некоторого параметра. Это отношение используется для определенных моментов времени и рассматривается как функция частоты и параметра. Анализируя для нескольких значений параметра распределение точек минимума (по частоте) для фазы этого отношения и/или аналогичное распределение точек экстремума для его амплитуды, можно оценить формантные частоты по пикам этих распределений. Представлено математическое исследование, обосновывающее такой подход. Проведены серии численных экспериментов по обработке синтетических и реальных речевых сигналов, подтвердившие работоспособность предложенного метода оценки формант. В частности, в экспериментах с синтезированными гласными было установлено, что погрешность оценки их резонансных частот мала и устойчива по отношению к аддитивным шумам вплоть до отношения сигнал/шум +5 дБ. Для реальной речи метод позволяет вычислить треки формантных частот как для звуков с голосовым возбуждением, так и для глухих фрикативных, аспиративных взрывов и шепотной речи.

Ключевые слова: анализ речевого сигнала, формантные частоты, экстремумы действительной и мнимой компонент спектра

DOI: 10.31857/S0320791923600749, **EDN:** CPWOFD

1. ВВЕДЕНИЕ

Резонансные частоты речевого тракта содержат информацию, необходимую для распознавания фонетических элементов речи, определения диалекта и акцента носителя иностранного языка. Распознавание возраста, пола и личности диктора, его эмоционального и психофизического состояния также в значительной степени опирается на анализ резонансных частот. Роль резонансных частот при распознавании пола диктора особенно велика, если частота основного тона его речи лежит в области пересечения распределений частот основного тона голосов мужчин и женщин.

Резонансные частоты определяются длиной и формой речевого тракта, положением небной занавески, площадью голосовой щели и податливостью стенок тракта. На динамику резонансных частот влияют механические параметры артикуляторных органов (масса и упругость присоединенных тканей), свойства управляющих мышц и характеристики системы управления артикуляцией. Поэтому резонансные частоты служат ос-

новным источником информации при решении обратных задач определения формы речевого тракта, положений артикуляторов и команд управления артикуляторами.

На звуках с голосовым возбуждением эти частоты целесообразно искать синхронно с периодом основного тона на интервалах закрытой голосовой щели. Резонансы проявляются в виде пиков в амплитудно-частотном спектре речевого сегмента — формант, частота которых близка к резонансным частотам речевого тракта.

Форманты наблюдаются не только в спектрах звуков с голосовым возбуждением, но и в спектрах глухих фрикативных, а также в спектрах так называемого взрыва — участка речевого сигнала после раскрытия смычки взрывных звуков /*n, m, k, b, d, g*/. Частота формант взрыва в некоторой степени определяет место артикуляции (положение смычки в речевом тракте) взрывных звуков [1]. Но в слитном потоке речи этой информации недостаточно для распознавания таких звуков. Необходимо использовать еще и резонансные ча-

стоты непосредственно перед смычкой, а также учитывать их динамику до и после смычки. Наиболее надежно место артикуляции взрывных находится путем решения обратной задачи относительно площади поперечного сечения речевого тракта по резонансным частотам [2, 3].

Вследствие важной роли резонансных частот в процессах речеобразования в речевых исследованиях было разработано множество методов формантного анализа речевых сигналов, прежде всего, в спектрально-временной области. Обзор и подробный анализ методов определения резонансных частот в спектрально-временной области даны в [3]. Несмотря на очевидную связь между резонансными частотами и частотами пиков амплитудно-частотного спектра, устойчивость и точность определения резонансных частот в большинстве таких методов оказались неудовлетворительными из-за влияния разных факторов (нулей спектра, слияния пиков, присутствия ложных пиков, зависимости от частоты основного тона, различных помех и реверберации помещения). Например, в работах [4–6] исследовался метод мгновенной частоты, который использует оценку интервалов времени между нулями сигналов на выходе гребенки фильтров или их первых и вторых производных по времени. Однако, некоторые варианты этого метода иногда приводят к неправдоподобным результатам, например, к отрицательным значениям формант [7]. Другой метод рассмотрен в [8, 9]. Он использует полюса передаточной функции речевого тракта и позволяет оценить форманты по коэффициентам линейного предсказания. При этом качество получаемых оценок существенно зависит от уровня шумов, особенно в низкочастотной области. Несколько более устойчивым оказался автокорреляционный анализ в частотно-временной области [5].

Можно дать и общую характеристику качества рассмотренных выше подходов к определению формант: ни один из известных методов или их сочетание не гарантируют устойчивости к помехам и погрешность ниже 10% даже для синтезированных сигналов с известными параметрами. Наибольшие трудности при анализе формант реального речевого сигнала связаны с различными типами неустойчивости, которые усугубляются объективно существующими скачками в треках формантных частот.

Альтернативный подход к поиску резонансных частот, связанный с анализом свойств фазовой компоненты комплексного спектра речевого сигнала, был предложен в [10–12]. Это направление исследований развивается в предлагаемой статье и позволяет создать новый метод оценки треков формантных частот, обладающий определенными преимуществами перед упомянутыми выше методами.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ МЕТОДА

Спектрально-временной анализ речевого сигнала $x(t)$ часто выполняется при помощи кратковременного преобразования Фурье

$$S(\omega, t) = \int_0^{\infty} W(t - \tau) e^{-j\omega\tau} x(\tau) d\tau$$

с окном конечной длительности $W(z)$: $W(z) > 0$ для $z \in (0, t_w)$ и $W(z) = 0$ для $z \notin [0, t_w]$. Установлено, что вид и параметры окна сильно влияют на свойства динамического спектра $S(\omega, t)$, особенно при фазовом анализе. При “правильном” выборе формы окна и его длительности t_w в спектре $S(\omega, t)$ проявляются формантные частоты. Однако, при анализе речевых сигналов общего вида нет никаких *физических* оснований для выбора окна, так как спектральные свойства гласных, назальных и фрикативных определяются различными физическими процессами и весьма разнообразны.

Можно попытаться согласовать выбор вида окна со *свойствами восприятия звука* человеком. Ряд психофизиологических экспериментов обнаружил, что в слуховой системе выполняется фильтрация с различными постоянными времени от 2 до 300 мс [12–16]. Кроме того, физиологически обоснованное окно должно учитывать потери в механических структурах слухового анализатора и потери на вязкое трение в гидродинамических процессах в улитке. Однако, этих соображений мало для выбора математической формы окна. В итоге, для каждой конкретной задачи формантного анализа приходится подбирать вид окна и его параметры.

Заметим, что эффект потерь в структурах среднего и внутреннего уха может быть представлен в виде экспоненциально убывающей функции времени. Поэтому рассмотрим такие формы окна, которые учитывают этот эффект и позволят надежно выделять форманты при спектральном анализе. Для этого откажемся от “кратковременности” окна, задавая его зависящим от параметра r в форме

$$W_r(z) = \{e^{-(1+r)z}, z \geq 0; 0, z < 0\}.$$

Тогда получим новое выражение для $S(\omega, t)$:

$$\begin{aligned} S_r(\omega, t) &= \int_0^t e^{-(1+r)(t-\tau)} e^{-j\omega\tau} x(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} W_r(t - \tau) e^{-j\omega\tau} x(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1)$$

Непосредственный анализ спектра функции (1) не демонстрирует явных преимуществ перед спектральным анализом функции $S(\omega, t)$ с окна-

ми конечной длительности, однако $S_r(\omega, t)$ играет важную роль в дальнейшем. С помощью величины (1) можно построить новую функцию, для которой формантный анализ оказывается более эффективным, чем при использовании стандартного кратковременного преобразования Фурье.

Вычисление функции $S_r(\omega, t)$ эквивалентно решению при каждом фиксированном ω задачи Коши вида

$$\frac{dS_r(\omega, t)}{dt} = -(1+r)S_r(\omega, t) + x(t)e^{-j\omega t}, \quad S_r(\omega, 0) = 0.$$

Близкое по смыслу уравнение в дискретной форме $y[n] = -ry[n-1] + x[n]e^{-j\omega n}$ с решением $y[n] = y(r, \omega)[n]$ рассматривалось в [17] для $r, 0 < r < 1$. В этой работе была введена новая, дискретная по времени, спектральная функция

$$\alpha_0(r, \omega)[n] = \frac{y(r, \omega + \delta\omega)[n]}{y(r, \omega)[n]}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

использующая сдвиг по частоте ω на малую величину $\delta\omega$. Численные эксперименты, выполненные в [18], показали, что когда r близко к 1, фазовый спектр величины $\alpha_0(r, \omega)[n]$ при фиксированном дискретном времени n “похож” на спектр дискретного сигнала $x[n]$. Число r определяет широкополосный или узкополосный тип спектрального анализа. Дискретная величина $y[n] = y(r, \omega)[n]$ является некоторым аналогом непрерывной функции $S_r(\omega, t)$. Заметим, что в работе [17] и в последовавшей затем работе [18] не проводится математическое исследование функции $\alpha_0(r, \omega)[n]$ и обоснование предложенного там алгоритма нахождения формант.

Ниже будет доказано, что использование формально схожего с функцией $\alpha_0(r, \omega)[n]$ выражения

$$\alpha(r, \omega)(t) = \frac{S_r(\omega + \delta\omega, t)}{S_r(\omega, t)}$$

с непрерывным временем t приводит при $r \leq -1$ к созданию эффективного метода анализа формантных частот. Основанием для этого служит подробное математическое исследование свойств величины $\alpha(r, \omega)(t)$. В данном разделе мы приведем лишь краткое изложение полученных результатов, которые подробно описываются в Приложении.

1) При условиях малости $\delta\omega$, а именно при $|\delta\omega|t \ll 1$, $|\delta\omega| \ll \omega$, справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} \alpha(r, \omega)(t) &\approx 1 - j\delta\omega t + j\delta\omega \frac{\int_0^\infty W_{1r}(t-\tau)x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}{\int_0^\infty W_r(t-\tau)x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau} = \\ &= 1 - j\delta\omega \frac{\int_0^t \tau e^{(1+r)\tau} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}{\int_0^t e^{(1+r)\tau} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}, \end{aligned}$$

где $W_{1r}(z) = zW_r(z)$. Условия на $\delta\omega$ считаются выполненными в дальнейшем.

2) Для амплитуды $A_\alpha(r, \omega, t)$ и фазы $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ логарифма величины $\alpha(r, \omega)(t)$ справедливы приближенные (при малых $\delta\omega$) равенства

$$\begin{aligned} A_\alpha(r, \omega, t) &= \ln |\alpha(r, \omega)(t)| \approx -\delta\omega \operatorname{Re}\{U(\omega, r, t)\}, \\ \Phi_\alpha(r, \omega, t) &\approx -\delta\omega \operatorname{Im}\{U(\omega, r, t)\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U(\omega, r, t) &= j \left\{ \int_0^t \tau e^{-(1+r)(t-\tau)} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right\} \times \\ &\times \left\{ \int_0^t e^{-(1+r)(t-\tau)} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

3) Эти же величины, взятые в конце речевого сегмента, используемого для анализа (формально, при $t \rightarrow \infty$), представляются как

$$\begin{aligned} A(\omega, r) &= \ln |\alpha(r, \omega)(\infty)| \approx -\delta\omega \operatorname{Re}\{U(\omega, r)\}, \\ \Phi(\omega, r) &= \Phi_\alpha(r, \omega, \infty) \approx -\delta\omega \operatorname{Im}\{U(\omega, r)\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U(\omega, r) &= j \left\{ \int_0^\infty \tau e^{(1+r)\tau} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right\} \times \\ &\times \left\{ \int_0^\infty e^{(1+r)\tau} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

4) Предельные значения величин $A(\omega, r)$, $\Phi(\omega, r)$ при $r \rightarrow -1$, обозначаемые как $A(\omega)$ и $\Phi(\omega)$, выражаются в виде

$$\begin{aligned} A(\omega) &\approx \delta\omega \operatorname{Re} \left\{ -j \frac{\int_0^\infty \tau x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}{\int_0^\infty x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau} \right\} = \\ &= \delta\omega \operatorname{Re} \left\{ \frac{F'[x](\omega)}{F[x](\omega)} \right\} = \delta\omega \operatorname{Re} \{ [\ln F[x](\omega)]' \}, \end{aligned}$$

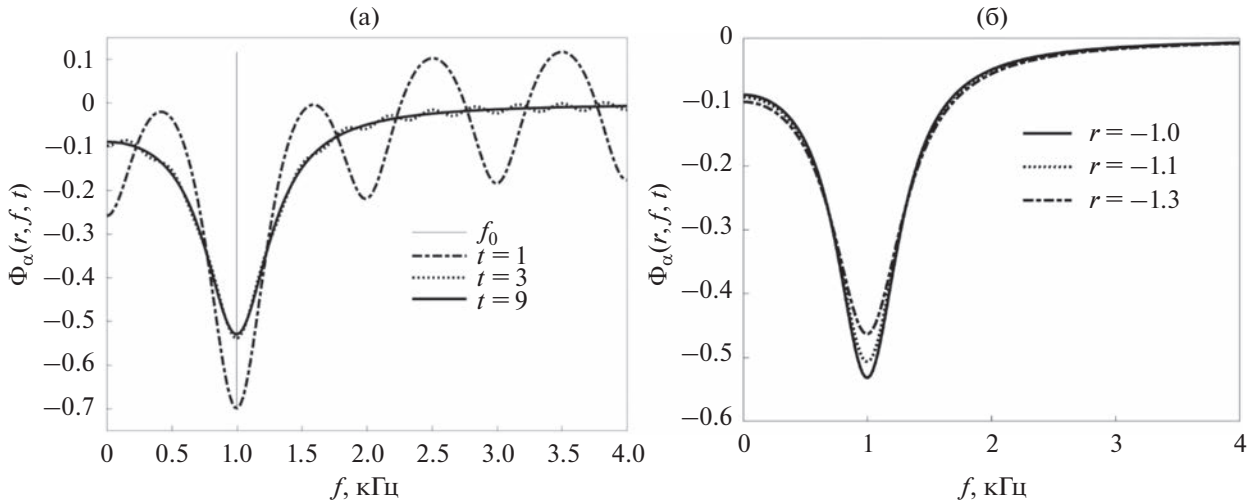


Рис. 1. (а) – Функция $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ при $r = -1.01$ и при различных t . (б) – Функция $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ при “большом” t ($t = 10$) и различных r .

$$\Phi(\omega) \approx \delta\omega \operatorname{Im} \left\{ -j \frac{\int_0^\infty \tau x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}{\int_0^\infty x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau} \right\} =$$

$$= \delta\omega \operatorname{Im} \left\{ \frac{F'[x](\omega)}{F[x](\omega)} \right\} = \delta\omega \operatorname{Im} \{ [\ln F[x](\omega)]' \},$$

где $F[x](\omega) = \int_0^\infty x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ – преобразование Фурье сигнала.

Представленные здесь функции $A_\alpha(r, \omega, t)$, $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$, $A(\omega, r)$, $\Phi(\omega, r)$ и $A(\omega)$, $\Phi(\omega)$ приближенно вычисляются по сигналу $x(\tau)$. Компьютерные эксперименты с синтезированными и реальными речевыми сигналами показали, что функции $A(\omega, r)$ и $\Phi(\omega, r)$ можно успешно использовать для нового способа оценки треков резонансных частот речевого тракта. Результаты этих экспериментов представлены ниже в разделах 3 и 4.

3. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФОРМАНТНЫХ ЧАСТОТ

3.1. Формантный анализ модельных сигналов

Рассмотрим поведение фазовой функции $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ для модельного сигнала вида $x(t) = e^{-\sigma t} \sin 2\pi f_0 t$ с частотой f_0 и коэффициентом затухания $\sigma > 0$ при $t \in [0, T_0]$. В этом случае интегралы в формуле (2) вычисляются аналитически, однако из-за громоздкости выражений прямое аналитическое исследование величины $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ как функции частоты $f = \omega/2\pi$ при разных t и r затруднительно.

Можно, однако, провести это исследование численно.

Приведем типичные графики функции $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ при различных t, r для модельных параметров сигнала $f_0 = 1$, $\sigma = 0.08$, $T_0 = 10$. Графики показывают существование хорошо обусловленного минимума фазовой функции при частоте, близкой к “формантной”: $f_0 = 1$. Характерна локализация и стабилизация этого экстремума при увеличении t , т.е. при переходе $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ в функцию $\Phi(\omega, r)$ (рис. 1а) и обострение минимума при фиксированном “большом” t и при $r \rightarrow -1$, т.е. при переходе $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ в функцию $\Phi(\omega)$ (рис. 1б). Заметим, что функцию $\Phi(\omega)$ уже можно исследовать аналитически. Для рассматриваемого модельного сигнала при $\omega = 2\pi f$, $\omega_0 = 2\pi f_0$ получим:

$$F[x](\omega) = \frac{\omega_0}{(\sigma + j\omega)^2 + \omega_0^2},$$

$$(\ln F[x](\omega))' = 2 \frac{\omega - j\sigma}{(\sigma + j\omega)^2 + \omega_0^2},$$

$$\Phi(\omega) \approx 2\delta\omega \operatorname{Im} \left\{ \frac{\omega - j\sigma}{(\sigma + j\omega)^2 + \omega_0^2} \right\} =$$

$$= -2\delta\omega \frac{\omega^2 + \omega_0^2 + \sigma^2}{(\sigma^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2}.$$

Отсюда находится производная функции $\Phi(\omega)$:

$$\Phi'(\omega) = \frac{8\sigma\omega(\sigma^2 + \omega_0^2)[\omega^2 - (\omega_0^2 - \sigma^2)]}{((\sigma^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2)^2}.$$

Из анализа ее знаков ясно, что предельная функция фазы $\Phi(\omega)$ имеет глобальный минимум в точ-

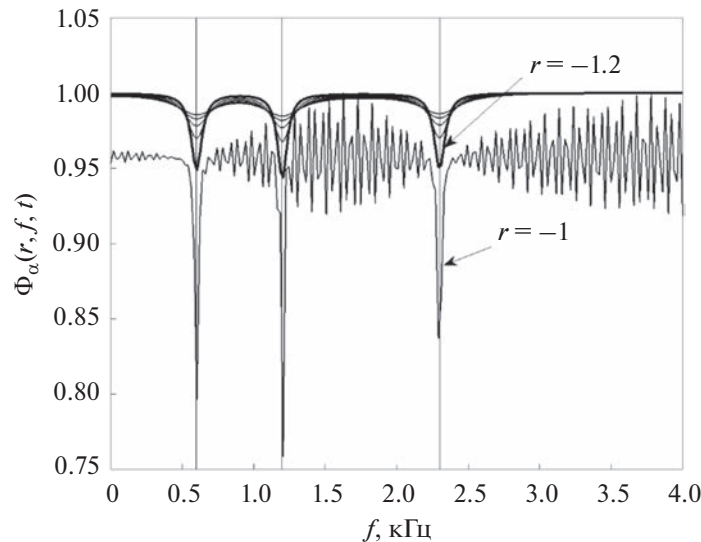


Рис. 2. Функция $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ при для различных r , $r < -1$ и при $t = 10$. Вертикальные линии указывают точные формантные частоты.

ке $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$, так что при “малых” затуханиях ($\sigma/\omega_0 \ll 1$) точка минимума ω^* будет приблизительно совпадать с формантной частотой: $\omega^* \approx \omega_0 - \frac{\sigma^2}{2\omega_0^2} \approx \omega_0$. Эти соображения объясняют поведение функции на рис. 1б.

Аналогичные результаты получаются при численном исследовании модельных сигналов типа суперпозиций нескольких гармоник. Например, для сигнала вида

$$x(t) = A_1 e^{-\delta_1 t} \sin 2\pi f_1 t + A_2 e^{-\delta_2 t} \sin 2\pi f_2 t + A_3 e^{-\delta_3 t} \sin 2\pi f_3 t,$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 8, \quad A_2 = -4, \quad A_3 = 1; \\ \delta_1 &= 0.08, \quad \delta_2 = 0.05, \quad \delta_3 = 0.08; \\ f_1 &= 0.6, \quad f_2 = 1.2, \quad f_3 = 2.3, \end{aligned}$$

результат для различных r , $r \leq -1$, при “большом” $t = 10$ показан на рис. 2.

Видно, что формантным частотам отвечают хорошо обусловленные минимумы фазы $\Phi(\omega, r) = \Phi_\alpha(r, \omega, \infty) \approx \Phi_\alpha(r, \omega, 10)$. С увеличением $|r|$ обусловленность минимумов ухудшается, но пропадают побочные минимумы. По этой причине следует находить все минимумы функции $\Phi(\omega, r)$ для различных r , $r \leq -1$ в некотором диапазоне значений вблизи $r = -1$, и анализировать частоту появления различных точек минимума. Проведенные численные эксперименты позволяют предположить, что среди них наиболее часто будут встречаться частоты, близкие к формантным.

Подобные исследования были проведены и для амплитудной функции $A_\alpha(r, \omega, t)$, ее предельного значения $A(r, \omega)$ при $t \rightarrow \infty$ и функции $A(\omega) = A(r = -1, \omega)$. Оказывается, что величины $A(r, \omega)$, $A(\omega)$ обладают свойствами, похожими на свойства функций $\Phi(r, \omega)$, $\Phi(\omega)$. Например, для использованного выше сигнала $x(t) = e^{-\sigma t} \sin 2\pi f_0 t$ функция $A(\omega)$ имеет минимум и максимум соответственно в точках $\omega_\pm(\sigma) = \omega_0(1 \pm \sigma/\omega_0)$, и при малых затуханиях σ эти значения близки к ω_0 . Функция $A(r, \omega)$ при $r < -1$, $r \approx -1$ имеет минимум и максимум в точках $\omega_0(1 \pm \varepsilon)$ при $\varepsilon = \frac{\sigma + |r| - 1}{\omega_0}$, так что формантная частота сигнала близка к значениям точек экстремумов функции $A(r, \omega)$ при $\sigma \rightarrow 0$, $r \rightarrow -1$. Для суперпозиций сигналов типа $x(t)$ с различными частотами f_0 экстремумы функции $A(r, \omega)$ при различных $r < -1$, $r \approx -1$ будут чаще всего встречаться в окрестностях этих частот.

3.2. Синтезированные гласные

Рассмотрим более подробно результаты формантного анализа для синтезированных гласных с известными резонансными частотами. Синтетические речевые сегменты, как и сегменты реальной речи, которые будут использованы в дальнейшем, имеют частоту отсчетов 16 кГц. Характеристики синтезированных гласных соответствуют мужскому голосу с частотой основного тона 120 Гц.

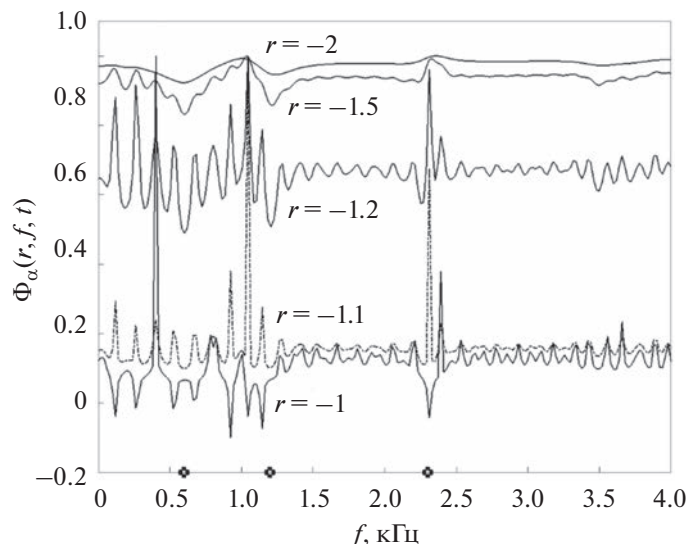


Рис. 3. Функция $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ для синтезированного гласного /а/ для $t = 10$ мс при различных r , $r < -1$. Здесь жирные точки отмечают истинные значения формантных частот.

Проанализируем сегмент синтетической речи, соответствующий звуку /а/ с резонансными частотами $F = \{600, 1200, 2300\}$ Гц, на скользящем сегменте длительностью $T = 10$ мс, так что приближенно можно считать, что $\Phi_\alpha(r, \omega, 10) \approx \Phi(r, \omega)$. На рис. 3 показаны графики вычисленной по такому речевому сигналу функции $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ для различных r , $r \leq -1$, при значении $t = 10$ мс.

Можно видеть, что многочисленные минимумы этой функции для различных r группируются около модельных формантных частот. Поэтому результаты формантного анализа с помощью функции $\Phi(r, \omega)$ целесообразно представлять в виде гистограмм распределения количества минимумов этой функции по частотам. На рис. 4/а/ приведено такое распределение, полученное из графиков рис. 3 для синтетического /а/. На рис. 4/и/, 4/о/, 4/у/ показаны аналогичные распределения для других синтезированных гласных. Рассмотрение этих распределений приводит к выводу о возможности оценки формантных частот по пикам гистограмм минимумов функции $\Phi(r, \omega)$.

Аналогичное исследование было проведено для функции $A_\alpha(r, \omega, t)$. Для получаемой из нее функции $A(r, \omega) = A_\alpha(r, \omega, \infty)$, как отмечалось в предыдущем разделе, информация о резонансных частотах содержится в положении точек ее экстремумов для разных r . Гистограммы распределения этих точек могут также быть источником форматного анализа.

Используя совместно пики гистограмм, получаемых с помощью функций $\Phi(r, \omega)$ и $A(r, \omega)$, можно провести синхронную оценку резонанс-

ных частот на концах периода основного тона. Однако, синхронная оценка требует сегментации речевого сигнала с указанием моментов начала и конца действия голосового источника. Это требует дополнительных вычислительных затрат и вносит определенную погрешность в процедуру форматного анализа. Кроме того, сегментация невозможна для фрагментов речи, где не действует (или слабо действует) голосовой источник (глухие и звонкие фрикативные звуки, сегменты взрыва после смычки, шепотная речь). Вместе с тем, формантный анализ необходим и для таких речевых фрагментов. Поэтому в нашей работе применялся формантный анализ по пикам гистограмм, полученным по функциям $\Phi(r, \omega)$ и $A(r, \omega)$ для сегментов речи с фиксированной длительностью 10 мс, т.е. считалось, что $A(r, \omega) \approx A_\alpha(r, \omega, 10)$ и $\Phi(r, \omega) \approx \Phi_\alpha(r, \omega, 10)$. Пример такого сравнительного анализа гистограмм и оценки формантных частот для синтетического звука /а/ приведен на рис. 5. Из рис. 5 видно, что пики распределения минимумов функции $\Phi(r, \omega)$ достаточно близки к формантным частотам звука. При этом распределение экстремумов функции $A(r, \omega)$ позволяет надежно оценить далеко не все форманты.

Средние значения формантных частот для каждого из рассмотренных синтетических гласных, найденные по распределениям минимумов функции $\Phi(r, \omega)$, представлены в табл. 1. Известные резонансные частоты гласных выделены жирным шрифтом. Погрешность оценок резонансных частот оказалась достаточно малой, особенно для резонансов выше первого, на значения которого влияет частота основного тона.

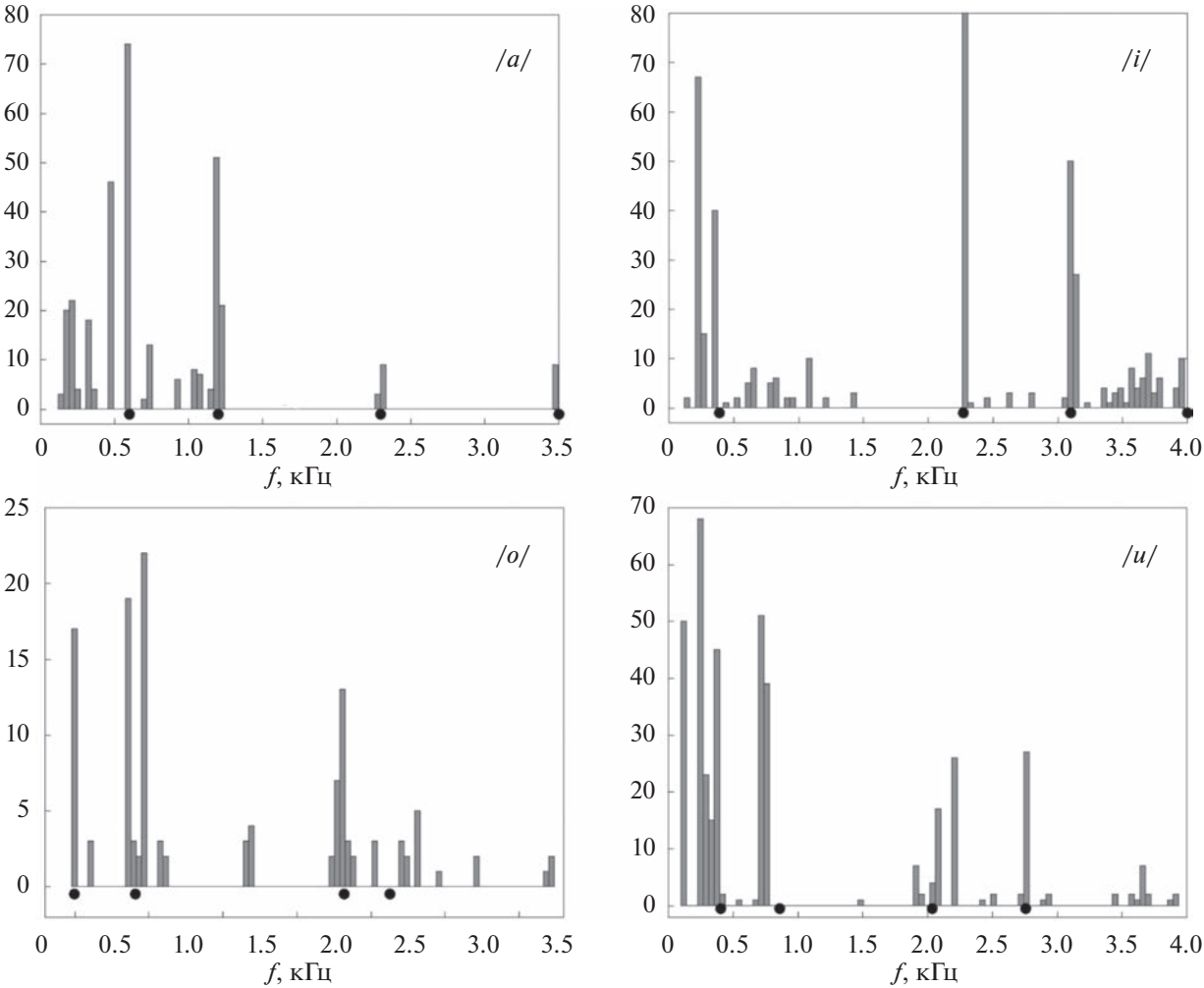


Рис. 4. Гистограммы распределений точек минимума функции $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ при $t = 10$ для различных синтезированных гласных. Черными точками обозначены истинные значения формантных частот.

Вычисляя пики гистограмм распределения минимумов функции $\Phi(r, \omega)$ для каждого периода основного тона сегмента речи (или для каждого ее последовательного временного отрезка фиксиро-

ванной длины), можно проследить динамику изменения формантных частот от периода к периоду. В результате получаем *фазограмму*, сформированную с помощью фазового анализа речевого

Таблица 1. Исходные и вычисленные по минимумам $\Phi(r, \omega)$ резонансные частоты синтезированных гласных при отсутствии шума в сигнале

	А	Э	О	У	И	Ы
F_1 , Гц	600 585	565 562	497 545	309 345	290 328	286 328
F_2 , Гц	1200 1265	1381 1430	914 955	758 782	2272 2269	1874 1899
F_3 , Гц	2300 2284	2252 2298	2316 2347	2042 2094	3100 3194	2575 2598
F_4 , Гц	3500 3558	2789 3326	2625 2593	2761 2793	4000 4000	3732 3735

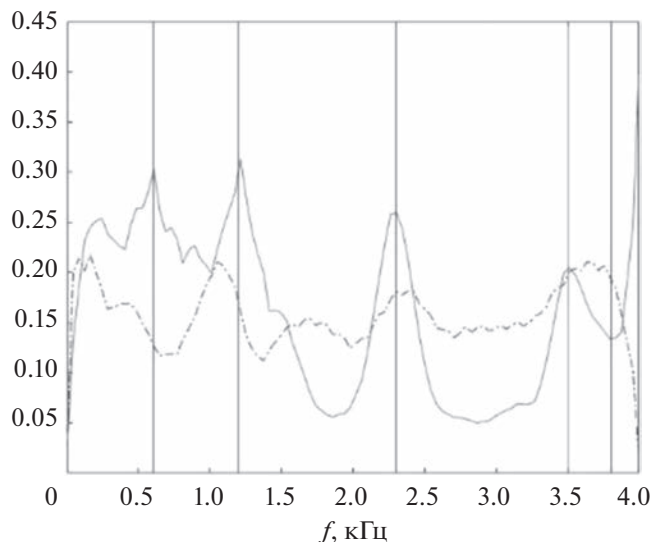


Рис. 5. Оценка формантных частот по распределению минимумов функции $\Phi(r, \omega)$ (—) и распределению экстремумов функции $A(r, \omega)$ (---). Вертикальными линиями отмечены резонансные частоты гласного /a/.

сигнала по функции $\Phi(r, \omega)$. Соответственно, с помощью распределений экстремумов функции $A(r, \omega)$ на каждом периоде получаем аналог спектрограммы сигнала. Примеры фазограмм для синтетического звука /a/ приведены на рис. 6.

Было также проведено исследование полученных оценок резонансных частот на устойчивость

к возмущениям сигналов. Для этого к сигналу добавлялся случайный белый шум с разными отношениями сигнал/шум (SNR). Качественно степень устойчивости можно оценить, сравнивая визуально фазограммы синтетического гласного /a/ без добавления шума (рис. 6а) и с шумом при SNR = 10 дБ (рис. 6б). Кроме того, на рис. 6в, 6г показаны соответствующие динамические оценки пяти резонансных частот, полученные по пикам распределений минимумов функции $\Phi(r, \omega)$.

Благодаря стационарности формант синтезированных гласных, можно количественно оценить устойчивость оценок частот, найденных по функциям $\Phi(r, \omega)$ и $A(r, \omega)$, и их зависимость от уровня шума. Соответствующие сравнительные данные об ошибках вычисления резонансных частот представлены в табл. 2, где погрешность для сигнала без шума представлена жирным шрифтом. Из таблицы можно, например, видеть, что для гласного /a/ оценки по $\Phi(r, \omega)$ стабильны вплоть до третьей форманты, тогда как оценки частот по функции $A(r, \omega)$ демонстрируют заметный разброс. За редкими исключениями, погрешность оценок не сильно возрастает и с увеличением уровня шума вплоть до SNR = 5 дБ.

