

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ В РАЗРЕЗНЫХ СТЕРЖНЯХ

© 2024 г. А. А. Агафонов^а, М. Ю. Изосимова^а, Р. А. Жостков^б,
А. И. Кокшайский^а, А. И. Коробов^{а,*}, Н. И. Одина^а

^аМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
Ленинские горы, Москва, 119991 Россия

^бИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Грузинская ул. 10, стр. 1,
Москва, 123995 Россия

*e-mail: aikor42@mail.ru

Поступила в редакцию 07.12.2023 г.

После доработки 07.12.2023

Принята к публикации 19.06.2024 г.

Исследовано распространение изгибных упругих волн в металлических разрезных стержнях прямо-угольного сечения с увеличением глубины прорезей по степенному закону с помощью численного моделирования и экспериментально методом лазерной сканирующей виброметрии. Рассмотрены три типа расположения прорезей: равномерное, учащенное и разреженное к концу стержня. Такие конструкции проявляют свойства акустической черной дыры. В диапазоне частот 10–100 кГц экспериментально обнаружено увеличение амплитуды и уменьшение длины изгибной волны по мере приближения волны к концу стержня для всех исследуемых образцов. Показано, что существует критическая частота, выше которой моды имеют участок с сильно уменьшенным значением амплитуды колебаний.

Ключевые слова: изгибные волны в стержне, разрезной стержень, лазерная виброметрия, численное моделирование, эксперимент

DOI: 10.31857/S0320791924040019 EDN: XGABGF

1. ВВЕДЕНИЕ

Структуры, называемые «акустическими черными дырами» (АЧД), как элементы метаматериалов, привлекают интерес исследователей в течение нескольких последних десятилетий [1–3]. Их основные приложения находятся в сфере структурной акустики и шумопоглощения. Структуры, проявляющие эффект АЧД, имеют направления, вдоль которых скорость распространения упругих волн должна уменьшаться до нуля на конечном расстоянии. Распространение акустических волн в этом направлении должно происходить бесконечно долго, а отраженная волна будет отсутствовать. Реализовать структуру с описанными упругими свойствами можно с помощью различных модификаций геометрии [4–6].

Одной из первых рассмотренных структур с эффектом АЧД является пластина со степенным профилем: толщина пластины уменьшается до нуля вдоль выделенного направления [1]. Для данного типа АЧД описано изменение длины волны и

амплитуды при приближении изгибной волны к кромке пластины. В настоящее время уже ряд исследователей проводили как теоретические, так и экспериментальные исследования, посвященные распространению изгибных волн Лэмба в таких структурах [7–9].

Интересны недавние работы, в которых рассматриваются различные модификации упругих стержней для достижения в них эффекта АЧД [10–12]. В статье [12] для превращения упругого стержня в образец АЧД предлагается использовать тонкие прорезы, глубина которых нарастает к концу стержня, рассматривается распространение изгибной волны в этом образце и определяется значение критической частоты, выше которой стержень является АЧД. В статье [13] нами были проведены численные и экспериментальные исследования распространения изгибных волн в разрезном стержне, проявляющем свойства АЧД. Целью настоящей работы является определение влияния порядка расположения прорезей на стержне на его характеристики как акустической черной дыры.

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численное моделирование распространения акустических волн в моделях разрезных стержней выполнено методом конечных элементов в программном пакете COMSOL Multiphysics 5.3 (лицензия № 9600341) с подключенным модулем «Структурная механика». Особенности построения численной модели (разбиение образцов на конечные элементы, сетки датчиков и прочее), использованной в данной работе, описываются в статье [13].

В качестве образцов были заданы стержни с размерами $3.9 \times 6.8 \times 200$ мм. 28 прорезей расположены на участке стержней длиной 90 мм на разных расстояниях друг от друга в зависимости от образца. Рассматривались три типа закона распределения разрезов вдоль стержня (рис. 1): образец № 1 с учащением прорезей к концу стержня (вдоль оси X); образец № 2 с одинаковым расстоянием между прорезями; образец № 3 с разрежением прорезей к концу стержня.

В моделировании были использованы упругие параметры материала образцов, соответствующие дюралюминию Д16: плотность — 2680 кг/м^3 , скорость распространения продольных волн — 6400 м/с , поперечных — 3130 м/с . Для пьезокерамических элементов: плотность — 4700 кг/м^3 , скорость распространения продольных волн — 6562 м/с , поперечных — 3582 м/с .

Расстояние между прорезями в образце № 1 по мере приближения к торцу стержня уменьшалось от 4.6 до 2.2 мм вблизи торца стержня. В стержне с равномерным расположением прорезей (образец № 2) расстояние между прорезями было равно 3.2 мм. В стержне с разреженным к концу расположением прорезей (образец № 3) расстояние между прорезями увеличивалось от 1.9 до 4.2 мм.

