

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОКЕАНЕ, ОСНОВАННЫЕ НА ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИИ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ МОД

© 2023 г. А. Г. Тыщенко^{а, *}, С. Б. Козицкий^а, М. С. Казак^а, П. С. Петров^{а, б, **}

^аФедеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт
им. В.И. Ильичева ДВО РАН, ул. Балтийская, 43, Владивосток, 690041 Россия

^бBergische Universität Wuppertal, Gaußstraße, 20, Wuppertal, 42119 Germany

*e-mail: tyshchenko.ag@poi.dvo.ru

**e-mail: petrov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 31.03.2023 г.

После доработки 27.04.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Представлен обзор современных методов моделирования акустических полей, основанных на их представлении в виде суперпозиции нормальных волн (акустических мод). В основе большинства описанных методов лежит подход к расчету модовых амплитуд с использованием параболических уравнений различного типа, как узкоугольных, так и широкоугольных. Рассматриваются также двумерные методы расчета акустических полей, к которым редуцируются указанные трехмерные подходы при отсутствии зависимости поля и параметров среды от одной из горизонтальных координат. Обсуждаются вопросы расчета как тональных акустических полей, так и импульсных звуковых сигналов. Рассмотрен ряд численных примеров, в которых такие расчеты выполняются с учетом трехмерных эффектов распространения звука. Впервые в рамках данного подхода выполнен расчет колебательных ускорений в точках приема импульсного сигнала, а также расчет плотности потока энергии векторного поля.

Ключевые слова: акустика океана, акустические моды, метод параболического уравнения, моделирование распространения звука

DOI: 10.31857/S0320791923600373, EDN: QQLCBK

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование трехмерных акустических полей в океане составляет одно из наиболее важных направлений исследований в подводной акустике [1, 2]. В настоящее время трудно себе представить ситуации и приложения, в которых было бы достаточно одних лишь данных натуральных измерений. Математическое моделирование и экспериментальные исследования являются дополняющими друг друга компонентами, позволяющими достичь комплексного и всестороннего понимания физических процессов и механизмов, связанных с распространением звука в тех или иных практических задачах и перейти от параметров акустических полей в точках, где расположены опорные гидрофоны, к их распределениям в пространстве и времени.

Методы моделирования распространения звука, основанные на модовом представлении акустического поля [3–5], а также основанные на них прикладные программы для выполнения

конкретных расчетов [6] известны с самых первых этапов развития теоретической и вычислительной акустики океана. Данное представление является, по-видимому, наиболее естественным, в частности, для низкочастотных акустических полей (соответствующих частотам до 1 кГц) в мелком море. Оно обеспечивает не только количественное, но и качественное описание процессов распространения звука, т.е. позволяет судить о физике связанных с ним явлений и дает аппарат для их анализа и понимания. Этими методами, основанными на модовом представлении поля, выгодно отличаются, например, от подходов, основанных на решении трехмерных параболических уравнений или же методов прямого численного решения волнового уравнения или уравнения Гельмгольца с помощью конечных разностей и конечных элементов. Заслуженной популярностью среди специалистов по акустике океана пользуются такие программы, как COUPLE [5, 6], Kraken [6, 7] и Orca [6, 8], позволяющие, во-первых,

рассчитывать непосредственно акустические моды волноводов, и, во-вторых, вычислять акустические поля через их представление в виде суперпозиций этих мод. Эти программы, однако, разработаны во времена, когда использовались в основном двумерные модели распространения звука, и, во-первых, отсутствовало понимание того, насколько важны трехмерные эффекты, а также, во-вторых, вычислительные мощности в любом случае были недостаточными для решения трехмерных задач.

Последние 20 лет авторы настоящей работы работают над разработкой и реализацией методов расчета звуковых полей, основанных на их представлении в виде суперпозиции мод, и ориентированных, прежде всего, на решение трехмерных задач. Данные работы начались с публикаций Трофимова [9, 10], посвященных выводу и решению модовых параболических уравнений (МПУ), т.е. параболических уравнений для модовых амплитуд. Простейший вариант МПУ впервые предложен в работе Коллинза [11] (отметим еще развитие этого подхода в более поздней работе [12]), однако, как представляется авторам, именно подход, предложенный Трофимовым, позволил сделать из этого весьма экзотического уравнения мощный вычислительный инструмент. Его конечным воплощением стали комплексы программ MPE (Modal Parabolic Equation, узкоугольные МПУ с взаимодействием мод) и AMPLE (Ample Modal Parabolic Equation, псевдодифференциальные МПУ), хотя, разумеется, их реализация стала возможной лишь после существенно-го развития теоретических и численных методов по сравнению с тем, что было сделано в [9]. Проведенные с тех пор исследования позволили сделать практически неограниченной апертуру МПУ в горизонтальной плоскости [13], сделать возможным их решение в криволинейных координатах [14], а также, что особенно важно на практике, разработать методы их решения, позволяющие использовать шаги дискретизации, существенно превышающие длину волны. Важно также отметить и другие вопросы, связанные с численным решением МПУ, например, искусственное ограничение расчетной области и постановку начальных условий, обеспечивающих, с одной стороны, достаточную апертуру решения и, с другой стороны, не требующих дополнительных ограничений на шаги сетки [13].

Заметим, что комплексы программ на основе МПУ изначально были ориентированы на расчет нестационарных звуковых полей, а также акустической экспозиции, отображающей степень акустического воздействия на некоторую точку пространства, называемой в иностранной литературе Sound Exposure Level (SEL), связанной с распро-

странением импульсных сигналов, и обычно необходимой для мониторинга антропогенных акустических шумов [15, 16]. Поскольку сами по себе МПУ аппроксимируют решение уравнения Гельмгольца, расчет временных рядов и полей, подобных SEL, в рамках данного подхода может быть осуществлен только методом Фурье-синтеза после моделирования распространения отдельных тональных компонент. Данное усложнение не существенно с теоретической точки зрения, однако накладывает дополнительные ограничения на время расчета звукового поля на каждой фиксированной частоте (нам представляется, в частности, что этот факт исключает использование в практических задачах методов, основанных на трехмерных параболических уравнениях). В данной работе мы впервые приводим тестовые расчеты, подтверждающие возможность моделирования импульсных сигналов с использованием МПУ.

Отметим еще, что в настоящее время вновь приобретают актуальность вопросы моделирования векторных акустических полей в океане. Они имеют важное значение в связи с задачами оценки влияния антропогенных акустических шумов на морскую фауну, а также и в методах геоакустической инверсии [17], обнаружения и отслеживания подводных объектов, например, средствами акустической голографии [18]. В последних вариантах программных комплексов MPE и AMPLE добавлена возможность расчета полей колебательных скоростей и ускорений, а также векторного поля плотности потока акустической энергии.

Параллельно с развитием этих вычислительных инструментов, основанных на МПУ, развивались и методы решения модельных задач, основанные на модовом представлении акустического поля и различных способах аналитического расчета коэффициентов разложения — модовых амплитуд. Оказалось, что существует много случаев, когда модовые амплитуды могут быть рассчитаны аналитически путем решения уравнений горизонтальной рефракции (например, с использованием теории специальных функций) или соответствующих параболических уравнений [19, 20]. Данные методы полезны, с одной стороны, для качественного понимания и анализа физических процессов (поскольку устанавливают прямые аналитические связи между параметрами волновода и формирующимися в нем акустическими полями). С другой стороны, аналитические решения играют важную роль в тестировании численных методов решения задач акустики океана.

Данная работа имеет целью обзор и обобщение всех результатов, относящихся к методам моделирования распространения звука в океане, основанным на модовом представлении акустиче-

ских полей, полученным авторами за последние 10 лет. Кроме этого, в работе впервые рассмотрены расчеты векторных полей в рамках данного подхода, а также выполнена верификация разработанных нами методов в задачах моделирования распространения импульсных акустических сигналов.

МОДОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДОВЫХ АМПЛИТУД В ОБЩЕМ ВИДЕ

В этом разделе мы приводим основные уравнения, связанные с модовым представлением акустических полей в трехмерных нерегулярных волноводах. Мы также представим два основных способа векторизации данных уравнений, которые затем будут использоваться нами на всем протяжении данной работы.

Акустическое поле, формируемое точечным тональным источником звука частоты f в океане, в линейном приближении удовлетворяет трехмерному уравнению Гельмгольца

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} P = -\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_s), \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, $c = c(x, y, z)$ — скорость звука, а нижние индексы x, y, z означают частные производные по соответствующим переменным (мы будем повсеместно использовать это обозначение далее). Уравнение записано в обычной трехмерной декартовой координатной системе, где ось z соответствует глубине, поверхность моря описывается уравнением $z = 0$, а x, y суть горизонтальные координаты. При этом источник звука мы считаем расположенным в точке $(0, 0, z_s)$.

В настоящей работе решение уравнения Гельмгольца будет рассматриваться в области $z \in [0, H]$, где $z = H$ представляет собой некоторую искусственную границу расчетной области. При этом на поверхности моря и на этой границе мы ставим условия Дирихле

$$P(x, y, 0) = 0, \quad P(x, y, H) = 0, \quad (2)$$

отмечая, однако, что последнее может быть с тем же успехом заменено на нулевое условие Неймана. Мы будем также предполагать, что внутри слоя $z \in [0, H]$ может находиться несколько границ раздела сред, имеющих форму гладких поверхностей $z = h(x, y)$ (для простоты и без ограничения общности мы будем считать, что такая поверхность только одна), на которых может иметь место скачок значений скорости звука и плотности. Мы будем предполагать выполнение обычных для таких границ условий непрерывно-

сти акустического давления и колебательной скорости:

$$P|_{z=h+0} = P|_{z=h-0}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} P_z \right) \Big|_{z=h+0} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} P_z \right) \Big|_{z=h-0}, \quad (3)$$

где ρ — плотность среды, а $z = h \pm 0$ означают пределы значений соответствующей величины при стремлении z к $h(x, y)$ сверху и снизу.

Можно показать, что краевая задача для уравнения (1) с краевыми условиями (2) и условиями на границе раздела (3) имеет единственное решение, если дополнительно потребовать выполнения обобщенных парциальных условий излучения Свешникова (а также считать, что вне достаточно большого цилиндра $r = \sqrt{x^2 + y^2} > r_{\max}$ волновод является регулярным, т.е. что его параметры не зависят от (x, y) при $r > r_{\max}$).

