

==== КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН =====

УДК 534.26;534.6.08

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ НА ТОНКОМ КОНУСЕ

© 2024 г. А. Ю. Лаптев^{а, *}, А. И. Корольков^б, А. В. Шанин^а

^аМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы,
Москва, ГСП-1, 119991 Россия

^бUniversity of Manchester, Oxford Road, Manchester, M13 9PL UK

*e-mail: laptev97@bk.ru

Поступила в редакцию 21.06.2023 г.

После доработки 16.12.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2024 г.

Исследуется задача дифракции ультразвуковых волн на остроугольном жестком конусе. В рамках метода параболического уравнения строится аналитическое решение задачи с произвольно расположенным точечным источником. А именно, задача сводится к граничному интегральному уравнению Вольтерры, которое удастся решить с помощью преобразования Фурье. Проводится экспериментальное измерение дифрагированного поля. Эксперимент основывается на методе М-последовательности, адаптированном для узкополосных источников звука. Дается сравнение экспериментальных и теоретических результатов.

Ключевые слова: метод параболического уравнения, канонические задачи дифракции, метод М-последовательности

DOI: 10.31857/S0320791924030032 EDN: ZMURFT

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе теоретически и экспериментально исследуется задача дифракции ультразвуковых волн с узким угловым спектром на жестком круговом конусе с малым углом раствора. При условии малости длины волны по сравнению с продольными размерами препятствия дифракционная задача может быть приближенно решена в рамках метода параболического уравнения. Волновое поле у поверхности рассеивателя представляется в виде произведения быстро осциллирующего множителя и так называемой функции ослабления, а уравнение Гельмгольца для полного поля сводится к параболическому уравнению для функции ослабления.

Параболическое приближение применяется к этой задаче не в первый раз. В [1–2] развивается метод пограничного слоя. В рамках данного подхода в зонах Фока генерируются волны соскальзывания, бегущие и отрывающиеся от поверхности. Сумма таких волн и образует поле вблизи поверхности конуса.

В [3–8] вводится система координат, связанных с поверхностью рассеивателя, производится разложение по малым параметрам в предположении

малости поперечных размеров рассеивателя. В частности, в [4] с помощью данной техники строится приближенное решение задачи рассеяния на тонком конусе.

В [9] авторы остаются в декартовой системе координат, в которой и строят решение параболического уравнения. С помощью теоремы Грина для параболического уравнения выводится граничное интегральное уравнение для функции ослабления поля плоской волны на поверхности рассеивателя, которое затем решается с помощью метода Фурье. Далее с помощью теоремы Грина вычисляется поле во всем пространстве. Стоит отметить, что результаты [4] и [9] согласуются, несмотря на неэквивалентность теоретических построений.

В [10–11] задача дифракции на конусе (без каких-либо предположений о поперечных размерах) решается точно с помощью метода разделения переменных. Полное поле у поверхности конуса представляется в виде ряда по функциям Лежандра. Однако практическая применимость данного решения ограничена, ввиду его медленной сходимости.

В [12–15] исследуются задачи дифракции на конусе произвольного сечения. Производится разделение переменных по радиальной

и угловой координате. Поле выражается через функцию Грина на единичной сфере с разрезом. В [16, 17] используется аналогичный подход, основанный на интегральном представлении Конторовича–Лебедева.

Стоит отметить, что большая часть теоретических работ исследует дифракцию либо плоской волны, либо поля осесимметрично расположенного точечного источника, за исключением работ [7, 11, 12], посвященных исследованию поля произвольно расположенного точечного источника.

В работе [18] проводится теоретическое и экспериментальное исследование дифракции на тонком конусе. Теоретическая часть исследования основана на граничном интегральном уравнении из [9], решаемом численно, рассматриваются осесимметричное и произвольное расположение источника. Эксперимент проводится с помощью метода М-последовательности.

Несмотря на обилие работ, посвященных теоретическому анализу задач данного класса, авторам не известны другие экспериментальные исследования в данном направлении. Данная работа призвана расширить исследование в [18] по следующим направлениям: во-первых, граничное интегральное уравнение решается не численно, а аналитически с помощью разделения переменных по аксиальной и угловой координате; во-вторых, проводится экспериментальное исследование дифракции не только в звуковом, но и ультразвуковом диапазоне, что, как будет показано далее, требует обобщения метода М-последовательности, а именно, использования фазоманипулированных сигналов (см., например, [19–22]). Кроме того, расширение частотного диапазона позволило авторам исследовать дифракционные эффекты в полном объеме.

Статья имеет следующую структуру. Сначала с помощью метода параболического уравнения в

формулировке [9] строится выражение для поля произвольно расположенного точечного источника на поверхности тонкого жесткого конуса и за ее пределами. Далее описывается методика прямого дифракционного эксперимента на основе метода М-последовательности, модифицированного на случай узкополосных излучателей. Потом описывается сам эксперимент, в рамках которого осесимметрично расположенный точечный источник облучает тонкий конус. Проводится сравнение экспериментальных и теоретических результатов, и анализируются основные факторы, влияющие на точность измерений.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается стационарная задача рассеяния звуковой волны, излученной монопольным точечным источником, на круговом конусе (зависимость от времени представляется в виде $e^{-i\omega t}$, далее в работе она опускается). Геометрия задачи представлена на рис. 1.

Вне поверхности конуса для звукового давления $\tilde{u}$ выполняется уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s),$$

где $\mathbf{r}$ — координатный вектор точки наблюдения, $\mathbf{r}_s$ — координатный вектор источника, Δ — оператор Лапласа.