3.3. Реальные речевые сигналы

Теперь приведем результаты использования предлагаемой нами процедуры формантного анализа для реальных речевых сигналов. В целом они

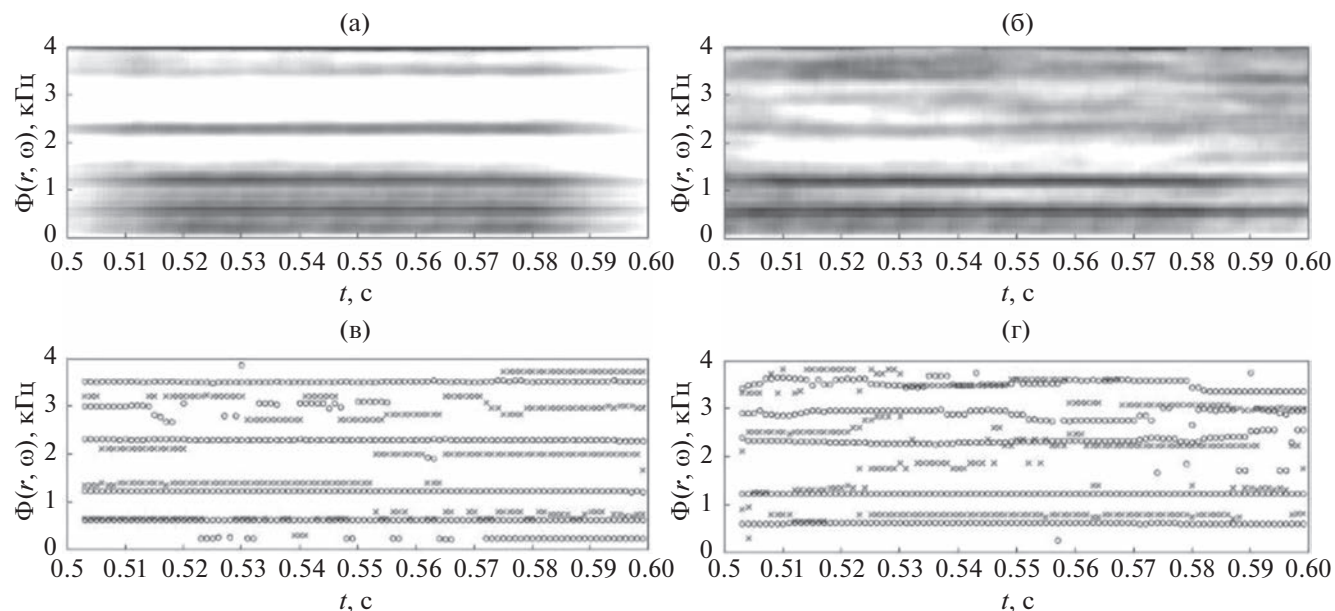


Рис. 6. Формантный анализ синтетического гласного /a/. (а), (в) — Сигнал без шума и (б), (г) — смесь его со случайным шумом при SNR = 10 дБ. (а), (б) — Фазограммы, найденные по функции $\Phi(r, \omega)$; (в), (г) — динамические оценки (треки) резонансных частот гласного по пикам гистограмм минимумов функции $\Phi(r, \omega)$ (ooo) и экстремумов функции $A(r, \omega)$ (xxx).

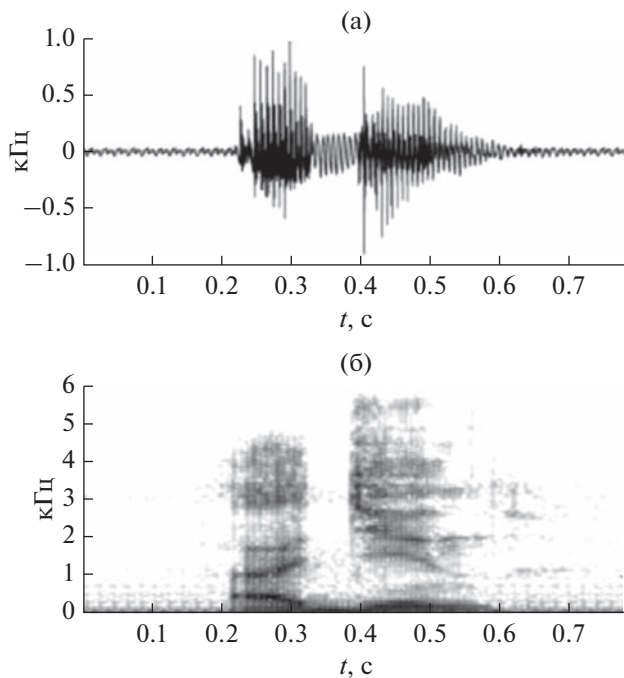
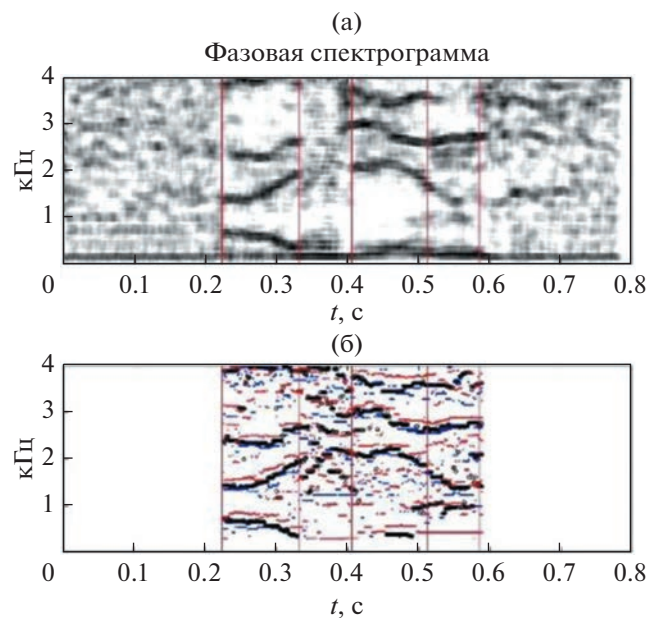
Таблица 2. Ошибки оценки резонансных частот εF_i , % (SNR = 5 дБ)

	А	Э	О	У	И	Ы
εF_1 , Гц	2.5	0.5	-9.6	-11.6	-13.1	-14.6
SNR = 5 дБ	2.3	3.5	9.6	12.3	13.1	14.7
εF_2 , Гц	-5.4	-3.5	-4.4	-3.1	0.1	-1.3
SNR = 5 дБ	-6.1	2.3	-9.1	-6.4	0.1	-1.3
εF_3 , Гц	0.7	-2.0	-1.3	-2.5	-3.0	-0.9
SNR = 5 дБ	-0.2	-1.4	3.5	-7.1	-6.0	-6.1
εF_4 , Гц	-1.6	-19.2	1.2	-1.1	0.0	-0.1
SNR = 5 дБ	14.5	2.9	1.4	-2.5	10.9	-0.4

подтверждают, по меньшей мере качественно, возможность выделения треков формантных частот. Однако, обнаруживается также нестабильность оценок и их отсутствие в некоторые моменты времени. Рассмотрим, например, сигнал для слова /один/ (см. рис. 7а). По сравнению с его стандартной сонограммой (рис. 7б), треки формант, полученные с помощью функции $\Phi(r, \omega)$ (рис. 8а), выделяются более четко, в том числе и вторая форманта, возникающая в момент опускания небной занавески перед назальной смычкой вблизи момента времени 0.5 с. При этом мгновенная оценка пиков в каждый момент времени без последующей фильтрации иногда приводит к множеству ложных значений (рис. 8б). Поэтому фильтрация ложных оценок необходима, как и

сглаживание треков достоверных оценок резонансов. Это, впрочем, характерно для любого метода поиска резонансных частот речевого сигнала. В этом и последующих экспериментах экстремумы $\Phi(r, \omega)$ сортировались по убыванию величины, и первые 5 оценок частоты принимались за формантные частоты.

Оценка формантных частот по экстремумам функции $A(r, \omega)$ в некоторые моменты времени совпадает с оценками по минимумам $\Phi(r, \omega)$, но имеются моменты, где они оказываются завышенными. Необходимо также отметить, что на интервале звонкой смычки /д/ в слове /один/ (на сегменте 0.35–0.4 с) экстремумы $\Phi(r, \omega)$ приходятся на предположительно радиальный резо-

**Рис. 7.** Слово /один/. (а) — Осциллограмма, (б) — сонограмма. Диапазон частот 0–6 кГц.**Рис. 8.** Слово /один/. (а) — Фазограмма, (б) — треки пиков. Оценки по $\Phi(r, \omega)$ (○); по $A(r, \omega)$ (●). Диапазон частот 0–4 кГц.

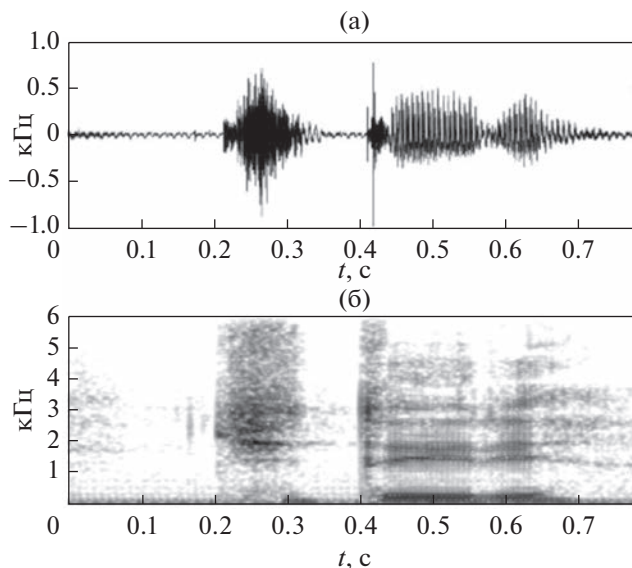


Рис. 9. Слово /четыре/. (а) — Осциллограмма, (б) — сонограмма. Диапазон частот 0–6 кГц.

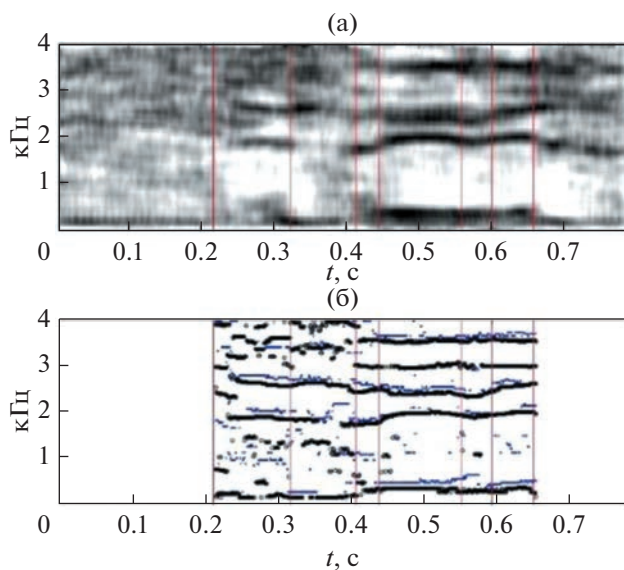


Рис. 10. Слово /четыре/. (а) — Фазограмма, (б) — треки пиков. Оценки по $\Phi(r, \omega)$ (ooo); по $A(r, \omega)$ (●●●). Диапазон частот 0–4 кГц.

нанс в области 0.2 кГц, который косвенно указывает на место артикуляции.

Вертикальные линии на рис. 8 (и далее, на рис. 10 и 12) обозначают границы фонетических сегментов, которые были заданы вручную.

На рис. 9 и 10 показаны осциллограмма, сонограмма и фазограмма, а также треки пиков распределения минимумов функции $\Phi(r, \omega)$ для слова /четыре/, произнесенного с выпадением звука /е/ после фриктивного /ч/ и редукцией конечного

звука /е/, так что фонетическая транскрипция этого слова есть /чтыри/. На сегменте взрыва глухой смычки 0.413–0.445 с присутствует оценка второй, третьей и четвертой форманты, что необходимо для распознавания места артикуляции согласного /т/. Также хорошо выражена девиация треков на сегменте 0.558–0.6 с, соответствующая артикуляции звука /р/. Кроме того, представлены треки на глухом фриктивном /ч/, продолжающиеся на глухой смычке вследствие реверберации.

Как показано на рис. 8 и 10, формантные частоты могут определяться и на сегментах с шумовым или импульсным возбуждением, и это представляется важным преимуществом описываемого подхода. Можно также сравнить сонограммы и фазограммы слова /один/, произнесенного обычным голосом (рис. 7 и 8) и шепотом (рис. 11 и 12) тем же диктором. Видно, что формантные треки шепотных гласных достаточно хорошо выражены, хотя и наблюдаются некоторые отличия от тех, что показаны на рис. 7 и 8. Это отличие вызвано, главным образом, различием в акустике речеобразования с голосовым и шепотным возбуждением.

Итак, эксперименты с синтезированными и реальными речевыми сигналами подтверждают, что гистограммы минимумов функции $\Phi(r, \omega)$ и экстремумов функции $A(r, \omega)$ содержат информацию о резонансных частотах речевого сигнала. Положения пиков этих гистограмм можно использовать для формантного анализа.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе использовался спектральный анализ фазы $\Phi(r, \omega)$ и амплитудной функции $A(r, \omega)$ величины $\alpha(r, \omega)(t)$. Количественная оценка погрешности определения частоты формант этим методом была выполнена в экспериментах с синтезированными гласными звуками. Говоря о качестве такого анализа, нужно иметь в виду, что оценка эффективности любого метода поиска формантных частот только применительно к синтезированным гласным весьма условна в силу упрощенной структуры таких сигналов по сравнению с реальными речевыми сегментами. Однако, наш анализ и численные эксперименты подтверждают возможность определения резонансных частот с помощью функций $\Phi(r, \omega)$ и $A(r, \omega)$. Эксперименты с синтезированными гласными позволяют также оценить устойчивость найденных формант к аддитивным помехам. В наших экспериментах ошибка вычисленных формантных частот по возмущенным данным оказалась вполне приемлемой для практических приложений вплоть до весьма высокого уровня шумов с отношением сигнал/шум +5 дБ. Это позволяет надеяться на то, что и для речевых сигналов в ре-

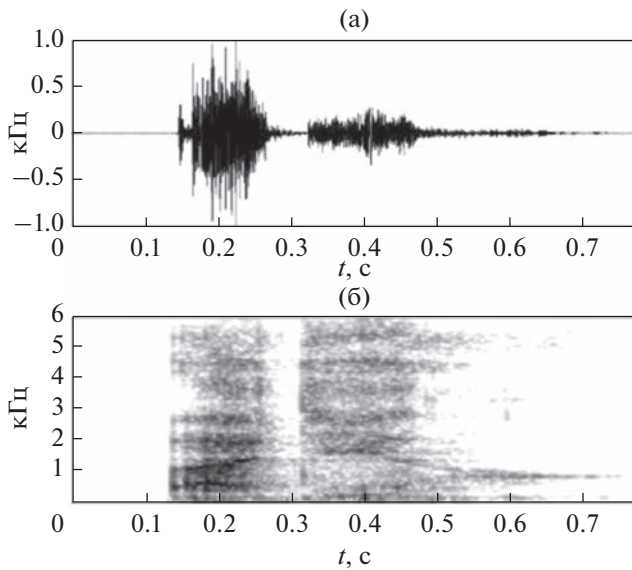


Рис. 11. Слово /odin/, шепот. (а) — Осциллограмма, (б) — сонограмма.

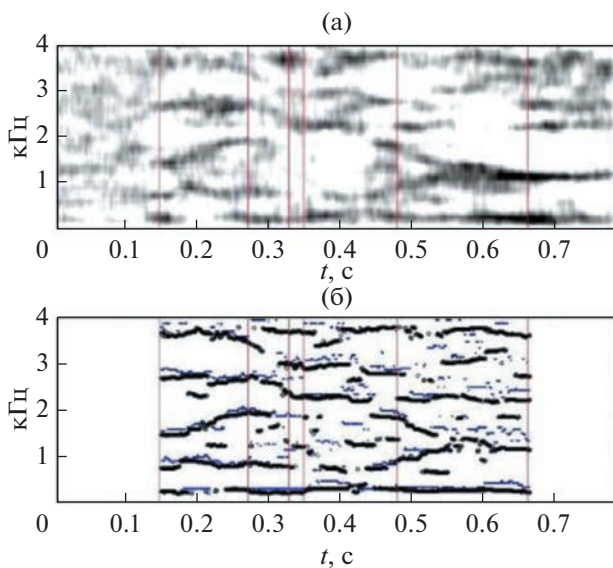


Рис. 12. Слово /odin/, шепот. (а) — Фазограмма, (б) — треки пиков. Оценки по $\Phi(r, \omega)$ (ooo); по $A(r, \omega)$ (●●●). Диапазон частот 0–4 кГц.

альной акустической обстановке формантный анализ предложенным методом окажется достаточно устойчивым к шумам и другим артефактам. Здесь же следует отметить, что результаты нашей процедуры формантного анализа не зависят от амплитуды исследуемого сигнала. В результате достигается инвариантность к текущему уровню его громкости. Вместе с тем, такая инвариантность затрудняет фильтрацию шума на паузах и смычках.

Необходимо отметить важное преимущество используемого в данной статье метода. Оно состоит в возможности оценки формантных частот в любой момент времени, независимо от типа источника возбуждения акустических колебаний в речевом тракте. Это выгодно отличается от синхронного метода и оценки по групповой задержке [11], где нужно предварительно найти моменты открытия голосовой щели на периоде основного тона. Ошибка в определении этого момента может привести к большой погрешности или к невозможности получить оценки формантных частот. В предлагаемом методе такие ситуации исключены. Отметим также, что параллельная оценка формантных частот по гистограммам минимумов функций $\Phi(r, \omega)$ и экстремумов функции $A(r, \omega)$ полезна как источник дополнительной информации, несмотря на то, что последняя оказывается менее надежной.

Предлагаемый метод можно также применить для решения следующей проблемы. В любом методе нахождения формант необходимо выяснить, какие элементы их треков являются оценками формант ротовой, носовой или подсвязочной области, а какие — артефактами. Один из способов состоит в агрегировании оценок, полученных разными методами как в амплитудно-частотной, так и в фазо-частотной области. Подход подобного рода можно распространить и на оценки формантных частот по функциям $\Phi(r, \omega)$ и $A(r, \omega)$ на сегментах взрыва смычных согласных с учетом последующего гласного.

В конце обсуждения выскажем гипотезу об отношении величины $\alpha(r, \omega)(t)$, лежащей в основе нашего анализа, к детекторам частотных модуляций, найденным в слуховой системе (см., например, [19]). Один из вариантов математического описания таких детекторов связан с величиной $A(\omega, t) = \lg[S(\omega + \delta\omega, t)/S(\omega, t) + c]$, схожей по форме с $\alpha(r, \omega)(t)$. Эта аналогия позволяет предположить, что использованная нами математическая модель имеет отношение к свойствам слухового анализатора человека, а найденные формантные частоты близки к частотам, оцениваемым этим анализатором.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты этой статьи.

1) Предложен новый метод оценки динамических треков формантных частот для произвольных речевых сегментов. Он использует отношение $\alpha(r, \omega)(t)$ двух преобразований Фурье речевого сигнала со специальными параметрическими окнами экспоненциального типа $W_r(z)$, $W_{lr}(z)$. Это отношение рассматривается как функция частоты и параметра r . Анализируя для нескольких

значений параметра r , $r < -1$ распределение точек минимума (по частоте) для фазы отношения $\alpha(r, \omega)(t)$ и/или аналогичное распределение точек экстремума для его амплитуды, можно по получаемым пикам распределений оценить формантные частоты.

2) Представлено математическое обоснование такого подхода к оценкам формантных частот для простейших модельных сигналов.

3) Проведены большие серии численных экспериментов по обработке синтетических и реальных речевых сигналов, подтвердившие практическую работоспособность предложенного метода оценки формант. Установлено, что оценка по фазе отношения более надежна, чем по амплитуде. Вместе с тем, оценка по амплитуде может быть использована как источник дополнительной информации о формантах.

4) В экспериментах с синтезированными гласными было установлено, что погрешность оценки их резонансных частот мала и устойчива по отношению к аддитивным шумам вплоть до отношения сигнал/шум 5 дБ.

5) Для сегментов реальной речи показано, что метод позволяет вычислить треки формантных частот как для звуков с голосовым возбуждением, так и для глухих фрикативных, аспиративных взрывов и шепотной речи.

При выполнении работы первый автор пользовался поддержкой Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (Московского инженерно-физического института), проект № 02.а03.21.0005 от 27.08.2013.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь представлен вывод формул для функций $A(\omega, r)$, $\Phi(\omega, r)$, а также $A(\omega)$ и $\Phi(\omega)$, применяемых в предлагаемом методе формантного анализа.

Ведём обозначение $y(r, \omega)(t) = S_r(\omega, t)$, где функция $S_r(\omega, t)$ определяется формулой (1). Такое обозначение подчеркивает, что эта величина зависит от времени, а от величин r, ω она зависит как от параметров. Кроме частоты ω , будем использовать “близкие” частоты $\omega + \delta\omega$ ($|\delta\omega| \ll \omega$). Определим отношение

$$\alpha(r, \omega)(t) = \frac{y(r, \omega + \delta\omega)(t)}{y(r, \omega)(t)} = 1 + \frac{\Delta y}{y},$$

$$\Delta y = y(r, \omega + \delta\omega) - y(r, \omega).$$

Далее, с учетом “малости” величины $\delta\omega$ и формулы (1) получим:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(r, \omega + \delta\omega) - y(r, \omega) \approx \frac{\partial y}{\partial \omega}(r, \omega)\delta\omega = \\ &= \delta\omega \int_0^\infty W_r(t - \tau)x(\tau)(-j\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \\ &= j\delta\omega \int_0^\infty W_r(t - \tau)x(\tau)(t - \tau)e^{-j\omega\tau}d\tau - \\ &- j(\delta\omega)t \int_0^\infty W_r(t - \tau)x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \\ &= j\delta\omega \left(\int_0^\infty W_{1r}(t - \tau)x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau - \right. \\ &\left. - t \int_0^\infty W_r(t - \tau)x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right), \end{aligned}$$

где $W_{1r}(z) = zW_r(z)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \alpha(r, \omega)(t) &= 1 + \frac{\Delta y}{y} \approx 1 - j\delta\omega t + \\ &+ j\delta\omega \frac{\int_0^\infty W_{1r}(t - \tau)x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}{\int_0^\infty W_r(t - \tau)x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau} = \\ &= 1 - j\delta\omega t + j\delta\omega \frac{\int_0^t (t - \tau)e^{-(1+r)(t-\tau)}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}{\int_0^t e^{-(1+r)(t-\tau)}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau} = \\ &= 1 - j\delta\omega \frac{\int_0^t \tau e^{-(1+r)(t-\tau)}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}{\int_0^t e^{-(1+r)(t-\tau)}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}. \end{aligned}$$

В дальнейшем нас будут интересовать величина $A_\alpha(r, \omega, t) = \ln |\alpha(r, \omega)(t)|$ и фаза $\Phi_\alpha(r, \omega, t)$ отношения $\alpha(r, \omega)(t)$. Мы будем для краткости называть эти величины амплитудной и фазовой функциями, связанными с отношением $\alpha(r, \omega)(t)$. Для их нахождения используем формулу

$$\begin{aligned} \ln \alpha(r, \omega)(t) &= \ln |\alpha(r, \omega)(t)| + j\Phi_\alpha(r, \omega, t) = \\ &= A_\alpha(r, \omega, t) + j\Phi_\alpha(r, \omega, t). \end{aligned}$$

Тогда при условиях $|\delta\omega|t \ll 1$, $|\delta\omega| \ll \omega$, т.е. при $\left| \frac{\Delta y}{y} \right| \ll 1$, имеем:

$$\begin{aligned} \ln \alpha(r, \omega)(t) &= \ln \left(1 + \frac{\Delta y}{y} \right) \approx \frac{\Delta y}{y} \Rightarrow \\ \Rightarrow A_\alpha(r, \omega, t) &\approx \operatorname{Re} \left\{ \frac{\Delta y}{y} \right\}, \quad \Phi_\alpha(r, \omega, t) \approx \operatorname{Im} \left\{ \frac{\Delta y}{y} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_{\alpha}(r, \omega, t) \approx -\delta\omega \operatorname{Re} \left\{ j \frac{\int_0^t \tau e^{-(1+r)(t-\tau)} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}{\int_0^t e^{-(1+r)(t-\tau)} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau} \right\},$$

$$\Phi_{\alpha}(r, \omega, t) \approx -\delta\omega \operatorname{Im} \left\{ j \frac{\int_0^t \tau e^{(1+r)\tau} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}{\int_0^t e^{(1+r)\tau} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau} \right\}.$$

Амплитудная и фазовая функции, связанные с $\alpha(r, \omega)(t)$, для ограниченного по амплитуде сигнала $x(t)$ стабилизируются при $t \rightarrow \infty$, т.е., как мы будем далее говорить, в конце речевого сегмента:

$$A(\omega, r) = \ln |\alpha(r, \omega)(\infty)| = -\delta\omega \operatorname{Re} \{U(\omega, r)\}, \quad (П1)$$

$$\Phi(\omega, r) = \Phi_{\alpha}(r, \omega, \infty) = -\delta\omega \operatorname{Im} \{U(\omega, r)\},$$

где

$$U(\omega, r) =$$

$$= j \left\{ \int_0^{\infty} \tau e^{(1+r)\tau} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \left\{ \int_0^{\infty} e^{(1+r)\tau} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\}^{-1}. \quad (П2)$$

Выражения (П1) и (П2) будут использованы для формантного анализа речевых сигналов общего вида $x(t)$. Предпосылкой для этого служит численное исследование их поведения при различных $r \leq -1$ для сигналов простого вида (см. раздел 3), а также аналитическое исследование их предельных значений $A(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ при $r \rightarrow -1$, т.е. величин

$$A(\omega) = A_{\alpha}(-1, \omega, \infty) \approx \delta\omega \operatorname{Re} \{U(\omega, -1)\} =$$

$$= \delta\omega \operatorname{Re} \left\{ -j \frac{\int_0^{\infty} \tau x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}{\int_0^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau} \right\} = \delta\omega \operatorname{Re} \left\{ \frac{F'[x](\omega)}{F[x](\omega)} \right\},$$

$$\Phi(\omega) = \Phi_{\alpha}(-1, \omega, \infty) \approx \delta\omega \operatorname{Im} \{U(\omega, -1)\} =$$

$$= \delta\omega \operatorname{Im} \left\{ \frac{F'[x](\omega)}{F[x](\omega)} \right\} = \delta\omega \operatorname{Im} \{[\ln F[x](\omega)]\}.$$

Здесь $F[x](\omega) = \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ — преобразование Фурье сигнала. Это исследование представлено в разделе 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stevens K.N. Acoustic Phonetics. The MIT Press, 1998.
2. Sorokin V.N., Leonov A.S., Makarov I.S., Tsyplikhin A.I. Speech inversion and re-synthesis // InterSpeech. 2005. P. 3209–3212.
3. Сорокин В.Н. Речевые процессы. М.: Народное образование, 2012.
4. Sreenivas Th., Niederjohn R.J. Zero-crossing based spectral analysis and SVD spectral analysis for formant frequency estimation in noise // IEEE Trans. Signal Processing. 1992. V. 40. № 2. P. 282–293.
5. Сорокин В.Н., Трифоненков В.П. Об автокорреляционном анализе речевого сигнала // Акуст. журн. 1996. Т. 4. № 3. С. 418–425.
6. Леонов А.С., Макаров И.С., Сорокин В.Н. Частотные модуляции в речевом сигнале // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 809–821.
7. Vakman D. On the Analytic Signal, the Teager-Kaiser Energy Algorithm, and Other Methods for Defining Amplitude and Frequency // IEEE Trans. Signal Processing. 1996. V. 44. № 4. P. 791–797.
8. Маркел Дж.Д., Грей А.Х. Линейное предсказание речи. М.: Связь, 1980.
9. Yegnanarayana B. Formant extraction from linear-prediction phase spectra // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. P. 1638–1640.
10. Леонов А.С., Сорокин В.Н. Формантный анализ в фазовой области // Информационные процессы. 2021. Т. 21. № 2. С. 125–134.
11. Сорокин В.Н., Леонов А.С. Фазовые модуляции в речевом сигнале // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 2. С. 218–232.
12. Raab D.H. Forward and backward masking between acoustic clicks // J. Acoust. Soc. Am. 1961. V. 33. С. 137–139.
13. Elliot L.L. Backward and forward masking of probe tones of different frequencies // J. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34. P. 1116–1117.
14. Babkoff H., Sutton S. Monaural temporal masking of transients // J. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 44. P. 1373–1378.
15. Green D.M. Temporal acuity as a function of frequency // J. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 54. P. 373–379.
16. Hermansky H., Morgan N. RASTA processing of speech // IEEE Trans. Speech and Audio Processing. 1994. V. 2. № 4. P. 578–589.
17. Yegnanarayana B. Group delay spectrogram of speech signals without phase wrapping // J. Acoust. Soc. Am. 2022. V. 151. № 3. P. 2181–2191.
18. Yegnanarayana B. Analysis of phase derivatives of speech signals // J. Acoust. Soc. Am. 2022. V. 152. № 3. P. 1721–1736.
19. Сорокин В.Н., Ченелев Д.Н. Первичный анализ речевых сигналов // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 4. С. 536–542.

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 534.8

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ МЕТОДОМ ОБРАЩЕНИЯ СИГНАЛА ВО ВРЕМЕНИ В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ

© 2023 г. Д. Я. Суханов^а, *, А. Е. Кузовова^а

^аТомский государственный университет, пр. Ленина 36, Томск, 634050 Россия

*e-mail: sdy@mail.tsu.ru

Поступила в редакцию 18.11.2020 г.

После доработки 13.05.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Предлагается метод решения обратной задачи восстановления источников акустических волн по измерениям поля на некоторой поверхности на основе обращения волнового фронта в методе динамики частиц. В этом методе рассматриваемая среда представляется в виде совокупности взаимодействующих частиц (материальных точек или твердых тел), для которых записываются классические уравнения движения. В работе рассматривается представление среды в виде множества частиц в кубической объемно-центрированной кристаллической решетке. Рассматривается случай линейной зависимости силы притяжения частиц от расстояния. Преимуществом такого подхода является возможность учета распространения волн в произвольно неоднородных средах в рамках единой численной модели. Численно и экспериментально показана возможность визуализации двух сферических источников акустических волн в воде за преградой, несмотря на наличие поперечных волн в рассматриваемой модели твердого тела; их влияние пренебрежимо мало в рассматриваемом случае. Проведена экспериментальная проверка предложенного метода на звуконепроницаемом экране с отверстием, имитирующем звукоизлучающий объект сложной формы. Через отверстие проходит волна от точечного источника коротких импульсов. С помощью приемного акустического сенсора, установленного на двухкоординатном сканере, было измерено пространственно-временное распределение звуковых колебаний на поверхности воды. При обработке данных путем обращения волнового фронта в модели частиц, было восстановлено изображение отверстия в звуконепроницаемом экране.

Ключевые слова: обращение времени, множество частиц, кубическая объемно-центрированная кристаллическая решетка, звукоизлучающий объект, метод динамики частиц

DOI: 10.31857/S0320791923600762, **EDN:** APFQPU

ВВЕДЕНИЕ

Задача восстановления источников акустических волн возникает в дефектоскопии, исследовании океана [1–4], медицинской диагностике [5]. Исходными данными при решении подобных задач, как правило, являются акустические сигналы, измеренные во множестве точек пространства.

Подход на основе синтеза аппретуры для визуализации плоских источников в воздухе рассмотрен в работе [6]. Такой подход нетребователен к вычислительным ресурсам, но применим только для однородных сред. Широкое распространение для решения подобных обратных задач получил метод временного обращения волн (ВОВ) [7–14]. Чтобы осуществить временное обращение волн, необходимо в принятом сигнале изменить направление хода времени на обратное, а затем из-

лучить его в ту же среду из области измерений. Использование данного метода позволяет осуществлять фокусировку полей, применяемую, например, в активной локации.

Для решения задачи восстановления источника методом численного моделирования, вычисляются сигналы, распространяемые обратно в среду из тех точек, где они были приняты, с изменением направления хода времени на отрицательный. В результате происходит синфазное сложение волн обратного распространения именно в той точке, где находился источник, что позволяет его обнаружить по соответствующему максимуму поля. Если источник излучает произвольный широкополосный сигнал, то обработка может быть дополнена методом согласованной фильтрации.

Метод обращения времени для волновых процессов позволяет получать изображение источ-

ников с точностью до неизлучающих конфигураций [15, 16] в неоднородных средах с известными характеристиками среды, в которой находится источник. Данный метод позволяет учитывать только поля однородных волн. Задача восстановления источников является обратной задачей и, в общем случае, некорректной. Как правило, требуется априорная информация для однозначной интерпретации получаемых изображений, например, источники могут считаться точечными. Для повышения разрешения необходимо увеличивать апертуру измерительной системы, а в пределе поверхность измерения должна полностью охватывать поле излучения. Для минимизации уровня боковых лепестков или артефактов необходимы измерения поля с шагом менее половины длины волны. Благодаря учету неоднородностей и границ раздела сред при решении обратной задачи повышается эффективность фокусировки поля. В работе [10] была теоретически рассмотрена возможность применения метода обращения волнового фронта при нелинейном рассеянии плоской звуковой волны на пульсирующей сфере. В работах [9, 14] был применен метод временного обращения волн для задач распространения волн в мелком море. Метод временного обращения волн находит также применение и в задачах измерения коэффициента акустического поглощения в образцах биологических тканей [17]. В работе [3] метод временного обращения волн был применен для локализации неоднородностей в упругой пластине. Возможность обнаружения неоднородности в среде и определения ее размеров в настоящее время является актуальной задачей в неразрушающем ультразвуковом контроле. В работе [18] возможность обратимости волнового процесса во времени была применена для восстановления распределения нормальной скорости и акустического давления на поверхности излучателя.