Зависимость глубины разреза от его координаты для образцов стержней заданы в соответствии с исследованиями [12, 13] следующим образом:

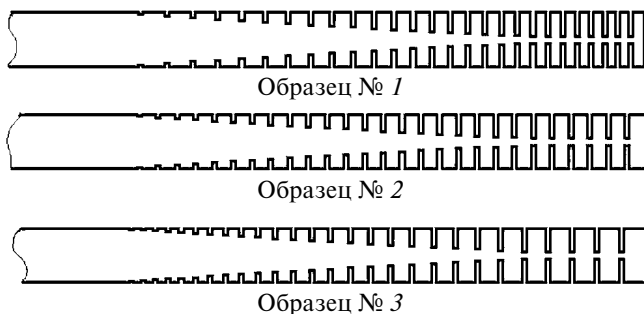


Рис. 1. Общий вид образцов разрезных стержней.

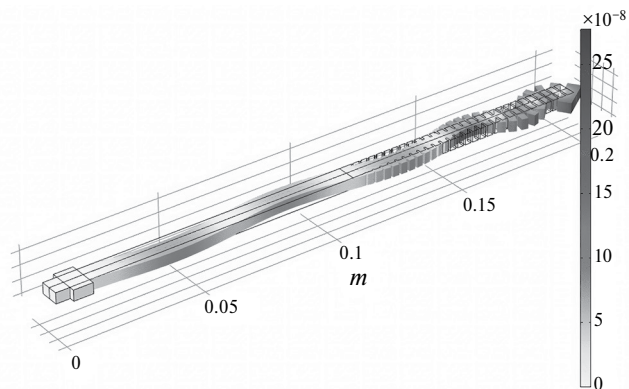


Рис. 2. Изгибная мода в образце № 2 на частоте 8.1 кГц.

$$h(x) = \frac{H - s(x)}{2}, s(x) = \max \left(H \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{4}{3}}, 0.85 \text{ мм} \right)$$

где $s(x)$ — толщина профиля стержня, которая остается между прорезями, $h(x)$ — глубина прорезей соответственно, x_i — координаты прорезей, H — общая толщина стержня, L — длина участка стержня с разрезами. При этом x_i определяется следующими формулами.

1. Образец № 1 с учащением прорезей к концу стержня:

$$i = \{1, 2, 3, \dots, N\}, x_i = \frac{2}{3} \frac{i}{N} L + \frac{1}{3} \left(\frac{i}{N} \right)^{\frac{7}{3}} L.$$

2. Образец № 2 с эквидистантным расположением прорезей:

$$i = \{1, 2, 3, \dots, N\}, x_i = \frac{i}{N} L.$$

3. Образец № 3 с разрежением прорезей к концу стержня:

$$i = \{1, 2, 3, \dots, N\}, x_i = \frac{4}{3} \frac{i}{N} L - \frac{1}{3} \left(\frac{i}{N} \right)^{\frac{7}{3}} L.$$

Количество прорезей $N = 28$ было выбрано таким образом, чтобы обеспечить не менее 5 прорезей на длину волны в начале стержня, и при этом расстояние между прорезями на учащенном участке было как минимум в два раза больше ширины прорези (0.75 мм). Пример выходных данных моделирования представлен на рис. 2.

Для образцов № 1, 2 и 3 с помощью численного моделирования были определены собственные частоты и формы мод изгибных волн в диапазоне частот 1–100 кГц. С помощью преобразования Гильберта были рассчитаны функции,

ортогональные исходным модам и восстановлены формы огибающих для этих мод. Распределение амплитуды некоторых изгибных мод вместе с соответствующими огибающими вдоль центральной линии поверхности стержня представлены на рис. 3. Частота каждой моды отображается на оси ординат таким образом, что ноль амплитуды колебаний моды соответствует значению ее собственной частоты. Под каждым графиком находится профиль образца стержня, которому соответствуют рассчитанные моды.

На профилях огибающих наблюдаются фрагменты, соответствующие прорезам в стержне. На всех наблюдаемых модах во всех образцах происходит уменьшение длины изгибной волны при приближении к торцу стержня. Таким образом, можно сделать вывод, что на проявление эффекта АЧД основное влияние оказывает глубина прорезей. При приближении к торцу стержня происходит увеличение амплитуды мод, на величину около нескольких десятков процентов. В образце № 1 на низких частотах увеличение достигает 2.5 раз, а на высоких частотах — 1.7 раз. В образце № 2 на низких частотах увеличение достигает 3 раз, на высоких — 1.9 раза. В образце № 3 на низких частотах увеличение достигает 2.6 раз, на высоких — 1.75 раза. Таким образом, наибольший рост амплитуды наблюдается для образца с равномерным распределением прорезей. Тем не менее, подобный рост амплитуды незначителен по сравнению с ростом амплитуды изгибной волны в параболическом клине (в эксперименте наблюдался рост примерно в 20 раз) [9].

В каждом исследованном образце обнаружены особые (граничные) резонансные моды, после которых распределение амплитуды меняет свой характер. Такая мода появляется на частоте 52.9 кГц в образце № 1, на частоте 43.24 кГц в образце № 2, в образце № 3 на частоте 38.1 кГц. На данных частотах наблюдается резкое возрастание амплитуды этой моды. Для образца № 1 амплитуда особой моды возрастает в 10 раз и максимальна на расстоянии 6 мм от свободного торца стержня. В образце № 2 максимальное увеличение амплитуды равно 4 и наблюдается на расстоянии 12 мм от торца. В образце № 3 амплитуда особой моды возрастает в 3 раза на расстоянии 16 мм от торца. Также, как и в образце № 1, в стержнях № 2 и № 3 особая мода разделяет спектр собственных частот на моды с отсечением хвоста и без. Моды, частоты которых выше собственной частоты особой моды, имеют область вблизи торца стержня, в которой их амплитуды много меньше средней. С повышением частоты пространственный размер этой области возрастает.