В реальных условиях, характерных для приложений акустики океана, прямое решение рассмотренной выше краевой задачи путем использования метода конечных элементов (МКЭ) или метода конечных разностей (МКР) представляется невозможным и уж во всяком случае непрактичным. Действительно, при прямых дискретизациях уравнения (1) необходимо разрешать отдельные волны, так что количество точек сетки, на которой вычисляется решение, должно по крайней мере в 10 раз превышать размеры области в длинах волн по каждой из пространственных координат. В случае областей, протяженных на десятки или даже сотни километров по горизонтали, ресурсы, необходимые для прямого вычисления решения с использованием МКЭ/МКР, находятся далеко за рамками возможностей современных компьютеров (а также компьютеров сколько-нибудь обозримого будущего). По этой причине необходима предварительная аналитическая работа, направленная на упрощение краевой задачи для уравнения (1) путем исключения из рассмотрения несущественных с точки зрения физики эффектов.

Акустические моды

Определим акустические моды $\varphi_j(z)$ как решения задачи Штурма—Лиувилля вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \varphi_j}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_j = k_j^2 \varphi_j, \\ \varphi_j|_{z=0} = 0, \\ \varphi_j|_{z=h-0} = \varphi_j|_{z=h+0}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi_j}{dz} \Big|_{z=h-0} = \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi_j}{dz} \Big|_{z=h+0}, \\ \varphi_j|_{z=H} = 0 \end{array} \right., \quad (4)$$

со спектральным параметром k_j^2 , вычисленные при фиксированной паре значений (x, y) , т.е. в некотором заданном сечении слоя $z \in [0, H]$, в котором решается задача, вертикальной прямой. Ввиду зависимости решений задачи (4) от выбора x, y имеет место параметрическая зависимость ее решений $\varphi_j(z) = \varphi_j(z, x, y)$ и $k_j = k_j(x, y)$ от горизонтальных координат. При этом величина k_j называется обычно горизонтальным волновым числом акустической моды. В нашей постановке задача (4) имеет счетное число вещественных решений, которые мы будем считать пронумерованными по убыванию k_j^2 (либо вещественной части k_j^2 , если поглощение звука в среде учитывается через мнимую добавку к скорости звука). Отметим, что лишь конечное число k_j^2 будет положительно. Соответствующие акустические моды называются распространяющимися.

Собственные функции мод φ_j для любой пары значений (x, y) образуют полную ортогональную систему функций в данном вертикальном сечении волновода. Мы будем считать данную систему нормированной относительно взвешенного скалярного произведения в пространстве $L^2_\rho [0, H]$, т.е. предположим, что

$$\int_0^H \frac{\varphi_j(z, x, y) \varphi_\ell(z, x, y)}{\rho(z)} dz = \delta_{j\ell}. \quad (5)$$

Модовое представление поля

Поскольку при любых фиксированных (x, y) модовые функции φ_j образуют полную ортонормированную систему, вертикальный разрез поля акустического давления $P(x, y, z)$ может быть представлен в виде ряда по модам. На практике, разумеется, всегда ограничиваются частичной суммой ряда

$$P(x, y, z) = \sum_{m=1}^M A_m(x, y) \varphi_m(z, x, y), \quad (6)$$

включающей в себя первые M распространяющихся мод (т.е. таких, что $k_m^2 > 0$). Коэффициенты $A_m(x, y)$ в разложении (6) при этом называются модовыми амплитудами.

Подставляя разложение (6) в уравнение (1) и проектируя обе части равенства последовательно на все моды $\varphi_n, n = 1, \dots, M$, можно получить систему уравнений

$$\begin{aligned} A_{n,xx} + A_{n,yy} + k_n^2 A_n + \sum_{m=1}^N (V_{mn} - V_{nm}) A_{m,x} + \\ + \sum_{m=1}^N (W_{mn} - W_{nm}) A_{m,y} + \sum_{m=1}^N U_{mn} A_m = \\ = -\delta(x) \delta(y) \varphi_n(z_s, 0, 0), \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициенты взаимодействия мод определяются по формулам

$$\begin{aligned} V_{mn} &= \int_0^H \frac{1}{\rho} \varphi_{m,x} \varphi_n dz, & W_{mn} &= \int_0^H \frac{1}{\rho} \varphi_{m,y} \varphi_n dz, \\ U_{mn} &= \int_0^H \frac{1}{\rho} (\varphi_{m,xx} + \varphi_{m,yy}) \varphi_n dz. \end{aligned}$$

Отметим, что во многих источниках указывается, что, например $V_{mn} - V_{nm} = 2W_{mn}$ (т.е. что матрицы, составленные из элементов V_{mn} или, аналогично, W_{mn} кососимметричны). Данное, утверждение, однако не соответствует действительности, как показано в работах [21, 22].

Введем векторно-матричную форму записи связанных уравнений для модовых амплитуд, объединив все скалярные уравнения и введя векторнозначную неизвестную функцию $\mathbf{a}(x, y) = (A_1, A_2, \dots, A_M)^T$ (здесь $(\cdot)^T$ означает транспонирование и показывает, что \mathbf{a} есть вектор-столбец). Система уравнений (7) в этих обозначениях эквивалентна одному уравнению

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{xx} + \mathbf{a}_{yy} + \mathbf{K}^2 \mathbf{a} + \mathbf{V} \mathbf{a}_x + \mathbf{W} \mathbf{a}_y + \mathbf{U} \mathbf{a} = \\ = -\delta(x) \delta(y) \tilde{\varphi}(z_s), \end{aligned} \quad (8)$$

где матрицы $\mathbf{V}(x, y), \mathbf{W}(x, y), \mathbf{U}(x, y)$ определены соотношениями $\mathbf{V}_{mn} = V_{mn} - V_{nm}, \mathbf{W}_{mn} = W_{mn} - W_{nm}, \mathbf{U}_{mn} = U_{mn}$, а матрица $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_M)$ (диагональная матрица, составленная из горизонтальных волновых чисел, т.е. такая, что $\mathbf{K}_{mn} = \delta_{mn} k_m$). Вектор-столбец в правой части уравнения (8) имеет вид

$$\tilde{\varphi}(z_s) = (\varphi_1(z_s, 0, 0), \varphi_2(z_s, 0, 0), \dots, \varphi_M(z_s, 0, 0))^T.$$

Данная работа посвящена обзору современных методов решения уравнения (8), в частности, развитых за последнее время в работах [13, 21, 23–25]. Заметим, что в рамках данной статьи мы стандартизировали обозначения (которые несколько различались в наших прошлых работах), что позволит читателю отследить взаимосвязи описанных далее методов. Как правило, мы будем использовать строчные полужирные буквы для обозначения вектор-функций, а прописные полужирные – для матриц-функций (матриц, элементы которых являются функциями).

ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

В этом разделе мы рассматриваем два различных метода расчета двумерных акустических полей, основанных на их модовом представлении. Таких методов на самом деле, разумеется, гораздо больше. Например, широко используемые комплексы программ Kraken и COUPLE в своей основе имеют разбиение волновода на набор регулярных сегментов, которое, в частности, предполагает аппроксимацию батиметрического профиля вдоль трассы ступенчатой функцией. Следует отметить также уравнения для модовых амплитуд, полученные в важной работе Година [26], а также уравнения из классической монографии [1]. Мы, тем не менее, ограничимся описанием двух методов из работ [23, 24]. Выбор этот не случаен, так как описанные в следующем разделе методы расчета трехмерных акустических полей редуцируются к векторизованному методу ВКБ, описанному ниже.

Модели с учетом обратного рассеяния (уравнения погружения)

В двумерном случае, когда параметры задачи не зависят от переменной y , уравнение (8) принимает вид

$$\mathbf{a}_{xx} + \mathbf{K}^2 \mathbf{a} + \mathbf{V} \mathbf{a}_x + \mathbf{U} \mathbf{a} = -\delta(x) \tilde{\varphi}(z_s), \quad (9)$$

где, по-прежнему, матрицы $\mathbf{V}(x)$, $\mathbf{W}(x)$, $\mathbf{U}(x)$ определены соотношениями $\mathbf{V}_{mn} = V_{mn} - V_{nm}$, $\mathbf{W}_{mn} = W_{mn} - W_{nm}$, $\mathbf{U}_{mn} = U_{mn}$, а матрица $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_M)$ (диагональная матрица, составленная из горизонтальных волновых чисел, т.е. такая, что $\mathbf{K}_{mn} = \delta_{mn} k_m$). Следуя работе [24] без ограничения общности предположим, что источник сигнала расположен в точке $x = L = 0$, и рассмотрим задачу о падении генерируемого им тонального сигнала на слой $[L_0, L]$, находящийся слева от него.

Задача расчета поля в таком волноводе может быть сведена к вспомогательной матричной краевой задаче [24]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{V}(x) \frac{d}{dx} \right) \mathbf{A}(x, L) + \\ & + \left(\mathbf{K}^2(L) + \mathbf{U}(L) \right) \mathbf{A}(x, L) = 0, \\ & \frac{\partial \mathbf{A}(L_0, L)}{\partial x} + i\mathbf{K}_0 \mathbf{A}(L_0, L) = 0, \\ & \frac{\partial \mathbf{A}(L, L)}{\partial x} - i\mathbf{K}_0 \mathbf{A}(L, L) = -\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (10)$$

Столбцы неизвестной матрицы $\mathbf{A}(x, L)$, которую мы на время будем считать параметрически зависящей от положения правой границы нерегуляр-

ного участка волновода, суть M векторов-столбцов \mathbf{a}_m , каждый из которых представляет собой решение задачи рассеяния m -й нормальной моды на данном нерегулярном участке.

Решение уравнения (9) связано с решением задачи (10) соотношением

$$\mathbf{a}(x) = 2i\mathbf{K}_0 \mathbf{A}(x) \tilde{\varphi}(z_s), \quad (11)$$

поскольку при решении (10) одновременно решается задача рассеяния каждой из M мод на нерегулярном участке волновода, а каждый столбец результирующей матрицы $\mathbf{A}(x)$ соответствует рассеянию одной из них. Формула (11) соответствует представлению поля точечного источника в виде линейной комбинации возбуждаемых им мод.