В рассмотренных выше работах метод временного обращения волн применялся для рассмотрения среды как непрерывной. Однако в настоящее время все более актуальной становится концепция уменьшения размеров объектов. Развитие нанотехнологий привело к необходимости оценивать характеристики объектов, состоящих всего из нескольких слоев атомов. Таким образом, становится актуальной проблема рассмотрения объектов на микроуровне, основываясь на дискретных методах. Для аналитического и численного описания процессов, происходящих в телах с микроструктурой, удобно воспользоваться методом динамики частиц, состоящим в представлении тела как совокупности взаимодействующих материальных точек (или твердых тел), движущихся согласно классическим уравнениям динамики и заданным законам взаимодействия между частицами [19]. Одним из наиболее хорошо разработанных вариантов этого метода является ме-

тод молекулярной динамики [20]. В классической молекулярной динамике поведение отдельной частицы описывается уравнениями движения Ньютона [21, 22]. Преимущество такого подхода по сравнению с методами, основанными на концепции сплошной среды, заключается в том, что он требует значительно меньше априорных предположений о свойствах материала. Возможен учет таких сложных эффектов, как пластичность, образование трещин, разрушение, температурное изменение свойств материала, фазовые переходы [23]. Для описания каждого из этих эффектов в рамках сплошной среды требуется отдельная теория, в то время как при моделировании методом динамики частиц эти эффекты получаются автоматически, в результате интегрирования уравнений движения.

По сути, в рамках молекулярной динамики применяются одни и те же уравнения движения (уравнения движения Ньютона) для описания различных агрегатных состояний вещества. Различные свойства среды, включая агрегатные состояния и анизотропию, определяются зависимостью силы взаимодействия (притяжения или отталкивания) от расстояния между частицами (производная потенциала Леннарда–Джонса) и их взаимной ориентацией. Например, если сила притяжения стремится к нулю на больших расстояниях, а на малых расстояниях возникает сила отталкивания, то модель описывает газообразную среду. Для твердого тела характерно наличие равновесного расстояния между частицами, и если частицы отдаляются, возникает сила притяжения, а если сближаются, то возникает сила отталкивания, что, в итоге, позволяет стабилизировать кристаллические структуры. Для жидких сред рассматриваются слабые силы притяжения, позволяющие преодолевать потенциальную яму вблизи равновесного расстояния и менять порядок размещения частиц. В работе [24] рассматривалось применение метода молекулярной динамики для моделирования процесса диффузии жидкости в пористом твердом теле. Метод молекулярной динамики нашел применение при моделировании скорости образования кристаллов в переохлажденной жидкости [25]. Парринелло и Раман в [26, 27] показали возможность моделирования различных кристаллических решеток за счет изменения потенциала взаимодействия частиц.

Ранее уже предпринимались попытки моделировать акустические процессы на основе метода молекулярной динамики. Например, исследование рассеяния акустических фононов на неоднородных включениях, встроенных в анизотропную среду, было проведено в работе [28]. Представлено сравнение решения, полученного методом молекулярной динамики, и решения в рамках модели сплошной среды. С увеличением размера неоднородности

родности различие между вариантами решений уменьшается. В работе [29] предложен метод моделирования акустических процессов на основе динамики частиц с продольным взаимодействием в объемно-центрированной кубической решетке. Показана возможность его применения для оценки спектра колебаний титанового акустического волновода и проведено сравнение с экспериментальными результатами.

Используемые при моделировании частицы не обязательно представляют собой атомы или молекулы, они могут рассматриваться как элементы более высокого масштабного уровня, описываемые как материальные точки. Несмотря на это, часто используется традиционное название метод «молекулярной динамики», однако в данном случае более правильно говорить о методе динамики частиц. В методе динамики частиц рассматриваемая среда представляется в виде совокупности взаимодействующих материальных точек, для которых записываются классические уравнения движения. Взаимодействие частиц описывается посредством силы взаимодействия, основным свойством которой является отталкивание при сближении и притяжение при удалении [19].

В данной работе мы предлагаем на основе метода динамики частиц реализовать моделирование волновых процессов и с применением метода обращения времени реализовать восстановление источников звука в неоднородных средах. Новизна предлагаемого подхода заключается в том, что метод динамики частиц применен для расчета обращенных во времени акустических процессов, что позволяет визуализировать источники акустических волн. Вместе с этим, предложен метод представления согласованной границы в рамках данной модели. В данной работе непосредственно задана сила продольного и поперечного взаимодействия между частицами в виде линейной функции. Такой подход справедлив при восстановлении источников в линейных средах.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Представим твердое тело в виде множества частиц, упорядоченных в кубической объемно-центрированной кристаллической решетке [30]. Схематически рассматриваемая решетка изображена на рис. 1. Каждая частица описывает конечный объем среды, а взаимодействие между частицами описывается силой, обеспечивающей устойчивость кристаллической решетки. Если расстояние между частицами равно равновесному (периоду решетки), то сила притяжения между частицами равна нулю. Сила притяжения становится положительной, если частицы удаляются, и отрицательной, если частицы сближаются. Кроме того, для описания широкого класса изотропных и анизотропных сред дополнительно вводится по-

перечная сила, возникающая при отклонении текущей частицы от прямой линии, соединяющей две противолежащие соседние частицы. В рассматриваемой объемно-центрированной кристаллической решетке частицы располагаются периодически в вершинах и в центрах элементарных кубических ячеек (рис. 1б). При рассмотрении частиц в вершинах куба элементарной ячейки расстояние между частицами равно d . На расстоянии d каждая частица имеет 6 ближайших соседей («осевые соседи»). Расстояние между частицами в центре куба и частицами на вершинах равно $d\sqrt{3}/2$; на данном расстоянии каждая частица имеет 8 ближайших соседей («диагональные соседи»). Взаимодействуют только ближайшие частицы, и всего в данной решетке у каждой частицы может быть не больше 14 соседей (6 на расстоянии d и 8 на расстоянии $d\sqrt{3}/2$). На рис. 1б широкими линиями показаны взаимодействия с 6 «осевыми соседями», а тонкими — с 8 «диагональными соседями». Для упрощения вычислений поперечную силу взаимодействия будем рассматривать только для «осевых соседей». Распространение волн в такой структуре происходит за счет последовательной передачи сдвиговых возмущений от частицы к частице. Аналогичные волновые возмущения характерны не только для сдвигов, но и для скоростей частиц.

Рассмотрим простейший одномерный случай с линейной зависимостью силы притяжения частиц от расстояния вида $F = k(x - R)$, где R — равновесное расстояние между частицами, k — коэффициент упругости. При этом считаем, что между собой взаимодействуют только ближайшие частицы. Линейная зависимость применяется для минимизации искажений спектра сигнала при решении обратной задачи восстановления источников. Поскольку мы рассматриваем волновые процессы, а распространение волн в средах, как правило, описывается линейным волновым уравнением, то применение линейной зависимости оправдано. Коэффициент k определяется скоростью звука c , массой частиц m и равновесным расстоянием между частицами R : $k = c^2 m / R^2$. Данное решение следует из сведения одномерной модели взаимодействующих частиц к волновому уравнению. Рассмотрим силы, действующие на одну частицу вдоль оси x , и запишем уравнение движения частицы:

$$m \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} = k(X(x - R, t) - 2X(x, t) + X(x + R, t)), \quad (1)$$

где $X(x, t)$ — смещение частицы в момент времени t вдоль оси x (x — координата частицы в невозмущенном состоянии); $X(x - R, t)$ — сдвиг соседней

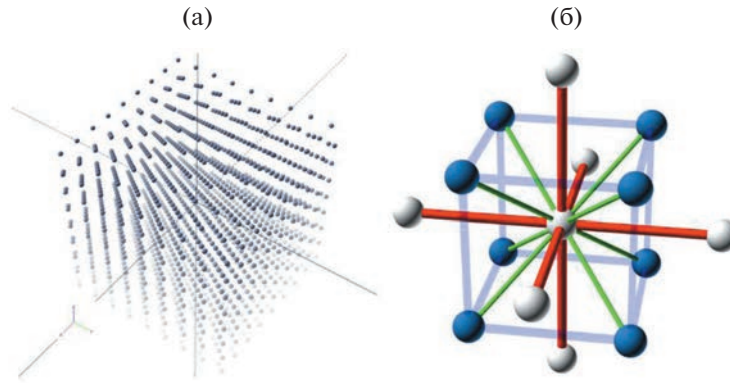


Рис. 1. (а) – Пример размещения частиц в кубической объемно-центрированной решетке и (б) – визуализация связей с соседними частицами.

частицы, находящейся в позиции $x - R$; $X(x + R, t)$ – сдвиг соседней частицы, находящейся в позиции $x + R$. Приближенно можно записать: $X(x - R, t) - 2X(x, t) + X(x + R, t) \approx R^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$.

Следовательно, $m \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} = k R^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$, что является формой волнового уравнения где скорость звука определяется выражением $1/c^2 = m/(kR^2)$, следовательно, $c = R\sqrt{k/m}$, а $k = \frac{c^2 m}{R^2}$. С помощью последнего выражения можно задать ключевой параметр предлагаемой модели k через скорость звука c и плотность среды ρ . Плотность среды и масса частиц связаны соотношением: $m = \rho d^3/2$; где d – шаг размещения частиц в сетке (d^3 – объем куба, деление на 2 вызвано тем, что есть частицы в центре каждого куба, что удваивает общее количество частиц). Из представленного рассуждения видно, что предложенная модель эквивалентна решению волнового уравнения при устремлении расстояния между частицами к нулю.

Аналогичное рассуждение можно провести для трехмерной задачи и получить волновое уравнение для рассматриваемой кристаллической ре-

шетки. Представим пространственные сдвиги каждой частицы из равновесного состояния в виде векторной функции $\mathbf{U}(x, y, z)$, где (x, y, z) – невозмущенные координаты рассматриваемой частицы. Получим волновое уравнение для рассматриваемой модели взаимодействия частиц в приближении малых отклонений от равновесного состояния. Запишем суммарный вектор силы, действующей на рассматриваемую частицу со стороны соседних частиц, включая продольные и поперечные силы, в виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3, \quad (2)$$

где $\mathbf{F}_1$ – сила, действующая со стороны “осевых соседей”, $\mathbf{F}_2$ – сила, действующая со стороны “диагональных соседей”, $\mathbf{F}_3$ – поперечная сила, действующая со стороны двух противоположных “осевых соседей”:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 = & k_1((\mathbf{U}(x + d, y, z) - 2\mathbf{U}(x, y, z) + \\ & + \mathbf{U}(x - d, y, z))\mathbf{e}_x)\mathbf{e}_x + k_1((\mathbf{U}(x, y + d, z) - \\ & - 2\mathbf{U}(x, y, z) + \mathbf{U}(x, y - d, z))\mathbf{e}_y)\mathbf{e}_y + \\ & + k_1((\mathbf{U}(x, y, z + d) - 2\mathbf{U}(x, y, z) + \\ & + \mathbf{U}(x, y, z - d))\mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$; $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$; $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$; k_1 – коэффициент упругости для “осевых частиц”;

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = & k_2 \left[\left(\left(\mathbf{U}\left(x + \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2}, z + \frac{d}{2}\right) - 2\mathbf{U}(x, y, z) + \mathbf{U}\left(x - \frac{d}{2}, y - \frac{d}{2}, z - \frac{d}{2}\right) \right) \mathbf{n}_1 \right) \mathbf{n}_1 \right] + \\ & + k_2 \left[\left(\left(\mathbf{U}\left(x - \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2}, z + \frac{d}{2}\right) - 2\mathbf{U}(x, y, z) + \mathbf{U}\left(x + \frac{d}{2}, y - \frac{d}{2}, z - \frac{d}{2}\right) \right) \mathbf{n}_2 \right) \mathbf{n}_2 \right] + \\ & + k_2 \left[\left(\left(\mathbf{U}\left(x + \frac{d}{2}, y - \frac{d}{2}, z + \frac{d}{2}\right) - 2\mathbf{U}(x, y, z) + \mathbf{U}\left(x - \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2}, z - \frac{d}{2}\right) \right) \mathbf{n}_3 \right) \mathbf{n}_3 \right] + \\ & + k_2 \left[\left(\left(\mathbf{U}\left(x + \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2}, z - \frac{d}{2}\right) - 2\mathbf{U}(x, y, z) + \mathbf{U}\left(x - \frac{d}{2}, y - \frac{d}{2}, z + \frac{d}{2}\right) \right) \mathbf{n}_4 \right) \mathbf{n}_4 \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), \\ \mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \quad \mathbf{n}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1);$$

k_2 — коэффициент упругости для “диагональных соседей”;

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} k_3(U_x(x, y, z+d) - 2U_x(x, y, z) + U_x(x, y, z-d)) \\ k_3(U_y(x, y, z+d) - 2U_y(x, y, z) + U_y(x, y, z-d)) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3(U_x(x, y+d, z) - 2U_x(x, y, z) + U_x(x, y-d, z)) \\ 0 \\ k_3(U_z(x, y+d, z) - 2U_z(x, y, z) + U_z(x, y-d, z)) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ k_3(U_y(x+d, y, z) - 2U_y(x, y, z) + U_y(x-d, y, z)) \\ k_3(U_z(x+d, y, z) - 2U_z(x, y, z) + U_z(x-d, y, z)) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где k_3 — коэффициент поперечного взаимодействия для “осевых соседей”.

В общем случае поперечная сила $\mathbf{F}_3$ вычисляется по координатам двух противоположащих частиц и рассматриваемой частицы:

$$\mathbf{F}_3 = (k_3 \mathbf{a} \mathbf{e}_1 + k_3 \mathbf{b} \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1,$$

где

$$\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2]; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1|}; \\ \mathbf{e}_3 = \frac{[\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_1]}{||[\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_1]||}; \quad \mathbf{a} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0), \\ \mathbf{b} = (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0);$$

$\mathbf{V}_0$ — координаты рассматриваемой частицы; $\mathbf{V}_1$ — координаты соседней осевой частицы; $\mathbf{V}_2$ — координаты противоположащей к $\mathbf{V}_1$ соседней частицы.

Заметим, что в формулы (3)–(5) входят комбинации вида

$$U(x + n_x R, y + n_y R, z + n_z R) - 2U(x, y, z) + \\ + U(x - n_x R, y - n_y R, z - n_z R),$$

где $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор, описывающий направление на соседнюю частицу; R — расстояние от текущей частицы до соседней. При устремлении расстояния между частицами к нулю ($R \rightarrow 0$) данная комбинация может быть приближенно выражена через вторую производную по направлению:

$$U(x + n_x R, y + n_y R, z + n_z R) - 2U(x, y, z) + \\ + U(x - n_x R, y - n_y R, z - n_z R) \approx R^2 \frac{\partial^2 U}{\partial n^2},$$

следовательно, в приближении $R \rightarrow 0$ силу, действующую на частицу можно записать в виде:

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z), \quad (6)$$

где

$$F_x = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \left(k_1 + \frac{k_2}{3} \right) d^2 + \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) \times \\ \times \left(k_3 + \frac{k_2}{3} \right) d^2 + \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} \right) \frac{2}{3} k_2 d^2, \quad (7a)$$

$$F_y = \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \left(k_1 + \frac{k_2}{3} \right) d^2 + \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \right) \times \\ \times \left(k_3 + \frac{k_2}{3} \right) d^2 + \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y \partial z} \right) \frac{2}{3} k_2 d^2, \quad (7b)$$

$$F_z = \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \left(k_1 + \frac{k_2}{3} \right) d^2 + \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} \right) \times \\ \times \left(k_3 + \frac{k_2}{3} \right) d^2 + \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y \partial z} \right) \frac{2}{3} k_2 d^2. \quad (7b)$$

Далее рассмотрим второй закон Ньютона, например для x компоненты силы:

$$F_x = m \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2},$$

где $m = \rho d^3 / 2$ — масса частицы.

С учетом второго закона Ньютона, выражение (7a) принимает вид канонического волнового уравнения для твердого тела [30]:

$$\rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = \left(k_1 + \frac{k_2}{3} \right) \frac{2}{d} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \\ + \left(k_3 + \frac{k_2}{3} \right) \frac{2}{d} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) + \frac{4k_2}{3d} \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} \right). \quad (8)$$

Из уравнения (8) можно записать модули упругости:

$$C_{11} = \left(k_1 + \frac{k_2}{3}\right) \frac{2}{d}; \quad C_{44} = \left(k_3 + \frac{k_2}{3}\right) \frac{2}{d};$$

$$C_{12} + C_{44} = \frac{4k_2}{3d}. \quad (9)$$

Из полученных модулей упругости в выражении (9) вычисляются коэффициенты модели k_1 , k_2 , k_3 :

$$k_1 = \frac{d}{4}(2C_{11} - C_{12} - C_{44});$$

$$k_2 = \frac{3}{4}d(C_{12} + C_{44}); \quad k_3 = \frac{d}{4}(C_{44} - C_{12}). \quad (10)$$

Отсюда можно заключить, что предложенная модель распространения волн сводится к каноническому волновому уравнению для сплошной среды в приближении малых отклонений и при устремлении шага решетки к нулю.

Выражение (8) может быть преобразовано к волновому уравнению для изотропной жидкости. Для этого достаточно положить $k_2 = 0$, $k_1 = k_3$, тогда получим:

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = \frac{2k_1}{\rho d} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right). \quad (11)$$

В данном случае скорость звука в жидкости определяется выражением: $c = \sqrt{\frac{2k_1}{\rho d}}$.

Полученные формулы (8) и (9) показывают, что предложенная модель частиц является достаточно универсальной и может описывать волновые процессы как в твердых изотропных и анизотропных средах, так и в жидких средах. Свойства среды определяются значениями коэффициентов k_1 , k_2 и k_3 , на основе их связи с упругими модулями (9)–(10).

Известно, что при численном решении волнового уравнения или уравнения Гельмгольца [23] требуется выбирать шаг пространственной сетки много меньше длины волны λ , как правило, выбирается шаг менее $\lambda/6$. Предположим, что для модели динамики частиц справедливо аналогичное требование и целесообразно выбрать $d < \lambda/6$. Шаг по времени Δt предлагается выбирать исходя из условия Куранта $c\Delta t < d$ [31].

Траектории частиц рассчитываются согласно уравнениям движения с шагом по времени Δt на основе выражения:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{\mathbf{a}\Delta t^2}{2}, \quad (12)$$

где $\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}\Delta t$, $\mathbf{r}(t)$ — радиус вектор координаты частиц в момент времени t , $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ — ускорение частицы; $\mathbf{F}$ — сила, действующая на

рассматриваемую частицу со стороны соседних частиц (2); $\mathbf{r}_n$ — радиус вектор координаты соседних частиц.

В данной модели частицы являются материальными точками без вращательных степеней свободы. Каждая частица описывает некий конечный объем среды определенной массы. Несмотря на то, что рассматриваемая модель исходит из представления вещества в виде кристаллической решетки, замена атомов укрупненными частицами считается справедливой для длин волн много больше шага решетки. Частица описывается тремя координатами (x, y, z) в пространстве и тремя компонентами скорости (v_x, v_y, v_z) . Для каждой частицы хранятся в памяти номера 14-и соседних с ней частиц для ускорения вычисления силы взаимодействия.

Предложенный метод численного моделирования движения частиц в кристаллической решетке реализован на основе технологии параллельных вычислений Open MP. Распараллеливание алгоритма возможно благодаря независимому вычислению положения каждой частицы в следующий момент времени.

Для численного моделирования среда распространения волн была задана в виде параллелепипеда высотой 20 мм, шириной 20 мм и толщиной 6.4 мм. Шаг решетки d задан равным 50 мкм, шаг по времени $\Delta t = 2.5$ нс. В качестве моделируемой среды рассматривался кристалл германия ($C_{11} = 128.4$ ГПа, $C_{12} = 48.3$ ГПа, $C_{44} = 66.7$ ГПа, плотность 5327 кг/м³) с вставкой в виде прямоугольного объекта размерами 8×4 мм из кремния плотностью 2329 кг/м³ с соответствующими коэффициентами модели $C_{11} = 165.7$ ГПа, $C_{12} = 63.9$ ГПа, $C_{44} = 79.6$ ГПа. Коэффициенты модели вычислялись по формуле (10). В качестве источника задавалось начальное возмущение в виде изотропного цилиндрического расширения материала в центре с огибающей в виде функции Гаусса с шириной 200 мкм. На рис. 2а представлен результат моделирования распространения волн на основе динамики частиц (горизонтальная компонента скорости частиц). Для проверки достоверности результатов моделирования аналогичные расчеты проведены в программе COMSOL Multiphysics 5.3a: Solid Mechanics, Linear Elastic Material, Solid model — Anisotropic с прямоугольной сеткой с шагом 20 мкм. Наблюдается распространение волны, рассеяние на неоднородности, эффект преломления в неоднородном включении из кремния.

Можно видеть, что результаты моделирования на рис. 2а и рис. 2б качественно совпадают, что подтверждает возможность применения предложенного подхода для моделирования распространения волн.

В рамках модели частиц возможна реализация согласованной границы. Например, допускается

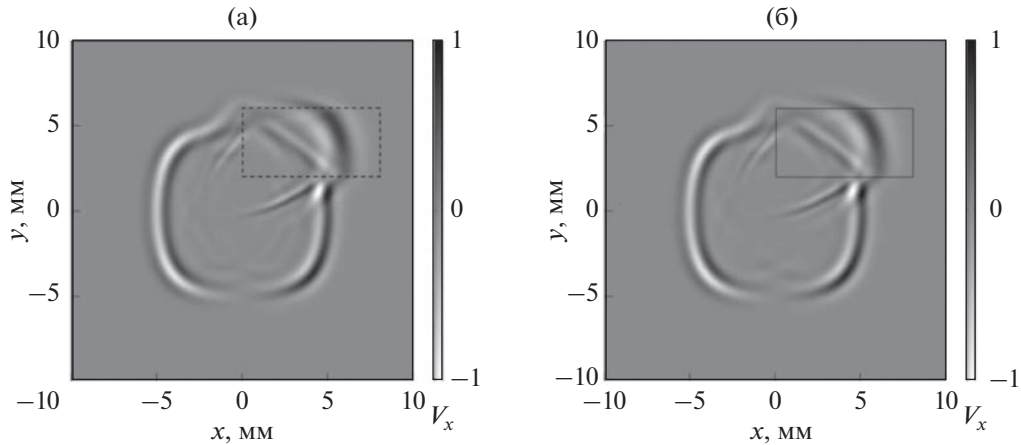


Рис. 2. Распределение горизонтальной компоненты скорости частиц для короткого импульса в пластине германия с неоднородным прямоугольным включением из кремния. (а) – Метод динамики частиц, (б) – COMSOL Multiphysics 5.3a: Solid Mechanics, Linear Elastic Material, Solid model – Anisotropic.

адаптация известного подхода на основе идеально-согласованного слоя (Perfect Matching Layer PML). Необходимо выделить около границы определенный слой среды, в котором реализовано плавное нарастание коэффициента поглощения μ при приближении к внешней границе среды. Методы PML хорошо изучены для волнового уравнения [32–36]. Учет затухания колебаний в рамках модели частиц целесообразно ввести как силу “трения” и переписать силу, действующую на частицу (2) в виде $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 - \mu \mathbf{v}$, где $\mu \mathbf{v}$ – сила “трения”; μ – коэффициент поглощения, описывающий затухание движения; $\mathbf{v}$ – скорость частицы относительно центра масс. Однако такой подход требует выделения дополнительного множества частиц и приведет к увеличению объема вычислений.

Предлагается другой подход для реализации согласованной границы, не требующий увеличения объема среды. Рассмотрим нормальное падение плоской волны, распространяющейся противоположно оси x на плоскую границу YOZ при $x = 0$. Сдвиги частиц опишем векторной функцией

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{g}\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (13)$$

где $\mathbf{g}(t)$ – функция, описывающая сигнал источника плоской волны, c – скорость распространения волны.

По сути, в ходе численного моделирования, в линейном приближении, проводится вычисление силы, действующей на частицу, по значениям координат частиц $\mathbf{U}(x, t)$ на дискретной сетке (8) в виде:

$$\mathbf{F} = k[(\mathbf{U}(x + d, t) - \mathbf{U}(x, t)) - (\mathbf{U}(x, t) - \mathbf{U}(x - d, t))]. \quad (14)$$

Однако на границе $x = 0$ второе слагаемое не может быть вычислено, поскольку величина $\mathbf{U}(x - d, t)$ не определена. Предлагается в (14) отдельно рассмотреть слагаемое $[\mathbf{U}(x, t) - \mathbf{U}(x - d, t)]$ при $x = 0$, которое приближенно выражается через первую пространственную производную в точке $x = -d/2$:

$$(\mathbf{U}(0, t) - \mathbf{U}(-d, t)) \approx d \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \Big|_{x=-d/2}.$$

С учетом (13) можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \Big|_{x=-d/2} &= \frac{\partial \mathbf{g}(t + x/c)}{\partial x} \Big|_{x=-d/2} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{g}(t')}{\partial t'} \Big|_{t'=t-d/2c} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{U}(0, t')}{\partial t'} \Big|_{t'=t-d/2c} = \frac{1}{c} \mathbf{v}\left(t - \frac{d}{2c}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mathbf{v}\left(t - \frac{d}{2c}\right)$ – скорость пограничной частицы, находящейся в точке $x = 0$, в момент времени $t' = t - \frac{d}{2c}$. Из (15) следует, что на границе $x = 0$:

$$\mathbf{F} \approx k \left[(\mathbf{U}(x + d, t) - \mathbf{U}(x, t)) - \frac{d}{c} \mathbf{v}\left(t - \frac{d}{2c}\right) \right]. \quad (16)$$

В рассматриваемой модели на пограничную частицу будет действовать только сила со стороны соседней частицы, находящейся в положении $x > 0$, что описывается первым слагаемым в (16). Второе слагаемое необходимо внести дополнительно в виде силы трения пропорциональной скорости пограничной частицы, действующей с запаздыванием по времени $\frac{d}{2c}$:

$$\mathbf{F}_e = -\frac{kd}{c} \mathbf{v}\left(t - \frac{d}{2c}\right). \quad (17)$$

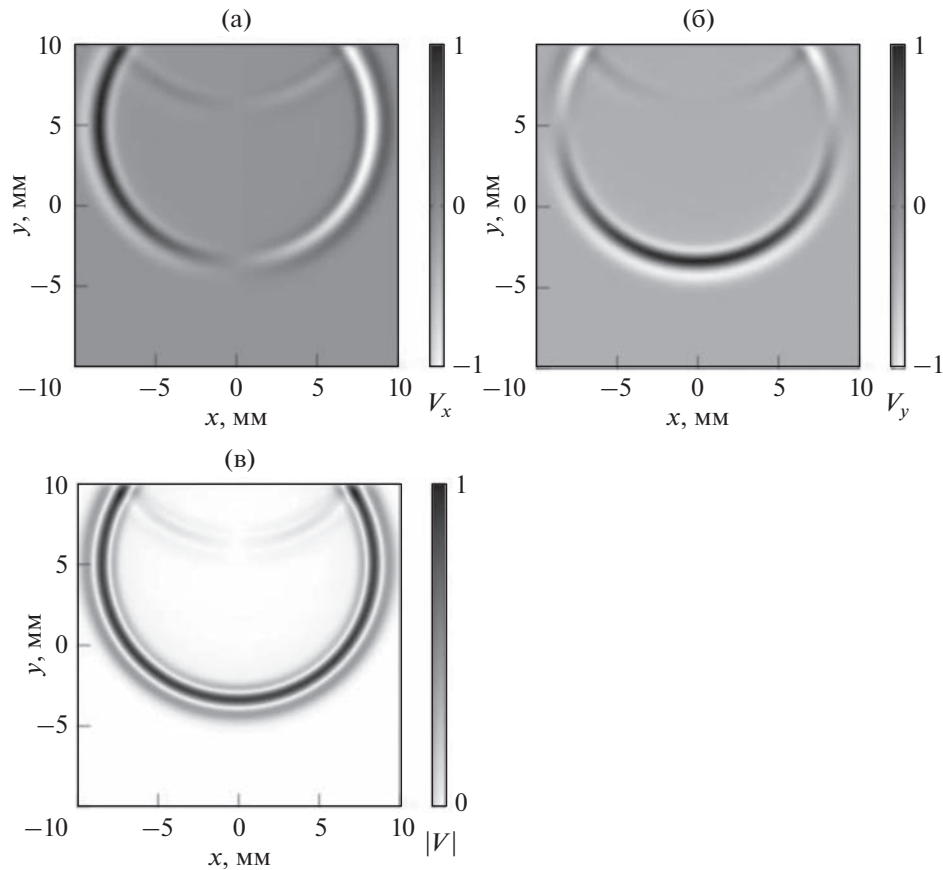


Рис. 3. Моделирование согласованной границы. Показано поле скоростей цилиндрической волны в жидкости. (а) — Компонента скорости по оси x , (б) — компонента скорости по оси y , (в) — модуль вектора скорости. При нормальном падении волна не отражается.

В итоге, для моделирования согласованной границы необходимо хранить в памяти скорости пограничных частиц в интервале времени $\frac{d}{2c}$. Предложенный подход почти не увеличивает количество вычислений, а только требует выделения дополнительной памяти. Данный метод применим для волн, падающих по нормали; для волн, падающих под углом, будут возникать отраженные волны малой амплитуды.

Проверка предлагаемой реализации согласованной границы была проведена путем моделирования распространения цилиндрической волны в жидкости со скоростью звука 1400 м/с для источника с сигналом в виде биполярного импульса длительностью 0.5 мкс. Источник располагался в точке $(x = 0, y = 5 \text{ мм})$, шаг решетки $d = 0.1 \text{ мм}$. На рис. 3 представлено поле скоростей цилиндрической волны после падения на верхнюю согласованную границу. Можно видеть, что часть волнового фронта с нормальным падением на границу не отразилась, но при увеличении угла падения возникает отраженное поле. Тем не менее, амплитуда отраженной волны значительно меньше амплитуды падающей.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ

Предлагается решение обратной задачи, основанное на обращении времени, что должно обеспечить восстановление исходного состояния системы частиц к моменту внесения источников. Если задать координаты и скорости всех частиц, то возможно восстановить их исходное состояние во все предыдущие моменты времени и обнаружить место возникновения источника возмущения. На практике невозможно измерить координаты и скорости всех частиц в объеме, но возможно проводить измерения продолжительное время для некоторых участков на поверхности исследуемого объекта. Рассмотрим измерение одной из компонент скоростей частиц, распределенных на плоской поверхности, в течение продолжительного времени. Для восстановления скоростей и координат частиц в прошлые моменты времени предлагается рассмотреть изначально невозмущенную среду и внести в нее возмущения координат частиц, находящихся на плоскости измерений, согласно интегралу по времени от измеренной скорости частиц (с учетом того, что время отсчитывается в обратную сторону). Таким образом, реализуется обратное распространение волн

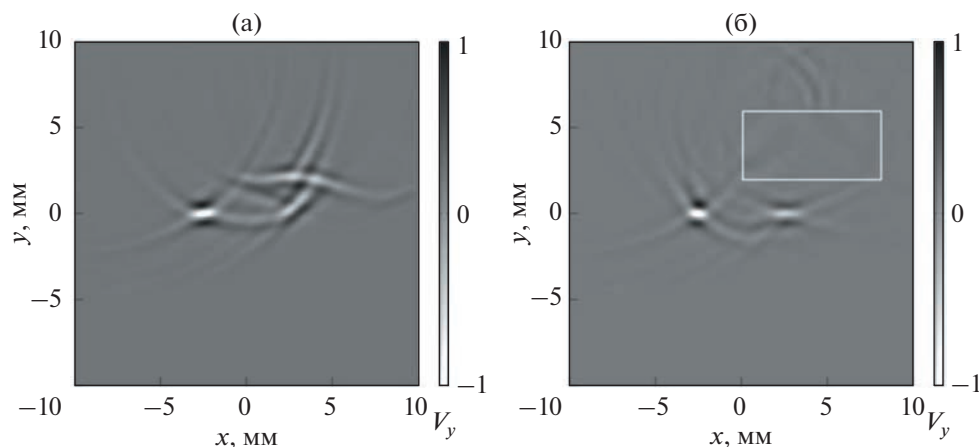


Рис. 4. Восстановленное изображение двух изотропных источников в неоднородной среде (а) — без учета неоднородности и (б) — с учетом неоднородности (белым прямоугольником показана неоднородность), визуализирована вертикальная компонента скорости частиц.

тем же способом численного моделирования, что и прямая задача, но здесь шаг по времени принимается отрицательным.

В нашем случае, точки приема располагаются на верхней границе объема моделирования, поэтому волна обратного распространения будет проходить сверху вниз. В точках, где находятся моделируемые излучатели в объеме среды, волны обратного распространения сходятся.

Было проведено численное моделирование двух изотропных источников в неоднородной среде. Среда распространения волн была задана в виде параллелепипеда размерами $20 \times 20 \times 1$ мм с шагом размещения частиц 0.1 мм и шагом по времени $\Delta t = 10$ нс. В качестве моделируемой среды рассматривалась вода (скорость звука 1440 м/с, плотность 1000 кг/м^3). Неоднородность представляла собой параллелепипед размерами $4 \times 2 \times 1$ мм и затеняла один из источников цилиндрических волн. Скорость звука в материале неоднородного включения была задана равной 2880 м/с, а плотность 500 кг/м^3 , для согласования с водой. В центре области моделирования располагались два источника цилиндрических волн, находящихся на расстоянии 5 мм друг от друга. Источники в начальный момент времени синхронно излучали короткий биполярный импульс длительностью 250 нс. В ходе решения прямой задачи записывалось пространственное распределение вертикальной компоненты скорости колебаний частиц на верхней границе (область измерений) в течение 15 мкс. За это время акустические импульсы продольных волн успевали дойти до области измерений.

В результате решения обратной задачи методом обращения времени без учета влияния неоднородности было получено изображение (рис. 4а),

на котором визуализируется только один источник, не перекрытый неоднородностью. После учета влияния неоднородности были визуализированы оба источника (рис. 4б). Видно, что без учета неоднородности изображение источника искажается. Изображения частиц сглажены для улучшения визуализации. Полученные изображения точечных источников имеют искажения, поскольку апертура области измерений ограничена и не охватывает все поле излучения. При этом примененный метод не позволяет восстанавливать поле неоднородных волн.

В рассматриваемом случае граница раздела среды и неоднородности имеет низкий коэффициент отражения, поэтому интенсивность восстановленного изображения затененного неоднородностью источника сравнима с интенсивностью незатененного. В целом результаты численного моделирования показывают возможность восстановления источников в неоднородной среде предложенным методом.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Была проведена экспериментальная проверка возможности восстановления ультразвуковых излучателей в воде методом обратного распространения волн в модели динамики частиц. Для визуализации ультразвуковых излучателей в воде, в качестве экспериментальной установки использовался двухкоординатный сканер, на котором закреплялся приемник (рис. 5).