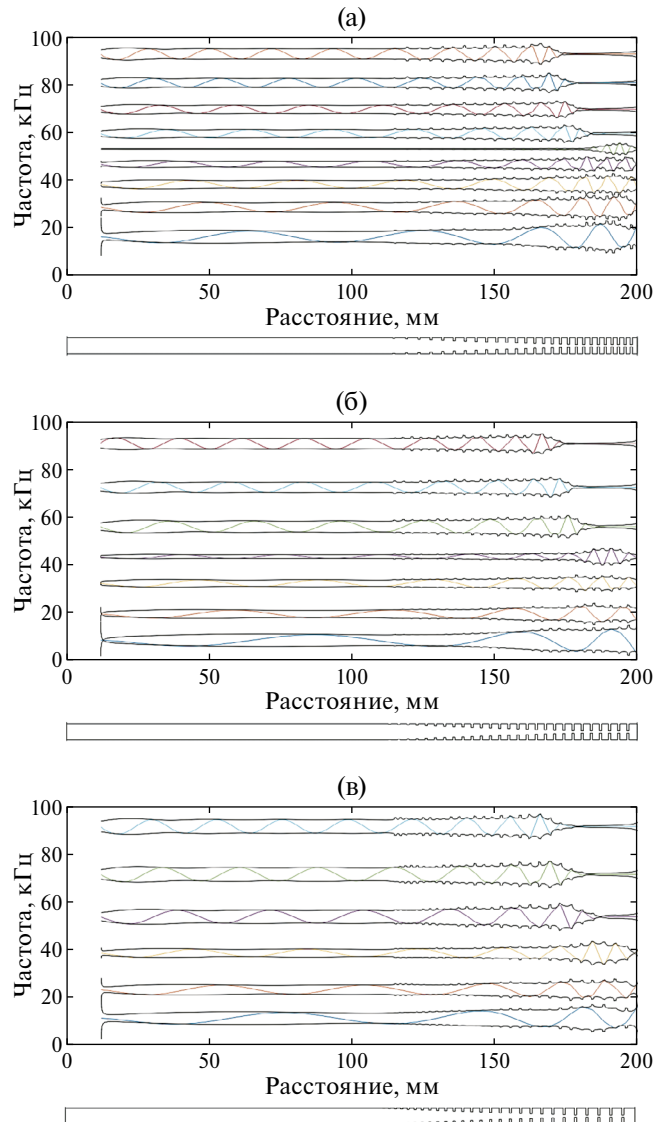


Рис. 3. Распределение амплитуды изгибной волны вдоль центральной линии поверхности стержней с огибающими в образцах (а) — № 1, (б) — № 2, (в) — № 3.

Из рис. 3 можно установить, что моды успешно возбуждаются в стержне при условии, что локальная длина волны в моде превышает или равна двум длинам фрагмента разрезного стержня. В идеальном случае, на длину волны должно приходиться достаточно много прорезей. Резонансные особые моды наблюдаются при равенстве этих длин, когда половина длины волны соответствует длине фрагмента стержня. В частности, для особой моды в образце № 1, в области 15 мм вблизи торца фрагменты стержня, разделенные разрезами, смещаются как единое целое и соответствуют длине изгибной волны (рис. 4). Описанная картина нарушается для смежных мод.

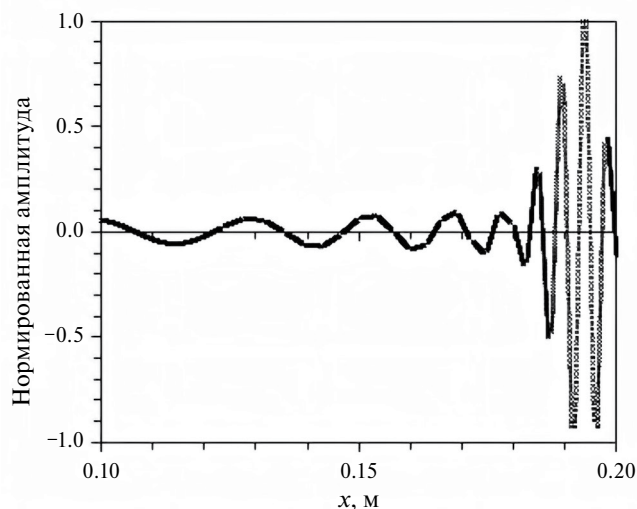


Рис. 4. Распределение нормированной амплитуды вдоль стержня (образец № 1) на особой частоте (52.9 кГц).

По полученным распределениям амплитуды изгибной волны вдоль стержня были рассчитаны значения локальной длины волны для образцов № 1, 2 и 3 (рис. 5а–5в).