Пользуясь методом инвариантного погружения [24], мы сводим матричную краевую задачу (10) к паре вспомогательных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (с матричнозначной неизвестной функцией). Первая задача Коши служит, собственно, для определения матрицы $\mathbf{A}(x; L)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}(x, L)}{\partial L} = & \mathbf{A}(x, L) [\mathbf{V}(L) + i\mathbf{K}_0 + \\ & + (-\mathbf{V}(L) + i\mathbf{K}_0) i\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^2(L) + \mathbf{U}(L)] \mathbf{A}_L \end{aligned} \quad (12)$$

и начальному условию

$$\mathbf{A}(x, L)|_{L=x} = \mathbf{A}(x, x) = \mathbf{A}_x. \quad (13)$$

В этих соотношениях, по определению, $\mathbf{A}(L, L) \equiv \mathbf{A}_L(L)$. Данная функция, необходимая для решения (12), находится путем решения задачи Коши для уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}_L}{dL} = & \mathbf{A}_L \left[-(\mathbf{V}(L) + i\mathbf{K}_0) i\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^2(L) + \mathbf{U}(L) \right] \mathbf{A}_L + \\ & + \mathbf{A}_L i\mathbf{K}_0 + i\mathbf{K}_0 \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_L \mathbf{V}(L) - \mathbf{E} \end{aligned} \quad (14)$$

с начальным условием

$$\mathbf{A}_{L_0} = \mathbf{A}(L_0, L_0) = (2i\mathbf{K}_0)^{-1}. \quad (15)$$

Метод инвариантного погружения позволяет учитывать обратное рассеяние звука, причем матричный коэффициент можно рассчитать по формуле

$$\mathbf{R}(L) = 2i\mathbf{K}_0 \mathbf{A}_L - \mathbf{E}. \quad (16)$$

Элемент матрицы \mathbf{R}_{mn} соответствует доле акустической энергии, приходящейся на m -ую моду в отраженном от неоднородного участка поле, полученном при рассеянии на нем n -ой моды.

Заметим, что (12) и (14) вместе образуют систему уравнений метода инвариантного погружения (или, коротко, уравнения погружения) [27]. Дан-

ный метод позволит полностью учитывать обратное рассеяние, не требуя при этом решения краевых задач для эллиптических уравнений (для обоих уравнений погружения ставится задача Коши, которая может быть решена элементарными средствами, например, методами Рунге-Кутты). Недостатком метода является то, что при решении уравнения (12) приходится выбирать сетку таким образом, чтобы хорошо разрешались отдельные волны. Это обстоятельство существенным образом ограничивает его применимость на практике. Данный недостаток лишен, однако, рассмотренный в следующем разделе векторизованный метод ВКБ. Отметим еще, что идейно и технически вывод векторно-матричных уравнений инвариантного погружения [24, 28] (в качестве инструмента для расчета модовых амплитуд), повторяет вывод для скалярного уравнения из работы [27].

Модели однонаправленного распространения (векторизованный ВКБ)

В этом разделе мы рассматриваем уравнения для модовых амплитуд, полученные с помощью некоторого обобщения метода ВКБ [29]. Предложенный нами вывод [23] в некотором смысле является частным случаем асимптотического метода из [30], а результирующие уравнения подобны тем, что выведены в [1] другим способом (на наш взгляд, этот способ в меньшей степени подчеркивает аналогию с классическим методом ВКБ).

В уравнении (9) в реалистичных сценариях распространения звука можно пренебречь членом, содержащим $\mathbf{U}(x)$. Для упрощенного таким образом уравнения поставим краевую задачу, задав при $x = 0$ условие $A_m(0) = B_{m,0}$, где $B_{m,0}$ находится по формуле

$$B_{m,0} = \frac{i\Phi_m(z_s)}{2\rho(z_s)}.$$

Данная формула фактически описывает коэффициенты модового разложения поля точечного источника. При $x = x_{\max}$ потребуем выполнения условия

$$\frac{dA_m}{dx} - k_{m,\infty}A_m \Big|_{x=x_{\max}} = 0,$$

представляющего собой некоторый вариант парциального излучения Свешникова.

Асимптотика решения данной краевой задачи, как показано в [23], может быть найдена в виде

$$\mathbf{a}(x) = \begin{pmatrix} B_1(x)e^{i\Phi_1(x)} \\ B_2(x)e^{i\Phi_2(x)} \\ \vdots \\ B_M(x)e^{i\Phi_M(x)} \end{pmatrix} = \exp(i\Phi(x))\mathbf{b}(x), \quad (17)$$

где $\Phi(x) = \text{diag}(\Phi_1(x), \dots, \Phi_M(x))$, и $\mathbf{b}(x) = (B_1(x), \dots, B_M(x))^T$.

После подстановки (17) в дифференциальное уравнение (9) и выполнения стандартных шагов метода ВКБ может быть получено уравнение для фазовой матрицы $\Phi(x)$, имеющее вид $\Phi' = \mathbf{K}$ и допускающее решение в квадратурах вида $\Phi_m(x) = \int_0^x k_m(x) dx$.

В следующем порядке метода ВКБ получается также и уравнение для вектора огибающих модовых амплитуд $\mathbf{b}(x)$, которое имеет вид

$$2\mathbf{K}(x)\mathbf{b}'(x) + \mathbf{K}'(x)\mathbf{b}(x) + e^{-i\Phi(x)}\mathbf{V}(x)e^{i\Phi(x)}\mathbf{K}(x)\mathbf{b}(x) = 0. \quad (18)$$

В качестве начального условия для последнего выступает $B_j(0) = B_{j,0}$. Заметим, что элементы матрицы $\mathbf{\Xi} = e^{-i\Phi(x)}\mathbf{V}(x)e^{i\Phi(x)}$, описывающей взаимодействие мод в (18), могут быть найдены по формуле

$$\Xi_{mn} = \mathbf{V}_{mn}e^{\Phi_n(x) - \Phi_m(x)}.$$

Отметим, что поскольку векторизованный метод ВКБ позволяет, в частности, перейти от уравнений для модовых амплитуд $\mathbf{a}(x)$ к уравнениям для их огибающих $\mathbf{b}(x)$, результирующая задача Коши может решаться на весьма грубой сетке по эволюционной переменной x (например, шаг сетки в примерах из работы [23] составляет $\lambda/2$). Таким образом, уравнения для модовых амплитуд, полученные с помощью метода ВКБ, обеспечивают гораздо более высокую скорость расчета акустических полей на практике.

ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

При исследовании распространения звука в трехмерных океанических волноводах методом нормальных волн необходимо решать либо связанную систему уравнений (8), либо отдельные несвязанные друг с другом уравнения для модовых амплитуд, которые получаются из нее, когда взаимодействием мод можно пренебречь

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} + k_m^2(x, y) A_m = -\Phi_m(z_s) \delta(x) \delta(y), \quad (19)$$

$$m = 1, \dots, M.$$

Данные уравнения мы будем называть адиабатическими уравнениями горизонтальной рефракции. Их решение может осуществляться самыми разными способами. Так, например, в фундаментальной работе [31] их решение осуществляется лучевым методом, что приводит к представлению поля, известному как “вертикальные моды + горизонтальные лучи”. Данное представление, на наш взгляд, замечательно скорее возможностью получения качественных оценок изменчивости структуры поля в горизонтальных направлениях, чем своими вычислительными качествами. Уравнения (19) можно также решать и используя метод гауссовых пучков, что реализовано в работе [25]. В отдельных случаях его можно даже получить аналитически.

С нашей точки зрения наиболее перспективный инструмент для решения практических трехмерных задач дают модовые параболические уравнения (МПУ), представляющие собой уравнения однонаправленного распространения, соответствующие (8) или (19). В наших работах развиты несколько вариантов теории МПУ, каждый из которых доведен до практической реализации в виде комплекса программ, пригодных для решения задач акустики океана общего вида.

Псевдодифференциальное МПУ в общем виде

Мы начнем с вывода уравнения однонаправленного распространения, соответствующего (8). Хотя для его решения требуется векторизованный аналог метода split-step Padé (SSP), заключающегося в формальном дифференцировании псевдодифференциального уравнения по эволюционной координате (см. ниже), который в настоящее время проходит верификацию и реали-

зован лишь в виде прототипа для решения модельных задач, мы, тем не менее, считаем важным обратить внимание читателя на то, как псевдодифференциальное МПУ с учетом взаимодействия мод связано с прочими методами, рассмотренными в данном обзоре.

Заметим, во-первых, что формальную факторизацию оператора в уравнении (8) на сомножители, соответствующие распространению в положительном и отрицательном направлениях, произвести обычным способом нельзя ввиду того, что оно содержит первую производную по x . Для устранения проблемы мы сперва выполним замену

$$\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{S}(x, y) \mathbf{u}(x, y), \quad (20)$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, y)$ – некоторая матричнозначная функция, а $\mathbf{u}(x, y)$ – новая неизвестная вектор-функция. Легко видеть, что при такой замене в уравнении (8) будет устранена первая производная неизвестной функции по x , если выполняется соотношение

$$2\mathbf{S}_x + \mathbf{V}\mathbf{S} = 0. \quad (21)$$

Удовлетворяющая этому соотношению матричная функция \mathbf{S} может быть представлена в виде Т-экспоненты [32]

$$\mathbf{S}(x, y) = \mathbf{T} \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^x \mathbf{V} d\tau \right) \right\} \mathbf{S}_0, \quad (22)$$

где $\mathbf{S}_0 = \mathbf{E}$ – единичная матрица. После вычисления матрицы \mathbf{S} и подстановки (20) в уравнение (8), получим новое уравнение

$$\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{u}_{yy} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{K}^2 \mathbf{S} \mathbf{u} + \left(2\mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_y + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{W}\mathbf{S} \right) \mathbf{u}_y + \mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{U}\mathbf{S} + \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S}_{yy} + \mathbf{W}\mathbf{S}_y + \mathbf{V}\mathbf{S}_x \right) \mathbf{u} = 0, \quad (23)$$

оператор в котором может быть факторизован стандартным образом. В результате факторизации мы получим уравнение однонаправленного распространения следующего вида

$$\mathbf{u}_x = i \sqrt{\partial_y^2 + \left(2\mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_y + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{W}\mathbf{S} \right) \partial_y + \mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{K}^2 \mathbf{S} + \mathbf{U}\mathbf{S} + \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S}_{yy} + \mathbf{W}\mathbf{S}_y + \mathbf{V}\mathbf{S}_x \right)} \mathbf{u}. \quad (24)$$

Оператор в правой части данного уравнения представляет собой функцию (квадратный корень) от квадратной матрицы порядка M , элементы которой являются дифференциальными операторами по “поперечной” переменной y .