Предполагается, что конус является узким (т.е. угол раствора конуса $2\arctg(\alpha) \ll 1$), а длина волны, излученной источником, много меньше расстояния от вершины конуса до источника. Предполагается также, что источник находится под малым углом к оси конуса. Эти условия позволяют использовать метод параболического уравнения. Введем цилиндрические координаты (x, r, φ) с началом координат

$(x_s, r_s, \varphi_s = 0)$

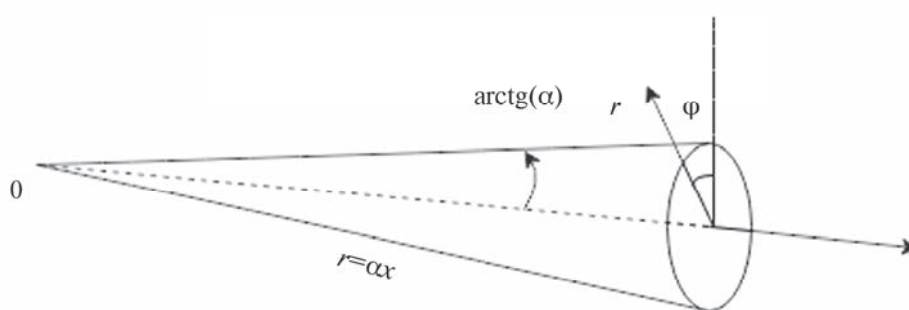


Рис. 1. Геометрия задачи

в вершине конуса и координатой x , направленной вдоль оси конуса. Поле $\tilde{u}$ представляется в виде $\tilde{u}(x, r, \varphi) = \exp(ikx)u(x, r, \varphi)$ (далее экспоненциальный множитель опускается). После подстановки данного выражения в уравнение Гельмгольца и выделения главных членов, получаем параболическое уравнение теории дифракции (ПУТД) в цилиндрических координатах:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \Delta_{\perp} \right) u = \frac{1}{2\pi r} \delta(r - r_s) \delta(\varphi) \delta(x - x_s),$$

где $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. Предполагается, что $\varphi_s = 0$.

Представим полное поле u в виде суммы падающего и рассеянного поля:

$$u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}}.$$

Поскольку рассматривается задача с точечным источником, падающее поле u^{in} совпадает с функцией Грина параболического уравнения:

$$u^{\text{in}}(x, r, \varphi) = \frac{k}{2\pi i(x - x_s)} \exp \left(\frac{ik}{2} \frac{r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos \varphi}{x - x_s} \right).$$

В задаче рассматривается акустически жесткий конус, т.е. на поверхности конуса выполняется граничное условие Неймана в параболическом приближении (переход от нормальной производной к данному приближению подробно обсуждается в [9]):

$$N[u](x, \alpha x, \varphi) = 0, \quad N \equiv \frac{\partial}{\partial r} - ik\alpha.$$

Введем обозначения для падающего и рассеянного поля на поверхности конуса $U^{\text{in}}(x, \varphi) \equiv u^{\text{in}}(x, \alpha x, \varphi)$, $U^{\text{sc}}(x, \varphi) \equiv u^{\text{sc}}(x, \alpha x, \varphi)$. Применяя теорему Грина для параболического уравнения [9], получаем граничное интегральное уравнение Вольтерры для полного поля $U = U^{\text{in}} + U^{\text{sc}}$ на поверхности конуса:

$$U(x_*, \varphi_*) = \int_0^{2\pi} \int_{x_*}^{x_*} K(x_*, \varphi_*, x, \varphi) U(x, \varphi) dx d\varphi + 2U^{\text{in}}(x_*, \varphi_*). \quad (1)$$

Явная форма ядра интегрального уравнения дается следующим выражением:

$$K(x_*, \varphi_*, x, \varphi) = \frac{i\alpha^2 k x x_*}{2\pi(x_* - x)^2} [1 - \cos(\varphi - \varphi_*)] \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i\alpha^2 k}{2} \frac{x_*^2 + x^2 - 2x x_* \cos(\varphi - \varphi_*)}{x_* - x} \right\}. \quad (2)$$

Представим падающее поле на поверхности конуса в виде ряда Фурье по угловой координате:

$$U^{\text{in}}(x, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n^{\text{in}}(x) e^{in\varphi}, \\ U_n^{\text{in}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^{\text{in}}(x, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Интегралы легко вычисляются:

$$U_n^{\text{in}}(x) = (-i)^n \frac{k}{2\pi i(x - x_s)} \exp \left(\frac{i\alpha^2 k x^2}{2(x - x_s)} \right) \exp \left(\frac{ikr_s^2}{2(x - x_s)} \right) J_n \left(\frac{\alpha k x r_s}{x - x_s} \right).$$

Полное поле на поверхности конуса также представляется в виде ряда Фурье по угловой координате:

$$U(x, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n(x) e^{in\varphi}, \\ U_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Коэффициенты $U_n(x)$ являются решением следующих интегральных уравнений [9], которые получаются как Фурье-преобразование уравнения (1):

$$U_n(x_*) = \int_0^{x_*} K_n(x_*, x) U_n(x) dx + 2U_n^{\text{in}}(x_*). \quad (3)$$

Из (2) получим явное выражение для ядра $K_n(x_*, x)$:

$$K_n(x_*, x) = - \frac{(-i)^{n+1} \alpha^2 k x x_*}{(x_* - x)^2} \exp \left\{ \frac{i\alpha^2 k}{2} \frac{x_*^2 + x^2}{x_* - x} \right\} \times \\ \times \left[J_n \left(\frac{\alpha^2 k x x_*}{x_* - x} \right) - \frac{i}{2} \left(J_{n-1} \left(\frac{\alpha^2 k x x_*}{x_* - x} \right) - J_{n+1} \left(\frac{\alpha^2 k x x_*}{x_* - x} \right) \right) \right].$$

Уравнение (3) можно преобразовать в интегральное уравнение типа Вольтерры с разностным ядром. Для этого введем новую переменную $\xi = 1/x$, а также новую неизвестную функцию:

$$V_n(\xi) = \frac{k}{\xi} \exp \left\{ - \frac{i\alpha^2 k}{2\xi} \right\} U_n \left(\frac{1}{\xi} \right).$$

Ядро уравнения (3) $K_n(x_*, x)$ можно представить в следующем виде:

$$K_n(x_*, x) = \xi^2 \exp \left\{ - \frac{i\alpha^2 k}{2\xi} + \frac{i\alpha^2 k}{2\xi_*} \right\} G_n(\xi - \xi_*), \quad \xi_* = 1/x_*, \\ G_n(\xi) = - \frac{(-i)^{n+1} \alpha^2 k}{\xi^2} \exp \left\{ \frac{i\alpha^2 k}{\xi} \right\} \times \\ \times \left[J_n \left(\frac{\alpha^2 k}{\xi} \right) - \frac{i}{2} \left(J_{n-1} \left(\frac{\alpha^2 k}{\xi} \right) - J_{n+1} \left(\frac{\alpha^2 k}{\xi} \right) \right) \right].$$