Для всех исследованных частот график зависимости длины волны от пройденного расстояния имеет в целом монотонный убывающий характер. Однако, для высоких частот на расстоянии нескольких десятков миллиметров от торца, уменьшение длины волны практически не происходит, что связано с тем, что данный образец стержня имел 5 одинаковых по глубине прорезей на конце. Вблизи конца стержня для некоторых мод, частоты которых приближаются к частотам особых мод, зависимость длины волны от расстояния имеет локально немонотонный характер, что вероятно, связано с неточным совпадением локального значения длины изгибной волны в этой области с размером фрагмента стержня.

С повышением частоты длина волны уменьшается, и вблизи конца стержня наблюдается минимальное значение длины волны для данной моды. Однако, при достижении частоты особой резонансной моды, достигается минимальная возможная длина волны для каждого образца. Дальнейшее повышение частоты не приводит к уменьшению длины волны у конца стержня ниже этого значения, а приводит к резкому спаду амплитуды волны в области вблизи конца стержня. При этом, на высоких частотах длина волны стремится к этому минимальному значению при приближении к концу стержня, но выход на минимальное для данной

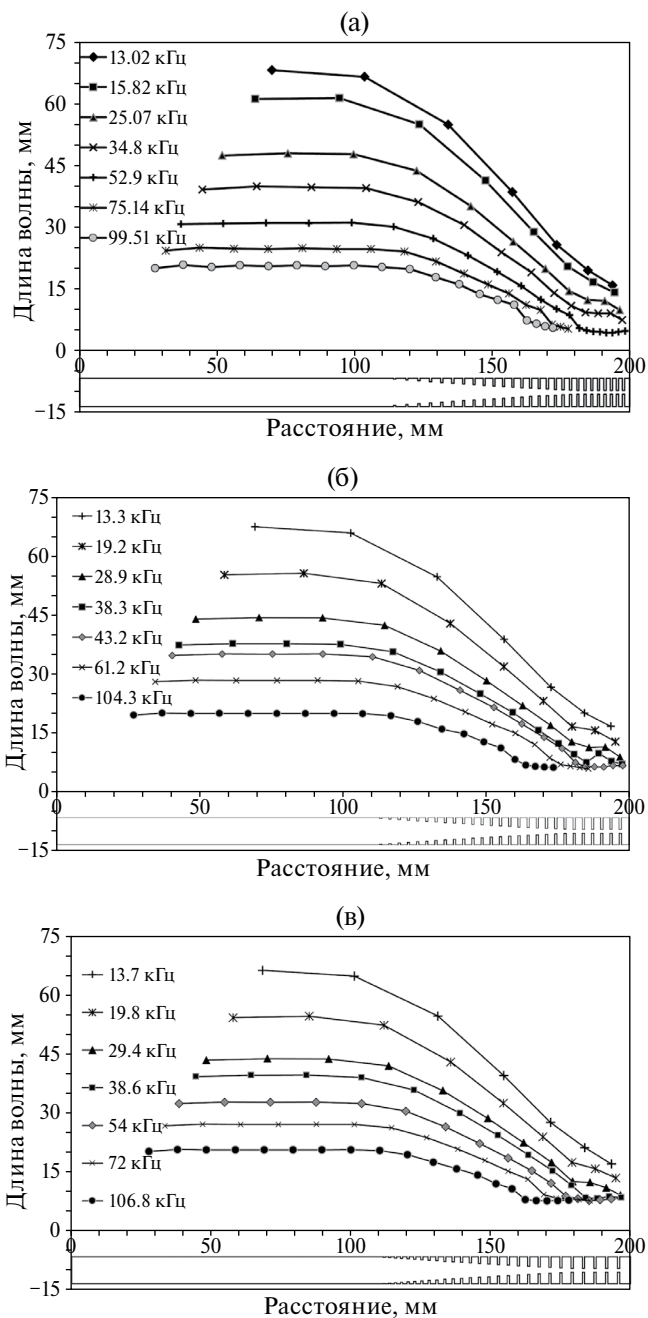


Рис. 5. Длина изгибной волны в стержне в зависимости от расстояния: (а) — образец № 1, (б) — образец № 2, (в) — образец № 3.

моды значение происходит при все более меньших значениях пройденного расстояния.

Для образца № 1 значение минимальной длины волны достигается при частоте особой моды 52.9 кГц и равно 4.8 мм. В образце № 2 минимальное значение длины волны составило 6.0 мм и достигается при частоте особой моды 43.2 кГц. В образце № 3 минимальное значение длины волны

равно 7.7 мм и достигается на частоте 38.1 кГц также для особой моды. Таким образом, самое сильное замедление волны происходит в образце, где количество прорезей увеличивается к его торцу.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для проведения экспериментальных исследований из сплава Д16 были изготовлены экспериментальные образцы разрезных стержней с размерами и прорезями, заявленными для моделирования (рис. 6). Погрешности изготовления прорезей составили 0.5 мм.

Как в пластинах с параболическим профилем невозможно изготовить бесконечно тонкую кромку, так и для разрезных стержней проблематично изготовить разрез с малой шириной $s(x)$ между щелями вблизи конца стержня (см. рис. 1). Образцы стержней становились хрупкими вблизи торца и поэтому ближайшие к торцу 5 прорезей были изготовлены с одинаковой максимально возможной глубиной. Расстояние между щелями для них было равно 0.95 мм.