Ультразвуковые излучатели диаметром 10 мм с центральной частотой 200 кГц погружались в воду на глубину 55 мм. Ультразвуковой приемник крепился на двухкоординатном сканере в соответствии со схемой измерений, представленной на рис. 5. Измерение пространственного распре-

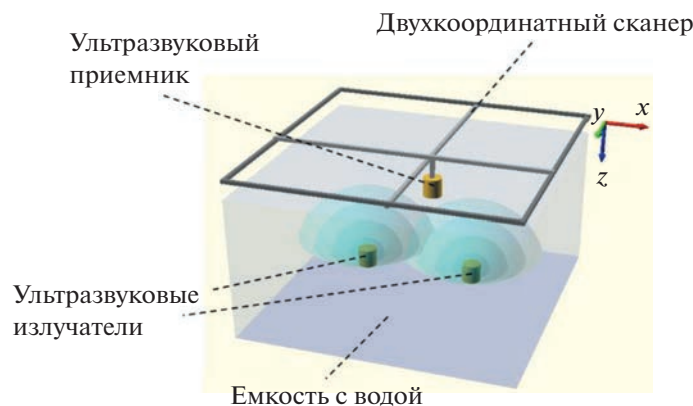


Рис. 5. Схема измерения поля ультразвуковых излучателей через воду.

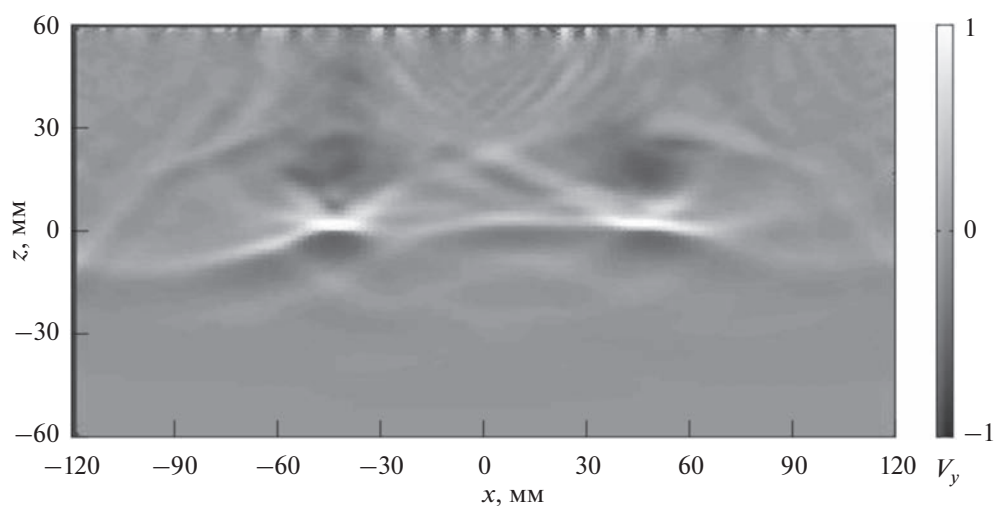


Рис. 6. Восстановленное изображение двух ультразвуковых излучателей в воде методом обращения времени в модели частиц.

деления поля проводилось на области 240×240 мм. В качестве зондирующего сигнала применялся сверхширокополосный сигнал в диапазоне частот 60–340 кГц (по уровню 0.1 от максимальной амплитуды в спектре). Сигнал, полученный по результатам измерений, представляет собой трехмерный массив данных — сигнал в зависимости от времени и двух координат датчика на плоскости. Для решения обратной задачи измеренный в ходе эксперимента сигнал вносился в численную модель в виде возмущения координат частиц, расположенных на верхней границе расчетной области (излучателей), а направление хода времени было изменено на обратное. В области нахождения ультразвуковых излучателей волны обратного распространения сходятся, что позволяет визуализировать ультразвуковые излучатели. На рис. 6 представлен результат восстановления изображения ультразвуковых излучателей в воде методом обращения времени в модели частиц. Изображения источников искажены из-за ограниченности апертуры области измерений.

Была проведена также экспериментальная проверка возможности визуализации отверстия в звуконепроницаемом экране, имитирующем звукоизлучающий объект сложной формы в воде (рис. 7). Звуконепроницаемый экран погружался в емкость с водой (рис. 8), а под отверстием в экране на расстоянии 24.3 см от него размещался ультразвуковой излучатель. Измерение поля, рассеянного от отверстия в звуконепроницаемом экране, проводилось на области 188×188 мм. На рис. 9 представлен результат пространственного измерения поля, дифрагированного на отверстии в звуконепроницаемом экране.

После обработки данных измерений предложенным методом было получено трехмерное поле волн обратного распространения. В момент времени 175 мкс и на глубине размещения экрана визуализируется изображение отверстия. Результат восстановления изображения отверстия в звуконепроницаемом экране представлен на рис. 10. Для более контрастного выделения изображения отверстия было проведено интегрирование квад-

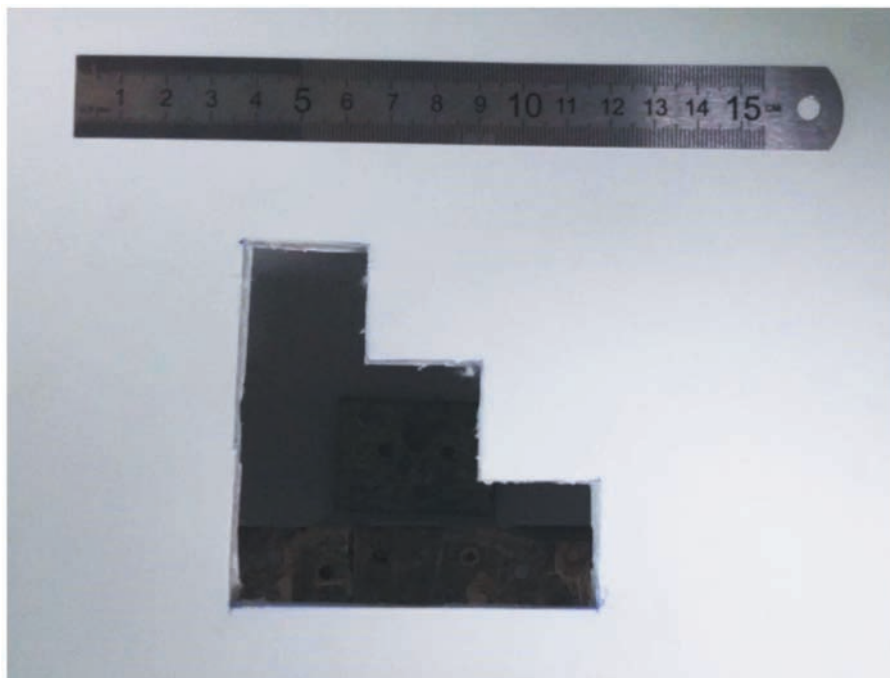


Рис. 7. Фотография отверстия в звукопроницаемом экране, имитирующем звукоизлучающий объект сложной формы.

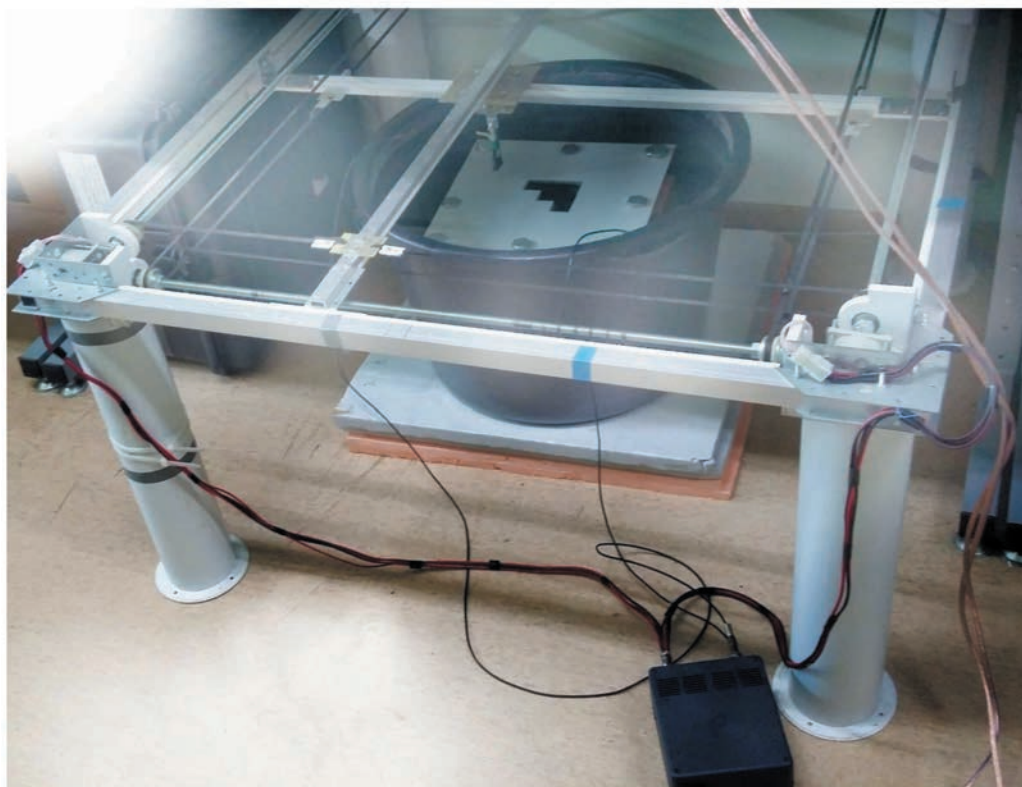


Рис. 8. Фотография эксперимента по двухкоординатному сканированию акустического поля звукопроницаемого экрана, погруженного в воду.

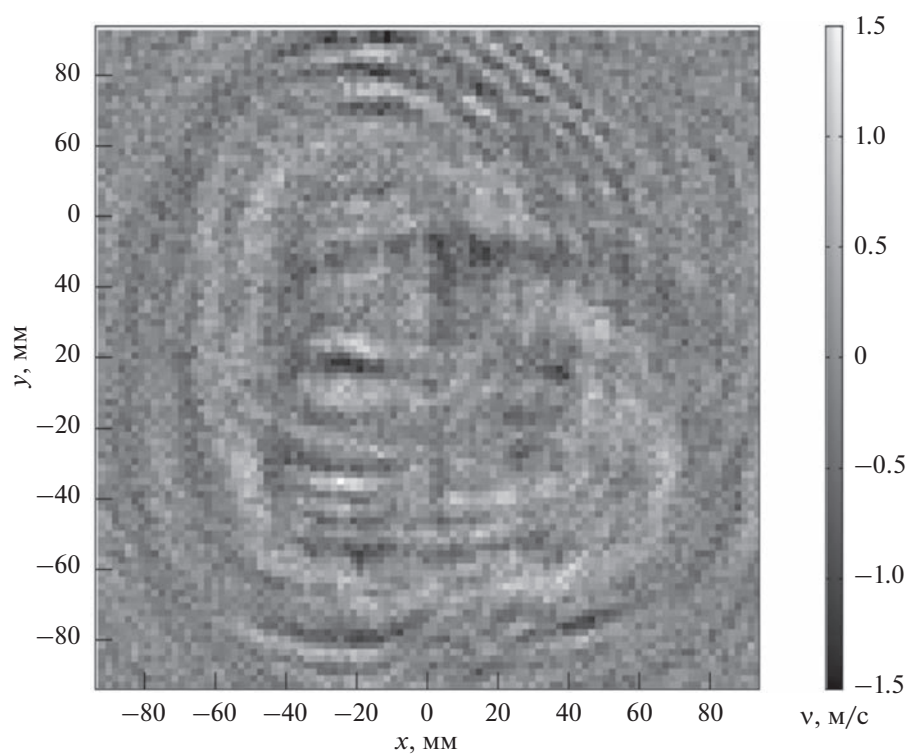


Рис. 9. Результат измерения поля, рассеянного от отверстия в звуконепроницаемом экране, в момент времени 275 мкс после начала излучения.

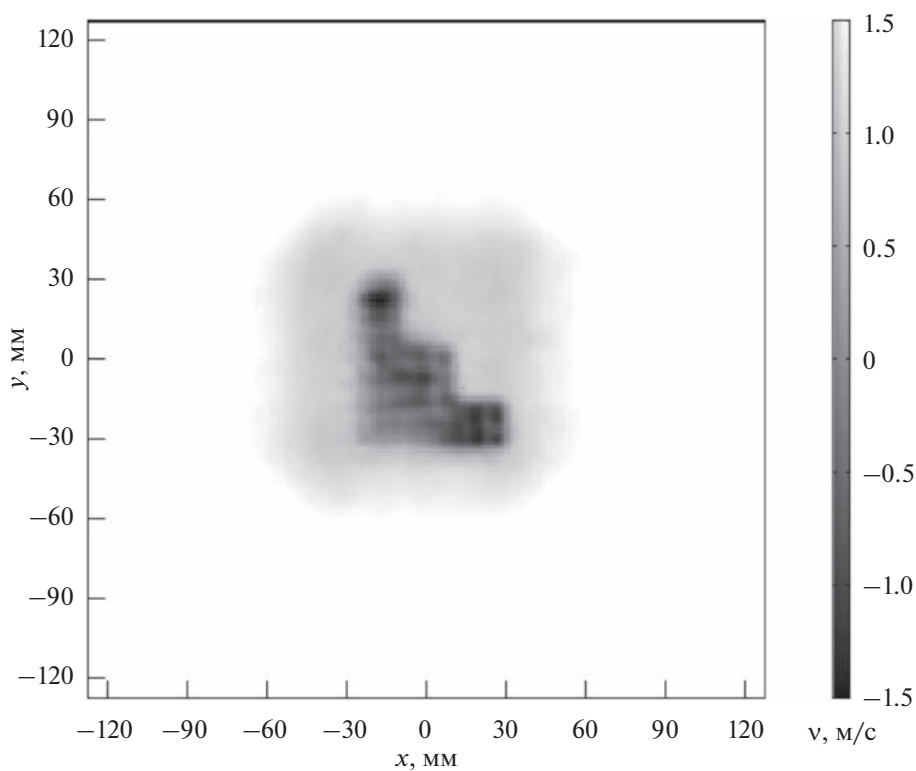


Рис. 10. Результат восстановления изображения отверстия в звуконепроницаемом экране методом обращения времени в модели частиц.

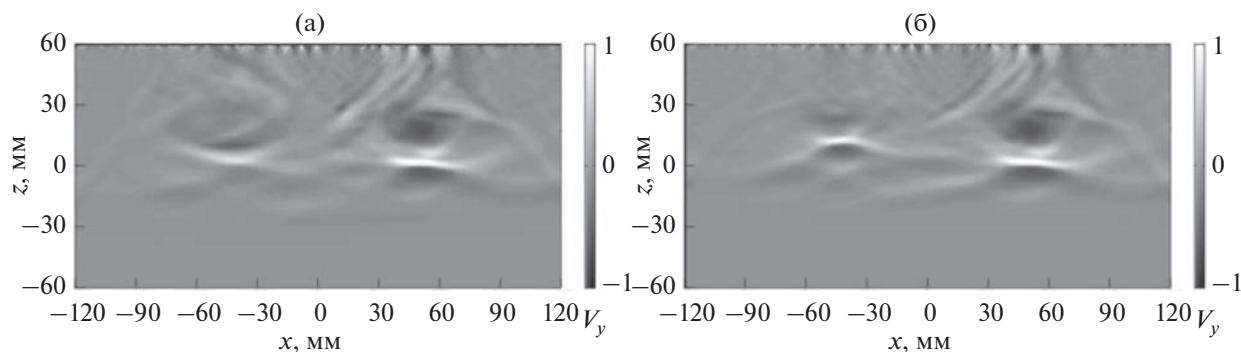


Рис. 11. Результат восстановления источников за звукопроводящей неоднородностью. (а) — С учетом влияния неоднородности, (б) — без учета влияния неоднородности.

рата амплитуды восстанавливаемых полей на глубине отверстия по времени от 154 до 175 мкс.

На восстановленном изображении можно различить изображение объекта, что свидетельствует о соответствии выбранной математической модели физическим процессам распространения акустических волн.

Для исследования возможности восстановления источников, скрытых за неоднородными преградами, был проведен эксперимент с двумя излучателями, погруженными в воду, один из которых был закрыт пластиной из поликарбоната (скорость звука 2800 м/с, плотность 586 кг/м³) толщиной 23 мм. Можно видеть, что если звукопроводящая неоднородность, затеняющая один из ультразвуковых излучателей, не учитывается, то изображение излучателя восстанавливается выше своего истинного положения, а при учете звукопроводящей неоднородности изображение излучателя восстанавливается в соответствии с его истинным положением. При этом интенсивность восстановленного изображения излучателя, перекрытого пластиной, меньше, поскольку при прохождении через преграду амплитуда волны уменьшается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод численного восстановления источников акустических волн по измерениям поля на некоторой поверхности на основе представления среды в виде множества частиц и обращения распространения акустических волн во времени. Представлены результаты численного моделирования восстановления источников акустических волн в однородной среде, а также показана возможность восстановления излучателей в неоднородной среде с учетом неоднородности скорости и плотности.

Проведены экспериментальные исследования в воде по восстановлению ультразвуковых излучателей и визуализации отверстия в звукопро-

ницаемом экране. Результаты экспериментов и численного моделирования показывают возможность визуализации ультразвуковых излучателей и затеняющих объектов в воде предложенным методом, что свидетельствует о соответствии предложенной математической модели акустическим процессам в рассмотренной системе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-32-90074.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свет В.Д. Экспериментальное восстановление звукового поля точечного источника в волноводе // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 733–739.
2. Tappert F.D., Nghiem-Phu L., Daubin S.C. Source localization using the PE method // J. Acoust. Soc. Am. 1985. V. 78. P. 68–75.
3. Еремин А.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Ламмеринг Р. Локализация неоднородностей в упругой пластине методом обращения волн // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 5. С. 523–531.
4. Беседина Т.Н., Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Переселков С.А. Локализация источника звука в океанических волноводах // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 207–215.
5. Sarvazyan A.P., Urban M.W., Greenleaf J.F. Acoustic waves in medical imaging and diagnostics // Ultrasound Med. Biol. 2013. V. 39. № 7. P. 1133–1146.
6. Суханов Д.Я., Калашникова М.А. Дистанционная ультразвуковая дефектоскопия звукоизлучающих объектов через воздух // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 3. С. 279.
7. Зверев В.А. Принцип акустического обращения волн и голография // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 6. С. 792–801.
8. Зверев В.А., Коротин П.И., Стромков А.А. Пространственная протяженность области акустического обращения волн // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 5. С. 823–830.
9. Синельников Е.Д., Сутин А.М., Сарвазян А.П. Обращение времени в фокусирующих излучателях и

- приемниках ультразвука // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 206–217.
10. Лямшев Л.М., Саков П.В. Обращение волнового фронта при нелинейном рассеянии звука на пульсирующей сфере // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 127–134.
 11. Denison M.H., Anderson B.E. The effects of source placement on time reversal focusing in rooms // *Applied Acoustics*. 2019. V. 156. № 15. P. 279–288. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2019.07.026>
 12. Alder B.J., Wainwright T.E. Studies in Molecular Dynamics. I. General Method // *J. Chem. Phys.* 1959. V. 31. № 2. P. 459–466.
 13. Xu C., Wu G., Du F., Zhu W., Mahdavi S.H. A Modified Time Reversal Method for Guided Wave Based Bolt Loosening Monitoring in a Lap Joint // *J. Nondestructive Evaluation*. 2019. V. 38. № 4. P. 1–13. <https://doi.org/10.1007/s10921-019-0626-1>
 14. Гордин О.А., Кацнельсон Б.Г., Qin Jixing, Brown M.G., Заботин Н.А., Zang Xiaolin. Использование обращения волнового фронта для пассивного акустического зондирования океана // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 3. С. 283–295.
 15. Буров В.А., Румянцева О.Д. Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 1: Обратные задачи излучения в акустике. М.: Ленанд, 2017. 384 с.
 16. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 152 с.
 17. Смагин Н.В., Крутянский Л.М., Зеленова З.В., Брысев А.П. Измерение коэффициента акустического поглощения в образцах биологических тканей с помощью обращенных ультразвуковых волн // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 199–203.
 18. Сапожников О.А., Пицальников Ю.А., Морозов А.В. Восстановление распределения нормальной скорости на поверхности ультразвукового излучателя на основе измерения акустического давления вдоль контрольной поверхности // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 416–424.
 19. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 304 с.
 20. Nosé S. A molecular dynamics method for simulations in the canonical ensemble // *Molecular Physics: An International Journal at the Interface between Chemistry and Physics*. 1984. V. 52. № 2. P. 255–268.
 21. Gould H., Tobochnik J., Christian W. An Introduction to Computer Simulation Methods. Chapter 8. Third edition. 2005. P. 267–268.
 22. Шайтан К.В., Сарайкин С.С. Молекулярная динамика. 1999. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.library.biophys.msu.ru/MolDyn/>
 23. Лагунов В.А., Синани А.Б. Компьютерное моделирование деформирования и разрушения кристаллов // *Физика твердого тела*. 2001. Т. 43. № 4. С. 644–650.
 24. Hoang H., Galliero G. Grand canonical-like molecular dynamics simulations: Application to anisotropic mass diffusion in a nanoporous medium // *J. Chem. Phys.* 2012. V. 136. P. 184702-1–184702-11. <https://doi.org/10.1063/1.4712139>
 25. Baidakov V.G., Tipeev A.O., Bobrov K.S., Ionov G.V. Crystal nucleation rate isotherms in Lennard-Jones liquids // *J. Chem. Phys.* 2010. V. 132. № 23. <https://doi.org/10.1063/1.3439585>
 26. Parrinello M., Rahman A. Crystal Structure and Pair Potentials: A Molecular-Dynamics Study // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 1196–1199.
 27. Parrinello M., Rahman A. Polymorphic Transitions in Single Crystals: A New Molecular Dynamics Method // *J. Appl. Phys.* 1981. V. 52. P. 7182–7190. <https://doi.org/10.1063/1.328693>
 28. Zuckerman N., Lukes J.R. Acoustic phonon scattering from particles embedded in an anisotropic medium: A molecular dynamics study // *Phys. Rev. B*. 2008. V. 77. № 9. P. 094302-1–094302-20.
 29. Суханов Д.Я., Кузовова А.Е. Моделирование волновых процессов методом динамики частиц // *Математическое моделирование*. 2020. Т. 32. № 10. С. 119–134.
 30. Павлов П.В., Хохлов А.Ф. Физика твердого тела. М.: Высшая школа, 2000. С. 179–180.
 31. Marburg S. Six boundary elements per wavelength: Is that enough? // *J. Comp. Acoust.* 2002. V. 10. № 1. P. 25–51. <https://doi.org/10.1142/S0218396X02001401>
 32. Liu Q.H., Jianping T.J. The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. V. 102. № 4. P. 2072–2082.
 33. Diaz J., Joly P. A time domain analysis of PML models in acoustics // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006. V. 195. P. 3820–3853.
 34. Hastings F.D., Schneider J.B., Broschat S.L. Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation // *J. Acoust. Soc. Am.* 1996. V. 100. № 5. P. 3061–3069.
 35. Kim D. A Modified PML Acoustic Wave Equation // *Symmetry*. 2019. V. 177. № 11. P. 1–15.
 36. Chern A. A reflectionless discrete perfectly matched layer // *J. Comp. Phys.* 2019. V. 381. P. 91–109.

АКУСТИКА ЖИВЫХ СИСТЕМ.
БИОМЕДИЦИНСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.7

ЛАЗЕРНАЯ ВИБРОМЕТРИЯ СДВИГОВЫХ ВОЛН В СЛОЕ ГЕЛЕОБРАЗНОЙ СРЕДЫ

© 2023 г. Ш. А. Асфандияров^а, А. А. Агафонов^а, А. И. Коробов^а, В. Г. Андреев^а, *

^аМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, Ленинские горы, Москва, 119991 Россия

*e-mail: andreev@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 22.02.2023 г.

После доработки 03.08.2023 г.

Принята к публикации 19.09.2023 г.

С помощью лазерного сканирующего виброметра измерены амплитуды и фазы колебательной скорости сдвиговых волн, возбуждаемых одномерным источником в виде узкого прямоугольного бруска в гелеобразной среде. Измерялись колебания 26 пластинок, отражающих лазерный луч и расположенных внутри оптически прозрачного фантома вдоль отрезка длиной 84.5 мм на расстоянии 20 мм от источника. В непрерывном режиме измерены угловые распределения амплитуды и фазы сдвиговых волн на дискретных частотах от 59 до 500 Гц. В импульсном режиме вибратор возбуждал в среде импульс длительностью 1.5 периода частоты 300 Гц. Амплитуды и фазы сдвиговых волн вычислялись путем быстрого преобразования Фурье временного профиля скорости колебаний пластинок длительностью 50 мс. Угловые распределения амплитуды, измеренные в импульсном и непрерывном режимах, качественно совпадают. На всех частотах распределения симметричны по отношению к вертикальной оси. Максимум амплитуды колебаний наблюдается при углах, близких к $\pm 45^\circ$. Скорость сдвиговых волн, рассчитанная по измеренным фазовым распределениям, возрастает от 2 до 2.5 м/с при изменении частоты от 50 до 500 Гц. Показано, что такое поведение скорости хорошо описывается релаксационной моделью среды с одним временем релаксации, равным 0.3 мс. Затухание сдвиговой волны зависит от частоты и превышает 1 см^{-1} для волн с частотами более 250 Гц. Максимум затухания на длину волны наблюдается вблизи частоты релаксации среды в диапазоне 300–400 Гц. Полученные результаты могут быть использованы при оптимизации устройств для измерения упругости мягких тканей.

Ключевые слова: лазерная виброметрия, сдвиговые волны, вязкоупругая среда, одномерный вибратор, релаксационная модель среды

DOI: 10.31857/S0320791923600634, **EDN:** CQHJXF

ВВЕДЕНИЕ

Сдвиговая упругость мягких тканей является информативным параметром при диагностике различных заболеваний [1]. В современных ультразвуковых диагностических приборах экспертного класса имеются специальные режимы, позволяющие визуализировать и измерять распределение сдвигового модуля в различных органах и выявлять патологические изменения. Они основаны на возбуждении сдвиговых волн сфокусированным ультразвуком и их последующей регистрации путем корреляционной обработки пробных УЗ импульсов, рассеянных на находящихся в движении частицах среды [2, 3]. Альтернативой может служить метод измерения упругости ткани, в основе которого лежит возбуждение низ-

кочастотных колебаний на поверхности тканей и измерение скорости сдвиговых волн, распространяющихся в объеме среды [4–6]. Использование низкочастотных вибраторов является привлекательным с точки зрения простоты и относительной дешевизны таких устройств. Однако сильное затухание сдвиговых волн с частотами порядка нескольких сотен Гц ограничивает глубину диагностики тканей несколькими сантиметрами. Уменьшение частоты приводит к падению пространственного разрешения, что снижает диагностическую ценность результатов. Следует также учитывать, что измерения проводятся в ближнем поле низкочастотных вибраторов, пространственная структура которого достаточно сложна. С такой проблемой постоянно сталкиваются разработчики устройств оптической эластографии, в которых смещения частиц среды измеряются методом оптической когерентной томографии [7].

Дополнительная информация для этой статьи доступна по doi 10.31857/S0320791923600634 для авторизованных пользователей.

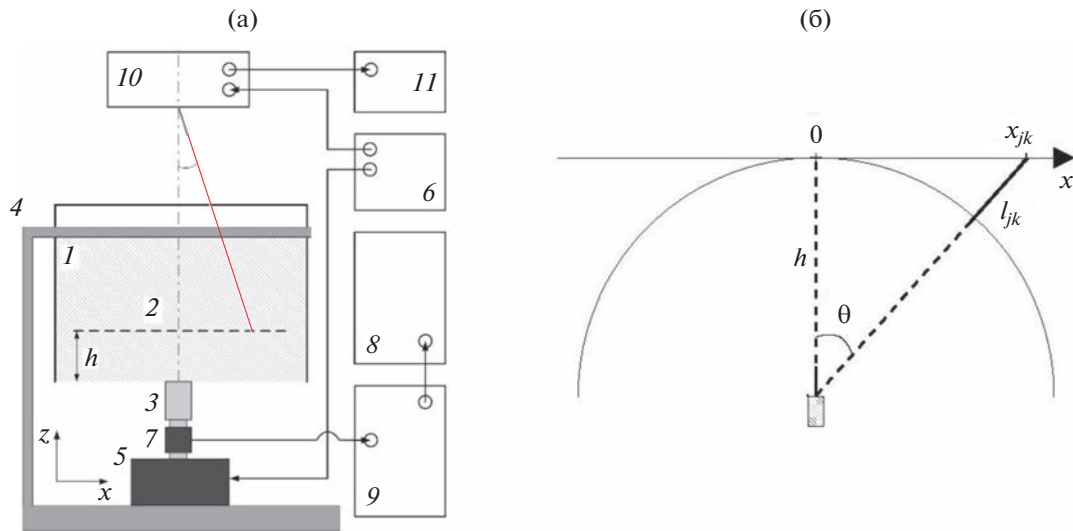


Рис. 1. (а) — Схема экспериментальной установки. 1 — желатиновый фантом, 2 — отражающие пластинки, 3 — низкочастотный излучатель, 4 — держатель, 5 — вибратор, 6 — генератор сигналов, 7 — акселерометр, 8 — осциллограф, 9 — усилитель заряда, 10 — лазерный виброметр, 11 — компьютер. (б) — Схема распространения фронта цилиндрической сдвиговой волны.

В связи с этим постоянно развиваются теоретические подходы и экспериментальные методы, позволяющие достаточно точно описывать структуру поля низкочастотных вибраторов в гелеобразной среде. Использование лазерного виброметра, способного бесконтактно измерять колебания частиц среды под действием сдвиговых волн, является перспективным для решения указанной проблемы [8]. Целью настоящей работы было изучение пространственной структуры сдвиговых волн, возбуждаемых одномерным источником в гелеобразной среде, методом лазерной виброметрии.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Измерения колебательной скорости v сдвиговых упругих волн, возбуждаемых низкочастотным излучателем, проводились в желатиновом фантоме 1 цилиндрической формы диаметром 100 мм и высотой 60 мм (рис. 1). Фантом находился в пластиковой емкости, его нижняя и верхняя поверхности были свободны. На расстоянии 20 мм от нижней границы вдоль диаметральной линии располагались 26 пластинок 2 размером 2×2 мм, изготовленных из тонкой алюминиевой фольги. Зазор между соседними пластинками составлял 1.3 мм с погрешностью, не превышающей 0.1 мм. Пластины были хорошо видны в оптически прозрачном фантоме и служили отражателями лазерного излучения виброметра.

В качестве низкочастотного излучателя 3 использовался брусок квадратного сечения со стороной 8 мм и длиной 50 мм, который совершал

колебания вдоль вертикальной оси z . Брусок приклонялся к нижней свободной поверхности фантома и устанавливался так, чтобы его длинная сторона была перпендикулярна линии отражающих пластинок, а геометрический центр находился на вертикальной оси фантома. Фантом закреплялся в подвижном держателе 4 на высоте, позволяющей установить под ним низкочастотный излучатель. Колебания на частотах 50–500 Гц возбуждались с помощью вибратора 5 Brüel & Kjær 4810, который подключался к генератору сигналов 6 Rigol DG1062Z. Амплитуда колебаний излучателя измерялась одноосным акселерометром 7 Brüel & Kjær 8305, который был подключен к входу осциллографа 8 Keysight DSO9104A через усилитель заряда 9 Brüel & Kjær 2635. Подвижная часть вибратора 5, акселерометр 7 и брусок 3 жестко соединялись друг с другом с помощью резьбового соединения. При измерениях в непрерывном режиме амплитуда ускорения излучателя на всех частотах была примерно одинаковой и составляла 6 м/с^2 . Сдвиговая волна, возбуждаемая излучателем, распространялась в гелеобразной среде и вызывала колебания отражающих пластинок. Поскольку пластинки были легкими и замороженными в среде, то скорость их колебаний соответствовала колебательной скорости волны v . Измерения скорости колебаний отражающих пластинок производились с помощью сканирующего лазерного виброметра 10 Polytec PSV-300, подключенного к компьютеру 11. Синхронизация виброметра осуществлялась сигналом генератора 6. В процессе измерений скорости колебаний пластинок луч виброметра сканировался вдоль продольной оси x в диапазоне от -43.2 до

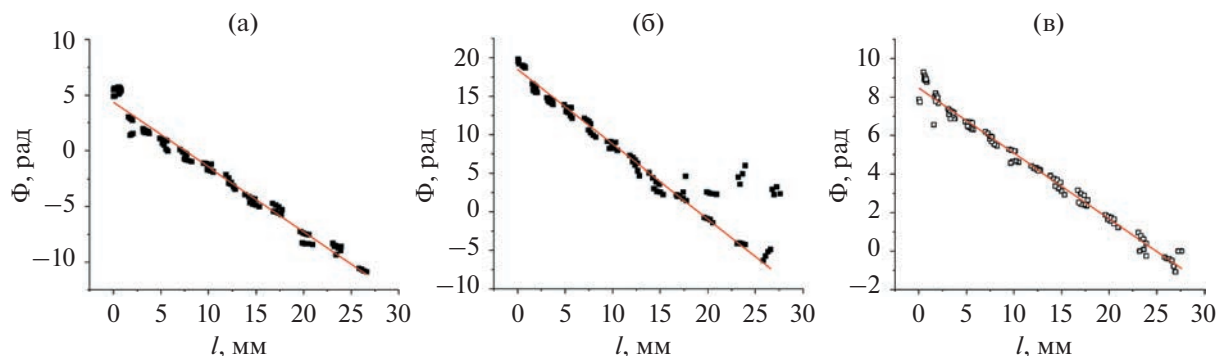


Рис. 2. Зависимости фазы сдвиговой волны от разности хода l , измеренные для (а, б) — непрерывного и (в) — импульсного режимов. Аппроксимации линейными зависимостями, построенными методом наименьших квадратов, показаны линиями. Частота волны (а) — 200, (б) — 400, (в) — 120 Гц.