Уравнение (3) приводится к следующему интегральному уравнению для $V_n(\xi)$:

$$V_n(\xi_s) = \int_{\tau_*}^{\infty} G_n(\xi - \xi_s) V_n(\xi) d\xi + 2\tilde{\zeta}_n(\xi_s), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \zeta_n(\xi) &\equiv \frac{k}{\xi} \exp\left\{-\frac{i\alpha^2 k}{2\xi}\right\} U_n^{\text{in}}\left(\frac{1}{\xi}\right) = (-i)^n \frac{ik^2 \xi_s}{2\pi(\xi - \xi_s)} \exp\left\{-\frac{ikr_s^2 \xi_s}{2}\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{i\alpha^2 k}{2(\xi - \xi_s)}\right\} \exp\left\{-\frac{ikr_s^2 \xi_s^2}{2(\xi - \xi_s)}\right\} J_n\left(\frac{\alpha k r_s \xi_s}{\xi - \xi_s}\right), \end{aligned}$$

где $\xi_s = 1/x_s$.

Так как уравнение (4) является интегральным уравнением Вольтерры с разностным ядром, его можно решить методом преобразования Фурье. Введем прямое и обратное преобразование Фурье произвольной функции $p(\xi)$ по переменной ξ :

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) \exp(-i\lambda\xi) d\xi, \\ p(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\lambda) \exp(i\lambda\xi) d\lambda. \end{aligned}$$

Уравнение (3) в пространстве Фурье выглядит следующим образом:

$$\tilde{V}_n(\lambda) = \tilde{G}_n(\lambda) \tilde{V}_n(\lambda) + 2\tilde{\zeta}_n(\lambda), \quad (5)$$

где

$$\tilde{G}_n(\lambda) = \int_0^{\infty} G_n(\xi) \exp(i\lambda\xi) d\xi,$$

а $V_n(\lambda)$ и $\zeta_n(\lambda)$ – соответственно Фурье-образы функций $V_n(\xi)$ и $\zeta_n(\xi)$.

Найдем функцию $\tilde{\zeta}_n(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_n(\lambda) &= (-i)^n ik^2 \xi_s \exp\left\{-\frac{ikr_s^2 \xi_s}{2} - i\lambda\xi_s\right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\xi} \exp\left\{-\frac{i\alpha^2 k}{2\xi} - \frac{ikr_s^2 \xi_s^2}{2\xi} - i\lambda\xi\right\} J_n\left(\frac{\alpha k r_s \xi_s}{\xi}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Пользуясь соотношением [23]

$$\begin{aligned} J_n\left(\frac{ab}{2c}\right) \exp\left\{-\frac{i(a^2 + b^2)}{4c}\right\} &= \\ &= 2i^{n-1} c \int_0^{\infty} J_n(av) J_n(bv) \exp(icv^2) v dv, \end{aligned}$$

можно получить:

$$\tilde{\zeta}_n(\lambda) = \begin{cases} k^2 \xi_s \exp\left\{-\frac{ikr_s^2 \xi_s}{2} - i\lambda\xi_s\right\} J_n\left(\sqrt{2k\alpha^2 \lambda}\right) J_n\left(\sqrt{2kr_s^2 \xi_s^2 \lambda}\right), & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Теперь вычислим функцию $\tilde{G}_n(\lambda)$. Для этого вернемся от переменной ξ к переменной x и введем параметр $\beta = k\alpha^2$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(\lambda) &= -\int_0^{\infty} (-i)^{n+1} \beta \exp\left(i\beta x + \frac{i\lambda}{x}\right) \times \\ &\times \left[J_n(\beta x) - \frac{i}{2}(J_{n-1}(\beta x) - J_{n+1}(\beta x))\right] dx. \end{aligned}$$

Представим интеграл в следующем виде:

$$\tilde{G}_n(\lambda) = (-i)^n \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \exp\left(i\beta x + \frac{i\lambda}{x}\right) J_n(\beta x) dx \right).$$

Далее, пользуясь табличным интегралом [23]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \exp\left(-\beta x - \frac{\alpha}{x}\right) J_n(\gamma x) dx &= \\ &= \pi i^{n+1} J_n\left(\sqrt{2\alpha}\left[\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - \beta\right]^{1/2}\right) H_n^{(1)}\left(i\sqrt{2\alpha}\left[\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + \beta\right]^{1/2}\right) \end{aligned}$$

и выражением для вронскиана уравнения Бесселя

$$J_n(x) \dot{H}_n^{(1)}(x) - \dot{J}_n(x) H_n^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}, \quad (6)$$

получим выражение для $\tilde{G}_n(\lambda)$:

$$\tilde{G}_n(\lambda) = 1 + J_n\left(\sqrt{2k\alpha^2 \lambda}\right) \dot{H}_n^{(1)}\left(\sqrt{2k\alpha^2 \lambda}\right) i\pi\sqrt{2k\alpha^2 \lambda}.$$

Наконец, выражая $\tilde{V}_n(\lambda)$ из формулы (5)

$$\tilde{V}_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{k^2 \xi_s \exp\left\{-\frac{ikr_s^2 \xi_s}{2} - i\lambda\xi_s\right\} J_n\left(\sqrt{2kr_s^2 \xi_s^2 \lambda}\right)}{i\pi\sqrt{2k\alpha^2 \lambda} \dot{H}_n^{(1)}\left(\sqrt{2k\alpha^2 \lambda}\right)}, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

и снова пользуясь соотношением (6), вычисляем обратное преобразование Фурье и получаем выражение для функции $U(\xi)$. Введем безразмерный параметр $y = \alpha^2 kx$, характеризующий зависимость поля от аксиальной координаты точки наблюдения x , и будем далее его называть аксиальным параметром. Введем также безразмерные параметры $y_s = \alpha^2 kx_s$ и $z_s = \alpha k r_s$, характеризующие положение источника относительно конуса. Тогда получаем следующие