Исследования проводились с использованием экспериментальной установки, разработанной для исследования пластины с параболическим профилем [9]. Способ возбуждения сигнала и методика экспериментальных исследований подробно описываются в статье [13].

Особенности определения модового состава у стержней при моделировании позволяют получить только значения собственных частот и распределение мод на этих частотах. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для образцов разрезного стержня с тремя типами расположения прорезей (№ 1, 2 и 3) были получены экспериментально при возбуждении свип-сигнала в диапазоне 10–100 кГц (рис. 7).

Обнаружено, что в исследованных образцах происходит эффективная генерация стоячих волн в диапазоне частот от 10 до 100 кГц. При этом в образце № 1 усредненная по образцу амплитуда изгибных колебаний на собственных частотах в среднем выше в 1.5–2 раза, чем в образцах 2 и 3. На частотах до 50 кГц наблюдается большая плотность резонансных пиков, чем на частотах выше 50 кГц. В образце № 2 более частый и более редкий участки спектра разделяются частотой 40 кГц. В образце № 3 спектр является таким же плотным, как в других образцах на частотах ниже 20 кГц.

Для резонансных частот из представленных АЧХ приведены измеренные распределения мод вдоль стержня для всех исследованных образцов разрезных стержней (рис. 8).

В исследованных образцах стержня происходит уменьшение длины изгибной волны по мере приближения к торцу стержня, что соответствует результатам численного моделирования для данных образцов.

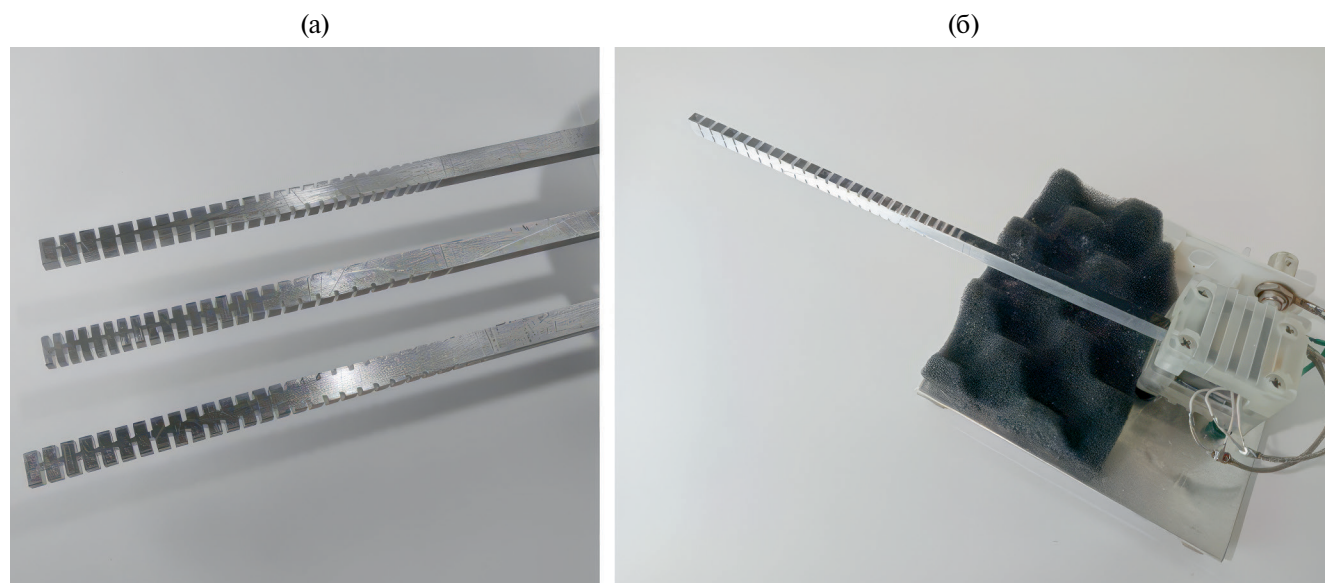


Рис. 6. (а) — Экспериментальные образцы № 1, 2, 3 и (б) — закрепленный стержень № 3 для возбуждения в нем изгибных волн.