+42 мм, что соответствовало изменению угла сканирования от -11° до $+11^\circ$. Нулевое значение угла сканирования, отсчитываемого от вертикали, соответствовало направлению на центр излучателя. При таких малых углах скорость, измеряемая вдоль направления лазерного луча, соответствовала вертикальной компоненте с погрешностью менее 2%. На каждой пластинке измерения проводились в четырех последовательных точках, расположенных на расстоянии 0.6 мм друг от друга вдоль линии сканирования. В режиме непрерывных колебаний вибратора колебательная скорость волны измерялась на дискретных частотах: 59, 96, 150, 200, 250, 300, 400, 500 Гц. Время накопления сигнала при измерениях в одной точке составляло 2 с, что позволяло измерять колебательную скорость в полосе от 0 до 1 кГц с разрешением 0.5 Гц.

На рис. 1б представлена схема распространения фронта цилиндрической сдвиговой волны. Излучатель, расположенный на расстоянии h от линии пластинок, изображен в виде заштрихованного прямоугольника. Измерения проводились в дискретных точках с координатами x_{jk} , где $j = 1, 2, \dots, 26$ соответствует номеру пластинки, $k = 1, 2, 3, 4$ — номеру точки на пластинке. Нумерация точек начиналась с крайней правой точки ($x_{11} = 42$ мм). В режиме непрерывных колебаний с частотой ω в каждой точке x_{jk} измерялась колебательная скорость волны $v_{jk} = V_{jk} e^{-i(\omega t + \Phi_{jk})}$, где V_{jk} , Φ_{jk} — амплитуда и фаза колебательной скорости волны. Фаза волны Φ_{jk} сдвинута по отношению к фазе Φ_0 в точке $x = 0$ на величину

$$\Phi_{jk} - \Phi_0 = \frac{\omega}{c_t} l_{jk} = \frac{\omega}{c_t} (\sqrt{h^2 + x_{jk}^2} - h), \quad (1)$$

где l_{jk} — разность хода волн, приходящих в точки с координатами $x = 0$ и x_{jk} , c_t — фазовая скорость сдвиговой волны, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота волны.

На рис. 2а, 2б показаны результаты измерений фазы волны на частоте 200 и 400 Гц в различных точках на поверхности пластинок в зависимости от разности хода l_{jk} . Точки сгруппированы по четыре по числу измерений на каждой пластинке. По мере удаления точек от излучателя абсолютное значение фазы волны увеличивается. Эти данные аппроксимировались линейной зависимостью $\Phi = al + b$ методом наименьших квадратов. Фазовая скорость сдвиговой волны на фиксированной частоте f рассчитывалась по формуле $c_t = 2\pi f a^{-1}$.

При измерениях в импульсном режиме на низкочастотный вибратор подавалось напряжение длительностью в один период частоты 300 Гц с периодом повторения 1 с. Производилась запись временного профиля скорости колебаний пластинок с частотой дискретизации 5120 Гц. Длительность записи составляла 0.2 мс, что соответствовало 1024 дискретным отсчетам. Профиль скорости фильтровался в полосе от 100 до 420 Гц.

Для вычисления амплитуды и фазы скорости колебаний пластинок в импульсном режиме использовался спектральный анализ профилей скорости [9]. Профили колебательных скоростей v , измеренные в центральных точках четвертой и одиннадцатой пластинок с координатами $x = 30.8$ и 8.5 мм, показаны на рис. 3а пунктирной и сплошной линиями соответственно. Профиль высокоамплитудной части каждого импульса имеет длительность порядка 1.5 периода колебаний частоты 300 Гц, что соответствует виду профиля колебаний поверхности излучателя (штриховая линия в начале временной оси). Скорость колебаний излучателя надежно детектировалась, поскольку его поверхность была отполирована и служила хорошим отражателем лазерного луча. Мы считали, что форма сдвиговой волны, распространяющейся в среде и вызывающей колебания пластинок, имеет такой же вид. С увеличением координаты x время прихода высокоамплитуд-

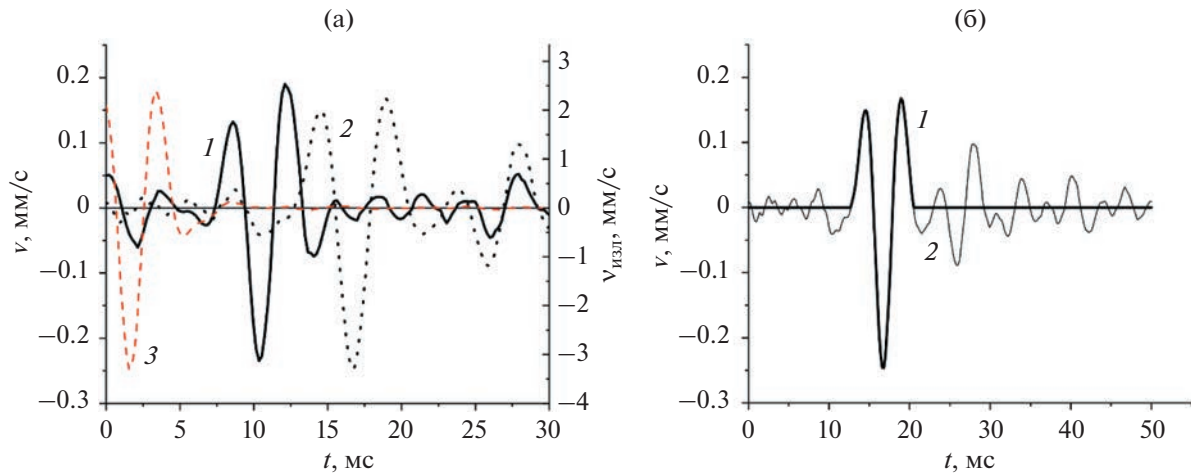


Рис. 3. (а) — Профили скорости колебаний пластинок, измеренные в центральных точках четвертой ($x = 8.5$ мм, кривая 1) и одиннадцатой ($x = 30.8$ мм, кривая 2) пластинок. Кривая 3 — профиль скорости колебаний поверхности излучателя. (б) — Высокоамплитудная часть импульсного сигнала (кривая 1), выделенная из всего измеренного сигнала в одиннадцатой точке (кривая 2), для которой рассчитывался спектр методом БПФ.

ной части импульса сдвиговой волны также увеличивается. Для вычислений амплитудного и фазового спектров применялось быстрое преобразование Фурье (БПФ) для сигнала во временном окне длительностью 50 мс, что соответствовало 256 отсчетам (рис. 3б). В этом окне из профиля измеренного импульса выделялась его высокоамплитудная часть, соответствующая сдвиговой волне, а все остальные отсчеты обнулялись (жирная линия на рис. 3б). Были рассчитаны спектры импульсов на различных расстояниях от излучателя в диапазоне 80–420 Гц с дискретностью 20 Гц. На рис. 2в показан результат расчетов фазы волны на частоте 120 Гц в зависимости от разности хода l_{jk} . Погрешность вычисления фазовой скорости определяется разбросом измеренных фаз. Наибольшие погрешности (3–3.5%) наблюдались для частот менее 150 Гц и более 350 Гц, наименьшие (1–1.5%) — для частот 220–320 Гц. Наибольшие флуктуации фазы на фиксированной частоте отмечены либо для больших значений разности хода l_{jk} (рис. 2б), т.е. при измерениях на самых удаленных от излучателя пластинках, либо для измерений фазы на пластинках вблизи вертикали ($0 < l_{jk} < 3$ мм). В диапазоне $3 < l_{jk} < 20$ мм отклонение измеренных фаз от аппроксимирующей линейной зависимости было минимальным.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Зависимости амплитуды вертикальной компоненты скорости колебаний пластин от угла θ , измеренные на частотах 150–300 Гц в непрерывном и импульсном режимах, представлены на рис. 4 соответственно кружками и квадратами. Каждый символ соответствует амплитуде скорости коле-

баний пластины, усредненной по измерениям в четырех точках пластины. Амплитуды нормировались на максимальные значения для каждого из режимов измерения. Для наглядности символы соединены линиями. Положительное значение угла θ соответствует направлению положительной оси x , $\theta = 0$ для вертикали.

Характер угловых распределений, измеренных в импульсном и непрерывном режимах, качественно совпадает. На всех частотах распределения симметричны по отношению к вертикальной оси. Максимум амплитуды колебаний наблюдается при углах, близких к $\pm 45^\circ$. Поскольку измерения проводились в ближнем поле, то угловые распределения имеют сложный вид, присутствуют дополнительные максимумы. Эти особенности хорошо видны на частоте 150 Гц (рис. 4а). Ширина основных лепестков составляет порядка 10° . На частотах 150 и 300 Гц вблизи углов $\theta = 0$ амплитуда вертикальной компоненты скорости составляет порядка 0.6 от максимума, хотя в дальнем поле сдвиговые волны, распространяющиеся в вертикальном направлении, должны иметь только поперечную компоненту. На частотах 200 и 250 Гц амплитуда вертикальной компоненты колебательной скорости волн, движущихся в направлении $\theta = 0$, минимальна, что является ожидаемым для сдвиговых волн.

Зависимости фазовой скорости c_f от частоты, измеренные в непрерывном и импульсном режимах, представлены на рис. 5а символами. В диапазоне 250–400 Гц оба метода дают довольно близкие результаты. В непрерывном режиме на частотах ниже 100 Гц сказывается влияние волн, возникающих при отражении от границ. В области низких частот затухание сдвиговых волн срав-

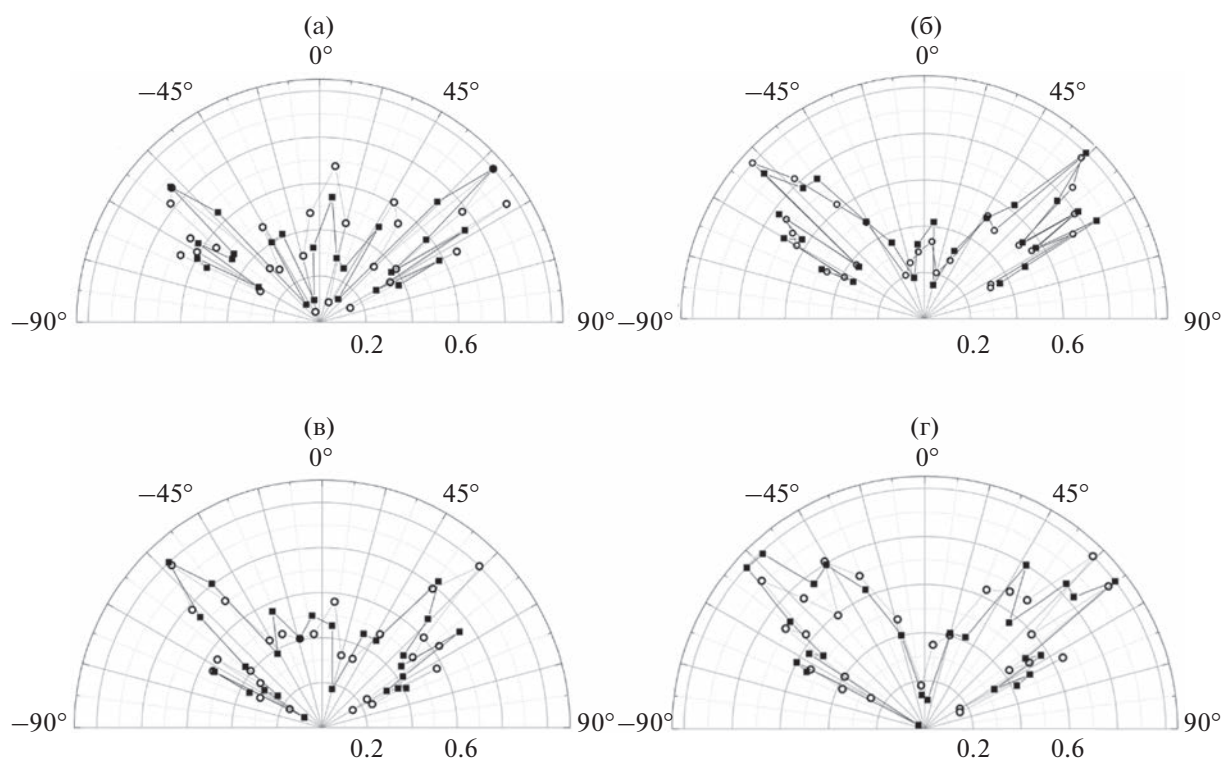


Рис. 4. Распределения нормированной амплитуды скорости колебаний пластин от угла θ для непрерывного (кружки) и импульсного (квадраты) режимов излучения, измеренные на частотах (а) – 150, (б) – 200, (в) – 250, (г) – 300 Гц.

нительно мало, что приводит к росту амплитуды волн, отраженных от границ. Отраженные волны интерферируют с падающей волной, в результате чего в структуре поля образуется заметная стоячая волна. Возникает систематическая погрешность в измерениях скорости волны по изменению фазы с расстоянием. Скорее всего такой эффект обусловил существенное завышение измеренных значений скорости волн на частотах 59 и 96 Гц, которые обведены на рис. 5а кружком. Следует отметить, что случайная погрешность в измерении скоростей на указанных частотах не превышает погрешность в области более высоких частот.

В дополнительных материалах к статье имеются 8 видеофайлов в формате MP4, которые содержат анимацию колебаний всех 104 точек на 26 пластинках, измеренных в непрерывном режиме на частотах 59, 96, 200, и 250 Гц. В названии файлов указывается частота колебаний и название горизонтальной координаты (это либо координата x (59Hz_X) либо разность хода волн l (59Hz_L)). Можно наглядно проследить, как изменяются амплитуда и фаза колебаний пластинок под действием волны во всем диапазоне расстояний x и при различных значениях разности хода волн l .

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Напряжение в гелеобразной среде складывается из упругого напряжения, пропорционального деформации, и релаксационного напряжения, которое определяется производной деформации по времени. Механическая модель такой среды может быть представлена в виде параллельного соединения пружинки с модулем μ_0 и максвелловской схемы в виде последовательного соединения пружинки с динамическим модулем упругости μ_1 и демпфера с релаксирующей вязкостью η_1 (рис. 6). Это случай линейной среды с одним временем релаксации τ , которое определяется параметрами максвелловской схемы $\tau = \eta_1/\mu_1$. Модуль μ_0 имеет смысл статического модуля сдвиговой упругости [10].

При деформации гелеобразной среды на величину ϵ в ней возникает механическое напряжение σ , которое складывается из напряжения пружинки $\sigma_\infty = \mu_0\epsilon$ и напряжения в максвелловской схеме σ_1 : $\sigma = \sigma_\infty + \sigma_1$. Выразим напряжение в максвелловской схеме σ_1 через деформацию пружинки $\epsilon_s = \sigma_1/\mu_1$ и демпфера ϵ_d , где $d\epsilon_d/dt = \sigma_1/\eta_1$. Учтем, что деформация всей максвелловской схемы ϵ есть сумма деформаций ее элементов: $\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_d$. Тогда можно записать следующее уравнение:

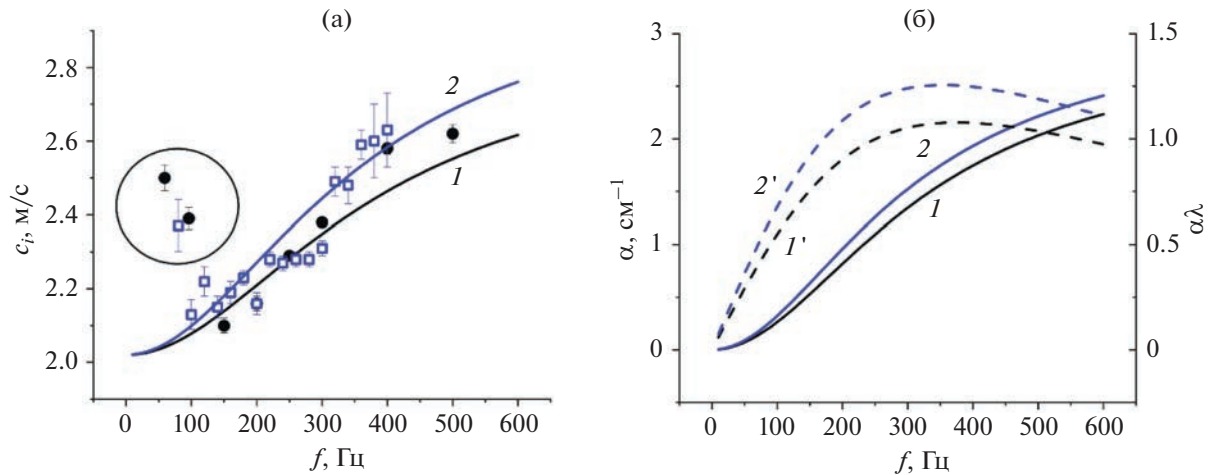


Рис. 5. (а) – Измеренные зависимости фазовой скорости сдвиговых волн от частоты для непрерывного (кружки) и импульсного (квадраты) режимов излучения. Кривые 1 и 2 рассчитаны для параметров ($\mu_1 = 4$ кПа, $\tau = 0.3$ мс) и ($\mu_1 = 5$ кПа, $\tau = 0.3$ мс). Не учитывались измерения, обведенные кружком. (б) – Зависимости коэффициента затухания α (линии 1, 2) и произведения $\alpha\lambda$ (линии 1', 2'), рассчитанные для параметров, определенных на рис. 5а.

$$\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\tau} = \frac{\eta_1}{\tau} \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (2)$$

При исследовании гармонических колебаний заменим производные d/dt в (2) на $i\omega$. Тогда связь между напряжением и деформацией запишется в виде:

$$\sigma = \left(\mu_0 + \frac{i\omega\eta_1}{1 + i\omega\tau} \right) \varepsilon = \mu\varepsilon,$$

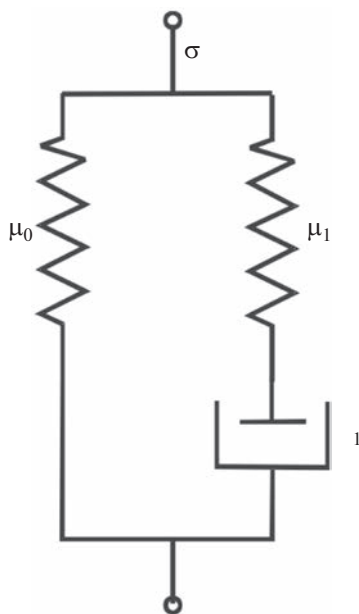


Рис. 6. Механическая модель среды с одним временем релаксации.

где μ – комплексный модуль сдвига: $\mu = \mu_0 + \frac{i\omega\eta_1}{1 + i\omega\tau}$.

Представим μ в виде $\mu = \mu_r + i\mu_i$, где

$\mu_r = \mu_0 + \mu_1 \frac{\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}$ – действительная часть,

$\mu_i = \mu_1 \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$ – мнимая часть модуля сдвига.

Зная модули μ_r и μ_i , можно рассчитать скорость c_t и коэффициент затухания α плоской сдвиговой волны в зависимости от частоты:

$$\begin{aligned} c_t &= \sqrt{\frac{\mu_r}{\rho}} \sqrt{\frac{2(1 + \gamma^2)(\sqrt{1 + \gamma^2} - 1)}{\gamma^2}}, \\ \alpha &= \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu_r}} \sqrt{\frac{(\sqrt{1 + \gamma^2} - 1)}{2(1 + \gamma^2)}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma = \frac{\mu_i}{\mu_r}$. Параметры μ_1 и τ в формулах (3) определяются путем подбора таким образом, чтобы минимизировать среднеквадратичное отклонение рассчитанных значений от экспериментальных данных.

Кривые 1 и 2 на рис. 5а рассчитаны соответственно для параметров ($\mu_1 = 4$ кПа, $\tau = 0.3$ мс) и ($\mu_1 = 5$ кПа, $\tau = 0.3$ мс). Кривая 1 оптимальна в области частот 100–300 Гц, в диапазоне 300–500 Гц экспериментальные данные лучше описывает кривая 2 с более высоким динамическим модулем μ_1 . При подборе теоретических зависимостей не учитывались измерения на частотах 59, 80 и 96 Гц (обведены кружком), которые очень сильно отличались от значений на более высоких частотах. Для обеих теоретических зависимостей значение времени релаксации одинаково.

во и равно 0.3 мс. Значения коэффициента сдвиговой вязкости $\eta_1 = \mu_1 \tau$ получились соответственно 1.2 и 1.5 Па · с для кривых 1 и 2. На рис. 56 показаны рассчитанные по формуле (3) частотные зависимости коэффициента затухания плоской сдвиговой волны α и произведения $\alpha\lambda$, характеризующего затухание на одной длине волны. Кривые 1 и 2 рассчитаны соответственно для $\mu_1 = 4$ кПа, $\tau = 0.3$ мс и $\mu_1 = 5$ кПа, $\tau = 0.3$ мс. Затухание сдвиговой волны достаточно существенно и превышает 1 см^{-1} для волн с частотами более 250 Гц. Максимум затухания на длину волны $\alpha\lambda$ наблюдается в диапазоне частот 300–400 Гц, и в этом диапазоне находится частота релаксации гелеобразной среды. Отметим, что рассчитанные параметры μ_0 , μ_1 , η_1 полностью определяют вязкоупругие свойства гелеобразной среды в диапазоне 0–500 Гц и позволяют достаточно точно описать распространение упругих волн в такой среде.

В полупространстве упругой среды, на границе которой находится вибрирующий источник, возникают волны нескольких типов. Вдали от источника это продольная и сдвиговая волны, скорости которых определяются модулями объемного сжатия M и модулем Юнга E соответственно [11]. В гелеобразной среде $M \gg E$, вследствие чего скорость продольной волны значительно выше скорости сдвиговой волны. В ближнем поле дополнительно возникает так называемая продольная сдвиговая волна (LSW – Longitudinal Shear Wave), имеющая компоненту колебательной скорости вдоль волнового вектора [12, 13]. При этом скорость распространения этой волны в ближнем поле совпадает со скоростью сдвиговой волны. Наличие LSW-волн в ближнем поле вибраторов используется в оптической когерентной эластографии, где измеряется только вертикальная компонента смещений частиц среды, вызванная LSW-волной [7]. Возможно, что полученные в наших измерениях (рис. 4) достаточно большие значения вертикальной компоненты скорости в направлении вертикали обусловлены именно проявлением LSW-волн. Понимание структуры поля вблизи колеблющегося источника позволит выбрать оптимальную форму и размер излучателя с целью повышения амплитуды LSW-волн и повышения эффективности доплеровского измерителя сдвиговой упругости мягких тканей [5, 6]. Излучатель в виде двух соединенных между собой параллельных брусков создает в плоскости симметрии на определенной глубине область максимальной амплитуды вертикальной компоненты скорости за счет конструктивного сложения волн от каждого бруска. Варьируя расстояние между брусками, можно изменять глубину, на которой будет наблюдаться зона максимальной амплитуды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Актуальность задачи измерения упругих параметров гелеобразных сред значительно возросла в последнее десятилетие, что связано с успехами в инженерии мягких тканей [14]. Гидрогели различного химического состава часто используют в качестве скелетной структуры, куда помещаются стволовые клетки для прорастания и формирования специфических тканей [15]. Вязкоупругие свойства формируемой ткани зависят как от механических свойств гидрогеля, так и от структуры клеток. Для оценки вязкоупругих параметров исходных гидрогелей и формируемой ткани часто используют методы атомно-силовой микроскопии (АСМ), при которых измеряется реакция колеблющегося кантилевера при его контакте с поверхностью среды. Частота вибраций кантилевера достигает несколько сотен Гц, а локальность определяется его размером, составляющим десятки мкм [16]. Для расчета вязкоупругих параметров гидрогелей и биологических тканей по результатам измерений АСМ используются механические модели сред, как простые, как в нашей работе, так и более сложные [17]. В частности, анизотропные ткани типа мышечной с волокнистой структурой хорошо описываются моделью двухкомпонентной среды [18]. Включение упругого элемента с нелинейной зависимостью деформации от напряжения позволяет описать поведение гелеобразной среды при повышенных нагрузках [19]. В нашей работе показывается, что лазерная виброметрия оптически прозрачных гидрогелей является перспективным и достаточно точным методом измерения их вязкоупругих параметров.

Работа В.Г. Андреева и Ш.А. Асфандиярова по проведению эксперимента и созданию феноменологической модели выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-22-00751, <https://rscf.ru/project/22-22-00751/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carstensen E.L., Parker K.J., Lerner R.M. Elastography in the Management of Liver Disease // *Ultrasound Med Biol.* 2008. V. 34. № 10. P. 1535–1546. <https://doi.org/10.1016/j.ultrasmedbio.2008.03.002>
2. Tanter M., Bercoff J., Athanasiou A., Deffieux T., Gennisson J.L., Montaldo G., Muller M., Tardivon A., Fink M. Quantitative assessment of breast lesion viscoelasticity: Initial clinical results using supersonic shear imaging // *Ultrasound Med. Biol.* 2008. V. 34. № 9. P. 1373–1386. <https://doi.org/10.1016/j.ultrasmedbio.2008.02.002>
3. Андреев В.Г., Демин И.Ю., Корольков З.А., Шанин А.В. Движение сферических микрочастиц в вязкоупругой среде под действием акустической радиационной силы // *Изв. РАН. Сер. Физ.* 2016. Т. 80. № 10. С. 1321–1326. <https://doi.org/10.7868/S0367676516100045>

4. Catheline S., Gennisson J.-L., Delon G., Fink M., Sinkus R., Abouelkaram S., Culioli J. Measurement of viscoelastic properties of homogeneous soft solid using transient elastography: An inverse problem approach // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116. P. 3734–3741. <https://doi.org/10.1121/1.1815075>
5. Тиманин Е.М., Еремин Е.В., Беляев Р.В., Мансфельд А.Д. Ультразвуковой доплеровский способ дистанционной эластометрии // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 274–280.
6. Асфандияров Ш.А., Крит Т.Б., Андреев В.Г. Ультразвуковой доплеровский метод для измерения упругости скелетных мышц // Изв. Росс. Акад. наук. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 6. С. 823–828. <https://doi.org/10.31857/S036767652106003X>
7. Zviatovich F., Larin K.V. Wave-based optical coherence elastography: the 10-year perspective // Prog. Biomed. Eng. 2022. V. 4. P. 012007. <https://doi.org/10.1088/2516-1091/ac4512>
8. Schwarz S., Hartmann B., Sauer J., Burgkart R., Sudhop S., Rixen D.J., Clausen-Schaumann H. Contactless Vibrational Analysis of Transparent Hydrogel Structures Using Laser-Doppler Vibrometry // Exp. Mech. 2020. V. 60. № 8. P. 1067–1078. <https://doi.org/10.1007/s11340-020-00626-0>
9. Gasenko V.G., Gorelik R.S., Nakoryakov V.E., Timkin L.S. Measurement of acoustic wave phase velocity by Fourier method in gas-liquid medium // J. Eng. Thermophys. 2015. V. 24. № 4. P. 330–334. <https://doi.org/10.1134/S1810232815040049>
10. Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П. Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964. 516 с.
11. Miller G., Pursey H. The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid // Proc. R. Soc. London. 1954. V. 223. P. 521–541.
12. Catheline S., Benech N. Longitudinal shear wave and transverse dilatational wave in solids // J. Acoust. Soc. Am. 2015. V. 137. № 2. <https://doi.org/10.1121/1.4907742>
13. Sandrin L., Cassereau D., Fink M. The role of the coupling term in transient elastography // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 115 № 1. P. 73–83. <https://doi.org/10.1121/1.1635412>
14. Esdaille C.J., Washington K.S., Laurencin C.T. Regenerative engineering: a review of recent advances and future directions // Regen Med. 2021. V. 16. № 5. P. 495–512. <https://doi.org/10.2217/rme-2021-0016>
15. Lu A., Zhu J., Zhang G., Sun G. Gelatin nanofibers fabricated by extruding immiscible polymer solution blend and their application in tissue engineering // J. Mater. Chem. 2011. V. 21. № 46. P. 18674–18680. <https://doi.org/10.1039/C1JM13059E>
16. Chang A.C., Liao J.-D., Liu B.H. Practical assessment of nanoscale indentation techniques for the biomechanical properties of biological materials // Mech. Mater. 2016. V. 98. P. 11–21. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.03.005>
17. Алексеев В.Н., Рыбак С.А. Об уравнениях состояния вязкоупругих биологических сред // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 5. С. 581–588.
18. Руденко О.В., Цюрюпа С.Н., Сарвазян А.П. Скорость и затухание сдвиговых волн в фантоме мышцы – мягкой полимерной матрице с замороженными натянутыми волокнами // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 5. С. 609–615. <https://doi.org/10.7868/S0320791916050154>
19. Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А. Сдвиговые волны в резонаторе с кубической нелинейностью // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 763–770.

УЛУЧШЕНИЕ ОПТОАКУСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ БИОТКАНЕЙ МЕТОДОМ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ СВЕРТКИ С АДАПТИВНОЙ САМОКАЛИБРОВКОЙ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

© 2023 г. Е. М. Тиманин^а, *, И. С. Михайлова^а, И. И. Фикс^а, А. А. Курников^а, А. В. Ковальчук^а,
А. Г. Орлова^а, О. А. Угарова^а, М. Frenz^б, М. Jaeger^б, П. В. Субочев^а, **

^аИнститут прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603155 Россия

^бInstitute of Applied Physics, University of Bern, Sidlerstrasse, Bern, 53012 Switzerland

*e-mail: eugene@appl.sci-nnov.ru

**e-mail: pavel.subochev@gmail.com

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.

После доработки 05.05.2023 г.

Принята к публикации 19.05.2023 г.

Предложен метод одномерной деконволюции с использованием регуляризации Тихонова для улучшения трехмерных оптоакустических изображений *in vivo*. Метод использует адаптивную самокалибровку для устранения частотно-зависимых искажений, связанных с распространением и регистрацией ультразвука. Адаптируясь к неоднородным частотным характеристикам исследуемой среды, метод не требует дополнительных калибровочных экспериментов. Время обработки трехмерных оптоакустических данных размером $200 \times 200 \times 100$ вокселей составляет менее 5 мс, позволяя улучшать ангиографические изображения в режиме реального времени и повышать эффективное пространственное разрешение на более чем 50%.

Ключевые слова: оптоакустическая визуализация, улучшение изображений, метод обратной свертки, Тихоновская регуляризация

DOI: 10.31857/S0320791923600750, **EDN:** CPLOMZ

1. ВВЕДЕНИЕ

Фототермальные эффекты в настоящее время объединяют целый ряд направлений научных исследований, основные достижения в которых приведены в обзорных работах [1–7]. Наиболее популярным направлением исследований является оптоакустическая (ОА) визуализация хромофоров биологических тканей [3–7], диагностические возможности которой напрямую зависят от качества ОА изображений.

Задача ОА визуализации пространственного распределения хромофоров неразрывно связана с учетом частотных и геометрических характеристик лазерного источника и ультразвукового приемника, а также особенностей распространения оптического и акустического излучения в исследуемой среде [8]. Методам построения ОА изображений, основанным на модельном описании эффектов, сопровождающих распространение и регистрацию ОА импульсов, посвящено немало работ [9–16]. Однако, повышение качества ОА изображений может быть основано и на феноменологическом учете эффектов, сопровождающих процессы распространения и регистрации ОА импульсов. Характерными примерами являются

эффекты дифракции и затухания ультразвука [17], способствующие подавлению высокочастотных компонент в спектрах ОА импульсов [18]. На ангиографических ОА изображениях данные эффекты могут проявляться, например, как относительное уменьшение контрастности объектов малого диаметра, таких как капилляры. В рамках феноменологических подходов, компенсация эффектов частотно-зависимого затухания может быть достигнута за счет применения алгоритмов машинного обучения [19, 20], а также за счет применения методов обратной свертки [21–24]. В части работ [23, 24] для нахождения фильтра свертки рекомендовалось использовать Тихоновскую регуляризацию.

В нашей работе мы исследуем возможности упрощенного практического применения известных подходов [23, 24], ограничиваясь феноменологическим описанием эффектов, влияющих на спектры оптоакустических сигналов при их распространении и измерении. Вычислять фильтр свертки мы предлагаем с помощью адаптивной самокалибровки, используя в качестве обучающего оптоакустического сигнала один из экспериментальных А-сканов, уже содержащихся в

улучшаемом оптоакустическом изображении [25]. В отличие от работ [23, 24], все экспериментальные данные для нашей работы были получены с использованием ультразвуковой антенны со сверхширокой полосой приема 100 кГц–100 МГц [26].

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

2.1. Теория

Рассмотрим изолированный кровеносный сосуд в точке $\mathbf{r}_0$, на который производится импульсное лазерное воздействие. В результате локального термоупругого нагрева содержащегося внутри сосуда гемоглобина, рождается волна давления, которая в идеализированном трехмерном случае [5] является в точке $\mathbf{r}_0$ симметричным биполярным ОА импульсом $IR(\mathbf{r}_0, t)$. Результат измерения той же волны давления ультразвуковым приемником $A_{\text{scan}}(\mathbf{r}_1, t)$, расположенным в другой точке $\mathbf{r}_1$, может существенно отличаться от $IR(\mathbf{r}_0, t)$. На результаты измерения $A_{\text{scan}}(\mathbf{r}_1, t)$ могут влиять эффекты распространения ультразвуковых волн, а также антенные эффекты — ограниченность апертуры и неоднородная чувствительность в частотной полосе приема. Оставаясь в рамках феноменологического учета эффектов среды и антенны, удобно предположить, что существует фильтр свертки $F(t)$, ответственный за преобразование $A_{\text{scan}}(\mathbf{r}_1, t)$ в $IR(\mathbf{r}_0, t)$:

$$(A_{\text{scan}}F)(t) = IR(t). \quad (1)$$

Для нахождения неизвестного фильтра $F(t)$ длиной N удобно записать свертку двух векторов (1) в дискретной форме в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=1}^N A_{\text{scan}}(t_{i+1-j}) \times F(t_j) = \sum_{j=1}^N A_{ij} \times F_j = IR_i = IR(t_i), \quad (2)$$

где матрица A_{ij} составлена из компонент вектора $A_{\text{scan}}(t_i)$ длиной M по типу матрицы Теплица. Поскольку на практике длина А-скана обычно превышает длительность ОА импульсов от отдельных кровеносных сосудов, система (2) как правило является переопределенной ($M > N$) и для нахождения ее приближенного решения хорошо подходят методы регуляризации. В соответствии с методом Тихонова фильтр F может быть найден как минимум функционала $\|A \times F - IR\|_2^2 + \beta \|F\|_2^2$. С учетом определения нормы $\|F\|_2^2 = F^T \times F$, получим следующее выражение для искомого фильтра:

$$F = (A^T \times A + \Gamma^T \times \Gamma)^{-1} \times A^T \times IR, \quad (3)$$

где $\Gamma = \beta \times I$, I — единичная матрица, β — параметр регуляризации.