выражения для n -й моды падающего и рассеянного поля на поверхности конуса:

$$U_n^{\text{in}}(y) = (-i)^n \frac{\alpha^2 k^2}{2\pi i(y - y_s)} \exp\left(\frac{i(y^2 + z_s^2)}{2(y - y_s)}\right) J_n\left(\frac{yz_s}{y - y_s}\right), \quad (7)$$

$$U_n^{\text{sc}}(y) = -\frac{\alpha^2 k^2}{2\pi u y_s} \exp\left(-\frac{iz_s^2}{2y_s}\right) \exp\left(\frac{iy}{2}\right) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{J_n(\kappa)}{\dot{H}_n^{(1)}(\kappa)} H_n^{(1)}(\kappa) J_n\left(\kappa \frac{z_s}{y_s}\right) \exp\left(\frac{i\kappa^2}{2y}\right) \exp\left(-\frac{i\kappa^2}{2y_s}\right) \kappa d\kappa. \quad (8)$$

Рассмотрим частный случай, когда источник расположен на оси конуса ($r_s = 0$). Тогда будет возбуждаться только нулевая мода $U_0(y)$, и выражения для падающего и рассеянного поля на поверхности конуса существенно упрощаются:

$$U_0^{\text{in}}(y) = \frac{\alpha^2 k^2}{2\pi i(y - y_s)} \exp\left(\frac{iy^2}{2(y - y_s)}\right), \quad (9)$$

$$U_n^{\text{in}}(y) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$U_0^{\text{sc}}(y) = -\frac{\alpha^2 k^2}{2\pi u y_s} \exp\left(\frac{iy}{2}\right) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa)}{\dot{H}_0^{(1)}(\kappa)} H_0^{(1)}(\kappa) \exp\left(\frac{i\kappa^2}{2y}\right) \exp\left(-\frac{i\kappa^2}{2y_s}\right) \kappa d\kappa, \quad (10)$$

$$U_n^{\text{sc}}(y) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Аналогичным образом вблизи поверхности конуса падающее и полное поле можно представить в виде ряда Фурье по угловой координате:

$$u^{\text{in}}(x, r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n^{\text{in}}(x, r) e^{in\varphi},$$

$$u_n^{\text{in}}(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^{\text{in}}(x, r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

$$u(x, r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x, r) e^{in\varphi},$$

$$u_n(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Таким же образом получаем итоговое выражение для n -й моды падающего и рассеянного поля во всем пространстве (помимо аксиального параметра y вводится безразмерный параметр $z = \alpha k(r - \alpha x)$, характеризующий зависимость поля от радиальной

координаты точки наблюдения r ; далее параметр z будем называть радиальным параметром):

$$u_n^{\text{in}}(y, z) = (-i)^n \frac{\alpha^2 k^2}{2\pi i(y - y_s)} \times \\ \times \exp\left(\frac{i((y + z)^2 + z_s^2)}{2(y - y_s)}\right) J_n\left(\frac{(y + z)z_s}{y - y_s}\right),$$

$$u_n^{\text{sc}}(y, z) = -\frac{\alpha^2 k^2}{2\pi u y_s} \exp\left(-\frac{iz_s^2}{2y_s}\right) \exp\left(\frac{iy}{2}\left(1 + \frac{z}{y}\right)^2\right) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{J_n(\kappa)}{\dot{H}_n^{(1)}(\kappa)} H_n^{(1)}\left(\kappa\left(1 + \frac{z}{y}\right)\right) J_n\left(\kappa \frac{z_s}{y_s}\right) \exp\left(\frac{i\kappa^2}{2y}\right) \exp\left(-\frac{i\kappa^2}{2y_s}\right) \kappa d\kappa. \quad (11)$$

Выражение (11) представляет собой решение задачи, и в настоящей работе строится впервые.

В случае, когда источник расположен на оси конуса ($r_s = 0$), выражения для падающего и рассеянного поля имеют вид:

$$u_0^{\text{in}}(y, z) = \frac{\alpha^2 k^2}{2\pi i(y - y_s)} \exp\left(\frac{i(y + z)^2}{2(y - y_s)}\right), \quad (12)$$

$$u_n^{\text{in}}(y, z) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$u_0^{\text{sc}}(y, z) = -\frac{\alpha^2 k^2}{2\pi u y_s} \exp\left(\frac{iy}{2}\left(1 + \frac{z}{y}\right)^2\right) \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa)}{\dot{H}_0^{(1)}(\kappa)} H_0^{(1)}\left(\kappa\left(1 + \frac{z}{y}\right)\right) \exp\left(\frac{i\kappa^2}{2y}\right) \exp\left(-\frac{i\kappa^2}{2y_s}\right) \kappa d\kappa, \quad (13)$$

$$u_n^{\text{sc}}(y, z) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

При устремлении x_s к бесконечности с соответствующим масштабированием амплитуды и фазы источника, (10) и (13) переходят в решения (47) и (48) из [9] для случая падающей плоской волны.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ

При экспериментальном исследовании дифракции ультразвуковых волн возникает ряд трудностей. При использовании протяженных сигналов необходимо, чтобы помещение, где проводится эксперимент, было достаточно большим по объему, чтобы отраженные сигналы не успевали приходиться к приемнику, иначе в принимаемом сигнале будут присутствовать многочисленные переотражения. Использование же импульсных сигналов вносит ограничение в разрешающую способность системы, к тому же реализовать, например,

дельта-импульс весьма проблематично. Эту проблему решают корреляционные методы, одним из которых является метод последовательности максимальной длины (М-последовательности), его подробное изложение дается, например, в [24]. Данный метод заключается в том, что в качестве зондирующего сигнала используется псевдослучайная последовательность M_k , представляющая собой последовательность из +1 и -1. Более подробно про генерацию М-последовательности можно посмотреть в [25]. Одним из важнейших свойств М-последовательности является то, что ее автокорреляционная функция близка к единичному дельта-импульсу. Из этого следует, что импульсный отклик системы может быть с хорошей точностью измерен путем вычисления взаимной корреляции сигнала, отправляемого на излучатель, с сигналом, измеряемым на приемнике.