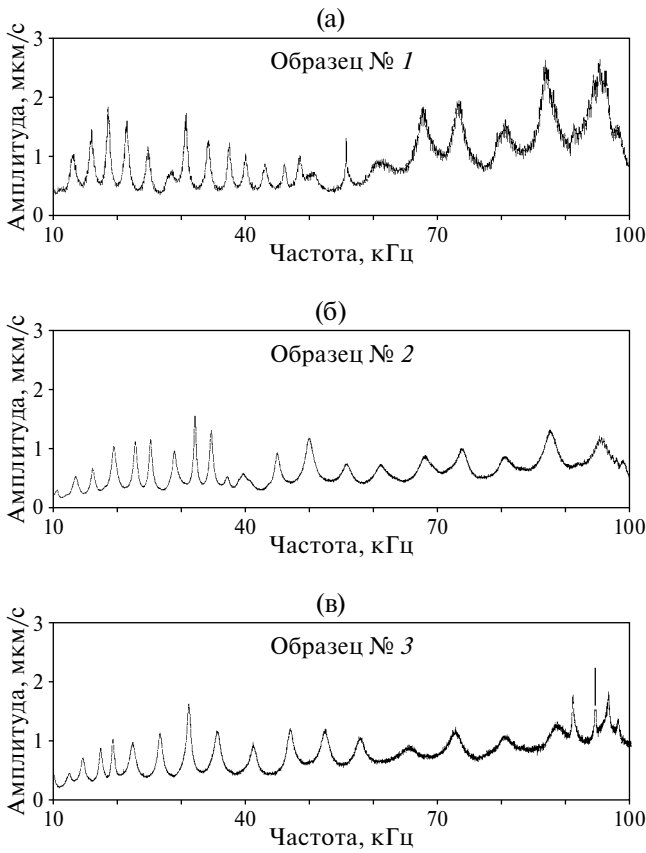


Рис. 7. АЧХ в разрезных стержнях с тремя типами расположения прорезей.

Аналогично результатам численного моделирования, к эксперименту наблюдается небольшое увеличение амплитуды волны по мере приближения к торцу стержней: в образце № 1 на низких частотах амплитуда изгибной волны увеличивается примерно в 2.2 раза, а на высоких частотах — в 1.4 раза. В образце № 2 на низких частотах коэффициент увеличения амплитуды изгибной волны достигает 1.8 раза, на высоких частотах — 1.5 раза. В образце № 3 на низких частотах — 2.2 раза, 1.7 раза на высоких частотах.

В результате эксперимента также были обнаружены особые моды, разделяющие спектр собственных колебаний образцов, которые тем не менее отличаются от полученных при моделировании (см. табл.).

Наличие области в пространстве, в которой амплитуда волны практически близка к уровню шума или отсутствует, может быть связано с приближением длины изгибной волны к размерам перемычки между соседними фрагментами стержня, образованными с помощью разрезов.

Таблица. Особые (граничные) моды в образцах разрезного стержня.

Образец	Моделирование, кГц	Эксперимент, кГц
1	52.9	55.7
2	43.24	40
3	38.6	20

Для всех исследованных образцов были выполнены расчеты зависимости длины изгибной волны от расстояния вдоль стержня для экспериментально исследованных мод и проведено сравнение результатов этих расчетов с результатами моделирования (рис. 9).

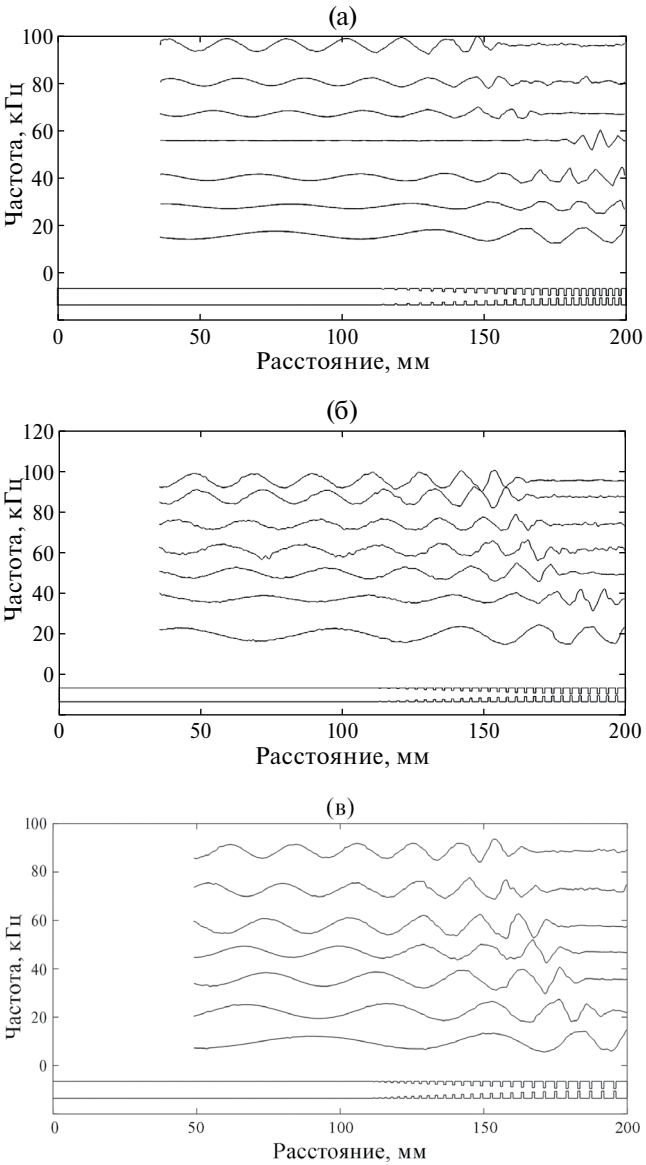


Рис. 8. Моды изгибных волн в образцах (а) — № 1, (б) — № 2, (в) — № 3.