2.2. Программная реализация

Численный алгоритм (рис. 1), предназначенный для вычисления фильтра F , был реализован нами в пакете MATLAB® (MathWorksInc., USA) и предоставлен в открытом доступе [27]. Для нахождения функции фильтрации F использовалась так называемая самокалибровка, когда в качестве калибровочного сигнала $A_{\text{scan}}(\mathbf{r}_1, t)$ использовался один из А-сканов улучшаемого ОА изображения (в случае ангиограммы — соответствующий кровеносному сосуду минимального размера, расположенному в фокусе приемной антенны). Идеализированный биполярный импульсный отклик $IR(\mathbf{r}_0, t)$ формировался в виде вектора размерности M , содержащего две ненулевые компоненты (± 1). Фильтр свертки F рассчитывался по формуле (3) за конечное число итераций k , в рамках которых осуществлялась оптимизация параметра регуляризации β при фиксированных длинах фильтра $N = 3, 4$ и 5 . В качестве критерия оптимальности использовалась относительная степень сжатия фильтром F исходного сигнала:

$$C_k = \frac{\text{FWHM}_0 - \text{FWHM}_k}{\text{FWHM}_0} \times 100\%, \quad (4)$$

где метрика FWHM (Full Width at Half Maximum) — число отсчетов выше уровня $\frac{1}{2}$ от максимума сигнала $\text{abs}(\text{Hilbert}(A_{\text{scan}}(\mathbf{r}_1, t)F(t)))$, представляющего собой огибающую обработанного А-скана на каждой итерации k . Оптимизация считалась достигнутой, если увеличение итераций k переставало приводить к увеличению параметра C_k .

Свертка рассчитанного фильтра F со всеми остальными А-сканами исходного ОА изображения была реализована во временной области. При этом время вычислений на графическом процессоре GPU Nvidia RTX 4090 (4 мс) оказалось примерно в 3 раза меньше аналогичных вычислений на CPU AMD Threadripper 3970X (12 мс).

2.3. Экспериментальная установка

Оптоакустические данные были получены на экспериментальной установке, схема которой приведена на рис. 2. В качестве источника зондирующего излучения использовался лазер Wedge HB (Bright Solutions, Италия), работающий в импульсном режиме на длине волны 532 нм с длительностью 1 нс, максимальной частотой повторения 2 кГц, максимальной энергией в импульсе 1 мДж. Оптические импульсы доставлялись до объекта через многомодовое оптоволокно NA = 0.22 (Thorlabs, США). Для проведения *in vivo* и фантомных экспериментов была изготовлена сканирующая оптико-акустическая головка, состоящая из сферически-сфокусированного ультразвукового датчика с фокусным расстоянием 7.6 мм и апертурой 8.6 мм (BARI-NN Ltd., Россия) и выхода

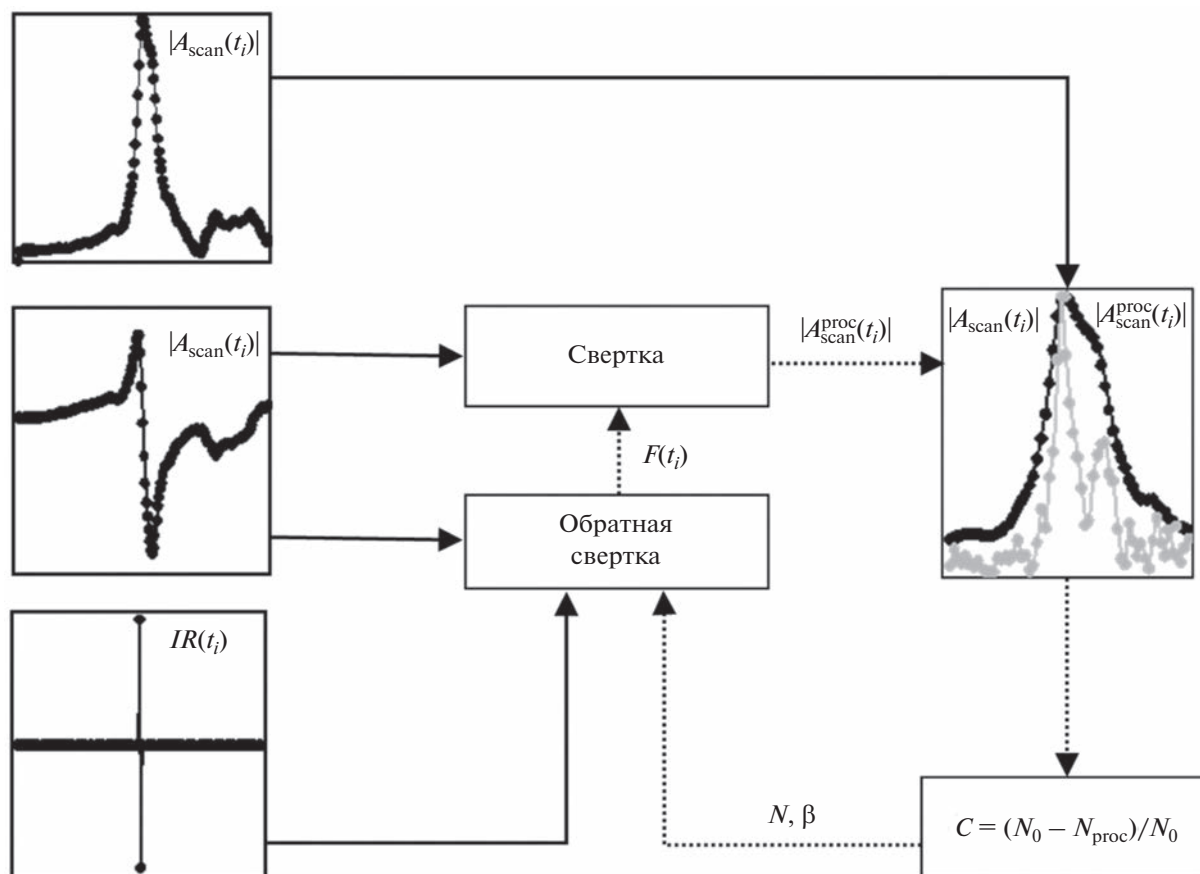


Рис. 1. Алгоритм обработки сигналов.

оптоволокну, закрепленного в центральном отверстии датчика. Сканирующая головка приводилась в движение двумя линейными двигателями М-664 (PI, Германия) внутри иммерсионной камеры, дно которой содержало окно из прозрачной полиэтиленовой пленки толщиной менее 100 мкм, через которое осуществлялся оптический и акустический контакт с объектом исследования. Сигналы с датчика сначала проходили через встроенный усилитель с коэффициентом усиления $K = 30$, а затем подавались на вход 16-рядного АЦП (GaGe, США) и записывались на жесткий диск компьютера с частотой 200 МГц.

На рис. 3а представлена импульсная характеристика датчика, полученная после воздействия лазерного импульса на его поверхность. Пример ОА-сигнала, полученного от сосуда в ткани, показан на рис. 3б. Соответствующие спектры показаны на рис. 3в. Сравнение двух сигналов и их спектров демонстрирует, что амплитудно-частотная характеристика акустического датчика является значительно более равномерной, чем частотные характеристики среды в том же частотном диапазоне (до 100 МГц).

2.4. Фантомные и *in vivo* эксперименты

Эффективность работы разработанного алгоритма была продемонстрирована как на фантоме, содержащем светопоглощающие микросферы, так и в *in vivo* эксперименте по визуализации поверхностных сосудов ладони человека. Как в фантомном, так и в *in vivo* эксперименте между пленкой иммерсионной камеры и объектом наносился тонкий слой ультразвукового геля средней вязкости Медигель (ООО «Гельтек-Медика», Россия).

Фантом, имитирующий ткань, был основан на геле, приготовленном из 88% дистиллированной воды, 4% агар-агара (Sigma Aldrich, США) и 8% липофундина (B. Brown, Германия). Микрочастицы черного полистирола со средним диаметром 15 мкм (Cospheric LLC, США) были рассыпаны в монослой на поверхности отвержденного геля, а затем покрыты слоем того же жидкого геля толщиной 1 мм. Фантом помещался на горизонтальную плоскую поверхность и сканировался в диапазоне 5×5 мм с шагом 25 мкм. Фокус ультразвукового датчика при этом был наведен на монослой микросфер.

In vivo эксперимент проводился с участием 26-летнего здорового добровольца из группы исследователей. Во время эксперимента рука распо-

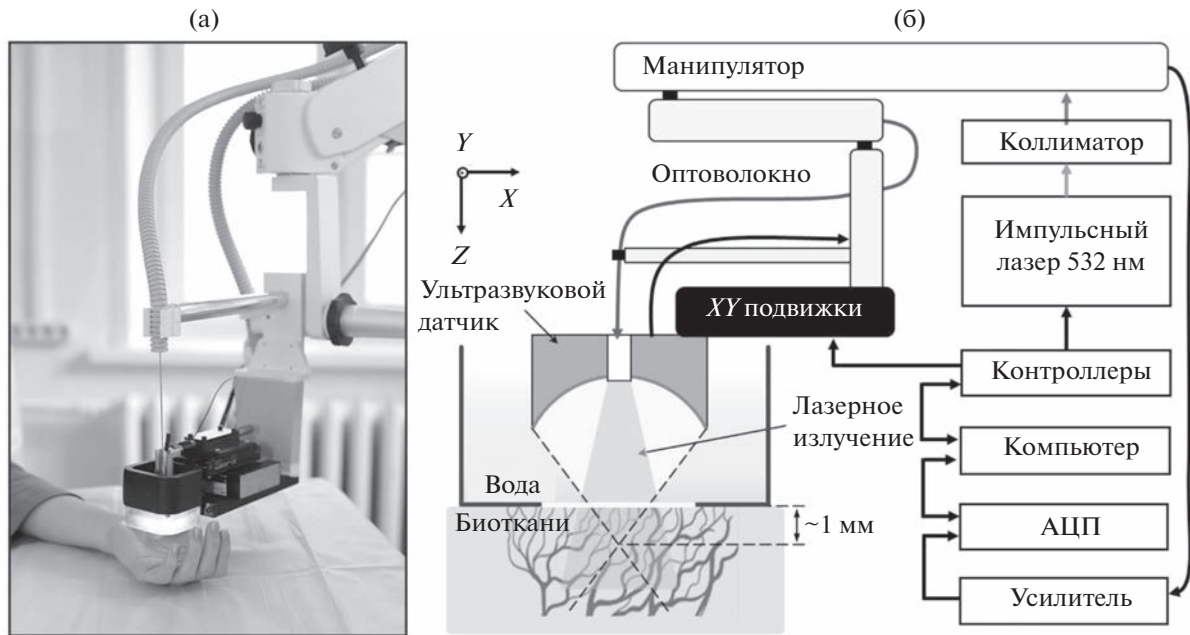


Рис. 2. Оптоакустическая установка. (а) — Фотография оптико-акустической головки в процессе сканирования сосудов ладони человека. (б) — Схема установки.

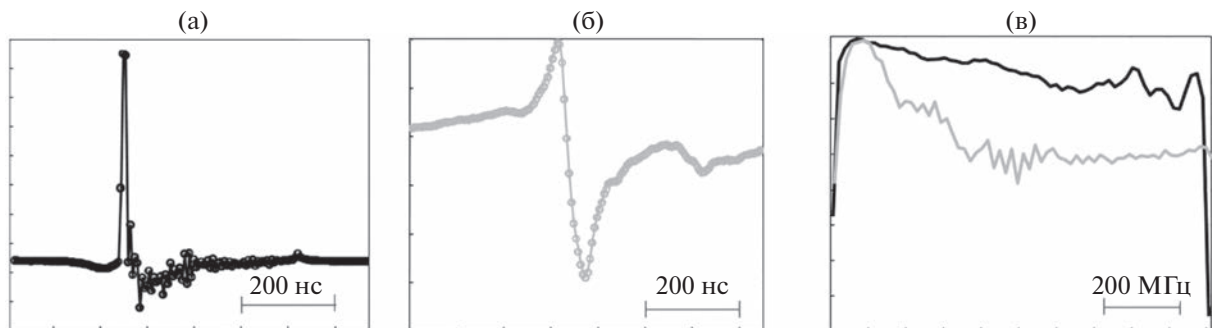


Рис. 3. (а) — Импульсная переходная характеристика датчика, (б) — пример ОА-сигнала, принятого от сосуда и (в) — соответствующие спектры.

лагалась ладонью вверх так, чтобы исследуемая область возвышения большого пальца была параллельна плоскости сканирования (рис. 2). Ультразвуковой датчик устанавливался так, чтобы его геометрический фокус располагался на глубине 1 мм от поверхности ткани. Область размером 5×5 мм сканировалась с шагом 25 мкм. Диапазон диаметров исследуемых сосудов при этом составлял от нескольких десятков микрометров до ~ 100 мкм.

В ходе экспериментов с добровольцем энергия лазерных импульсов не превышала 100 мкДж, а освещенность на поверхности тканей не превышала 2.5 мДж/см^2 , что находилось в безопасных пределах (20 мДж/см^2) по стандартам Американского национального института стандартов (ANSI). Диаметр оптического пятна на поверхности тканей составлял порядка 2.4 мм при расстоянии до

поверхности 6 мм и диаметре сердцевины волокна 400 мкм.

Для обработки были использованы данные из области вблизи геометрического фокуса акустического датчика ($r = 6700 \pm 375$ мкм). Таким образом, на своем пути к детектору ультразвуковой сигнал проходил через слой фантома толщиной 1 мм, через тонкие слои геля и изолирующей пленки, и через слой воды толщиной около 6 мм.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 4 показаны исходные ОА-изображения сферических включений в фантоме биологической ткани (рис. 4а, 4б) и соответствующие им ОА-изображения после деконволюции (рис. 4в, 4г). Параметры фильтра, подобранные в рамках про-

Таблица 1. Количественные характеристики ОА-изображений фантома биоткани и ткани руки человека до и после фильтрации

Способ отыскания фильтра	Адаптивная самокалибровка	Калибровка по фантому	Оптимизация Фурье-фильтра	Адаптивная самокалибровка
Название фильтра	F_{Ph}	F_{Ph}	F_F	F_H
Объект исследования	Фантом	Рука		
Исходное значение пикового отношения сигнал/шум, дБ	66.3	54.5		
Эффективный размер объекта до обработки (FWHM ₀)	7	16		
Значение пикового отношения сигнал/шум после обработки, дБ	66.8	57	56.8	58.3
Эффективный размер объекта после обработки (FWHM)	5	13	12	4
Степень сжатия изображения исследуемого объекта (C), %	28.6	18.8	25	75

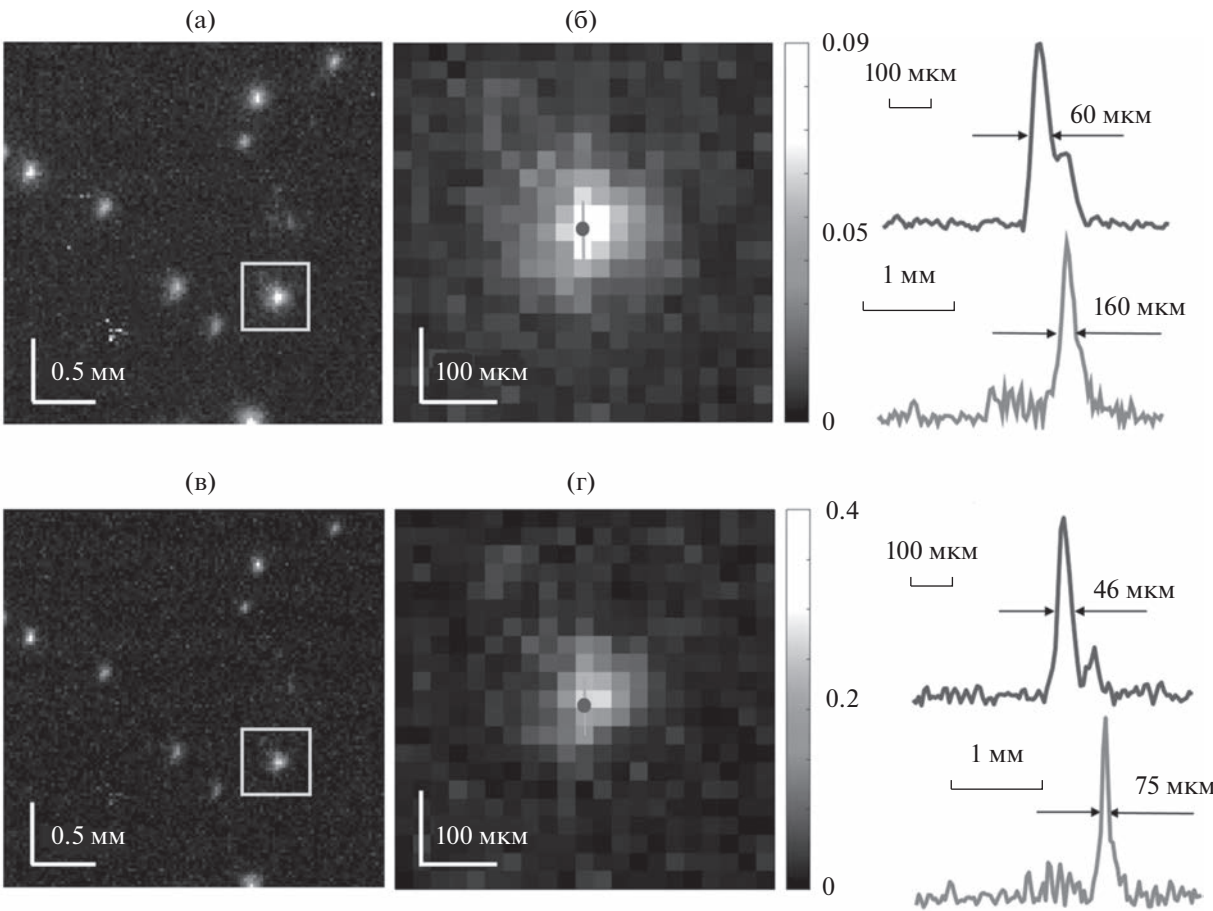


Рис. 4. ОА-изображения сферических включений в фантоме (а, б) – до и (в, г) – после обработки фильтром свертки. На изображениях (б) и (г) приведены увеличенные области в окрестности отдельного включения, выделенные на изображениях (а) и (в) рамкой. Графики справа от изображений представляют отмеченные в центре изображений (б) и (г) одномерные А-сканы (вдоль оси датчика) и профили ОА сигналов в поперечном направлении.

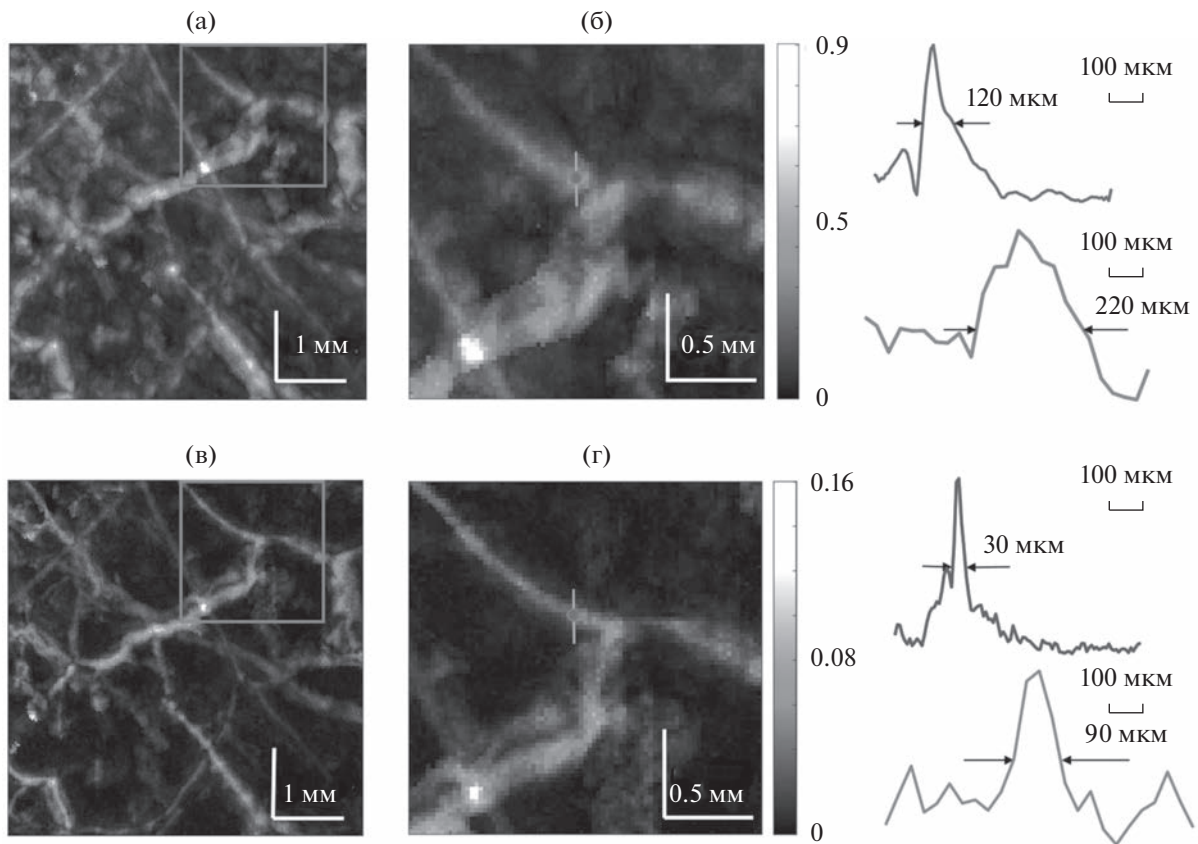


Рис. 5. ОА-изображения сосудов ладони человека (а, б) — до и (в, г) — после обработки фильтром свертки. На изображениях (б) и (г) приведены увеличенные области в окрестности выбранного обучающего А-скана, выделенные на изображениях (а) и (в) рамкой. Графики справа от изображений представляют отмеченные на изображениях (б) и (г) одномерные А-сканы (вдоль оси датчика) и профили ОА сигналов в поперечном направлении.

цедуры адаптивной самокалибровки, составили: длина фильтра свертки $N = 3$, параметр регуляризации $\beta = 0.0194$.

На рис. 5 показаны исходные (рис. 5а, 5б) и обработанные (рис. 5в, 5г) ОА-изображения, полученные в экспериментах на тканях ладони человека *in vivo*. Адаптивная калибровка осуществлялась по А-скану, отмеченному в центре увеличенной области визуализации (рис. 5б), при этом параметры Тихоновской деконволюции составили: $N = 3$, $\beta = 0.0475$.

Сопоставление изображений на рис. 5а, 5б и на рис. 5в, 5г, а также исходных (справа от рис. 5б) и преобразованных (справа от рис. 5г) одномерных сканов показывает, что предлагаемая обработка позволяет получить более четкое изображение сосудов за счет сжатия исходных сигналов.

В таблице приведены результаты сравнения различных способов фильтрации: F_{ph} и F_H — фильтры свертки, найденные для изображений фантома и руки *in vivo*; F_F — фильтр высоких частот с частотой среза 14.4 МГц, найденной методом деления отрезка пополам в Фурье-области по критерию максимальности сжатия того же “обу-

чающего” А-скана. На рис. 6 представлены частотные характеристики найденных фильтров и соответствующие им степени сжатия исходных сигналов.

Из таблицы и рис. 6 видно, что любой метод обработки обеспечивает повышение пространственного разрешения, но эффективность сжатия изображения объектов оказывается разной. При фильтрации изображения оптимизированным Фурье-фильтром высоких частот, найденным по спектру “обучающего” скана, удается достичь уровня сжатия 25% и получить увеличение отношения сигнал/шум на 2.3 дБ. При использовании фильтра свертки, предварительно найденного на фантоме, имитирующем ткань, степень сжатия изображения сосудов тканей руки составляет всего 19%, а отношение сигнал/шум увеличивается на 2.5 дБ. Наилучшие результаты получаются, когда используется предложенный метод адаптивной самокалибровки, т.е. фильтр свертки определяется непосредственно из “обучающего” А-скана исходного изображения. В этом случае удается достичь пикового сжатия 75-процентного уровня с общей шириной пика в 4 тактовые точки (соот-

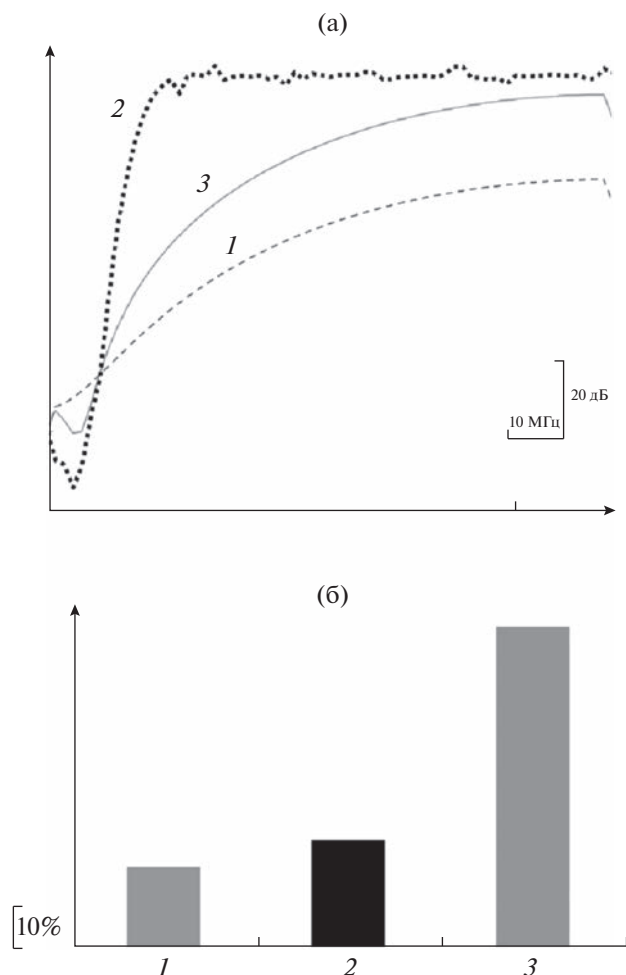


Рис. 6. (а) — Частотные характеристики найденных фильтров и (б) — соответствующие им степени сжатия. 1 — фильтр F_{Ph} , 2 — фильтр F_F , 3 — фильтр F_H .

ветствует размеру сосуда 30 микрон). Отношение сигнал/шум при этом увеличивается на 3.8 дБ.

4. ВЫВОДЫ

Одномерная обратная свертка с Тихоновской регуляризацией позволяет компенсировать частотно-зависимые эффекты, проявляющиеся при распространении и регистрации ультразвука, более чем на 50% улучшая пространственное разрешение оптоакустических ангиограмм. Адаптивная самокалибровка устраняет необходимость в предварительных калибровочных экспериментах, расширяя возможность применения оптоакустической визуализации на *in vivo* приложения, требующие повышенной точности измерений в режиме реального времени.

Коллектив соавторов выражает благодарность сотрудникам Института прикладной физики РАН за инженерный вклад в разработку оптоакустического микроскопа, использованного при

проведении исследований: М. Прудникову, В. Воробьеву, В. Казакову, Р. Кобзеву, С. Пожидаеву, В. Котоминой.

Разработка оптоакустического микроскопа и получение экспериментальных данных были поддержаны грантом РНФ (проект № 19-75-10055П). Работы по исследованию возможностей метода Тихоновской деконволюции с адаптивной самокалибровкой и работы по оптимизации программного обеспечения для обеспечения возможности деконволюции реального времени были выполнены в рамках финансовой поддержки Министерства науки и высшего образования РФ по проекту НЦМУ “Центр фотоники” (проект №. 075-15-2022-316). М. Frenz и М. Jaeger выражают благодарность Швейцарскому Национальному Научному Фонду (SNSF) (проект № 205320-179038).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Proskurnin M.A., Khabibullin V.R., Usoltseva L.O., Vyrko E.A., Mikheev I.V., Volkov D.S. Photothermal and optoacoustic spectroscopy: state of the art and prospects // *Physics-Uspekhi*. 2022. V. 65. № 3. P. 270–312.
2. Егоров С.В., Симаковский Я.О. Оптоакустика неоднородных биомедицинских сред: конкуренция механизмов и перспективы применения (обзор) // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 1. С. 96–116.
3. Attia A.B.E., Balasundaram G., Moothanchery M., Dinish U.S., Bi R., Ntziachristos V., Olivo M. A review of clinical photoacoustic imaging: Current and future trends // *Photoacoustics*. 2019. V. 16. P. 100–144.
4. Deán-Ben X.L., Razansky D. Optoacoustic imaging of the skin // *Experimental dermatology*. 2021. V. 30. № 11. P. 1598–1609.
5. Хохлова Т.Д., Пеливанов И.М., Карабутов А.А. Методы оптикоакустической диагностики биотканей // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 4–5. С. 672–683.
6. Lin L., Wang L.V. The emerging role of photoacoustic imaging in clinical oncology // *Nature Reviews Clinical Oncology*. 2022. V. 19. № 6. P. 365–384.
7. Jeon S., Kim J., Lee D., Baik J.W., Kim C. Review on practical photoacoustic microscopy // *Photoacoustics*. 2019. V. 15. P. 100–141.
8. Gröhl J., Dreher K.K., Schellenberg M., Rix T., Holzwarth N., Vieten P., Ayala L., Bohndiek S.E., Seitel A., Maier-Hein L. SIMPA: an open-source toolkit for simulation and image processing for photonics and acoustics // *J. Biomed. Opt.* 2022. V. 27. № 8. P. 083010 (1–21).
9. Cox B.T., Laufer J.G., Beard P.C., Arridge S.R. Quantitative spectroscopic photoacoustic imaging: a review // *J. Biomed. Opt.* 2012. V. 17. № 6. P. 061202 (1–22).
10. Rosenthal A., Ntziachristos V., Razansky D. Acoustic inversion in optoacoustic tomography: A review // *Current Medical Imaging*. 2013. V. 9. № 4. P. 318–336.
11. Treeby B.E., Cox B.T. k-Wave: MATLAB toolbox for the simulation and reconstruction of photoacoustic wave fields // *J. of Biomedical Optics*. 2010. V. 15. № 2. P. 021314 (1–12).

12. *Perekatova V.V., Fiks I.I., Subochev P.V.* Image correction in optoacoustic microscopy. Numerical simulation // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2014. V. 57. № 1. P. 67–79.
13. *Chowdhury K.B., Prakash J., Karlas A., Justel D., Ntzia-christos V.* A synthetic total impulse response characterization method for correction of hand-held optoacoustic images // *IEEE Trans. on medical imaging*. 2020. V. 39. № 10. P. 3218–3230.
14. *Hirsch L., Gonzalez M.G., Rey Vega L.* On the robustness of model-based algorithms for photoacoustic tomography: comparison between time and frequency domains // *Review of Scientific Instruments*. 2021. V. 92. № 11. P. 114901 (1–9).
15. *Li W., Hofmann U.A.T., Rebling J., Zhou Q., Chen Z., Ozbek A., Gong Y., Subochev P., Razansky D., Deán-Ben X.L.* Broadband model based optoacoustic mesoscopy enables deep tissue imaging beyond the acoustic diffraction limit // *Laser & Photonics Reviews*. 2022. V. 16. № 5. P. 2100381 (1–11).
16. *Ультразвук в медицине. Физические основы применения / Под. ред. Хилла К., Бэмбера Дж., тер Харар Г. Пер. с англ. под ред. Гаврилова Л.В., Хохловой В.А., Сапожникова О.А. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 544 с. ISBN 978-5-9221-0894-2.*
17. *Jin H., Liu S., Zhang R., Zheng Z., Zheng Y.* Attenuation compensation for high-frequency acoustic-resolution photoacoustic imaging // *2020 IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems (ISCAS)*. IEEE, 2020. P. 1–5.
18. *Awasthi N., Jain G., Kalva S.K., Pramanik M., Yalavarthy P.K.* Deep neural network-based sinogram super-resolution and bandwidth enhancement for limited-data photoacoustic tomography // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 2020. V. 67. № 12. P. 2660–2673.
19. *Kim M.W., Jeng G.-S., Pelivanov I., O'Donnell M.* Deep-learning image reconstruction for real-time photoacoustic system // *IEEE Trans. on medical imaging*. 2020. V. 39. № 11. P. 3379–3390.
20. *Yang C., Jiao Y., Jian X., Cui Y.* Image deconvolution with hybrid reweighted adaptive total variation (HRATV) for optoacoustic tomography // *Photonics*. MDPI, 2021. V. 8. № 2. P. 25(1–20).
21. *Wang J., Zhang C., Wang Y.* A photoacoustic imaging reconstruction method based on directional total variation with adaptive directivity // *Biomedical engineering online*. 2017. V. 16. № 1. P. 1–30.
22. *Cai D., Li Z., Chen S.L.* In vivo deconvolution acoustic-resolution photoacoustic microscopy in three dimensions // *Biomedical Optics Express*. 2016. V. 7. P. 369–380.
23. *van de Sompel D., Sasportas L.S., Jokerst J.V., Gambhir S.S.* Comparison of deconvolution filters for photoacoustic tomography // *PLoS ONE*. 2016. V. 11. P. 0152597 (1–28).
24. *Warbal P., Saha R.K.* Performance comparison of commonly used photoacoustic tomography reconstruction algorithms under various blurring conditions // *J. Modern Optics*. 2022. V. 69. № 9. P. 487–501.
25. *Hofmann U.A.T., Li W., Deán-Ben X.L., Subochev P., Estrada H., Razansky D.* Enhancing optoacoustic mesoscopy through calibration-based iterative reconstruction // *Photoacoustics*. 2022. V. 28. P. 100405 (1–8).
26. *Kurnikov A.A., Pavlova K.G., Orlova A.G., Khilov A.V., Perekatova V.V., Kovalchuk A.V., Subochev P.V.* Broadband (100 kHz–100 MHz) ultrasound PVDF detectors for raster-scan optoacoustic angiography with acoustic resolution // *Quantum Electronics*. 2021. V. 51. № 5. P. 383–388.
27. <https://github.com/photoacousticsRU/TRDeconv>

УДК 534.134,534.143,534.442.1,534.6.08,621.3.019.1

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВИБРОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПАКТНЫХ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПРОДОЛЬНО-ИЗГИБНОГО ТИПА СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ОБОЛОЧКИ

© 2023 г. А. К. Бритенков^{a, b, *}, М. С. Норкин^{a, **,} С. Б. Захаров^{b, ***},
Р. В. Травин^{a, ****}, А. В. Стуленков^{a, *****}

^aИнститут прикладной физики Российской академии наук,
ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603950 Россия

^bНижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина 23, Нижний Новгород, 603022 Россия

*e-mail: brittenkov@ipfran.ru

**e-mail: norkin@ipfran.ru

***e-mail: zacharov_cergey@mail.ru

****e-mail: travin.roman.nn@mail.ru

*****e-mail: stulenkova@ipfran.ru

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.