Данный метод хорошо работает, когда в качестве источника используется широкополосный излучатель. Однако, в рамках настоящей работы проводится исследование дифракции ультразвуковых волн. Как известно, в ультразвуковом диапазоне эффективные излучатели звука являются резонансными, т.е. имеющими узкую частотную полосу. В таком случае использование в качестве послылки широкополосного сигнала не является оптимальным решением, и возникает необходимость модифицировать метод М-последовательности, чтобы расширить его применимость на случай узкополосных излучателей. Опишем данную методику. Блок-схема метода приведена на рис. 2.

На генераторе сигналов помимо М-последовательности генерируется несущий синусоидальный

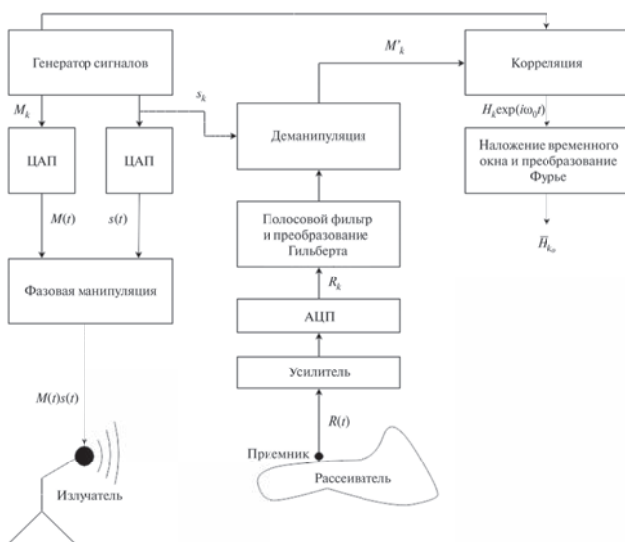


Рис. 2. Блок-схема эксперимента.

сигнал $s(t) = \cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, где частота f_0 соответствует резонансной частоте излучателя. Тактовая частота М-последовательности должна быть много меньше частоты несущего сигнала. Эти сигналы перемножаются, т.е. проводится фазовая манипуляция сигнала $s(t)$ М-последовательностью. Фазоманипулированный сигнал $\cos(\omega_0 t + m(t)\pi)$, $m(t) = 0, 1$ подается на излучатель. На приемнике измеряется дифрагированное поле $R(t)$. Сигнал с приемника усиливается, деманипулируется и коррелируется с исходной М-последовательностью. В результате восстанавливается произведение импульсного отклика в системе $H(t)$ в исследуемой частотной полосе и фазового множителя $\exp(i\omega_0 t)$. На импульсный отклик накладывается временное окно, соответствующее времени прихода полезных сигналов. Наконец, с помощью преобразования Фурье вычисляется компонента частотного отклика, соответствующая резонансной частоте излучателя. Данная компонента и является результатом измерений.

Покажем, что описанная выше процедура в действительности ведет к измерению импульсного отклика в заданной частотной полосе. Для простоты будем рассматривать непрерывные функции. В частности, предположим, что имеется непрерывный аналог М-последовательности $M(t)$, с автокорреляционной функцией, близкой к дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(\tau)M(\tau - t)d\tau \approx \delta(t). \quad (14)$$

Также для простоты будем рассматривать не действительные, а аналитические сигналы, в том числе заменим функцию $s(t) = \cos(\omega_0 t)$ на $s(t) = \exp(-i\omega_0 t)$.

Как известно, сигнал на выходе линейной системы представляет собой свертку входного сигнала и импульсного отклика. Поэтому поле на приемнике $R(t)$ можно записать в следующем виде:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(\tau)\exp(-i\omega_0\tau)H(t - \tau)d\tau. \quad (15)$$

Домножим правую и левую часть (15) на $\exp(i\omega_0 t)$, т.е. проведем деманипуляцию сигнала $R(t)$:

$$\exp(i\omega_0 t)R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(\tau)\exp(i\omega_0(t - \tau))H(t - \tau)d\tau.$$

Вычислим корреляционную функцию правой и левой части с $M(t)$. Учитывая (14), получим:

$$C(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega_0 \tau) R(\tau) M(\tau - t) d\tau \approx \exp(i\omega_0 t) H(t).$$

Введем прямое и обратное преобразование Фурье во времени для произвольной функции $f(t)$:

$$\bar{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Тогда, переходя в Фурье-область и пользуясь теоремой о сдвиге по частоте, получим:

$$\bar{C}(\omega) \approx \bar{H}(\omega + \omega_0).$$

Таким образом, спектр взаимно-корреляционной функции деманипулированного сигнала приблизительно равен частотному отклику системы, сдвинутому на ω_0 . В частности, нулевая компонента спектра коррелированного сигнала соответствует частотному отклику на резонансной частоте излучателя.

На практике для корректной работы алгоритма сигналы необходимо преобразовать к аналитическому представлению с помощью преобразования Гильберта. Например, принятый действительный сигнал $R(t)$ преобразуется в аналитический $\hat{R}(t) = R(t) - iR_{\perp}(t)$, где

$$R_{\perp}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Интеграл понимается в смысле главного значения.

В данном эксперименте в качестве источника звука использовался пьезоэлектрический излучатель с резонансной частотой 40 кГц, а в качестве приемника — 1/8-дюймовый микрофон Brüel & Kjær. В качестве АЦП и ЦАП использовался осциллограф.

ИЗМЕРЕНИЯ В СВОБОДНОМ ПОЛЕ

В свободном поле давление, создаваемое монопольным точечным источником на расстоянии r в момент времени t , описывается следующей формулой:

$$p(r, t) = \frac{\rho_0}{4\pi r} W \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (16)$$

где W — производная объемной скорости источника по времени. Для проверки монопольности используемого пьезоэлектрического излучателя и нахождения величины W проводился эксперимент в свободном поле по вышеописанной методике на различных расстояниях. Измерения проводились на расстояниях от 10 до 80 см. Результаты представлены на рис. 3.