Отметим, что уравнение (24) формально может быть решено с помощью обобщения метода SSP на случай вектор-функций (и функций от матрично-дифференциальных операторов). Однако это обобщение находится за рамками дан-

ной работы и к настоящему моменту находится в разработке.

Узкоугольное МПУ с взаимодействием мод

Хотя решение (24) с аппроксимациями квадратного корня высших порядков требует весьма нетривиальных математических решений, в простейшем случае, когда достаточно приближения

Тейлора первого порядка $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, параболическое уравнение приобретает существенно более простой вид. Мы, однако, не будем приводить здесь результат такого рода узкоугольной аппроксимации непосредственно. Вместо этого, следуя [33, 34], мы запишем результирующее МПУ в том виде, в котором оно получается методом многомасштабных разложений. Данный вид эквивалентен полученному из (24) с точностью до упрощения коэффициентов последнего с помощью ряда несложных асимптотик. Для этого представим функцию $h(x, y)$, описывающую рельеф дна в области распространения звука, в виде

$$h(x, y) = h_0(x) + h_1(x, y), \quad (25)$$

где h_1 предполагается малым по сравнению с h_0 , а также положим, что

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \kappa^2(x, z) + v(x, y, z), \quad (26)$$

где v также мало по сравнению с κ^2 .

В этих обозначениях узкоугольное МПУ с учетом взаимодействия мод может быть записано в виде

$$2i\mathbf{K}\mathbf{b}_x + i\mathbf{K}'\mathbf{b} + \mathbf{b}_{yy} + \mathbf{\Xi}\mathbf{b} = 0, \quad (27)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$ – вновь (как и в предыдущем разделе) диагональная матрица $\mathbf{K}(x) = \text{diag}(k_1(x, 0), k_2(x, 0), \dots, k_M(x, 0))$, составленная из собственных чисел, рассчитанных при $y = 0$, неизвестная вектор-функция $\mathbf{b}(x, y)$ вновь представляет собой набор огибающих для модовых амплитуд

$$\mathbf{a}(x, y) = e^{i\Phi(x)}\mathbf{b}(x, y),$$

а матрица взаимодействия мод $\mathbf{\Xi}(x, y)$ на этот раз имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{\Xi}(x, y) &= e^{-i\Phi(x)}\mathbf{T}(x, y)e^{i\Phi(x)}, \\ \mathbf{\Xi}_{nm}(x, y) &= \mathbf{T}_{nm}(x, y)e^{\Phi_n(x) - \Phi_m(x)}. \end{aligned}$$

При этом элементы матрицы \mathbf{T} определяются по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{nm}(x, y) &= \int_0^H \frac{1}{\rho} v \varphi_m \varphi_n dz - ik_m (V_{nm} - V_{mn}) + \\ &+ \left\{ h_1 \varphi_n \left[\left(\left(\frac{1}{\rho} \varphi_{m,z} \right)_z \right)_+ - \left(\left(\frac{1}{\rho} \varphi_{m,z} \right)_z \right)_- \right] - \right. \\ &\left. - h_1 \frac{1}{\rho^2} \varphi_{m,z} \varphi_{n,z} [(\rho)_+ - (\rho)_-] \right\} \Big|_{z=h_0}. \end{aligned} \quad (28)$$

Последняя формула (28) может быть переписана в несколько более удобном для проведения вычислений виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{nm}(x, y) &= \int_0^H \frac{1}{\rho} v \varphi_m \varphi_n dz - ik_m (V_{nm} - V_{mn}) + \\ &+ \left\{ h_1 \varphi_m \varphi_n \left[k_m^2 \left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-} \right) - \left(\frac{\kappa^2}{\rho} \right)_+ + \left(\frac{\kappa^2}{\rho} \right)_- \right] - \right. \\ &\left. - h_1 \frac{1}{\rho^2} \varphi_{m,z} \varphi_{n,z} [(\rho)_+ - (\rho)_-] \right\} \Big|_{z=h_0}. \end{aligned}$$

Отметим, что в работах [33, 34] также получена удобная формула для вычисления коэффициентов взаимодействия мод V_{mn} , имеющая вид

$$\begin{aligned} (k_l^2 - k_j^2) V_{jl} &= \int_0^H \left(\frac{1}{\rho} \right)_x \varphi_{jz} \varphi_{lz} dz - \\ &- \int_0^H \left(\frac{1}{\rho} \kappa^2 \right)_x \varphi_j \varphi_l dz + 2k_{j,x} k_j \delta_{jl} + \\ &+ k_j^2 \int_0^H \left(\frac{1}{\rho} \right)_x \varphi_j \varphi_l dz + \left\{ h_{0,x} \left(\frac{1}{\rho^2} \varphi_{j,z} \varphi_{l,z} \right)_+ [(\rho)_+ - (\rho)_-] - \right. \\ &\left. - h_{0,x} \varphi_j \varphi_l \left[\left(\frac{1}{\rho} (k_j^2 - \kappa^2) \right)_+ - \left(\frac{1}{\rho} (k_j^2 - \kappa^2) \right)_- \right] \right\} \Big|_{z=h_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что $\left(\frac{1}{\rho^2} \varphi_{j,z} \varphi_{l,z} \right)_+ = \left(\frac{1}{\rho^2} \varphi_{j,z} \varphi_{l,z} \right)_-$.

Коэффициенты V_{jl} могут быть вычислены из этой формулы при $l \neq j$, а при $l = j$ мы получаем формулу для расчета k_{jx} . Заметим, что данные формулы эквивалентны выражениям для расчета тех же величин из работ [26, 35]. Фактически, данное представление коэффициентов межмодового взаимодействия связано с их линеаризацией относительно $h_1(x, y)$ и $v(x, y, z)$ [19, 35]. В остальном, очевидно, что с точностью до методики расчета коэффициентов узкоугольное МПУ с учетом взаимодействия мод (27) является прямым обобщением амплитудного уравнения, полученного с использованием векторизованного метода ВКБ (18).

Широкоугольное адиабатическое МПУ

В этом разделе приведены основные результаты теории широкоугольных модовых параболических уравнений. В данном разделе, однако, мы рассмотрим оптимальный, на наш взгляд, способ расчета модовых амплитуд A_j , который основан на псевдодифференциальных параболических уравнениях и методе SSP (split-step Padé, или метод расщепления Паде).

Выделяя главную осцилляцию (используя некоторое отсчетное значение горизонтального волнового числа $k_{j,0}$, например, рассчитанное в точке, где находится источник, т.е. $k_{j,0} = k_j(0, 0)$)

$$A_j(x, y) = e^{ik_{j,0}x} B_j(x, y),$$

мы получаем следующее псевдодифференциальное параболическое уравнения для огибающей $B_j(x, y)$

$$\frac{\partial B_j}{\partial x} = ik_{j,0} \left(\sqrt{1 + \hat{L}_j} - 1 \right) B_j, \quad (30)$$

где оператор \hat{L}_j определяется соотношением $k_{j,0}^2 \hat{L}_j = \partial_y^2 + k_j^2 - k_{j,0}^2$. Уравнение (30) называется псевдодифференциальным, поскольку в правой его части содержится функция $\sqrt{\cdot}$ дифференциального оператора \hat{L}_j , представляющая собой уже псевдодифференциальный оператор.

Выполняя формальное интегрирование по x уравнения (30) на малом интервале $\Delta x = h$, мы можем получить следующее представление для пропагатора \hat{P}

$$B_m^{n+1} = \exp\left(ik_{j,0}h\left(\sqrt{1 + \hat{L}} - 1\right)\right) B_m^n \equiv \hat{P} B_m^n, \quad (31)$$

где, по определению, $B_m^n(y) = B_m(x_n, y)$ (считаем, что по x введена равномерная сетка $x_{n+1} - x_n = h$).

Аппроксимант Паде порядка (q, p) для пропагатора \hat{P} , представляющий собой дробно-рациональную функцию оператора \hat{L} , числитель которой есть полином Q_q степени q , а знаменатель – полином P_p степени $p \geq q$ (обычно полагают $q = p$ или $q = p - 1$), может быть представлен в виде разложения на простейшие дроби вида

$$\begin{aligned} \exp\left(ik_{j,0}h\left(\sqrt{1 + \hat{L}} - 1\right)\right) &\approx \frac{Q_q(\hat{L})}{\mathcal{P}_\varphi(\hat{L})} = \\ &= \left(\mu_{q,p}^0 + \sum_{s=1}^p \frac{\mu_{q,p}^s}{1 + v_{q,p}^s \hat{L}} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где коэффициенты $\mu_{q,p}^s, v_{q,p}^s$ несложно пересчитать из коэффициентов ряда Тейлора функции (31), аргументом которой является \hat{L} .

Функции $B_m^n(y)$, составляющие приближенное решение уравнения (30) на равномерной сетке $\{x_n\}$, таким образом, могут рассчитываться одна за другой с помощью маршевой численной схемы

$$B_m^{n+1} = \left(\mu_{q,p}^0 + \sum_{s=1}^p \frac{\mu_{q,p}^s}{1 + v_{q,p}^s \hat{L}} \right) B_m^n. \quad (33)$$

Данная вычислительная процедура обычно называется методом SSP. Разумеется, для проведения конкретных вычислений в общем случае требует-

ся некоторая дискретизация оператора \hat{L} , а также искусственное ограничение расчетной области, например, с помощью совершенных поглощающих слоев (PML). Так или иначе, один шаг численной схемы (33) сводится к решению p систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей.