После доработки 10.03.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

Разработка компактных гидроакустических низкочастотных излучателей высокой удельной мощности связана со сложностями, обусловленными противоречивыми требованиями к габаритам, КПД, излучаемой мощности, ширине рабочей полосы частот, технологичностью изготовления. Для компактных излучателей габариты корпуса ограничивают возможность совмещения резонансов активного элемента и механической колебательной системы, что затрудняет их разработку. Компактный гидроакустический преобразователь продольно-изгибного типа с излучающей поверхностью сложной формы – “3Д НЧИ” – разработан для масштабного моделирования и проверки теоретических расчетов такой конструкции, и при сравнительно малых размерах обладает высокой эффективностью. В работе приведены полученные при помощи лазерной виброметрии результаты измерений в воздухе колебательных характеристик двух различных по размеру и вариантам гофрирования титановых корпусов “3Д НЧИ” и собранных излучателей. Предложенные конструктивные решения преобразователя с максимальными габаритными размерами менее 100 мм и весом примерно 1 кг обеспечивают чувствительность по напряжению около 1 Па м/В в рабочей полосе частот и основной резонанс в диапазоне 1–2 кГц. “3Д НЧИ” обладает высоким значением коэффициента механической трансформации и использования присоединенной массы, а также имеет ряд других преимуществ по сравнению с аналогичными разработками. Показано, что различия в размерах двух представленных излучателей на 10–12% и геометрии излучающих оболочек (12 и 16 волн гофрирования) приводят к различию измеренных в воздухе резонансных частот (4.0 и 3.5 кГц соответственно). При этом излучатель большего размера обладает меньшим разбросом значений механического коэффициента трансформации по гребням и впадинам корпуса, а также более плотным распределением спектральных компонент за пределами основной полосы частот.

Ключевые слова: гидроакустика, телеуправление, пьезоэлектрический преобразователь, звукоподводная связь, гидроакустический модем, гидроакустический излучатель, лазерная виброметрия

DOI: 10.31857/S0320791922600251, **EDN:** UDBQPS

ВВЕДЕНИЕ

Сфера применения низкочастотных гидроакустических излучателей (НЧИ) непрерывно расширяется, а многочисленные приложения гидроакустики уже не ограничиваются задачами в акваториях морей и океанов [1, 2]. Например, на

самолетах со взлетной массой более 27 т бортовые самописцы содержат гидроакустические маяки для облегчения поиска в случае падения аппарата в водном или заболоченном районе.

Современная тенденция миниатюризации затрагивает и гидроакустические устройства [3].

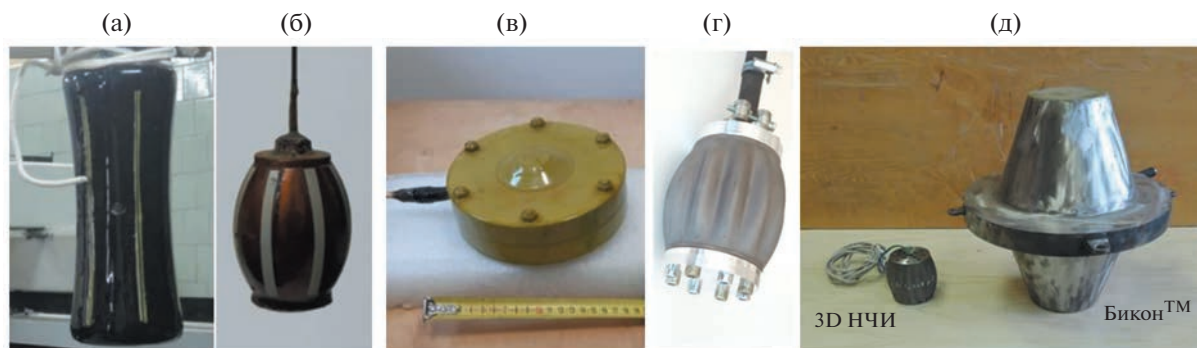


Рис. 1. Компактные низкочастотные излучатели.

Компактные НЧИ требуются во многих задачах гидроакустики [4]. Габариты излучателя наиболее критичны для транспортируемых гидроакустических буюв [5], устройств навигации и связи [6], в том числе устанавливаемых на подводных необитаемых аппаратах и системах аварийного оповещения. Все большую актуальность приобретает разработка компактных НЧИ (размером корпуса менее 50 см) высокой удельной мощности [7]. Как известно, КПД и рабочая частота излучателя напрямую зависят от размера излучающей поверхности, который определяется как габаритами преобразователя, так и его конструктивным устройством. Проблематично изготовить компактный НЧИ с высокой эффективностью в широкой полосе частот [8], так как малые размеры преобразователя затрудняют совмещение резонансов активного элемента и механической колебательной системы преобразователя [9].

Наибольшей технологичностью изготовления при ограниченных размерах и высоком КПД обладают преобразователи продольно-изгибного типа (рис. 1а, 1б, 1г) [10]. Кроме того, что параметры излучателей такого типа существенно зависят от формы корпуса и его защитного покрытия, типичной проблемой подобных НЧИ является герметизация продольных прорезей, снижающих поперечную жесткость корпуса и определяющих рабочую частоту. Обычно такая герметизация выполняется эластичными вставками с последующим покрытием всего корпуса слоем полиуретана, что сопряжено с низкой надежностью клеевых соединений и потерями энергии в покрытии. Более эффективным является гофрирование корпуса (рис. 1г), например, в конструкции “3D НЧИ” — преобразователя продольно-изгибного типа с излучающей оболочкой сложной формы, что кроме устойчивости к циклическим нагрузкам (ресурс “3D НЧИ” составляет более 10^{10} циклов) имеет очевидные технологические преимущества при серийном изготовлении.

Корпуса “3D НЧИ” изготовлены из сплава титана Ti–6Al–4V с применением технологии по-

слойного лазерного сплавления, что обеспечивает подтвержденную испытаниями высокую стабильность физико-механических свойств материала [11] в совокупности с повторяемостью других технических параметров.

Использование связанных колебательных систем является одним из способов повышения эффективности НЧИ. Пример подобного конструктивного решения — компактный преобразователь инерционно-изгибного типа с пьезокерамическим активным элементом (рис. 1г). Излучение звука в этом НЧИ основано на преобразовании изгибных колебаний пластин с вклеенными пьезокерамическими кольцами в возвратно-поступательные колебания излучающих мембран. Активный элемент излучателя имеет поперечную поляризацию, изменяя диаметр при подаче электрического напряжения. Ввиду исключения влияния внешнего гидростатического давления на активный элемент в таком НЧИ практически нет дрейфа частоты по глубине. Однако небольшой размер активного элемента и отсутствие механического трансформатора не позволяет излучать большую акустическую мощность [7].

Для НЧИ размером около 1 м оптимальным техническим решением является Бикон™ — монополюс встречно-поршневого типа с конусообразным излучающим корпусом. НЧИ Бикон™ (рис. 1д) имеет КПД до 70–80%, развивая акустическое давление 10 кПа при ресурсе до 10^{12} циклов. Бикон™ можно использовать без компенсатора гидростатического давления на глубинах до 300–400 м.

Уменьшение габаритных размеров НЧИ подобного типа (менее 0.2 м) снижает чувствительность преобразователя по напряжению из-за сокращения длины активного элемента и падения амплитуды колебаний излучающей оболочки. Миниатюрный Бикон™ будет иметь невысокую удельную мощность, поэтому излучатели встречно-поршневого типа целесообразно использовать при габаритных размерах корпуса НЧИ не

Таблица 1. Параметры корпусов “3D НЧИ” № 1 и № 2

Параметр	“3D НЧИ” № 1	“3D НЧИ” № 2
Размер корпуса (диаметр × длина), мм	86 × 90	102 × 92
Число волн гофрирования	12	16
Максимальная толщина стенки корпуса, мм	1.40	1.46
Минимальная толщина стенки корпуса, мм	0.60	0.55
Толщина фланца, мм	14	18
Амплитуда гофрирования, мм	4.1	6.0
Масса корпуса, кг	0.42	0.61

менее 0.2–0.3 м. Кроме того, из-за отсутствия механического трансформатора, увеличивающего амплитуду колебаний активного элемента, коэффициент использования присоединенной массы воды НЧИ типа БиконTM достаточно низкий. Это обстоятельство не позволяет изготовить компактные и миниатюрные НЧИ такого типа для частот 1 кГц и ниже. Для диапазона частот 1.0–2.0 кГц НЧИ продольно-изгибного типа “3D НЧИ” и НЧИ типа БиконTM различаются по максимальным габаритам более чем в 4 раза, а по массе – почти в 25 раз. Так, излучатель типа БиконTM для диапазона частот 1.5–1.6 кГц (рис. 1д, справа) весит 30 кг, а “3D НЧИ” (рис. 1д, слева) для подобного диапазона частот – около 1 кг.

Сравнение разных типов НЧИ приводит к закономерному выводу о том, что баланс между размерами преобразователя, его КПД, полосой излучаемых частот и максимальной излучаемой акустической мощностью достигается при помощи использования излучающих элементов со специальной геометрией и пьезоэлементов, нагруженных через механический трансформатор на присоединенную массу воды. Поскольку параметры НЧИ существенно зависят как от формы излучающих поверхностей, так и от его размеров, анализ резонансных характеристик компактных “3D НЧИ” (как корпусов, так и излучателей в сборе) и сопоставление с результатами электроакустических измерений [12] позволяет скорректировать направление конструкторского поиска при разработке излучателей такой конструкции.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ПРОВЕРКА РАСЧЕТОВ “3D НЧИ”

Разработка низкочастотных акустических излучателей высокой удельной мощности предполагает экспериментальную проверку важнейших параметров “3D НЧИ”, в первую очередь значений основных резонансов с целью совершенствования конструкции и повышения эффективности излучателя.

Определение резонансных характеристик “3D НЧИ” целесообразно проводить бесконтактным способом, например, при помощи лазерной виброметрии, основанной на эффекте Доплера [13]. В отличие от измерений виброакселерометрами, такой подход обеспечивает более точное представление о динамических характеристиках объекта. Немаловажной особенностью лазерной виброметрии является возможность измерения колебательных характеристик оболочек в труднодоступных местах, таких как впадины гофрирования. Возбуждение корпусов НЧИ можно производить на вибростенде, а “3D НЧИ” в сборе – электрическим сигналом, подаваемым на активный элемент излучателя. Такие способы возбуждения при выбранном методе регистрации колебаний наиболее эффективны ввиду минимизации влияния элементов оснастки и измерительного оборудования.

Согласно предварительным расчетам [14], “3D НЧИ” размерами до $\varnothing 100 \times 100$ мм и массой примерно 1 кг с корпусом из титана устойчив к гидростатическому давлению в эшелоне глубин до 800 м, обладая чувствительностью по напряжению до 2 Па м/В в диапазоне 1.5–2.5 кГц. Величина механического напряжения в корпусе такого “3D НЧИ” достигает 3.5×10^4 Па на основном резонансе и 4.5×10^4 Па при воздействии гидростатического давления на глубине 1 км, что на несколько порядков ниже предельного значения для титана [15], в том числе полученного при изготовлении методом послойного лазерного сплавления.

Экспериментальные образцы “3D НЧИ” № 1 и № 2 при незначительных различиях в геометрии корпуса и массо-габаритных параметрах (табл. 1) можно считать практически идентичными с использованной в расчетах моделью корпуса излучателя (рис. 2).

Так как в предварительных расчетах при помощи конечно-элементного моделирования использованы приближения и оценки для корпуса, имеющего максимальные размеры $\varnothing 86 \times 96$ мм и сходную с “3D НЧИ” № 1 амплитуду, число волн гофрирования и толщину оболочки, оба исследу-

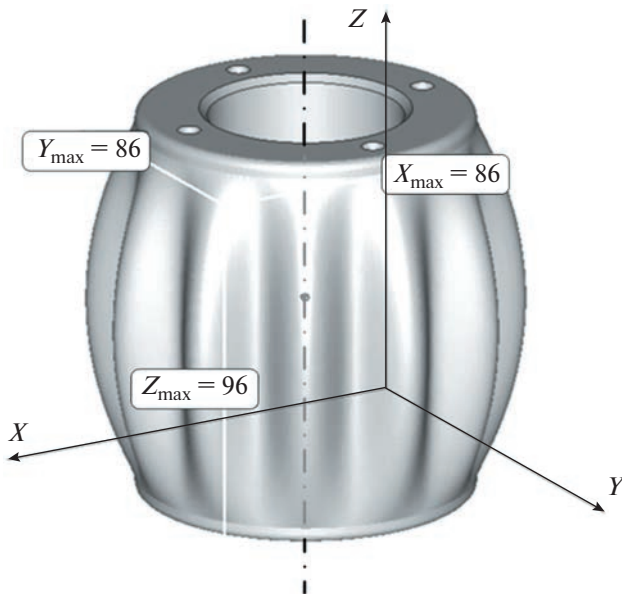


Рис. 2. STL-модель корпуса “3D НЧИ”, использованная для предварительных расчетов характеристик преобразователя.

емых излучателя (№ 1 и 2) можно считать незначительными вариациями расчетной модели. Применение разных виброметров (однолучевого с неподвижным лучом и однолучевого сканирующего), способов возбуждения колебаний (механического и электрического) и типов возбуждающего сигнала (гармонический сигнал, ЛЧМ, розовый шум и т.д.) позволяет построить наиболее полную картину резонансных характеристик. Погрешность измерений лазерным виброметром спектральной плотности амплитуды виброскорости в рассматриваемом частотном диапазоне составляет $2.0\text{--}4.0 \times 10^{-8}$ мкм/с Гц⁻¹ при падении лазерного луча по нормали на рассеивающую свет поверхность. С учетом пересчета этих значений в перемещение, погрешность прибора на несколько порядков меньше зарегистрированных в процессе измерений величин. Более значительные погрешности могут возникать при измерении в точках на краях поверхности излучателя, где угол падения луча существенно отличается от нормального и измеряется не нормальная компонента скорости или смещения поверхности излучателя, а ее проекция на луч. Для исследуемых в работе излучателей и расстояния до виброметра, разница составляет не более 3%. В целом же для количественного сравнения амплитуд можно выбрать точки на небольшом удалении от центра области, где падение луча можно считать нормальным. Основные погрешности при таком методе измерений определяются инструментальной ошибкой. Разрешение по частоте составляет не менее 1% для диапазона колебательной скорости до 20 мм/с и

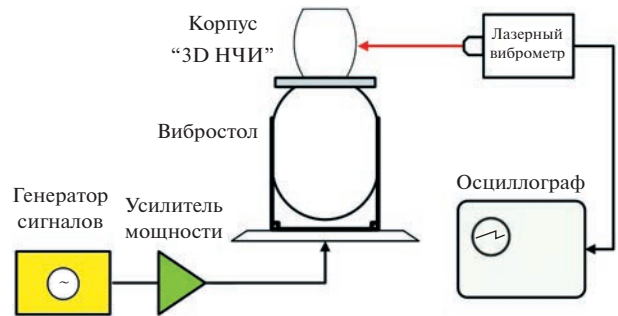


Рис. 3. Схема измерений резонансных характеристик корпусов “3D НЧИ” с использованием лазерного виброметра.

полосы частот до 0.2 МГц при соотношении сигнал/шум более 90 дБ. Таким образом, точность определения частотных характеристик составляет не менее 10–20 Гц, поскольку амплитуда колебаний поверхности не превышает 2 нм.

1.1. Резонансные характеристики излучающих оболочек “3D НЧИ”

Схема установки для исследования при помощи лазерного виброметра колебательных характеристик корпуса “3D НЧИ” на вибростенде приведена на рис. 3.

Возбуждение колебаний закрепленного на вибростоле корпуса осуществлялось розовым шумом и ЛЧМ-сигналами длительностью 20 с, где частота нарастала от 100 Гц до 10 кГц. Оба способа в рамках инструментальной точности измерений дают одинаковые частотные спектры. При сходных размерах двух изделий с различными вариантами гофрирования излучающей поверхности (ребри одинаковой высоты для корпуса № 1 и чередование гребней по высоте для корпуса № 2), основные резонансы обеих оболочек различаются на 100–150 Гц и лежат в полосе от 3.1 до 3.3 кГц (рис. 4). Наличие нескольких достаточно узких полос за пределами основного резонанса обоих изделий также связано с геометрией “3D НЧИ”, определяющей соотношение поперечной и продольной жесткости корпуса. Характерное снижение более чем на 20% отклика корпуса “3D НЧИ” № 2 на возбуждение в основной полосе частот по сравнению с “3D НЧИ” № 1 связано с увеличением его продольной жесткости: поперечное гофрирование имеет на 33% больше гребней (переменной высоты) при меньшей на 8% толщине стенки корпуса в поперечнике по сравнению с “3D НЧИ” № 1. Отсутствие явно выраженных резонансов за пределами основной полосы частот для корпуса “3D НЧИ” № 2 (рис. 5) позволяет сделать вывод о его большей эффективности в рабочей полосе частот.

Незначительные различия откликов корпусов “3D НЧИ” в основной полосе частот и сходный характер резонансных кривых (рис. 5 и 6), с одной стороны, указывают на повторяемость параметров подобного конструктивного решения при серийном изготовлении излучателей, а с другой — на возможность разработки изделий с заданными частотными характеристиками. Приведенные в работе [12] результаты измерений зависимости чувствительности по напряжению от частоты собранного излучателя “3D НЧИ” № 1 (рис. 1г) в воде иллюстрируют, что наличие дополнительных резонансов корпуса отражается и на его электроакустических характеристиках. Максимальное значение чувствительности по напряжению “3D НЧИ” № 1 в воде достигается на частотах 20–22 кГц [12], что связано со сближением в диапазонах выше 10–12 кГц резонансов корпуса (рис. 6) и активного элемента.

1.2. Механический коэффициент трансформации “3D НЧИ”

Как отмечено выше, преобразователи продольно-изгибного типа при сравнительно высокой технологичности изготовления имеют наибольшую эффективность по сравнению с излучателями, использующими другие способы акустического оформления. Электромеханический трансформатор преобразователя данного типа нагружен на активно-реактивную нагрузку [14], что при компактных размерах НЧИ из-за присоединенной массы $M_{пр}$ позволяет в основной полосе частот обеспечить низкую частоту собственных колебаний $f_{НЧИ}$

$$f_{НЧИ} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_{кс} + n^2 M_{пр}}}, \quad (1)$$

где k — коэффициент упругости механической колебательной системы, определяемый жесткостью конструкции преобразователя, $m_{кс}$ — эквивалентная масса колебательной системы, зависящая от конструктивного устройства излучателя, n — механический коэффициент трансформации. Присоединенная масса воды оказывает большое влияние на частотные характеристики НЧИ, так как механический трансформатор преобразует возвратно-поступательные колебания активного элемента с малой амплитудой в поперечные колебания излучающих элементов оболочки с большей амплитудой:

$$n = \frac{A}{a}, \quad (2)$$

где a — амплитуда продольных колебаний торцевых фланцев корпуса, A — амплитуда поперечных колебаний поверхности излучающей оболочки. Таким образом, коэффициент механической трансформации является одним из главных фак-

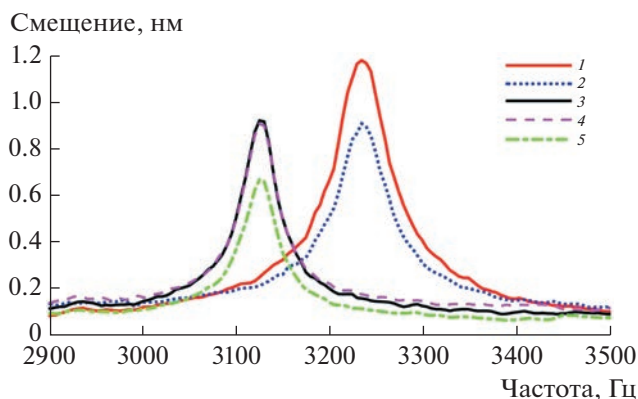


Рис. 4. АЧХ корпусов “3D НЧИ” в основной полосе частот. Для корпуса “3D НЧИ” № 1: 1 — впадина, 2 — гребень; для корпуса “3D НЧИ” № 2: 3 — впадина, 4 — малый гребень, 5 — большой гребень.

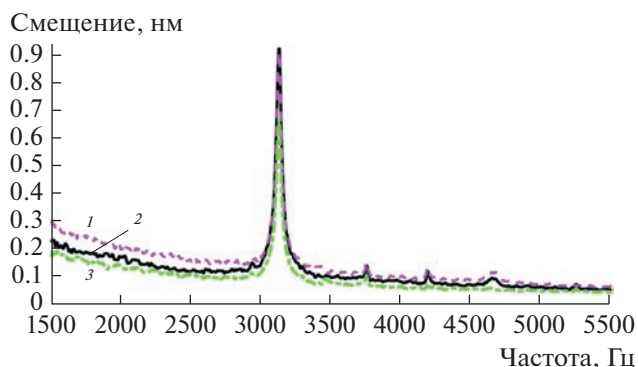


Рис. 5. АЧХ корпуса “3D НЧИ” № 2 при непрерывном воздействии белым (розовым) шумом и ЛЧМ-сигналами на вибростенде. На графике обозначено: 1 — малый гребень, 2 — впадина, 3 — большой гребень.

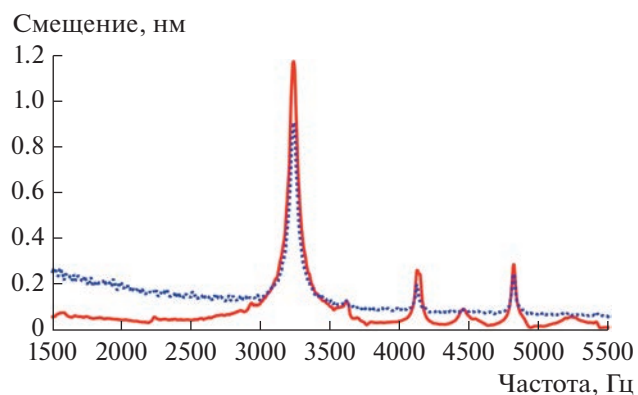


Рис. 6. АЧХ корпуса “3D НЧИ” № 1 при непрерывном воздействии белым (розовым) шумом и ЛЧМ-сигналами на вибростенде. На графике обозначено: синий пунктир — гребень, сплошная красная линия — впадина.

торов, определяющих эффективность НЧИ [5, 16]. Отсутствие присоединенной массы жидкости или ее механического эквивалента не меняет величину механического коэффициента трансформации излучателя, что позволяет рассматривать измерение амплитуды колебаний корпуса НЧИ в колебательной системе “вибростол–оболочка” (рис. 3) или “3D НЧИ” в сборе как независимый метод оценки его эффективности.

Проведенные в воздухе при помощи однолучевого лазерного виброметра измерения амплитуды колебаний корпусов собранных НЧИ показали сходные коэффициенты механической трансформации обоих излучателей. Для усреднения результатов измерение коэффициента трансформации выполнено для нескольких гребней и впадин и в нескольких точках фланца, расположенных на пересекающихся диаметральных секущих от центра к краям с шагом 2–4 мм, как это описано в [14]. Среднее значение коэффициента трансформации по гребням и впадинам для каждого из собранных излучателей “3D НЧИ” № 1 и № 2 составляет около 26. Такая величина согласно (1) характеризует использование значительной присоединенной массы воды по отношению к конструктивной массе самого излучателя, так как эффективность НЧИ (в смысле приближения его к невесомой пульсирующей сфере)

$$\kappa = \frac{1}{\xi + 1} \quad (3)$$

определяется соотношением

$$\xi = \frac{m_{\text{кс}}}{M_{\text{пр}}^*}, \quad (4)$$

где $M_{\text{пр}}^*$ – приведенная в точку приложения сил присоединенная масса воды.

Поскольку коэффициент механической трансформации излучателя продольно-изгибного типа выражается соотношением прогиба d и длины L излучающего элемента, то из геометрических соотношений его предельно возможное значение составляет

$$n_{\text{пр}} \approx \frac{2d}{L \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4d^2}} \right)}. \quad (5)$$

Для корпуса “3D НЧИ” длиной 92 мм, где по внутренней поверхности образующей впадины корпуса прогиб составляет менее 0.5 мм, $n_{\text{пр}} \geq 45$. Сложная форма оболочки не позволяет считать это значение ориентиром, однако существенно меньшие значения коэффициента механической трансформации для гребней “3D НЧИ” обеспечивают большую эффективность по сравнению с

излучателями продольно-изгибного типа традиционной конструкции [10].

Деформация геометрии (изменение прогиба) оболочки после сборки НЧИ из-за нагружения активного элемента приводит к изменению значения механического коэффициента трансформации. Тем не менее величину этого коэффициента до сборки и после можно использовать в качестве дополнительного параметра, связанного с электроакустическими характеристиками “3D НЧИ”.

2. РЕЗОНАНСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОБРАННЫХ “3D НЧИ” В ВОЗДУХЕ

Для некоторых типов НЧИ можно приближенно рассчитать резонансную частоту преобразователя, пользуясь только данными измерений в воздухе. Предварительная оценка “3D НЧИ” также подразумевает снятие его частотных характеристик в воздухе. Схема измерений собранных излучателей (рис. 7) в воздухе при помощи однолучевого лазерного виброметра приведена на рис. 3 в работе [14].

Сравнение резонансных частот “3D НЧИ” № 1 и № 2 по максимумам амплитуды колебаний корпусов показало, что незначительное увеличение размеров излучающего элемента повлияло на частоту основного резонанса. Так как корпус “3D НЧИ” № 2 имеет несколько большие размеры, чем “3D НЧИ” № 1, частота основного резонанса которого в воздухе равна 4.0 кГц (рис. 8а), резонанс собранного “3D НЧИ” № 2 в воздухе оказался значительно ниже – 3.5 кГц (рис. 8б). Диссипация и различия связанных колебательных систем “оболочка–активный элемент” и “оболочка–торцевые фланцы” приводит также к расхождению АЧХ аксиальных и радиальных колебаний корпуса, а спектры обоих излучателей содержат комбинационные частоты, обусловленные взаимодействием нескольких осцилляторов.

Различие максимального диаметра корпуса “3D НЧИ” № 2 на 14 мм и 2 мм по длине существенно увеличивает объем его присоединенной массы, которая в значительной мере определяет частоту основного резонанса (1). С учетом квадратичной зависимости от коэффициента трансформации (2), вносимая поправка также потребует корректировки для расчета частоты основного резонанса излучателя в воде (1).

Для уточнения полученных результатов и построения более полной картины распределения колебаний излучающей оболочки “3D НЧИ” на торцах проведены измерения с помощью трехкомпонентного сканирующего лазерного виброметра. Наибольшее значение амплитуды колебаний торцевых фланцев обоих излучателей достигается в основной полосе частот. Кроме этого, на разных частотах выявлено несколько мод колеба-



Рис. 7. Излучатели “3D НЧИ” ((а) — № 1, (б) — № 2) в сборе, закрепленные на эластичном подвесе.

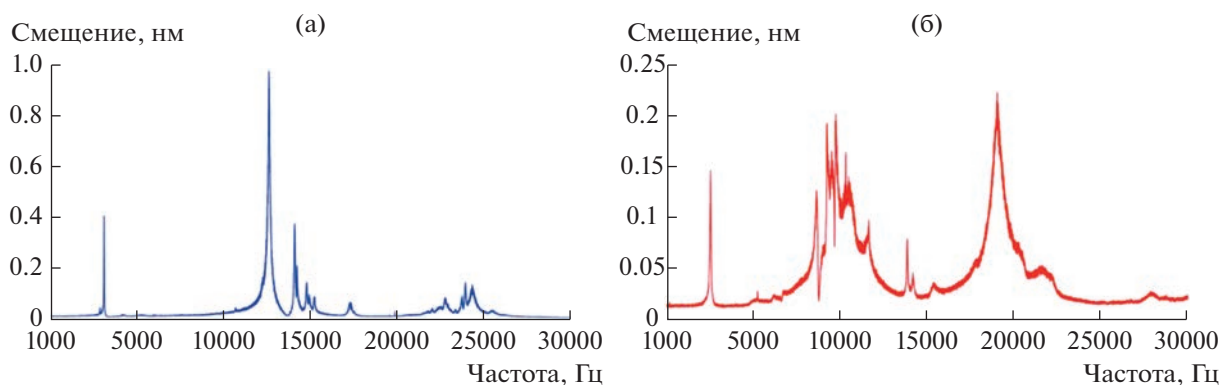


Рис. 8. Спектральные распределения амплитуды колебаний в воздухе на торце собранных преобразователей “3D НЧИ” ((а) — № 1, (б) — № 2).

ний. Распределение амплитуды колебаний фланцев обоих изделий практически повторяет рис. 7 в работе [14]: от центра к краям размах колебаний увеличивается в 5.5–6.0 раз для “3D НЧИ” № 1 и в 3.5–4.2 раза для “3D НЧИ” № 2. Подобное возрастание амплитуды колебаний на краях фланца по отношению к амплитуде колебаний активного элемента связано как с эластичностью резьбовых соединений, так и с конечной жесткостью фланцев, ограниченных размерами корпуса. Различие фланцев “3D НЧИ” № 1 и № 2 закономерно вызывает различие распределения амплитуды колебаний на торцах излучателей.

Оснащение “3D НЧИ” активными элементами, собранными из 8 колец ЦТБС-3, задает толщину торцевых гаек (10–12 мм), что при небольших размерах преобразователя приводит к эластичности как резьбового соединения, так и всего узла торцевого фланца в целом. Габариты корпуса “3D НЧИ” ограничивают максимальную длину и массу активного элемента и определяют эффективность преобразования и чувствительность из-

лучателя по напряжению. Поскольку чувствительность напрямую зависит от количества пьезокерамических колец активного элемента, а его длина обратно пропорциональна частоте основного резонанса, то отсутствие совмещения резонансов этих колебательных систем препятствует повышению эффективности НЧИ и максимальной излучаемой акустической мощности.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И СРАВНЕНИЕ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ № 1 И № 2

Усредненные для собранных излучателей по гребням и впадинам коэффициенты механической трансформации n имеют примерно одинаковые значения (табл. 2).

Значение коэффициента n превосходит показатели более габаритных преобразователей [6, 10], что дополнительно свидетельствует о высокой эффективности конструкции “3D НЧИ”. В силу особенностей геометрии оболочки “3D НЧИ” № 2 в

Таблица 2. Основные характеристики “3D НЧИ” № 1 и № 2

Параметр	“3D НЧИ” № 1	“3D НЧИ” № 2
Размер активного элемента (длина × диаметр), мм	71.2 × 34.2	75.6 × 34.3
Масса активного элемента, кг	0.36	0.39
Масса собранного излучателя, кг	0.95	1.20
Основной резонанс корпуса в воздухе, Гц	3250	3120
Коэффициент механической трансформации корпуса впадина/гребень	2.2/1.8	6.0/4.4
Резонанс собранного излучателя (в воздухе), кГц	4.0	3.5
Коэффициент механической трансформации собранного излучателя	24–27	26–28

отличие от “3D НЧИ” № 1, амплитуды колебаний малых гребней и впадин почти одинаковы, а для больших гребней и впадин практически совпадают с “3D НЧИ” № 1, где различие составляет 1.4 раза [14]. Характер колебаний оболочки “3D НЧИ” при возбуждении шумовыми сигналами позволяет сделать вывод о сходных распределениях мод для обоих изделий.

Увеличение размера корпуса “3D НЧИ” № 2 на 10–12% относительно “3D НЧИ” № 1 и изменение его формы, как видно из частотных характеристик, существенно повлияло на характеристики излучателя: в воздухе резонансные частоты изделий различаются почти на 500 Гц. Предполагая, что оба корпуса имеют одинаковую жесткость и учитывая больший объем “3D НЧИ” № 2, чем “3D НЧИ” № 1, в соответствии с предварительными данными электроакустических измерений “3D НЧИ” № 1 и оценкой резонансной частоты в воде [14], можно ожидать, что “3D НЧИ” № 2 способен излучать гидроакустические сигналы в полосе частот 1.1–1.3 кГц. Однако, ввиду сложности теоретических расчетов, подобные оценки требуют экспериментальной проверки.

Из сравнения “3D НЧИ” № 1 и 2, в частности резонансных кривых в воздухе (рис. 8), видно, что незначительное изменение формы и размеров корпуса на 10–12% подтверждает выбранное направление конструкторского поиска по увеличению удельной мощности НЧИ одновременно с понижением частоты основного резонанса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали, что незначительные изменения размеров и геометрии корпуса “3D НЧИ” существенно влияют на характеристики излучателя. Различие виброакустических характеристик собранных изделий, в частности резонансных частот в воздухе и расположения резонансных полос в спектрах откликов корпусов, позволяет оценить влияние геометрии излучающей оболочки на параметры “3D НЧИ”. Поскольку увеличение размеров “3D НЧИ” на

10–12% и массы на 25% привело к понижению частоты резонанса в воздухе на 13%, можно сделать вывод о том, что увеличение размера корпуса и активного элемента на 30–40% позволит проектировать компактные “3D НЧИ” высокой удельной мощности для диапазона частот 1 кГц и ниже.

Материалы и конструкция “3D НЧИ” допускают транспортировку авиакосмическими носителями, что может быть недопустимо для гидроакустических излучателей другой конструкции из-за особенностей применяемых материалов. “3D НЧИ” в дополнение к достаточно низкой для своих размеров резонансной частоте обладает достаточно высокой удельной акустической мощностью в сравнении с аналогичными по габаритам и массе НЧИ других типов [17].

Исследования виброакустических характеристик “3D НЧИ” подтверждают перспективность такой конструкции и актуальность разработки масштабных моделей при проектировании мощных гидроакустических излучателей.