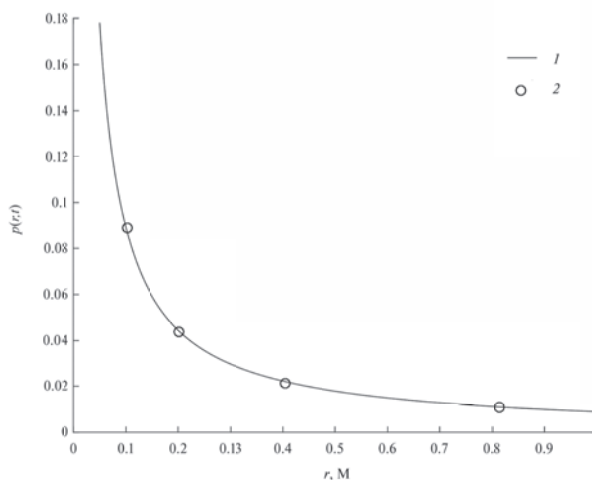


Рис. 3. Результаты эксперимента в свободном поле. Линия 1 — зависимость, выраженная формулой (16), 2 — измеренные значения поля.

ИЗМЕРЕНИЯ ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

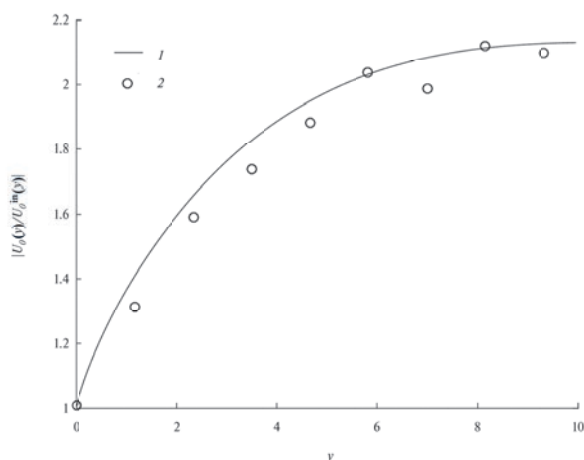
С помощью вышеописанной методики было измерено полное поле на поверхности тонкого жесткого конуса $U_0(y)$ в случае аксиального расположения источника, вычисляемое с помощью формул (9)–(10). Для данного эксперимента был изготовлен конус из дюралюминия длиной 30 см и углом раствора $2\arctg(\alpha) = 26.2^\circ$ (см. рис. 4). Так как акустический импеданс дюралюминия много больше акустического импеданса воздуха, на поверхности конуса с хорошей точностью выполняются граничные условия Неймана, а длина конуса и его угол раствора были подобраны таким образом, чтобы была возможность измерить зависимость полного поля $U_0(y)$ вплоть до $y = \alpha^2 kx \approx 10$, и чтобы при этом конус можно было считать тонким.

Перед основным экспериментом был измерен импульсный отклик в свободном поле на расстоянии 51.5 см. Измерения поля проводились в двух противоположно расположенных точках на нескольких различных сечениях $r = \alpha x$.



Рис. 4. Фотография экспериментального стенда

На рис. 5 представлена зависимость $U_0(y) / U_0^{\text{in}}(y)$. Различия между теоретическим и экспериментальным значениями составляют не более 10% (см. рис. 5).

Рис. 5. Сравнение результатов измерений поля на поверхности конуса с теоретической зависимостью полного поля от аксиального параметра y . 1 — расчет по формулам (9)–(10), 2 — результаты эксперимента.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ НЕАКСИАЛЬНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА НА ИЗМЕРЕНИЯ

Следует еще раз отметить, что при проведении эксперимента необходимо выставить источник на оси конуса. Однако, поскольку точность позиционирования источника по объективным причинам является ограниченной, y измерений может возникнуть ошибка, связанная с этим фактором. Оценим влияние неаксиальности положения источника на измерения поля на поверхности конуса. Точность позиционирования источника предполагается равной 2 см, что при расстоянии между

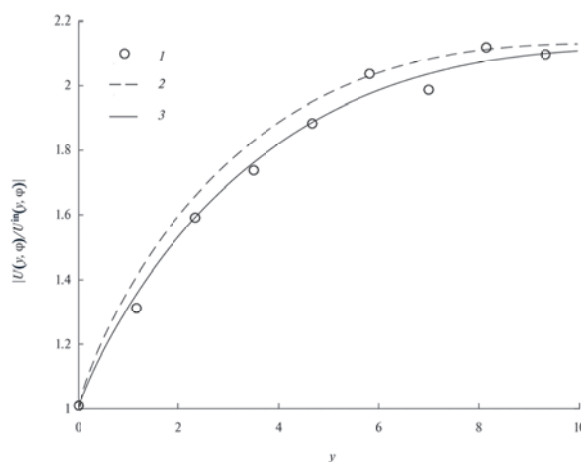
вершиной конуса и источником 51.5 см соответствует его отклонению от оси конуса на угол 2.2° . Анализ зависимости формул (7)–(8) от параметра z_s показывает, что в таком случае поле в пределах точности эксперимента может быть аппроксимировано следующей формулой:

$$U(y, \varphi) \approx U_0(y) + 2U_1(y)\cos\varphi + 2U_2(y)\cos 2\varphi,$$

где $U_n(y)$ даются формулами (7)–(8). Подберем такие значения z_s и φ , при которых квадратическая ошибка аппроксимации теоретической кривой экспериментальными значениями, представленными в предыдущем разделе, будет минимальной:

$$\sum_{i=1}^N (U_i^{\text{exp}} - U(y_i, \varphi))^2 \rightarrow \min.$$

Заметим, что измерения поля на поверхности конуса проводились только для двух различных азимутов φ . Каждая такая серия измерений аппроксимировалась отдельно. Для первой серии измерений теоретическая кривая ближе всего к экспериментальным значениям при $z_s = 2.9$ (это соответствует расстоянию до оси 1.7 см или отклонению от оси на угол 1.9°) и при азимуте точек наблюдения $\varphi_1 = 110^\circ$. Для второй серии измерений наименьшая ошибка аппроксимации оказывается при $z_s = 4$, что не соответствует первой серии, однако при $z_s = 2.9$ и $\varphi_2 = 260^\circ$ ошибка аппроксимации будет лишь на проценты выше, поэтому именно эти параметры можно использовать для аппроксимации. Как видно из рис. 6, в результате подстановки

Рис. 6. Учет неаксиального положения источника ($z_s = 2.9$, $\varphi_1 = 110^\circ$ и $\varphi_2 = 260^\circ$) при построении теоретической кривой (1 — экспериментальные результаты, 2 — теоретическая кривая без учета эффекта, 3 — теоретическая кривая с учетом эффекта); бралось усредненное значение для двух азимутов.