РАСЧЕТ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

В данном разделе мы обсуждаем вопросы расчета и визуализации векторных акустических полей в программных комплексах, ориентированных на решение задач акустики океана общего вида. С одной стороны, расчет поля колебательной скорости или ускорения представляется тривиальной задачей, если уже вычислено скалярное поле акустического давления. Требуется лишь выполнить расчет градиента давления путем численного дифференцирования $P(x, y, z)$ по всем пространственным координатам. С другой стороны, как уже неоднократно отмечалось, при решении практических задач, как правило, используются сетки с шагами порядка длины волны звука. Прямое численное дифференцирование P на таких сетках невозможно. Тем не менее, решение проблемы лежит на поверхности, и само модовое представление поля подсказывает способ вычисления производных: следует просто использовать правило Лейбница и отдельно дифференцировать быстроосциллирующую экспоненту, ее огибающую и модовую функцию. В интересах полноты изложения мы рассматриваем здесь эту процедуру.

Визуализация полей давления и колебательной скорости весьма затруднительна, поскольку оба вектора изменяются во времени, двигаясь по поверхности некоторого эллипса, приобретая противоположные направления в моменты времени, разделенные половиной периода. По этой причине для отрисовки такие векторные поля вряд ли годятся. Интерес, однако, может представлять график плотности потока акустической энергии (активной компоненты вектора интенсивности).

Расчет колебательного ускорения и колебательной скорости

Вектор колебательного ускорения может быть рассчитан по формуле

$$\{a_x, a_y, a_z\} = \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right\} = -\frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (34)$$

Используя модовое разложение поля (6) и выделяя главную осцилляцию, получим выражения для ускорения через огибающую B_j и ее производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{ik_{m,0}x} B_m(x, y) \varphi_m(z, x, y) \right) = \\ &= \sum_{m=1}^M e^{ik_{m,0}x} \left(ik_{m,0} B_m(x, y) \varphi_m(z, x, y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} (B_m(x, y) \varphi_m(z, x, y)) \right) = \\ &= \sum_{m=1}^M e^{ik_{m,0}x} \left(ik_{m,0} B_m \varphi_m + \frac{\partial B_m}{\partial x} \varphi_m + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} B_m \right), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \sum_{m=1}^M e^{ik_{m,0}x} \frac{\partial}{\partial y} (B_m(x, y) \varphi_m(z, x, y)) = \\ &= \sum_{m=1}^M e^{ik_{m,0}x} \left(\frac{\partial B_m}{\partial y} \varphi_m + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} B_m \right), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= \sum_{j=1}^M e^{ik_{m,0}x} \frac{\partial}{\partial z} (B_j(x, y) \varphi_m(z, x, y)) = \\ &= \sum_{j=1}^M e^{ik_{m,0}x} B_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}. \end{aligned} \quad (37)$$

Исключение главной осцилляции позволяет получить высокую численную устойчивость при расчете колебательного ускорения методом численного дифференцирования.

Вектор колебательной скорости также может быть выражен через пространственную производную P . Используя тот факт, что в частотной области $a = (-i\omega)v$, получим

$$\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\} = \left\{ \frac{i}{\omega} a_x, \frac{i}{\omega} a_y, \frac{i}{\omega} a_z \right\} = -\frac{i}{\omega \rho} \nabla P. \quad (38)$$

Расчет плотности потока энергии

Плотность потока энергии $\mathbf{I}(x, y, z)$ для тонального акустического сигнала определяется как активная компонента вектора интенсивности

$$\mathbf{I}(x, y, z) = \frac{1}{2} \left\langle \Re \left(P_t \mathbf{v}_t^* \right) \right\rangle, \quad (39)$$

где $\langle \cdot \rangle$ означают усреднение по интервалу времени, кратному одному периоду. Функция P_t , как и прежде, есть скалярное поле акустического давления

$$P_t(x, y, z, t) = P(x, y, z, \omega) e^{-i\omega t},$$

в котором в рамках данного раздела подразумевается наличие множителя, описывающего гармоническую зависимость от времени. Векторная функция

$$\mathbf{v}_t(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, z, \omega) e^{-i\omega t}$$

— вектор колебательной скорости. Символ * означает комплексное сопряжение, а нижний индекс t

подчеркивает, что величины заданы во временной области (чтобы отличать их от величин, заданных в частотной области).

Тот факт, что мы имеем дело с тональным сигналом, позволяет нам легко выполнить усреднение по времени, так как, на самом деле,

$$\mathbf{I}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2} \Re (P(x, y, z, \omega) \mathbf{v}^*(x, y, z, \omega)).$$

Отметим еще, что реактивная компонента вектора интенсивности в наших обозначениях может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{J}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2} \Im (P \mathbf{v}^*).$$

Векторные поля $\mathbf{I}(x, y, z, \omega)$, $\mathbf{J}(x, y, z, \omega)$, таким образом, не зависят от времени (для фиксированной частоты) и могут использоваться для визуализации. Их расчет представляет собой тривиальную процедуру, если вычислены и поле давления $P(x, y, z, \omega)$, и поле колебательной скорости $\mathbf{v}(x, y, z, \omega)$.

О моделировании распространения широкополосных импульсных сигналов

Моделирование импульсных акустических сигналов в рамках 4D подхода сводится к тому, что исходный сигнал представляется в виде суммы тональных компонент при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), основанного на алгоритме Кули–Тьюки. Распространение отдельных тональных компонент в слоистых волноводах мы умеем моделировать при помощи разработанных ранее модовых параболических уравнений. В силу линейности этих уравнений тональные компоненты распространяются независимо друг от друга, так что в точке приемника остается определить их комплексные амплитуды и при помощи обратного БПФ получить импульс в точке приема.

Более подробно, весь алгоритм моделирования распространения импульсного сигнала сводится к следующим пунктам:

1. Исходный импульс в точке источника может быть как модельным, так и полученным из экспериментальных измерений. При этом он интерполируется на используемую сетку, число точек в которой составляет степень двойки (для БПФ). При помощи БПФ получается спектр импульса. При этом могут быть использованы спектральные окна. Спектр импульса анализируется, и из него исключаются компоненты малой амплитуды, распространением которых можно пренебречь. Это позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты.

2. На следующей стадии вычисляются собственные числа и собственные функции каждой из спектральных компонент вдоль трассы. Для вычисления собственных чисел использован метод деления отрезка пополам (bisection), а для вычисления собственных функций использован метод обратной итерации, которые в связке показали очень хорошую скорость вычислений. С целью увеличения точности мы применяем методы экстраполяции Рундсона вплоть до второго порядка. На основе полученных собственных функций и собственных чисел далее вычисляются коэффициенты параболических уравнений.

3. На третьей стадии мы получаем численные решения для модовых параболических уравнений с использованием схемы Кранка–Николсона. В качестве начальных условий используются функции источника для МПУ, которые получаются из тех соображений, чтобы решения адиабатических МПУ асимптотически соответствовали решению исходного уравнения Гельмгольца от точечного источника. Таким образом, для каждой из спектральных компонент мы получаем акустическое поле в точках приемников. Всего в рамках заявленного подхода могут быть реализованы 4 метода вычисления поля. Это трехмерные МПУ – адиабатическое и с взаимодействующими модами, а также решения МПУ, обладающие цилиндрической симметрией, с учетом взаимодействия мод и адиабатические.

4. На четвертой стадии импульсы в точках приемников синтезируются из полученных ранее спектров тональных компонент при помощи обратного БПФ. При этом приходится предусматривать то, что импульсы к точкам приемников приходят с задержкой во времени, что приводит к необходимости умножать спектральные компоненты на корректирующие множители. Полученные результаты могут быть выведены в отдельные текстовые файлы, позволяющие нарисовать графики импульсов сторонними программами и произвести их постобработку при необходимости.

Отметим, что отдельные алгоритмы представленного 4D подхода, такие как вычисления коэффициентов параболических уравнений, могут быть эффективно распараллелены, например, с использованием открытого стандарта OpenMP для распараллеливания программ на языке C++. Это позволяет заметно ускорить вычисление импульсов, что особенно актуально, когда общее время счета измеряется часами.

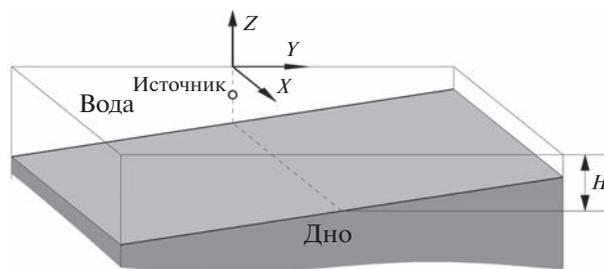


Рис. 1. Геометрия клиновидного прибрежного волновода в тестовом примере. Угол наклона дна составляет $\approx 2.86^\circ$, расстояние по горизонтали от источника до ребра клина – 4 км. Источник расположен на глубине 100 м. Глубина моря в месте расположения источника составляет $h = 200$ м.

ПРИМЕРЫ: МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В СЛОИСТЫХ ГЕОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ МЕТОДОМ ФУРЬЕ-СИНТЕЗА

Описание рассматриваемого волновода

С целью тестирования разработанной методики моделирования распространения акустических импульсов в слоистых волноводах мы провели ряд численных экспериментов. Мы рассмотрели распространение импульсов в проницаемом клине (стандартный тестовый сценарий, применяемый при верификации методов моделирования распространения звука [2]) с углом около 2.86 градусов (см. рис. 1). Скорость звука в воде при этом составляет 1500 м/с. Скорость звука в жидком дне – 1700 м/с. Плотность дна – 1500 кг/м³, а плотность воды – 1000 кг/м³. Поглощение в воде при этом отсутствует, а в дне поглощение составляет 0.5 дБ на длину волны. Во всех случаях точечный источник расположен на глубине 100 м, а глубина расположения приемников – 30 м (горизонтальные разрезы поля также строятся для этой глубины). Глубина моря в точке, где расположен источник, составляет $h(0,0) = 200$ м. При проведении вычислений общая глубина расчетной области составляла $H = 1500$ м. Кроме клиновидного волновода мы также провели расчеты для волновода сравнения, в котором глубина моря постоянна и равна $h(x,y) = 200$ м.