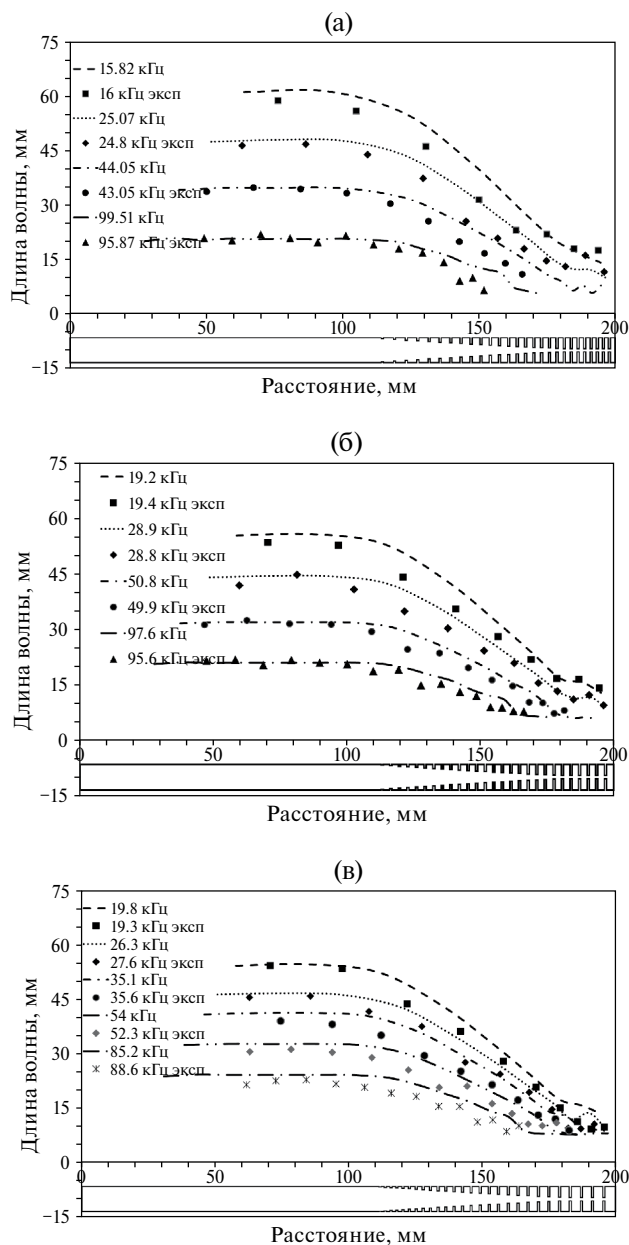


Рис. 9. Длина изгибной волны в стержне с учащенным к концу расположением прорезей в зависимости от пройденного расстояния.

Для всех исследованных образцов стержня наблюдается уменьшение длины изгибной волны в стержне в зависимости от пройденного расстояния. Характер изменения длины волны на расстоянии около 30 мм от торца качественно соответствует результатам численного моделирования, в силу наличия как в эксперименте, так и в моделировании ряда одинаковых по глубине прорезей вблизи конца стержня. Минимальное экспериментально полученное значение длины волны составило 6.5,

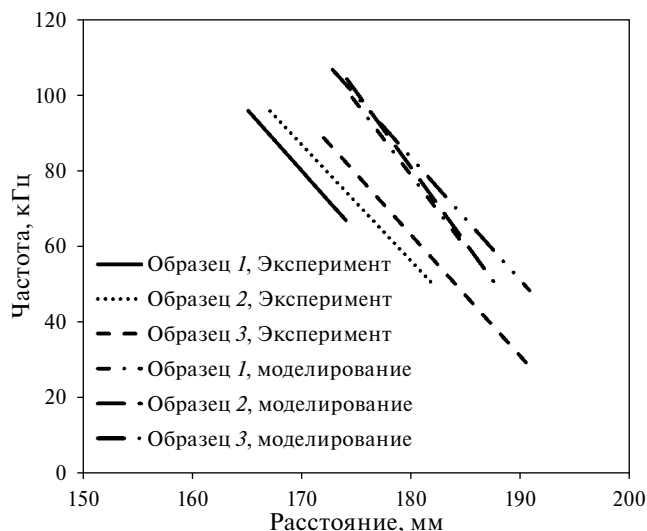


Рис. 10. Прямые, отделяющие область стержня около торца, в которой амплитуда волны мала.

7.0 и 8.7 мм в образцах № 1, 2 и 3 соответственно. Однако в силу зашумленности сигнала ближе к торцу стержня, погрешность определения длины волны увеличивается от 1 до 4 мм, поэтому приведенные значения носят скорее ознакомительный характер. Кроме того, расхождение моделирования и экспериментальных результатов может быть связано с неточностью изготовления стержня (выполнения прорезей).