данных параметров в теоретическую модель теоретическая кривая стала ближе к экспериментальным значениям. Таким образом, даже сравнительно небольшая неаксиальность положения источника может влиять на результаты эксперимента.

ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯ ВНЕ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

Была также измерена зависимость полного поля за пределами поверхности конуса $u_0(y, z)$ в случае аксиального расположения источника, вычисляемого с помощью выражений (12)–(13), от радиального параметра $z = \alpha k(r - \alpha x)$ при фиксированном значении аксиального параметра y . Отметим, что рядом с поверхностью конуса возникает интерференция падающего и рассеянного полей, затухающая по мере отдаления от поверхности, причем интерференция усиливается с увеличением аксиального параметра y (см. рис. 7).

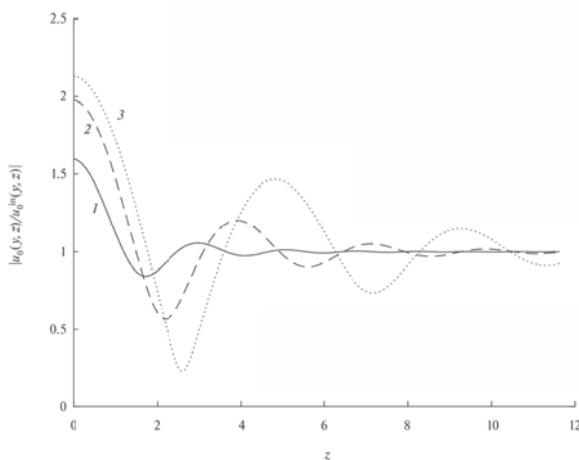


Рис. 7. Зависимость полного поля, вычисленная с помощью (12)–(13) от радиального параметра $z = \alpha k(r - \alpha x)$ для разных аксиальных параметров $y = \alpha^2 kx$. Линия 1 – зависимость при $y = 2$, линия 2 – при $y = 5$, линия 3 – при $y = 10$.

В эксперименте измерялась зависимость отношения полного и падающего полей от радиального параметра $u_0(y, z) / u_0^{\text{in}}(y, z)$. Измерения проводились для двух разных аксиальных параметров: $y = 1.94$ и $y = 5.82$ (соответствуют $x = 5$ см и $x = 15$ см). Сравнение теоретических и экспериментальных значений показывает, что интерференция действительно имеет место (см. рис. 8).

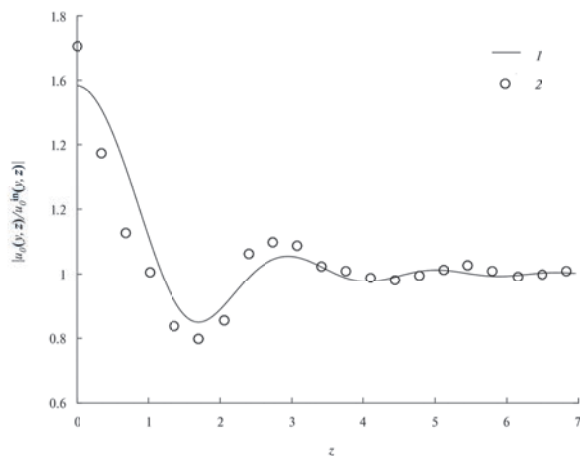


Рис. 8. Сравнение результатов измерений поля за пределами поверхности конуса с теоретической зависимостью полного поля от радиального параметра z при $x = 5$ см ($y = 1.94$). Линия 1 – формулы (12)–(13), 2 – экспериментальные результаты.

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ

На точность измерений влияли следующие факторы:

1. Зависимость давления, измеряемого на микрофоне, от взаимной ориентации микрофона и источника, ввиду сравнимости размеров мембраны микрофона и длин волн излучаемого ультразвука. Конструктивные особенности микрофона и конуса не позволяют выставить микрофон так, чтобы его мембрана была перпендикулярна оси излучателя. В эксперименте угол между мембраной и осью составлял порядка 20 градусов. Поэтому для микрофона была измерена диаграмма направленности (см. рис. 9), и поле домножалось на поправочный коэффициент, соответствующий углу 20 градусов. Предполагается, что диаграмма направленности микрофона является симметричной, поэтому проводились измерения только в диапазоне от 0 до 90 градусов, а остальная диаграмма достраивалась из соображений симметрии.
2. Поскольку в эксперименте конус имел конечные размеры, существует вероятность возникновения волн, распространяющихся в обратном направлении, не описываемых формулами (9)–(10) и в принципе любыми подходами, задающимися параболическое уравнение. Для проверки наличия таких волн на конус была дополнительно приклеена «юбка» из ватмана.

Измерения с «юбкой» отличались от измерений без «юбки» не более, чем на 5%, поэтому был сделан вывод, что такими волнами можно пренебречь в пределах экспериментальной точности.

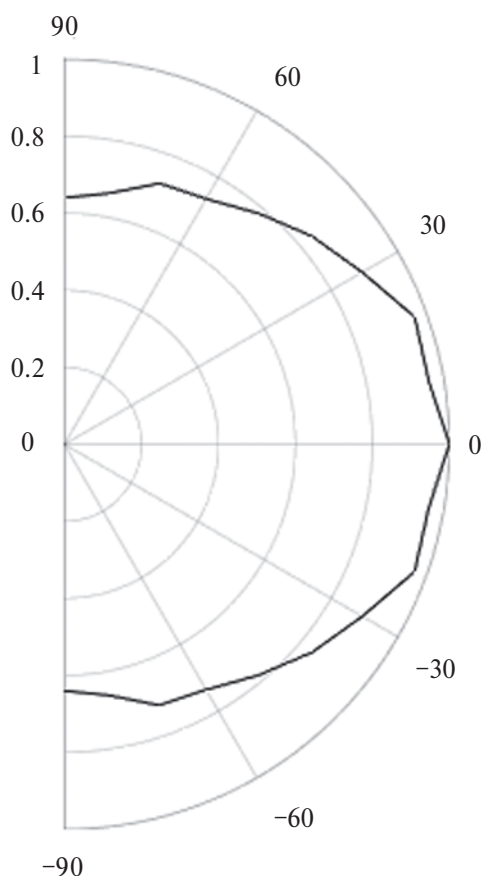


Рис. 9. Диаграмма направленности микрофона вблизи частоты 40 кГц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы с помощью метода параболического уравнения было получено представление в виде ряда Фурье для поля произвольно расположенного точечного источника, рассеянного на тонком акустически жестком конусе. Была разработана новая экспериментальная методика, позволяющая использовать метод М-последовательности для резонансных излучателей. Методика заключается в использовании в качестве посылки фазоманипулированной М-последовательности. Данная методика была применена для экспериментального измерения дифрагированного поля, рассеянного тонким конусом. Погрешность эксперимента составила 10%. Кроме того, было

произведено сравнение с теоретическими расчетами, полученными в рамках метода параболического уравнения.