Импульсные сигналы

Исходная форма модельных импульсов описывается нормализованными полиномами Эрмита n -го порядка

$$P(t) = A\beta_n H_n\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right) \exp\left[-\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2\right], \quad (40)$$

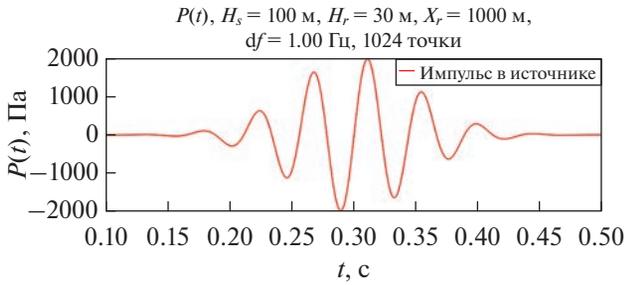


Рис. 2. Исходный импульс для $n = 25$.

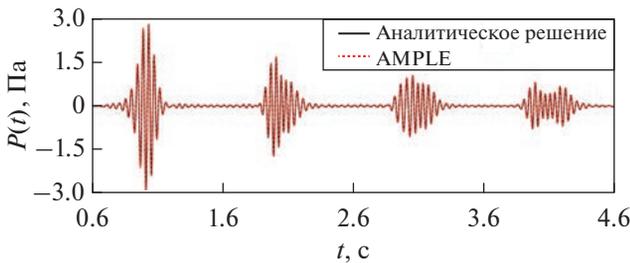


Рис. 3. Зависимость акустического давления от времени в волноводе с плоским дном во всех точках приема.

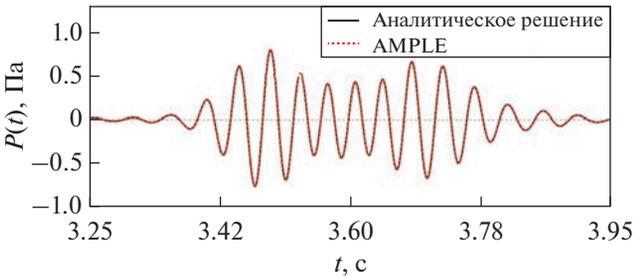


Рис. 4. Зависимость акустического давления от времени в волноводе с плоским дном на расстоянии 4750 м от источника звука.

где H_n – n -й полином Эрмита. Коэффициент β_n введен для нормализации n -го полинома Эрмита и вычисляется по формулам

$$n = 2k: \beta_n = \frac{k!}{(2k)!},$$

$$n = 2k + 1: \beta_n = (-1)^k \frac{k! \sqrt{4k + 3}}{(2k)! (4k + 2)}.$$

Величина коэффициента β_n выбрана исходя из следующих оценок, справедливых для больших n :

$$n = 2k: \beta_n H_n(x) e^{-x^2} \approx (-1)^k e^{-x^2/2} \cos(x\sqrt{4k + 1}),$$

$$n = 2k + 1: \beta_n H_n(x) e^{-x^2} \approx (-1)^k e^{-x^2/2} \sin(x\sqrt{4k + 3}).$$

Для таких импульсных сигналов можно аналитически рассчитать центральную частоту и форму их спектра. Центральная частота импульса может быть асимптотически выражена формулой $f_c = \sqrt{2n + 1}/(2\pi)$, или, в случае импульса (40),

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sigma} \sqrt{2n + 1} \text{ Гц.}$$

Например, центральная частота импульса с $\sigma = 0.05$ и $n = 25$ составляет $f_c \approx 23$ Гц. Для $n = 4$ центральная частота $f_c \approx 10$ Гц.

Для верификации описанных выше методов, основанных на модовых параболических уравнениях, в случае импульсных сигналов мы провели три серии численных экспериментов. В обеих сериях мы использовали следующие параметры излучаемых импульсов (42): $\sigma = 0.05$, $t_0 = 0.3$ и $A = 2000.0$, $n = 25$ (25-ый полином Эрмита), изображенный на рис. 2.

Результаты расчетов

Мы будем рассчитывать импульсные акустические сигналы, наблюдаемые в точках приема на глубине $z_r = 30$ м на расстояниях 1, 2.25, 3.5 и 4.75 км от источника по горизонтали.

В первой серии расчетов сигналы в приемниках рассчитаны для плоского дна (в этом случае имеет значение только расстояние от источника); во второй серии расчеты выполнялись для клиновидного волновода, причем точки приема располагались на оси x при $y = 0$ (в точках $x = 1, 2.25, 3.5$ и 4.75 км, соответственно); наконец, расчеты третьей серии также выполнялись для клина, однако на этот раз приемники были расположены вдоль оси y при $x = 0$ (в точках $y = 1, 2.25, 3.5$ и 4.75 км, соответственно).

В первой серии результаты расчетов сопоставлялись с решением, полученным с использованием аналитических выражений для модовых амплитуд через функции Ханкеля (мы приводим только результаты, полученные с помощью AMPLE, поскольку для регулярного волновода MPE дает в точности тот же результат). Результаты расчета звукового давления во всех точках приема представлены на рис. 3. Отдельно на рис. 4 представлен импульс в наиболее удаленной точке приема. Рисунки показывают, что МПУ в регулярном волноводе обеспечивают идеальную точность расчета модовых амплитуд.

На рис. 5 и 6 показана зависимость от времени компонент колебательного ускорения в точках приема. Поскольку эти величины получаются через дифференцирование поля давления как для аналитического решения, так и для решения, рас-

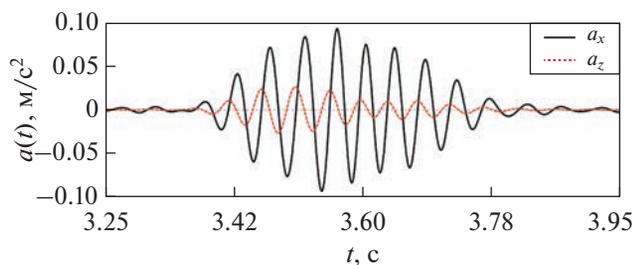


Рис. 5. Импульс колебательного ускорения в волноводе с плоским дном на расстоянии 4750 м от источника.

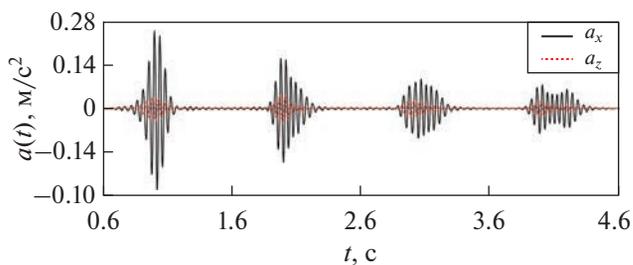


Рис. 6. Импульс колебательного ускорения в волноводе с плоским дном в точках приема.

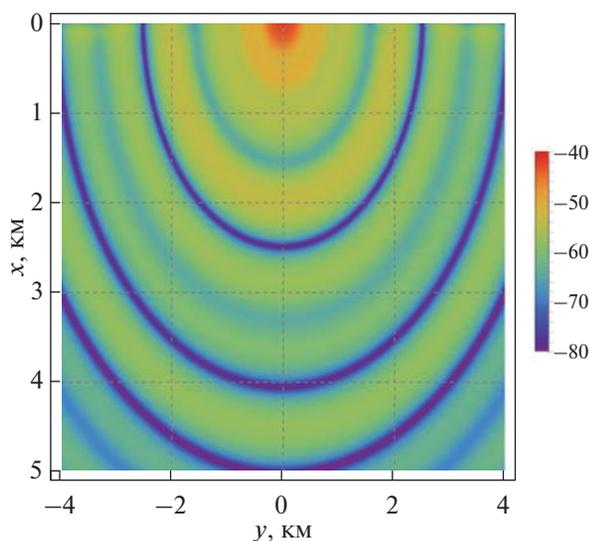


Рис. 7. Зависимость акустического давления (в дБ отн. 1 м от источника) от горизонтальных координат на глубине $z_r = 30$ м в волноводе с плоским дном на частоте 25 Гц.

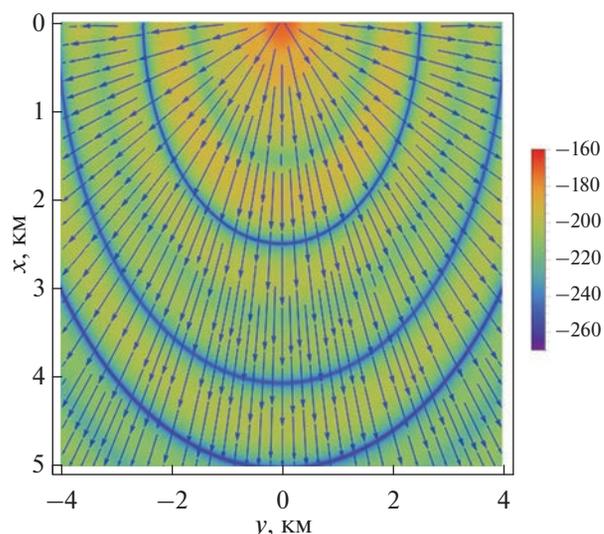


Рис. 8. Контурный график модуля плотности потока энергии в волноводе с плоским дном на частоте 25 Гц и векторное поле плотности потока энергии.

считанного с помощью МПУ, мы не приводим здесь сравнения. Более интересным оказывается сопоставить амплитуды колебания двух компонент ускорения друг с другом.

На рис. 7 и 8 представлены контурные графики зависимости акустического давления и модуля вектора плотности потока энергии от горизонтальных координат. На рис. 8 показан также поток векторного поля активной компоненты интенсивности. Разумеется, на обоих графиках линии уровня суть концентрические окружности, расходящиеся из источника.

Результаты второй серии расчетов представлены на рис. 9–14. Для временных рядов акустического давления на этот раз приведено сравнение импульсов, полученных с использованием AMPLE, MPE, а также эталонного решения, полученного с помощью метода изображений [36].