Для исследованных образцов были построены прямые, отделяющие область вблизи торца стержня, в которой на высоких частотах не распространялась изгибная волна. Проведено сравнение результатов этих расчетов для экспериментально измеренных распределений амплитуд мод с результатами моделирования (рис. 10). Как видно из рисунка, длина области, запрещенной для прохождения, для всех образцов увеличивается с частотой линейно и коэффициент пропорциональности примерно одинаков для всех образцов (3.2 ± 0.1) кГц/мм. Для моделирования разброс оказывается больше и равен (3.6 ± 0.4) кГц/мм. Интересно, что частота отсечки сильно зависит от типа геометрии образца: для образца № 1 эта частота равна примерно 60 кГц, для образца 2 примерно 40 кГц, для образца 3 — 25 кГц.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для всех исследованных образцов как в эксперименте, так и по результатам численного моделирования наблюдается уменьшение длины

изгибной волны в стержне в зависимости от пройденного расстояния и увеличение амплитуды в 1.5–2 раза. Однако, изменение длины волны для некоторых мод вблизи торца имеет ступенчатый характер, что связывается как с наличием одинаковых по глубине прорезей у конца стержня, так и с эффектом совпадения или несовпадения длины изгибной волны стержня с размерами разрезанных фрагментов. В этом плане выделяются особые моды, на которых длина волны в стержне достигает минимального значения, а увеличение амплитуды по мере приближения к концу стержня — максимума. В образце № 1 амплитуда особой моды возрастает в 10 раз. В образце № 2 максимальное увеличение амплитуды равно 4. В образце № 3 амплитуда особой моды возрастает в 3 раза. По результатам моделирования минимальные значения длин волн на особых модах составляют 4.8, 6.0 и 7.7 мм для образцов № 1, 2 и 3 соответственно. Длины волн других мод стремятся к этим значениям с приближением к торцу и с повышением частоты.

Проведенные исследования показали, что в независимости от расположения прорезей в исследуемом диапазоне частот наблюдается уменьшение длины изгибной волны по мере приближения к торцу стержня. Однако минимальное значение длины волны наблюдается для стержня с учащением прорезей к его свободному торцу. Для стержня с разрежением прорезей к торцу наблюдалась более низкая граничная мода, выше которой наблюдается участок стержня, в котором не распространяются изгибные колебания данных частот.

Соответствие результатов численного моделирования наблюдаемым экспериментальным данным можно считать успешной валидацией численной модели, что можно широко использовать при решении подобных задач.

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–12–00098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миров М.А. Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акуст. журн. 1988. Т. 34. №. 3. С. 546–547.
2. Krylov V.V., Shuvalov A.L. Propagation of localised flexural vibrations along plate edges described by a power law // Proc. of the Institute of Acoustics. 2000. V. 22. № 2. P. 263–270.
3. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор). Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 517–525.
4. Pelat A., Gautiera F., Conlon S.C., Semperlotti F. The acoustic black hole: A review of theory and applications // J. Sound Vib. 2020. V. 476. P. 115316.
5. Guasch O., Arnela M., Sánchez-Martín P. Transfer matrices to characterize linear and quadratic acoustic black holes in duct terminations // J. Sound Vib. 2017. V. 395. P. 65–79.
6. Krylov V.V. Acoustic Black Holes: Recent Developments in the Theory and Applications // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2014. V. 61. № 8. P. 1296–1306.
7. Zhao. C., Prasad M.G. Acoustic Black Holes in Structural Design for Vibration and Noise Control // Acoustics. 2019. V. 1. P. 220–251.
8. Gao S., Tao Z., Li Y., Pang F. Application research of acoustic black hole in floating raft vibration isolation system // Reviews on Adv. Mat. Science. 2002. V. 61. P. 888–900.
9. Агафонов А.А., Коробов А.И., Изосимова М.Ю., Кокшайский А.И., Одина Н.И. Особенности распространения волн Лэмба в клине из АБС пластика с параболическим профилем // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 5. С. 467–474.
10. Миров М.А. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 5. С. 3–8.
11. Миров М.А. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения вдоль его оси // IX Всесоюзная акустическая конференция. 1991. Секция Л. С. 23–26.
12. Миров М.А. Разрезной стержень как вибрационная черная дыра // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 6. С. 736–739.
13. Агафонов А.А., Изосимова М.Ю., Жостков Р.А., Кокшайский А.И., Коробов А.И., Одина Н.И. Особенности распространения изгибной волны в разрезном стержне // Акуст. журн. 2024. Т. 70. № 3. С. 3–12.

EFFECT OF GEOMETRY ON FLEXURAL WAVE PROPAGATION IN A NOTCHED BAR

A. A. Agafonov^a, M. Yu. Izosimova^a, R. A. Zhostkov^b, A. I. Kokshayskiy^a,
A. I. Korobov^a *, N. I. Odina^a

^a*Moscow State University named after M.V. Lomonosov, Faculty of Physics,
Leninskie Gory, Moscow, 119991 Russia*

^b*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Gruzinskaya st. 10, building 1,
Moscow, 123995 Russia*

**e-mail: aikor42@mail.ru*

The propagation of flexural elastic waves in notched metal bars with a rectangular cross section with the depth of notches increasing by a power law has been studied by numerical modeling and experimental laser scanning vibrometry. Three types of notch arrangement have been considered: uniform and more frequent and sparse towards the end of a bar. Such structures exhibit the characteristics of an acoustic black hole. For all the studied samples, in the 10–100 kHz frequency range, an increase in amplitude and decrease in length of the flexural wave have been experimentally found as a wave approaches the end of a bar. It has been shown that there is a critical frequency, above which the modes exhibit a section with highly reduced amplitude of oscillations.

Keywords: flexural waves in a bar, notched bar, laser vibrometry, numerical modeling, experiment