Авторы статьи выражают благодарность В. А. Рожкову за изготовление конуса и помощь в проведении эксперимента.

Данная работа поддержана грантом РФФИ 19-29-06048.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирпичникова Н.Я., Попов М.М. Метод параболического уравнения Леонтовича Фока в задаче дифракции на вытянутых телах // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2012. Т. 409. № 42. С. 55–79.
2. Попов М.М., Кирпичникова Н.Я. О проблемах применения параболического уравнения к дифракции на вытянутых телах // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 339–346.
3. Андронов И.В. Дифракция на сильно вытянутом теле вращения // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 147–152.
4. Андронов И.В. Расчет дифракции на сильно вытянутых телах вращения // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 1. С. 28–35.
5. Андронов И.В. Дифракция на эллиптическом цилиндре с сильно вытянутым сечением // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 3. С. 219–226.
6. Андронов И.В., Лавров Ю.А. О рассеянии на эллиптическом цилиндре с сильно вытянутым сечением // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 4. С. 423–427.
7. Andronov I.V. Point source diffraction by a strongly elongated spheroid // J. Sound Vib. 2015. V. 355. P. 360–368.
8. Andronov I.V., Bouche D.P. Diffraction by a strip at almost grazing angle // J. Sound Vib. 2016. V. 374. P. 185–198.
9. Shanin A.V., Korolkov A.I. Diffraction by an elongated body of revolution. A boundary integral equation based on the parabolic equation // Wave Motion. 2019. V. 85. № 1. P. 176–190.
10. Nikolaev B.G. Wave processes in diffraction by a perfectly reflecting cone in the axisymmetric case // J. Soviet Math. 1975. V. 3. № 1. P. 125–141.
11. Nikolaev B.G. Diffraction of the field of a point source at a circular cone (Nonaxisymmetric case) // J. Soviet Math. 1978. V. 9. № 4. P. 598–612.
12. Smyshlyaev V.P. Diffraction by conical surfaces at high frequencies // Wave Motion. 1990. V. 12. P. 329–339.

13. Babich V.M., Dement'ev D.B., Samokish B.A. On the diffraction of high-frequency waves by a cone of arbitrary shape // *Wave Motion*. 1995. V. 21. P. 203–207.
14. Babich V.M., Dement'ev D.B., Samokish B.A., Smyshlyaev V.P. On evaluation of the diffraction coefficient for arbitrary "nonsingular" directions of a smooth convex cone // *SIAM J. Appl. Math.* 2000. V. 60. № 2. P. 536–573.
15. Шанин А.В. Асимптотики волнового поля при дифракции на конусе и дифракционный ряд на сфере // *Зап. научн. семинаров ПОМИ*. 2011. Т. 393. С. 234–258.
16. Lyalinov M.A., Zhu N.Y. Acoustics scattering by a circular semi-transparent conical surface // *J. Eng. Math.* 2007. V. 59. № 4. P. 385–398.
17. Antipov Y.A. Diffraction of a plane wave by a circular cone with an impedance boundary condition // *SIAM J. Appl. Math.* 2002. V. 82. P. 1122–1152.
18. Belous A.A., Korolkov A.I., Shanin A.V. Theoretical and experimental study of diffraction by a thin cone // *Proc. of the Int. Conf. DAYS on DIFFRACTION*. IEEE, 2018. P. 33–37.
19. Шмелёв А.А. Акустическая томография распределения нелинейных параметров рассеивателя на основе эффектов третьего порядка. Дисс. на соиск. уч. степ. к.ф.-м.н. М., 2011. 142 с.
20. Буров В.А., Шмелёв А.А., Зотов Д.И. Прототип томографической системы, использующей акустические нелинейные эффекты третьего порядка // *Акуст. журн.* 2013. Т. 59. № 1. С. 31–51.
21. Дмитриев К.В., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Принципы получения и обработки акустических сигналов в линейном и нелинейном томографах // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2017. Т. 81. № 8. С. 1014–1019.
22. Котельников Е.А., Крюков Р.В., Буров В.А., Дмитриев К.В., Румянцева О.Д. Кодировка зондирующих сигналов при томографировании акустических нелинейных параметров // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2019. Т. 83. № 1. С. 76–82.
23. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядом и произведений. М.: Гос. издат. физ.-матем. лит., 1963. 1100 с.
24. Шанин А.В., Валяев В.Ю. Метод последовательностей максимальной длины в дифракционном эксперименте // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 3. С. 420–425.
25. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. М.: Издательство "Мир", 1976. 400 с.

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF DIFFRACTION BY A THIN CONE

A. Yu. Laptev^{a,*}, A. I. Korolkov^b, A. V. Shanin^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, GSP-1, 119991 Russia*

^b*University of Manchester, Oxford Road, Manchester, M13 9PL UK*

*e-mail: laptev97@bk.ru

A problem of diffraction of ultrasound acoustic waves by an acute-angled hard cone is studied. Within the framework of the parabolic equation method, an analytical solution of the problem for an arbitrarily located point source is built. Specifically, the problem is reduced to the Volterra boundary integral equation, which can be solved using the Fourier transform. An experimental measurement of the diffracted field is carried out. The experiment is based on the MLS method adapted for narrowband sound sources. A comparison of experimental and theoretical results is provided.

Keywords: parabolic equation method, canonical diffraction problems, M-sequence method