Как видно из рисунков, импульсные сигналы практически идеально совпадают друг с другом. В наиболее удаленной точке приема наиболее медленная часть сигнала, рассчитанная с помощью MPE, отличается от двух других решений. Это отличие объясняется апертурой узкоугольного уравнения, которой на этом расстоянии уже не вполне достаточно для учета горизонтальной рефракции высших (т.е. наиболее медленных) мод.

На рис. 11 и 12 представлены графики трех компонент колебательного ускорения. Интересно отметить, что проекция вектора ускорения на ось y становится заметной лишь в дальних точках приема и в наиболее медленной компоненте сигнала. Этот факт вновь обусловлен тем, что наиболее медленные высшие моды в наибольшей степени подвержены горизонтальной рефракции, и потому их горизонтальные лучи в наибольшей степени отклоняются от оси x .

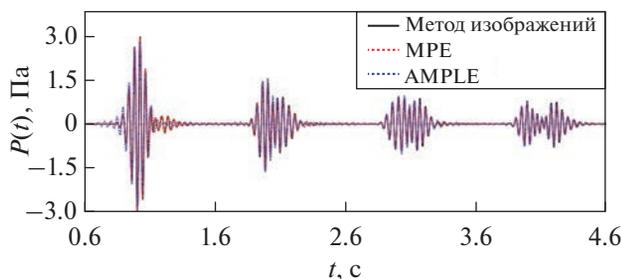


Рис. 9. Зависимость акустического давления от времени в клиновидном волноводе в точках приема, ориентированных вдоль оси x .

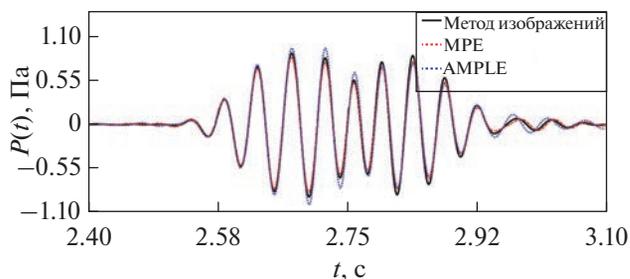


Рис. 10. Зависимость акустического давления от времени в клиновидном волноводе в точке $x = 4750$ м, $y = 0$.

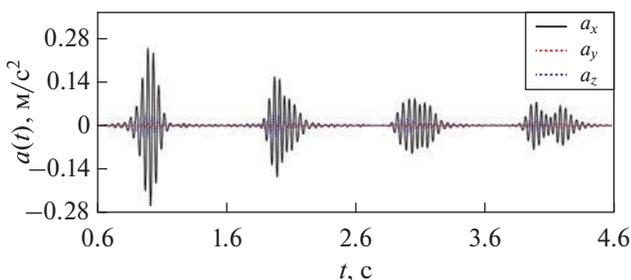


Рис. 11. Зависимость трех компонент колебательного ускорения от времени в клиновидном волноводе в точках приема, ориентированных вдоль оси x .

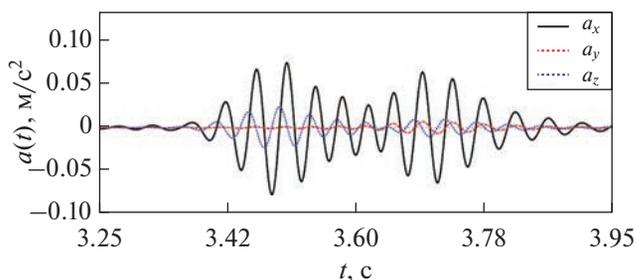


Рис. 12. Зависимость трех компонент колебательного ускорения от времени в клиновидном волноводе в точке приема $x = 4750$ м, $y = 0$.

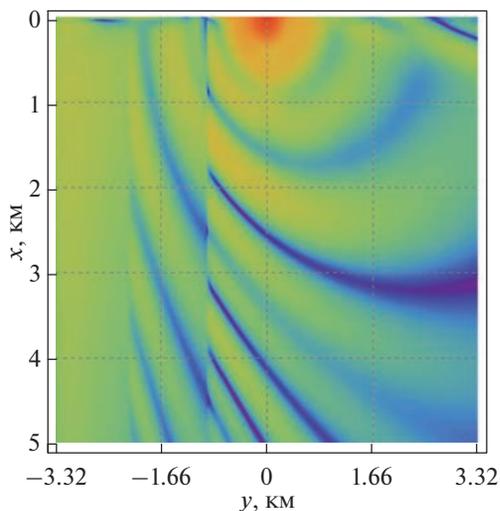


Рис. 13. Зависимость акустического давления (в дБ отн. 1 м от источника) от горизонтальных координат на глубине $z_r = 30$ м в клиновидном волноводе на частоте 25 Гц.

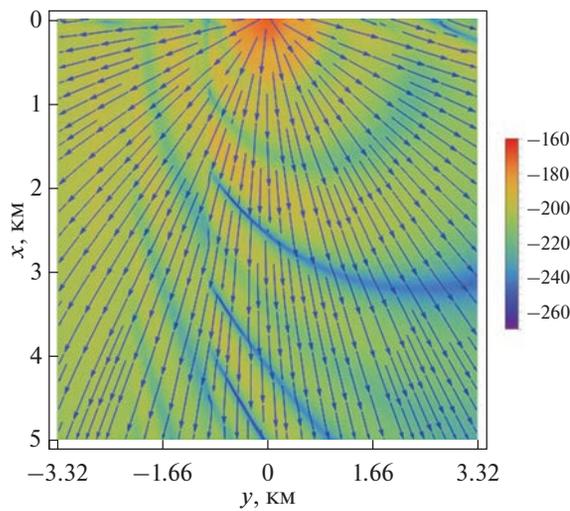


Рис. 14. Контурный график модуля плотности потока энергии в клиновидном волноводе на частоте 25 Гц и поток векторного поля плотности потока энергии.

Горизонтальный разрез поля акустического давления и проекция плотности потока энергии на горизонтальную плоскость представлены на рис. 13–14.

Третья серия расчетов соответствует распространению звука вдоль градиента глубины, при

котором точки приема ориентированы вдоль оси y . В этом случае мы приводим лишь расчеты с использованием МРЕ, поскольку известно, что при таком наклоне дна использование адиабатических методов некорректно (причину этой некорректности хорошо видно на рис. 13, при уменьшении глу-

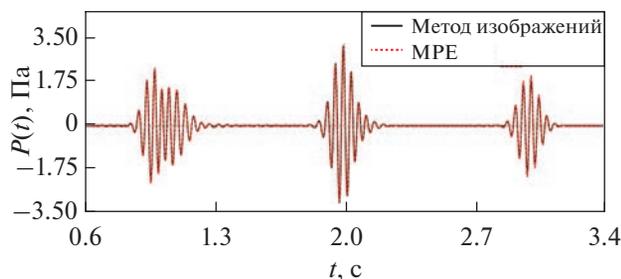


Рис. 15. Зависимость акустического давления от времени в клиновидном волноводе в точках приема, ориентированных вдоль оси y (распространение вдоль градиента глубины).

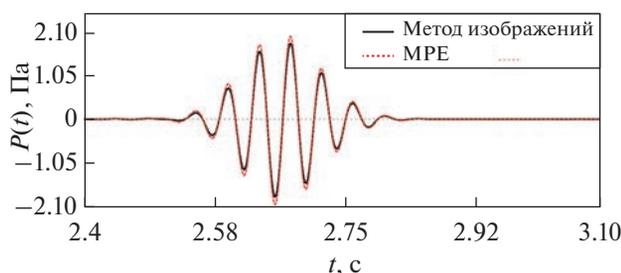


Рис. 16. Зависимость акустического давления от времени в клиновидном волноводе в точке $x = 3500$ м $y = 0$.

бины распространяющаяся энергия теряется ввиду отсутствия межмодового взаимодействия). Результаты сравнения решений, полученных с помощью МПУ и метода изображений для приемников, ориентированных вдоль y , представлены на рис. 15–16. Как видно, и в этом случае наблюдается хорошее соответствие эталонного и численного решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа представляет собой описание совокупности достижений нашей научной группы в развитии методов моделирования распространения звука, основанных на модовом представлении поля. С нашей точки зрения данное представление является оптимальным в случае низкочастотных сигналов (до 500–1000 Гц) и, с одной стороны, дает возможность проводить вычисления за разумное время и, с другой стороны, позволяет учесть множество факторов и эффектов (и пренебречь теми из них, которые не существенны в контексте той или иной задачи). Авторы полагают, что во многих случаях адиабатические псевдодифференциальные параболические уравнения позволят добиться необходимой точности, в особенности если речь идет об инте-

гральных характеристиках нестационарных акустических полей, например, звуковой экспозиции (SEL). В случае, если эффекты, связанные с горизонтальной рефракцией, проявляются относительно слабо, но при этом перепады глубины вдоль трассы значительны, имеет смысл пользоваться узкоугольным МПУ с взаимодействием мод. Оба метода в границах их применимости хорошо справляются с расчетами как тональных, так и импульсных сигналов, и, кроме того, позволяют вычислять поля колебательной скорости и ускорения без необходимости измельчения расчетной сетки.

Разумеется, максимальная гибкость в применении данных методов будет достигнута при реализации векторизованного метода SSP и решении с его помощью уравнения (24). Как было отмечено ранее, интеграция данного метода в программу AMPLE – вопрос самого ближайшего будущего. Отметим также, что важным усовершенствованием в будущем должна стать возможность учета волн сдвига в дне. Один из вариантов реализации упругих волн в программе, не требующий радикального увеличения вычислительных затрат по сравнению с моделью жидкого дна, рассмотрен в недавней работе [37]. Тем не менее, для развития данного метода все еще требуются дополнительные исследования. В настоящее время модель может восстанавливать (по данным, полученным в некоторой опорной точке измерения) и использовать в расчетах эффективную функцию источника [16]. Мы полагаем, что наличие двух опорных гидрофонов на различных расстояниях от точки излучения могло бы позволить осуществить одновременную оценку параметров дна волновода методом геоакустической инверсии и, таким образом, превратило бы AMPLE в автоматическое средство акустического мониторинга и прогнозирования уровней шумов, практически не требующее участия оператора в выборе тех или иных параметров.

