

## СЕЛЕКТИВНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДНЫХ МОД С ПОМОЩЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЦЕПОЧКИ МОНОПОЛЕЙ

© 2023 г. Д. В. Макаров<sup>а</sup> \*, Е. В. Соседко<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,  
ул. Балтийская, 43, Владивосток, 690041 Россия

\*e-mail: makarov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 02.04.2023 г.

После доработки 28.04.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Рассматривается задача о пространственной структуре акустического поля, создаваемого в дальней зоне разреженной горизонтальной цепочкой ненаправленных излучателей. Показано, что цепочка способна селективно возбуждать определенные моды акустического поля, причем номер возбуждаемой моды зависит от угловой ориентации относительно цепочки. Представлены результаты численного моделирования для двух моделей волновода и цепочки излучателей, расположенной на дне. Показано, что эффективность возбуждения отдельной моды возрастает с ростом номера этой моды. Исследована угловая зависимость модового спектра и показано, что она состоит из нескольких ветвей, каждая из которых определяет наиболее эффективно возбуждаемые моды.

*Ключевые слова:* акустическая антенна, акустический волновод, модовое представление

**DOI:** 10.31857/S0320791923600592, **EDN:** QPDAQL

### ВВЕДЕНИЕ

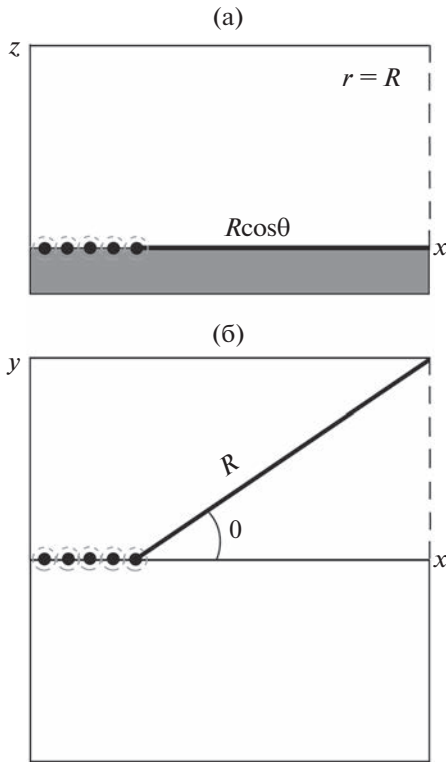
Управление пространственной структурой акустических полей в океане является одной из наиболее актуальных проблем акустики океана [1, 2]. В общем случае данная задача сводится к вычислению амплитудно-фазового распределения (АФР) поля на апертуре антенны, соответствующей возбуждению поля заданного вида в дальней зоне. Эта задача многократно решалась для вертикальных излучающих антенн, и были разработаны различные методы расчета АФР. Так, частный случай селективного возбуждения отдельной волноводной моды был рассмотрен в работах [3–12]. Вместе с тем, практическое использование вертикальных излучающих антенн, особенно для низкочастотных сигналов, зачастую сопряжено со значительными техническими сложностями, связанными как с размером и массой таких систем, так и агрессивным воздействием морской среды. В связи с этим представляется целесообразной разработка более простых с точки зрения практической реализации излучающих систем. В данной работе мы рассматриваем одно из возможных таких решений, основанное на использовании горизонтальной цепочки ненаправленных излучателей (монополей). Такая цепочка может, например, находиться вблизи поверхности воды или быть закреплена возле дна. Подоб-

ного рода излучающие системы используются, например, при сейсморазведке углеводородных месторождений на шельфе [13]. Теория линейных горизонтальных антенн была развита в работах [14–17]. В частности, в работе [16] был выявлен эффект пространственного разделения нормальных мод, возбуждаемых горизонтальной антенной в разных угловых направлениях. В настоящей работе демонстрируется возможность реализации этого эффекта с помощью разреженной горизонтальной цепочки, а также проводится анализ его особенностей в данной конфигурации.

Статья построена таким образом. В следующем разделе приводится краткое теоретическое описание свойств горизонтальной цепочки монополей. Затем приводятся результаты численного моделирования для двух моделей акустических волноводов. В заключении подводятся основные итоги работы, а также намечаются пути дальнейшего исследования.

### АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЦЕПОЧКОЙ МОНОПОЛЕЙ: ТЕОРИЯ

Рассмотрим трехмерный подводный акустический волновод, в котором переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  играют роль декартовых координат. Будем считать,



**Рис. 1.** Схема рассматриваемой излучающей системы: (а) – вертикальная плоскость, (б) – горизонтальная плоскость.

что волновод состоит из двух слоев, водного и осадочного. Снизу осадочный слой граничит со слоем твердых пород, который мы будем считать непроницаемым для звука. Для простоты мы будем считать волновод плоскостойким, тогда граничные условия для акустического поля  $\Psi$  выглядят следующим образом:

$$\Psi(z = 0) = 0, \quad \frac{d\Psi}{dz}(z = z_{\max}) = 0, \quad (1)$$

где  $z_{\max}$  – глубина границы между осадочным слоем и слоем твердых пород.

Зададимся целью найти условия для селективного возбуждения отдельной вертикальной волноводной моды с помощью горизонтальной цепочки ненаправленных акустических излучателей (монополь). Волноводные моды  $\Psi_m(z)$  и соответствующие им горизонтальные волновые числа  $k_m$  являются решениями задачи Штурма–Лиувилля

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\Psi_m(z)}{dz} \right] + [k_0^2 n^2(z) - k_m^2] \Psi_m(z) = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями (1) и условием непрерывности на дне

$$\Psi|_{z=h-0} = \Psi|_{z=h+0}, \quad \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\Psi}{dz} \Big|_{z=h-0} = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\Psi}{dz} \Big|_{z=h+0}.$$

В уравнении (2)  $\rho(z)$  и  $c(z)$  – профили плотности и скорости звука, соответственно,  $k_0 = 2\pi f/c_0$  – опорное волновое число ( $f$  – акустическая частота в герцах), соответствующее распространению звуковой волны в однородной среде со скоростью звука  $c_0$ ,  $n(z) = c_0/c(z)$  – показатель преломления звуковых волн,  $h$  – глубина водного слоя.

Положим, что все монополи расположены на одной и той же глубине  $z = z'$  вдоль прямой  $y = 0$  (см. рис. 1). Мы будем рассматривать случай, когда цепочка является эквидистантной, т.е. координаты  $x$  монополей описываются формулой

$$x_j = -jd, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, \quad (3)$$

причем крайний справа монополь расположен в точке с координатами  $x = 0$  и  $y = 0$ . Сначала для простоты будем полагать, что мы намерены возбудить заданную волноводную моду при  $x > 0$  вдоль той же горизонтальной оси  $y = 0$ . Чтобы рассчитать требуемое АФР цепочки, можно воспользоваться принципом взаимности. Для этого введем фиктивную вертикальную антенну, перебивающую водную толщу в точке

$$x = R, \quad y = 0 \quad (4)$$

и излучающую заданную моду в направлении рассматриваемой нами горизонтальной цепочки монополей. Если горизонтальная неоднородность среды является пренебрежимо слабой, то акустическое поле, созданное фиктивной антенной в точках расположения монополей горизонтальной цепочки, описывается формулой

$$\Psi(\xi_j, z') = \frac{i}{\sqrt{8\pi k_m \xi_j}} a_m \Psi_m(z') \exp(ik_m \xi_j), \quad (5)$$

где  $a_m$  – комплексная амплитуда моды,  $\xi_j = R - x_j$ . Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что волновод является горизонтально-однородным. Обобщение этого выражения на случай горизонтально-неоднородных волноводов требует, вообще говоря, знания функции Грина или пропагатора для рассматриваемого сегмента волноводной трассы, что само по себе является отдельной задачей, имеющей самостоятельную ценность. Задача существенно упрощается в случае адиабатических неоднородностей, когда взаимодействие различных мод является пренебрежимо слабым.

Положим, что выполняется неравенство

$$k_m \xi_j \gg 1, \quad \xi_0 \gg L = Nd, \quad (6)$$

т.е. расстояние до фиктивной антенны является достаточно большим. Тогда можно пренебречь множителем  $(k_m \xi_j)^{-1/2}$  в (5). Искомое АФР, отвечающее возбуждению моды  $m$ , получается путем обращения фаз в выражении (5),

$$\Upsilon_m(\xi_j) = \text{const} \exp(-ik_m \xi_j). \quad (7)$$

Следует заметить, что взаимно однозначное соответствие между полями, излучаемыми вертикальной антенной и горизонтальной цепочкой, обеспечивается только в пределе бесконечной длины цепочки,  $L \rightarrow \infty$ . При конечной длине цепочки селективное возбуждение моды  $m$  возможно только при выполнении условия