Авторы выражают благодарность заведующему отделом акустики океана Д.А. Касьянову, заведующему лабораторией экспериментальной электроники В.А. Перфилову, заведующему лабораторией прикладной гидроакустики Б.Н. Боголюбову, заведующему сектором М.С. Дерябину, ведущему электронику О.Р. Фаизову и инженеру В.К. Бахтину за внимание к работе, помощь в подготовке, организации и проведении экспериментальных работ, а также в обсуждении результатов исследований.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН “Распространение звука в морской среде и земной коре” (проект № 0030-2021-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yamoaka H., Kaneko A., Park J.H., Zheng H., Gohda N., Takano T., Zhu X.H., Takasugi Y. Coastal acoustic tomography system and its field application // IEEE J. Ocean. Eng. 2002. V. 27. № 2. P. 283–295. Электронный ресурс.
<https://doi.org/10.1109/JOE.2002.1002483>

2. *Munk W.* Acoustic thermometry of ocean climate (АТОС) // *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. V. 105. № 2. P. 982. <https://doi.org/10.1121/1.425359>
3. *Дикарев А.В., Дмитриев С.М.* Гидроакустическое устройство. Патент РФ: № 2655702 МПК H04R1/44.
4. *Курьянов Б.Ф., Пенкин М.М.* Цифровая акустическая связь в мелком море для океанологических применений // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 2. С. 245–255.
5. *Богородский В.В., Зубарев Л.А., Корепин Е.А., Якушев В.И.* Подводные электроакустические преобразователи. Л.: Судостроение, 1983. 248 с.
6. *Корякин Ю.А., Смирнов С.А., Яковлев Г.В.* Корабельная гидроакустическая техника. Состояние и актуальные проблемы. СПб.: Наука, 2004. 410 с.
7. *Бритенков А.К., Фарфель В.А., Боголюбов Б.Н.* Сравнительный анализ электроакустических характеристик компактных низкочастотных гидроакустических излучателей высокой удельной мощности // *Прикладная физика.* 2021. № 3. С. 72–77. <https://doi.org/10.51368/1996-0948-2021-3-72-77>
8. *Шаврин С.А.* Проблемные вопросы изготовления гидроакустических преобразователей // Сб. докл. I научно-практической конф. молодых специалистов “ИСТОК-2016”. СПб.: АО “Концерн “Океан-прибор”, 2016. С. 121–125.
9. *Mosca F., Matte G., Shimura T.* Low-frequency source for very long-range underwater communication // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 133. № 1. P. EL61–EL67. <https://doi.org/10.1121/1.4773199>
10. *Боголюбов Б.Н., Кирсанов А.В., Леонов И.И., Смирнов С.А., Фарфель В.А.* Расчет и экспериментальные исследования компактного продольно-изгибного гидроакустического преобразователя с центральной частотой излучения 520 Гц // *Гидроакустика.* 2015. Т. 23. № 3. С. 20–26.
11. *Бритенков А.К., Родюшкин В.М., Иляхинский А.В.* Исследование методом акустического зондирования физико-механических свойств титанового сплава Ti–6Al–4V, полученного методом послойного лазерного сплавления // *Mater. Phys. Mech.* 2021. Т. 47. № 1. С. 139–158. https://doi.org/10.18149/mpm.4712021_14
12. *Бритенков А.К., Боголюбов Б.Н., Фарфель В.А.* Электроакустические характеристики экспериментального преобразователя продольно-изгибного типа со сложной формой излучающей оболочки // *Ученые записки физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.* 2020. № 1. С. 2010106-1–2010106-5.
13. *Buchhave P.* Laser Doppler velocimeter with variable optical frequency shift // *Opt. and Laser Technology.* 1975. V. 7. № 1. P. 11–16.
14. *Бритенков А.К., Боголюбов Б.Н., Дерябин М.С., Фарфель В.А.* Измерение электромеханических характеристик компактного низкочастотного гидроакустического излучателя сложной формы // *Труды МАИ.* 2019. № 105. С. 1–24.
15. *Стрельченко С.С., Лебедев В.В.* Соединения A^3B^5 : Справочник. М.: Металлургия, 1984. 144 с.
16. *Вовк И.В., Мякишин Ю.В.* Низкочастотный продольно-изгибный преобразователь с плоской излучающей поверхностью // *Акуст. журн.* 1998. Т. 44. № 3. С. 337–343.
17. *Андреев М.Я., Боголюбов Б.Н., Ключин В.В., Рубанов И.Л.* Низкочастотный малогабаритный продольно-изгибный электроакустический преобразователь // *Датчики и системы.* 2010. № 12. С. 51–55.

УДК 534.522

ТЕПЛОВАЯ ПОМЕХА ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВСПЛЫВАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

© 2023 г. Е. Б. Кудашев^а, *, Л. Р. Яблоник^б, **

^аИнститут космических исследований РАН, ул. Профсоюзная 84/32, Москва, 117997 Россия

^бНаучно-производственное объединение по исследованию и проектированию энергетического оборудования им. И.И. Ползунова, ул. Атаманская 3/6, Санкт-Петербург, 191167 Россия

*e-mail: kudashev@iki.rssi.ru

**e-mail: yablonik@gmail.com

Поступила в редакцию 03.07.2023 г.

После доработки 03.07.2023 г.

Принята к публикации 19.09.2023 г.

Исследована тепловая помеха при регистрации турбулентных пульсаций давления на поверхности всплывающего устройства при заданных экспериментальных параметрах температурной стратификации водной среды. Исследован эффект искажения спектральных уровней пульсаций давления, регистрируемых приемником звука в поле температурных неоднородностей, на примере измерений турбулентных пульсаций давления в пограничном слое при вертикальном всплытии устройства с заданной глубины. Показано, что при умеренных скоростях обтекания, превышающих 1–2 м/с, температурная восприимчивость пьезокерамического приемника в решающей мере определяется его характерной “тепловой” частотой. Определены параметры пороговой критической частоты, ниже которой температурный сигнал (тепловая помеха) преобладает над “полезным” сигналом, порождаемым пульсациями давления. Применительно к приемникам, используемым в экспериментах на всплывающем устройстве [7], значения пороговой критической частоты составляют 130 и 215 Гц.

Ключевые слова: турбулентные пульсации давления, температурная неоднородность среды, тепловая помеха

DOI: 10.31857/S0320791923600713, EDN: CQBEVE

ВВЕДЕНИЕ

Поле турбулентных давлений на поверхности обтекания, как правило, включает в себя весомую длинноволновую составляющую, формируемую акустическим полем в зоне течения [1–4]. В лабораторных исследованиях эта составляющая, связанная с работой оборудования и другими сторонними источниками, рассматривается как акустическая помеха, устранение или подавление которой представляет собой одну из важных задач проведения корректных измерений [5]. Применительно к водной среде эта задача решается путем использования всплывающих устройств, оснащенных автономным измерительным комплексом. Всплывающее устройство представляет собой удлиненное тело вращения, имеющее в погруженном состоянии избыточную архимедову плавучесть и по этой причине способное самостоятельно всплывать из глубоководных частей морской акватории. Принципы, реализованные при создании всплывающего устройства, позволяют проводить исследования акустико-гидро-

динамических процессов в турбулентном пограничном слое при высоких числах Рейнольдса (до значений 10^8), при этом данные измерений практически не искажаются посторонними акустическими шумами, т.к. движение устройства вызывается исключительно градиентом поля гидростатического давления.

Результаты экспериментальных исследований шумов обтекания с применением установки этого типа представлены в работе [6]. В России всплывающее устройство было разработано в ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова (Крыловский Научный центр). Его подробное описание приведено в [7]. Для дальнейшего рассмотрения существенно, что измерения пристеночных турбулентных давлений выполняются в различных точках измерительной секции двумя типами пьезокерамических преобразователей давления: стержневыми (трубчатыми) глубиной около 15 мм с приемной поверхностью диаметром 1.3 мм и пластинчатыми приемниками толщиной около 1 мм с диамет-

ром приемной поверхности 20 мм; при этом скорости обтекания составляли 8–22 м/с.

Поскольку используемая в приемниках пьезо-керамика обладает также пьезоэлектрическими свойствами, при всплытии устройства в температурно-стратифицированной среде на выходе преобразователей пульсаций давления генерируется дополнительный “температурный” сигнал, который рассматривается как тепловая помеха.

В данной работе проводятся конкретные оценки параметров тепловой помехи применительно к всплывающему устройству [7] в условиях температурной неоднородности среды, представленной в книге [8] по результатам исследований [9]. Оценки основываются на общем подходе, предложенном в [10]; некоторые результаты ранее обсуждались авторами в докладе на XVII Школе-семинаре “Акустика океана” имени акад. Л.М. Бре-ховских [11].

ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИЙ ПРИЕМНИК ДАВЛЕНИЯ В ТЕМПЕРАТУРНО-НЕОДНОРОДНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

По имеющимся данным [10, 12, 13], соотношение между чувствительностью приемников к температуре (γ_T , В/К) и давлению (γ_p , В/Па) может быть оценено величиной $\Gamma_{Tp} = 2 \times 10^6$ Па/К, что примерно соответствует произведению коэффициента линейного теплового расширения на модуль Юнга пьезокерамики. Данная величина соответствует полному прогреву приемника, который в условиях измерений турбулентных пульсаций в температурно-неоднородной среде никогда не достигается. При этом для определения реального влияния температурного фактора на работу приемника пристеночных турбулентных давлений следует, прежде всего, оценить, в какой степени пульсации температуры прогревают корпус пьезоэлемента.

Согласно модели, развитой в [10], приемник, непосредственно контактирующий с обтекающей средой, характеризуемой граничным температурным полем $T_0(\mathbf{k}, \omega)$ ($\mathbf{k}$ – двумерный волновой вектор, ω – угловая частота), формирует в силу пьезоэффекта электрический сигнал с амплитудой $e_T(\mathbf{k}, \omega)$. Среднеквадратичное значение этого сигнала для приемника, встроенного в обтекаемое тело, определяется равенством

$$|e_T(\mathbf{k}, \omega)| = \gamma_T^2 \frac{1 - 2e^{-\alpha} \cos \beta + e^{-2\alpha}}{R} |T_0^2(\mathbf{k}, \omega)|, \quad (1)$$

в котором

$$R = h^2 \sqrt{\kappa^4 + (\omega/\chi)^2}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\chi \kappa^2}\right), \quad (2)$$

$$\alpha = \sqrt{R} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \beta = \sqrt{R} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

параметры χ и h представляют собой соответственно температуропроводность и протяженность приемника в направлении нормали к стенке. Применительно к воздействию случайного однородного стационарного температурного поля соотношение (1) представляется в виде

$$\Phi_{SS}^T(\omega) = \gamma_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_T(\kappa, \omega) E_{TT}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}. \quad (3)$$

Здесь $\Phi_{SS}^T(\omega)$ – частотный спектр температурного сигнала, $E_{TT}(\mathbf{k}, \omega)$ – частотно-волновой спектр пристеночных пульсаций температуры; $S_T(\kappa, \omega)$ – волновая температурная характеристика приемника, определяемая, ввиду (1), равенством

$$S_T(\kappa, \omega) = \frac{1 - 2e^{-\alpha} \cos \beta + e^{-2\alpha}}{R}. \quad (4)$$

Далее рассмотрим влияние температурных неоднородностей среды на конкретном примере исследования шумов обтекания, создаваемых турбулентными пульсациями давления в пограничном слое на теле всплывающего устройства.

В рамках модели “замороженности” спектральные частотно-волновой спектр и температурная неравномерность среды связаны простым соотношением

$$E_{TT}(\kappa, \omega) = \frac{1}{U} P_{TT}(\kappa) \delta\left(\kappa - \frac{\omega}{U}\right), \quad (5)$$

где $P_{TT}(\kappa)$ – спектр вертикальной температурной неоднородности в зоне всплывающего устройства. Соответственно выражение (3) для частотного спектра температурного сигнала приобретает вид:

$$\Phi_{SS}^T(\omega) = \gamma_T^2 \frac{1}{U} S_T\left(\frac{\omega}{U}, \omega\right) P_{TT}\left(\frac{\omega}{U}\right). \quad (6)$$

Расчеты показывают (рис. 1), что при умеренных скоростях обтекания, превышающих 1–2 м/с, частотная зависимость температурной характеристики S_T определяется лишь характерной “тепловой” частотой

$$\Omega_\chi = \frac{\chi}{h^2} \quad (7)$$

приемника пульсаций давления. Соответственно, волновая характеристика практически перестает зависеть от скорости, так что

$$S_T \approx \frac{\Omega_\chi}{\omega}. \quad (8)$$

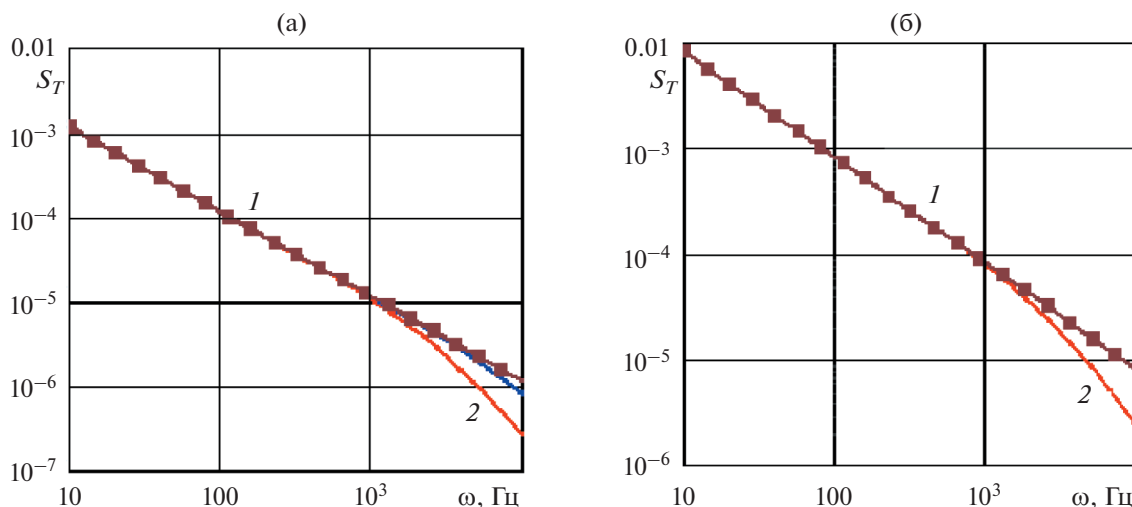


Рис. 1. Температурная передаточная характеристика $S_T(\omega/U, \omega)$, формула (4). Приемники: (а) – стержневой, 1 – $U = 1-10$ м/с, 2 – $U = 0.5$ м/с; (б) – пластинчатый, 1 – $U = 1-10$ м/с, 2 – $U = 0.1$ м/с. ■■■■■ – приближение (8).

Параметр “тепловая” частота Ω_χ практически определяется лишь геометрией используемого преобразователя давления; величина параметра Ω_χ может изменяться в довольно широких пределах. В частности, для используемых на всплывающем устройстве [7] двух типов приемников параметр Ω_χ оценивается значениями 0.073 и 0.55 с⁻¹. При этом, в силу конструктивных особенностей, температуропроводность χ стержневого приемника, определяемая тепловыми свойствами стального корпуса, характеризуется величиной 16.4×10^{-6} м²/с, а соответствующее значение для пластинчатого приемника задается типичным для керамики значением 5.5×10^{-7} м²/с.

Степень влияния температурного сигнала определяется отношением

$$\frac{\Phi_{SS}^T(\omega)}{\Phi_{SS}^p(\omega)} = \Gamma_{Tp}^2 \frac{S_T(\omega/U, \omega) P_{TT}(\omega/U)}{\Phi_{pp}(\omega) U} \quad (9)$$

температурной характеристики (6) к частотному спектру $\Phi_{SS}^p(\omega)$ “полезного” сигнала, обусловленного пульсациями пристеночного давления со спектром $\Phi_{pp}(\omega)$.

ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО СИГНАЛА ДЛЯ ВСПЛЫВАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Для конкретных оценок воспользуемся приведенными в [8] данными [9] по спектральной плотности температурной неоднородности в Балтийском море. В соответствии с этими данными (рис. 2), модельная зависимость спектральной плотности

температуры, К² м, от волнового числа κ , м⁻¹, может быть приближенно представлена в виде:

$$P_{TT}(\kappa) = \begin{cases} 10^{-4} (\kappa/2\pi)^{-5} & \text{при } \kappa/2\pi \leq 1 \text{ м}^{-1}, \\ 10^{-4} (\kappa/2\pi)^{-3} & \text{при } \kappa/2\pi > 1 \text{ м}^{-1}. \end{cases} \quad (10)$$

Частотный спектр турбулентных давлений оценивается согласно получившей широкое признание [3] эмпирической модели Гуди [14]. Согласно модели Гуди

$$\Phi_{pp}(\omega) = \frac{(\rho U_\tau^2) \delta}{U} \times \frac{3(\omega \delta/U)^2}{\left[(\omega \delta/U)^{0.75} + 0.5 \right]^{3.7} + \left[(1.1 R_T^{-0.57}) \omega \delta/U \right]^7}, \quad (11)$$

где $R_T = \frac{U_\tau^2 \delta}{U \nu}$; ρ и ν – соответственно плотность и кинематическая вязкость обтекающей жидкости; δ – толщина пограничного слоя; $U_\tau = \sqrt{\tau/\rho}$, τ – касательное напряжение на стенке. В работе оценки частотного спектра пульсаций давления были проведены применительно к поверхности измерительной секции устройства [7] в диапазоне скоростей всплытия 5–25 м/с (соответствующие значения U_τ в зонах расположения приемников составляли от 0.17 до 0.79 м/с, толщины пограничного слоя δ – от 35 до 68 мм).

Модельные представления (10), (11), конкретизирующие форму спектральных характеристик, входящих в соотношение (9), позволяют определить относительный вклад пульсаций температуры в формирование сигнала приемника турбу-

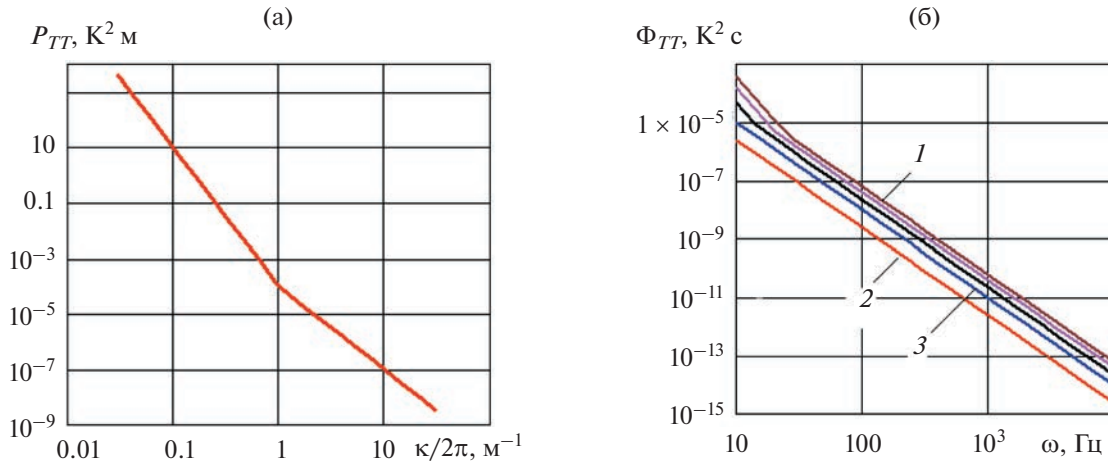


Рис. 2. Волновой и частотные спектры температуры на поверхности обтекания. (а) – Волновой спектр $P_{TT}(k)$ (10); (б) – соответствующие частотные спектры $\Phi_{TT}(\omega) = \frac{1}{U} P_{TT}(\omega/U)$, 1 – $U = 1$ м/с, 2 – $U = 5$ м/с, 3 – $U = 10$ м/с.

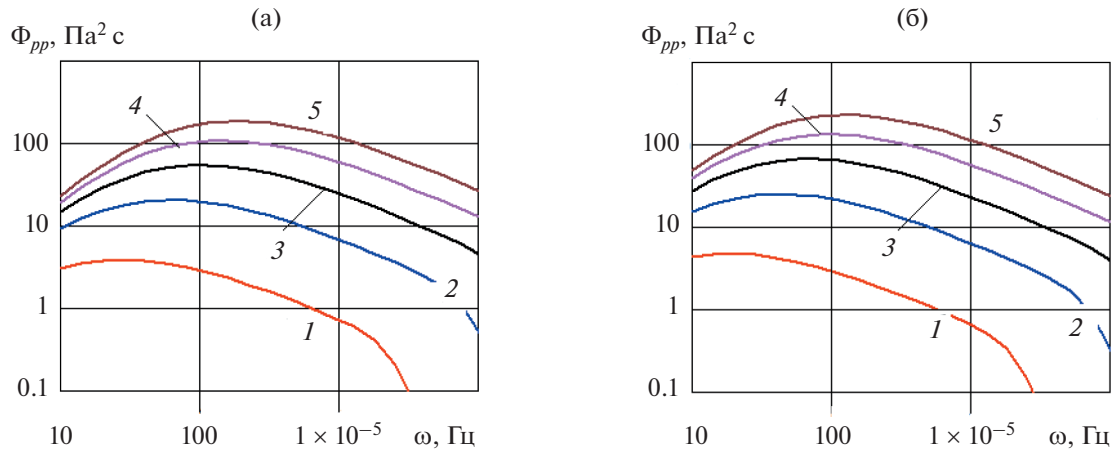


Рис. 3. Частотный спектр пульсаций давления на поверхности всплывающего устройства в зонах расположения приемников. Расчет по формуле (11). (а) – Передняя зона, (б) – тыловая зона. 1 – $U = 5$ м/с, 2 – $U = 10$ м/с, 3 – $U = 15$ м/с, 4 – $U = 20$ м/с, 5 – $U = 25$ м/с.

лентных давлений при заданном режиме обтекания всплывающего устройства.

Результаты расчетов (рис. 4) показывают, что в зоне значимого влияния температурной неоднородности величина отношения (9) быстро уменьшается с ростом частоты, при этом сама зависимость в решающей мере определяется “тепловой” частотой приемника. В частности, параметры обтекания и размеры приемника практически не влияют на значения пороговой критической частоты f_{cr} , при которой отношение (9) становится равным единице. Соответственно, ниже этой частоты, определяемой величиной Ω_χ , температурный сигнал становится выше “полезного”.

Полученные расчетные зависимости $f_{cr}(\Omega_\chi)$ (рис. 5) в широком диапазоне значений “тепловой” частоты от 10^{-4} до 10 с $^{-1}$ могут быть аппроксимированы единой формулой

$$\frac{f_{cr}}{f_0} \approx 250 \left(\frac{\Omega_\chi}{\Omega_0} \right)^{0.25}, \quad f_0 = 1 \text{ Гц}, \quad \Omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}, \quad (12)$$

которая обоснована для характеристики (10) температурной неоднородности, исходящей из конкретных данных [8, 9]. В силу определения (7) последнее равенство означает, что критическая частота обратно пропорциональна квадратному корню из протяженности приемника в направлении нормали к стенке

$$f_{cr} \sim 1/\sqrt{h}.$$

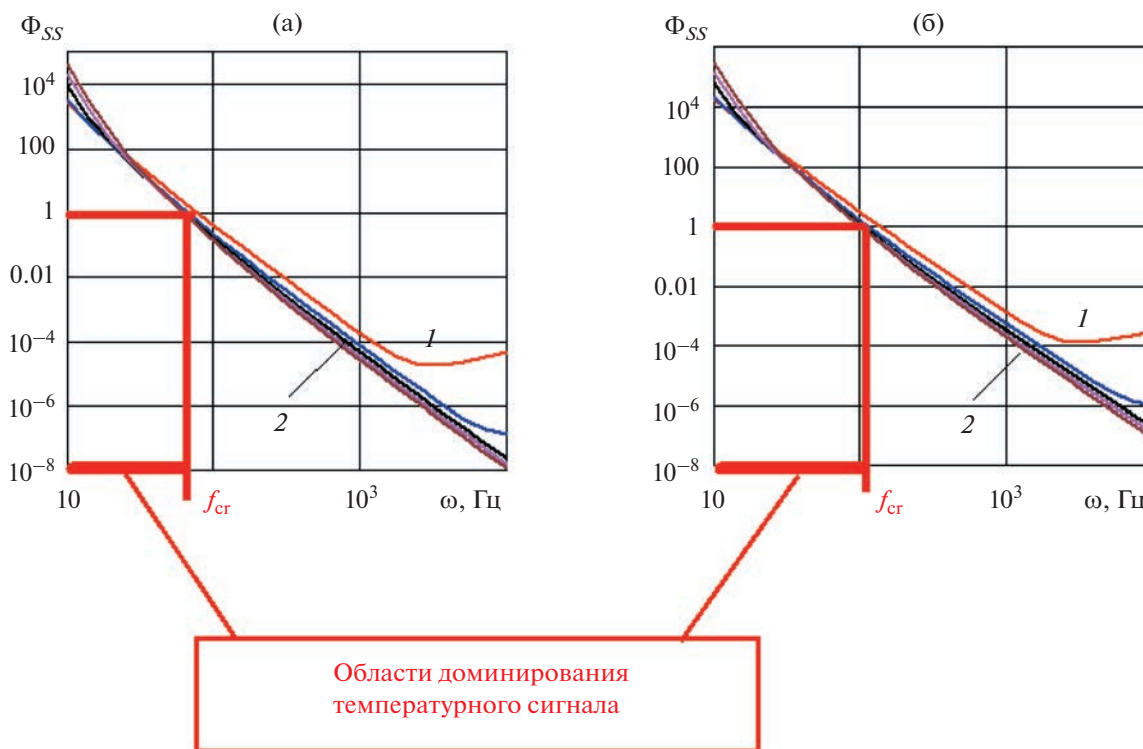


Рис. 4. Отношение спектральных компонент температурного и динамического сигналов на пьезокерамических приемниках всплывающего устройства [7]. Расчет по соотношению (9), тыловая зона расположения приемников. Приемники: (а) – стержневой, (б) – пластинчатый. 1 – $U = 5$ м/с, 2 – $U = 10\text{--}25$ м/с.

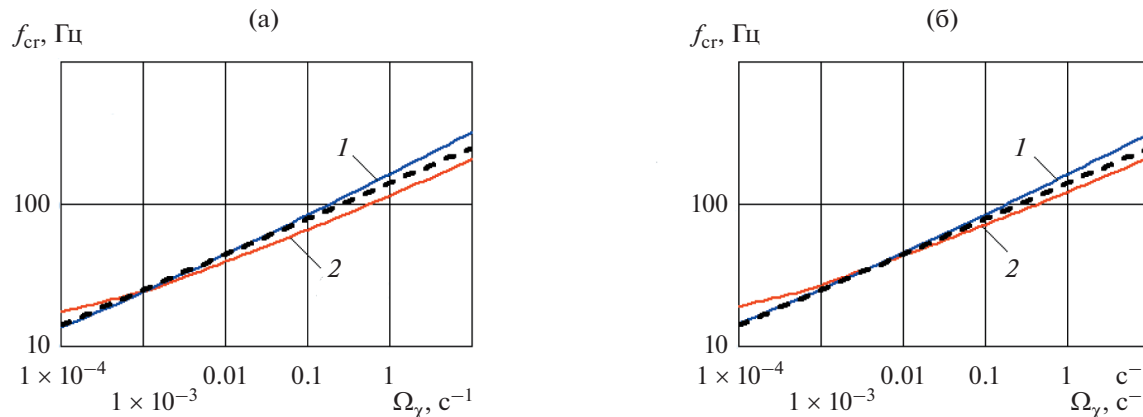


Рис. 5. Критические частоты воздействия температурной помехи. Сравнение расчетных данных с аппроксимирующей формулой (12) (штриховая кривая). Приемники: (а) – стержневой, (б) – пластинчатый. 1 – $U = 5$ м/с, 2 – $U = 25$ м/с.

Применение зависимости (12) к оценке изменений на всплывающем устройстве [7] показывает, что в рассматриваемых условиях температурная неоднородность оказывает существенное влияние на сигналы двух используемых типов приемников турбулентных давлений на частотах ниже 130 и 215 Гц.

Отметим, что близкая оценка частотной границы влияния температурной помехи получена на основании качественного анализа в работе [15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены оценки частотных характеристик тепловой помехи при регистрации турбулентных пульсаций давления на поверхности всплывающего измерительного устройства при заданных экспериментальных параметрах температурной стратификации водной среды.

Показано, что при умеренных скоростях обтекания, превышающих 1–2 м/с, температурная восприимчивость пьезокерамического приемни-

ка давления в решающей мере определяется его характерной “тепловой” частотой Ω_χ (7).

Определены параметры пороговой критической частоты, ниже которой температурный сигнал-помеха преобладает над “полезным” сигналом, порождаемым пульсациями давления. Проведенные исследования показали, что параметры обтекания и размеры чувствительной поверхности приемника пульсаций давления практически не влияют на значения пороговой критической частоты, а ее значения для исследованного температурного поля пропорциональны $\sqrt[4]{\Omega_\chi}$. В частности, применительно к приемникам, используемым в экспериментах на всплывающем устройстве [7], значения пороговой критической частоты составляют 130 и 215 Гц.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (тема “Мониторинг” № 122042500031-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Howe M.S.* Acoustics of Fluid-Structure Interactions. Cambridge University Press, 1998. 560 p.
2. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Турбулентные пристеночные пульсации давления. М.: Научный мир, 2007. 223 с.
3. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Развитие экспериментальных исследований турбулентных пристеночных пульсаций давления. Критический анализ и обобщение накопленных опытных данных // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 6. С. 639–649.
4. *Бычков О.П., Фараносов Г.А.* Локальный метод разделения звуковых и псевдозвуковых пульсаций // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 6. С. 722–737.
5. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Регистрация частотного спектра пристеночных турбулентных давлений на фоне акустического шума // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 6. С. 632–637.
6. *Huddle G., Skudrzyk E.* The Physics of Flow Noise // J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 46. P. 130–157.
7. *Кудашев Е.Б., Колышницын В.А., Маршов В.П., Ткаченко В.М., Цветков А.М.* Экспериментальное моделирование гидродинамических шумов обтекания на Автономной морской лаборатории // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 211–221.
8. *Монин А.С., Озмидов Р.В.* Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 320 с.
9. *Лозовацкий И.Д.* Исследование мелкомасштабных температурных неоднородностей в южной части Балтийского моря // Океанология. 1977. Т. 17. № 2. С. 214–220.
10. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р., Jian-Hua L.* Приемник турбулентных пульсаций давления в температурно-стратифицированной среде // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 94–99.
11. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Температурная помеха при измерении шумов обтекания в глубоком море // Докл. XVII Школы-семинара “Акустика океана” им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенной с XXXIII сессией Российского акустического общества. С. 237–242. М.: Институт океанологии РАН, 2020.
12. *Бугулавская С.Н., Романенко Е.В., Холод Л.И.* Использование пьезоэлектрического эффекта в акустических измерениях // Акуст. журн. 1971. Т. 17. № 2. С. 210–216.
13. *Паньков А.А.* Пьезоэлектрические свойства пористого титаната бария // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 11. С. 1–10.
14. *Goody M.* An empirical model of surface pressure fluctuations // AIAA J. 2004. V. 42. P. 1788–1794.
15. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Влияние температурной неоднородности среды на регистрируемые пьезоприемником шумы обтекания // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 127–128.

ПАМЯТИ ВИКТОРА ДАРЬЕВИЧА СВЕТА (17.05.1942–28.11.2023)

DOI: 10.31857/S0320791923360017, EDN: BSXSQO



28 ноября 2023 г. на 82 году жизни скончался ведущий научный сотрудник, ветеран Акустического института им. Н.Н. Андреева, доктор физико-математических наук Виктор Дарьевич Свет.

Виктор Дарьевич пришел в Акустический институт в 1963 г. на преддипломную практику, а после окончания кафедры радиосистем Московского электротехнического института связи в 1964 г. был распределен в Акустический институт, где 60 лет занимался исследованиями по широкому кругу вопросов, связанных с методами приема и обработки акустических сигналов. Его первые научные исследования были посвящены изучению нелинейных корреляционных связей в акустических сигналах и шумах, порождаемых мощными механизмами с вращающимися элементами. Разработанная теория методов нелинейного корреляционного анализа смогла объяснить и предсказать не только появление комбинационных спектральных компонент в спектре шумов, но и точно определить источники тех сигналов, из которых образуются такие комбинаци-

онные компоненты. В дальнейшем на основе этой теории были разработаны эффективные методы акустической бесконтактной диагностики авиационных двигателей и турбин. Последующая деятельность Виктора Дарьевича была связана с развитием и применением идей и методов когерентной оптики и голографии для пространственно-временной обработки сигналов в различных системах гидроакустического наблюдения. Он был одним из пионеров использования этих методов для обработки сигналов в многоэлементных антенных решетках и создания акусто-оптических приемников звука. Виктора Дарьевича отличало стремление довести научную идею до работающего прибора. Так, под его руководством были созданы и испытаны первые в отечественной гидроакустике высокоскоростной оптический процессор для обработки сигналов с планарных антенн, акусто-оптические гидрофоны на жидких кристаллах с волоконно-оптическими линиями связи и акусто-оптические антенны. Результаты этих исследований составили содержание его докторской диссертации, защищенной в 1992 г.

В.Д. Свет был научным руководителем десятков научно-исследовательских и нескольких крупных опытно-конструкторских работ, за успешное выполнение которых был представлен к правительственным наградам. Он проявил себя как организатор и непосредственный участник многих научных экспериментальных исследований. Под его руководством было проведено 12 высокоширотных экспедиций в различных районах Мирового океана, как на судах Акустического института, так и на других специализированных судах морского и военно-морского флота. В последние годы он стал заниматься и проблемами медицинского ультразвука. Виктор Дарьевич присоединился к исследовательской команде физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, инициировав там исследования, связанные с транскраниальным УЗИ, с акустической визуализацией в жидких металлах, с применением ультра-

звука для задач биофабрикации. Виктор Дарьевич умел зажечь молодых коллег своим задором.

Виктор Дарьевич являлся автором более 130 статей, двух монографий, 20 авторских свидетельств и патентов на изобретения, он был постоянным автором Акустического журнала. Под его руководством защищено 4 кандидатских диссертации. Многие годы Виктор Дарьевич Свет являлся чле-

ном Ученого совета Акустического института, членом Российского Акустического общества.

Друзья и соратники Виктора Дарьевича никогда не забудут его широкую эрудицию, неизменную доброжелательность, объективную позицию по многим сложным вопросам, глубоко скорбят по поводу безвременной кончины и выражают искреннее соболезнование его родным и близким.