Заметим также, что хотя в данной работе численные примеры ограничиваются случаем ровного дна и классическим тестовым сценарием распространения звука в волноводе с наклонным проницаемым дном (конфигурационные файлы расчетов доступны онлайн [38]), который эксплуатируется с 1980-х гг., для авторов очевидно, что стандартный подобных задач должен расширяться и стандартизироваться. Так, например, в работах [39, 19] нами был предложен тестовый сценарий распространения звука над подводным каньоном, в котором, однако, речь все еще идет о горизонтальной рефракции, обусловленной неоднородностями рельефа дна. Ясно, что трехмерный характер распространения звука может быть вызван и другими факторами. Так, например, в недавних ра-

ботах [40, 41] получены интересные результаты о горизонтальной рефракции звука, связанной с анизотропией распределения акустических параметров дна в горизонтальных направлениях.

В завершение данной работы авторы считают нужным коротко рассмотреть существующие альтернативы предлагаемым в данной работе методам и подходам. Мы полагаем, что среди них реальные возможности для решения трехмерных практических задач предоставляют программа Портера Bellhop [42], а также программа Родригеза и Калазана [43]. Нам представляется, что методы решения трехмерных параболических уравнений на данном этапе их развития все еще не годятся для моделирования распространения широкополосных импульсных сигналов. Их преимуществом, однако, является известная надежность и всеядность, которая, впрочем, не должна сбивать пользователя с толку, поскольку обычно гарантировано только получение результата, но не его правильность. Несколько обособленным является метод, основанный на теории волноводных инвариантов и развитый в недавних работах Сертлека и Энсли [44]. Он представляется авторам крайне перспективным для решения многих задач (особенно для случаев, когда для решения задачи достаточны интегральные энергетические характеристики поля). Его недостатком по настоящее время является то, что он не позволяет учитывать трехмерные эффекты (учет неоднородностей рельефа дна в рамках этого метода также фактически аналогичен адиабатическому приближению).

Авторам приятно выразить признательность В.Г. Петникову и А.И. Малеханову, пригласивших их представить данную работу в специальный выпуск “Акустического журнала”.

Работа А.Г. Тыщенко и С.Б. Козицкого поддержана грантом Российского научного фонда № 22-11-00171 (<https://rscf.ru/project/22-11-00171/>). Работа П.С. Петрова и М.С. Казака в ТОИ ДВО РАН выполнялась в рамках темы № 121021700341-2 гос. задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* Fundamentals of shallow water acoustics. N.Y.: Springer, 2012. V. 1.
2. *Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H.* Computational ocean acoustics. N.Y.: Springer, 2011.
3. *Pekeris C.L.* Theory of propagation of explosive sound in shallow water. In Propagation of Sound in the Ocean. Geological Society of America, 1948.
4. *Miller J.F., Ingenito F.* Normal mode fortran programs for calculating sound propagation in the ocean. Naval Research Lab. Report, 1975.
5. *Evans R.B.* A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom // J. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 74. № 1. P. 188–195.
6. Ocean Acoustics Library – OALIB/Normal Modes. <https://oalib-acoustics.org/models-and-software/normal-modes/> [Online; accessed 30-March-2023].
7. *Porter M., Reiss E.L.* A numerical method for ocean-acoustic normal modes // J. Acoust. Soc. Am. 1984. V. 76. № 1. P. 244–252.
8. *Westwood E.K., Tindle Ch.T., Chapman N.R.* A normal mode model for acousto-elastic ocean environments // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 100. № 6. P. 3631–3645.
9. *Трофимов М.Ю.* Узкоугольные параболические уравнения адиабатического распространения звука одной моды в горизонтально неоднородном мелком море // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 647–652.
10. *Трофимов М.Ю.* Широкоугольные модовые параболические уравнения // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 6. С. 822–829.
11. *Collins M.D.* The adiabatic mode parabolic equation // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 94. P. 2269–2278.
12. *Abawi A.T., Kuperman W.A., Collins M.D.* The coupled mode parabolic equation // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102. № 1. P. 233–238.
13. *Petrov P.S., Ehrhardt M., Tyshchenko A.G., Petrov P.N.* Wide-angle mode parabolic equations for the modeling of horizontal refraction in underwater acoustics and their numerical solution on unbounded domains // J. Sound. Vib. 2020. V. 484. P. 115526.
14. *Petrov P.S., Antoine X.* Pseudodifferential adiabatic mode parabolic equations in curvilinear coordinates and their numerical solution // J. Comp. Phys. 2020. V. 410. P. 109392.
15. *Рутенко А.Н., Боровой Д.И., Гриценко В.А., Петров П.С., Ущиповский В.Г.* Мониторинг акустического поля сейсморазведочных импульсов в прибрежной зоне // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 356–356.
16. *Manul'chev D., Tyshchenko A., Fershalov M., Petrov P.* Estimating sound exposure levels due to a broadband source over large areas of shallow sea // J. Mar. Sci. Eng. 2022. V. 10. № 1. P. 82.
17. *Bonnel J., Dall'Osto D.R., Dahl P.H.* Geoacoustic inversion using vector acoustic modal dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 2019. V. 146. № 4. P. 2930–2930.
18. *Переселков С.А., Кузькин В.М., Кузнецов Г.Н., Прозовецкий Д.Ю., Ткаченко С.А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 4. С. 437–445.
19. *Petrov P.N., Petrov P.S.* Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a shallow sea with the bathymetry described by a parametric quadratic function // J. Acoust. Soc. Am. 2019. V. 146. № 3. P. 1946–1955.
20. *Казак М.С., Петров П.С.* Об адиабатическом распространении звука в мелком море с изогнутым подводным каньоном // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 6. С. 613–621.

21. Trofimov M.Yu., Kozitskiy S.B., Zakharenko A.D. A mode parabolic equation method in the case of the resonant mode interaction // *Wave Motion*. 2015. V. 58. P. 42–52.
22. Trofimov M., Zakharenko A., Kozitskiy S., Petrov P. Formal derivations of mode coupling equations in underwater acoustics: how the method of multiple scales results in an expansion over eigenfunctions and the vectorized wkbj solution for the amplitudes // *J. Mar. Sci. Eng.* 2023. Submitted for publication.
23. Petrov P.S., Kazak M.S., Petrova T.N. A generalization of wkbj method for solving a system describing propagation of coupled modes in underwater acoustics // *Phys. Lett. A*. 2022. V. 450. P. 128383.
24. Kazak M., Koshel K., Petrov P. Generalized form of the invariant imbedding method and its application to the study of back-scattering in shallow-water acoustics // *J. Mar. Sci. Eng.* 2021. V. 9. № 9. P. 1033.
25. Trofimov M.Yu., Zakharenko A.D., Kozitskiy S.B. Mode gaussian beam tracing // *Comp. Phys. Commun.* 2016. V. 207. P. 179–185.
26. Godin O.A. A note on differential equations of coupled-mode propagation in fluids // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 103. № 1. P. 159–168.
27. Babkin G.I., Klyatskin V.I. Invariant imbedding method for wave problems // *Wave motion*. 1982. V. 4. № 3. P. 195–207.
28. Гулин О.Э. К расчетам низкочастотных акустических полей в нерегулярных волноводах при наличии сильного обратного рассеяния // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 4. С. 575–586.
29. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*. V. 3. Elsevier, 2013.
30. Маслов В.П., Федорюк М.В. *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*. М.: Наука, 1976.
31. Burridge R., Weinberg H. Horizontal rays and vertical modes // *Wave propagation and underwater acoustics*. 2005. P. 86–152.
32. Nazaikinskii V.E., Shatalov V.E., Sternin B.Yu. *Methods of noncommutative analysis: theory and applications*. de Gruyter, 1996.
33. Trofimov M.Yu., Kozitskiy S.B., Zakharenko A.D. A mode parabolic equation method in the case of the resonant mode interaction // *Wave Motion*. 2015. V. 58. P. 42–52.
34. Trofimov M.Yu., Kozitskiy S.B., Zakharenko A.D. Simulation of the pulse propagation by the interacting mode parabolic equation method // *Comp. Phys. Commun.* 2018. V. 228. P. 54–60.
35. Petrov P.S., Trofimov M.Yu., Zakharenko A.D. Modal perturbation theory in the case of bathymetry variations in shallow-water acoustics // *Rus. J. Math. Phys.* 2021. V. 28. № 2. P. 257–262.
36. Tang J., Петров П.С., Piao Sh., Козицкий С.Б. К вопросу о методе изображений в задаче о распространении звука в клине в акустике океана: некоторые исправления и дополнения // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 2. С. 228–240.
37. Kozitskiy S. Coupled-mode parabolic equations for the modeling of sound propagation in a shallow-water waveguide with weak elastic bottom // *J. Mar. Sci. Eng.* 2022. V. 10. № 10. P. 1355.
38. AMPLE. Конфигурационные файлы экспериментов. [Электронный ресурс] URL: <https://github.com/GoldFeniks/Ample/tree/master/samples>
39. Тыщенко А.Г., Заикин О.С., Сорокин М.А., Петров П.С. Комплекс программ для расчета акустических полей в мелком море на основе метода широкоугольных модовых параболических уравнений // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 5. С. 533–541.
40. Луньков А.А., Шерменева М.А. Взаимодействие мод на сосредоточенной неоднородности в мелководном акустическом волноводе в широкой полосе частот // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 5. С. 510–519.
41. Petnikov V.G., Grigorev V.A., Lunikov A.A., Sidorov D.D. Modeling underwater sound propagation in an arctic shelf region with an inhomogeneous bottom // *J. Acoust. Soc. Am.* 2022. V. 151. № 4. P. 2297–2309.
42. Porter M.B. Beam tracing for two- and three-dimensional problems in ocean acoustics // *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. V. 146. № 3. P. 2016–2029.
43. de Moraes Calazan R., Rodriguez O.C. Simplex based three-dimensional eigenray search for underwater predictions // *J. Acoust. Soc. Am.* 2018. V. 143. № 4. P. 2059–2065.
44. Sertlek H.Ö., Ainslie M.A., Heaney K.D. Analytical and numerical propagation loss predictions for gradually range-dependent isospeed waveguides // *IEEE J. Ocean. Eng.* 2019. V. 44. № 4. P. 1240–1252.