$$\sum_{j=1}^J \Upsilon_m(\xi_j) \Upsilon_n(\xi_j) \equiv 0 \quad (8)$$

для всех  $n \neq m$ . Это условие предполагает ортогональность мод на множестве элементов цепочки. Чтобы оно выполнялось, длина цепочки должна удовлетворять неравенству

$$\Delta k_m L \geq \pi, \quad (9)$$

где  $\Delta k_m$  – минимальная разность собственных чисел, которая определяется выражением

$$\Delta k_m = \min(\Delta k_{m,m-1}, \Delta k_{m+1,m}), \quad \Delta k_{m,n} \equiv k_m - k_n. \quad (10)$$

В приближении ВКБ минимальная разность собственных чисел связана с длиной цикла модового луча, соответствующего моде  $m$ , с помощью формулы [18]

$$\Delta k_m \equiv \frac{2\pi}{D_m}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), получаем

$$L \geq \frac{D_m}{2}. \quad (12)$$

Длина цикла модового луча может составлять километры и даже десятки километров, что означает достаточно большую протяженность антенны. Из соображений экономической и практической целесообразности имеет смысл рассматривать только цепочки, формируемые относительно малым числом монополей, т.е. расстояние  $d$  между соседними монополями должно быть достаточно большим. В дальнейшем мы будем полагать, что величина  $d$  равняется целому числу модовых полуволн, т.е.

$$d = N \frac{\pi}{k_m}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad N \gg 1. \quad (13)$$

Вместе с тем, при достаточно больших значениях  $d$  возникает возможность возникновения резонансов вида

$$N_1 \frac{\pi}{k_m} = N_2 \frac{\pi}{k_n}, \quad N_1, N_2 \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

При выполнении этого условия цепочка излучателей способна одновременно возбуждать более одной волноводной моды в данном направлении.

Теперь рассмотрим поле, создаваемое такой горизонтальной цепочкой вне прямой  $y = 0$ . Рассмотрим точку с координатами (см. рис. 1)

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta. \quad (15)$$

Тогда при выполнении условий (6) мы можем приближенно считать поле, создаваемое горизонтальной цепочкой в данной точке, эквивалентным полю аналогичной горизонтальной цепочки, АФР которой описывается формулой

$$\Upsilon_m = \text{const} \times \exp[-ik_\theta(m) \xi_j], \quad (16)$$

где

$$k_\theta(m) = \frac{k_m}{\cos \theta}. \quad (17)$$

При выполнении условия

$$k_m = k_n \cos \theta \quad (18)$$

цепочка, настроенная на возбуждение моды  $m$  вдоль прямой  $y = 0$ , будет возбуждать моду  $n$  вдоль луча, исходящего из конца цепочки под углом  $\theta$ . Если при этом также наблюдается резонанс (14), то число возбуждаемых мод может увеличиваться.

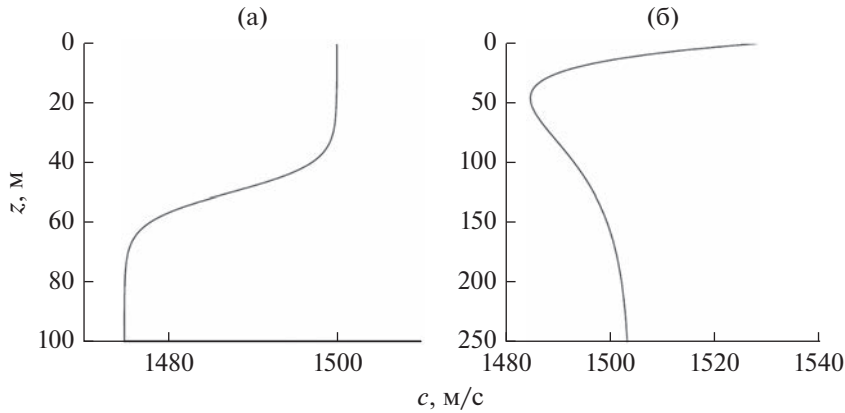
## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для проведения численного моделирования будет использовано две модели. В первой из них профиль скорости звука соответствует придонному звуковому каналу и задается выражением [12, 19, 20]

$$c(z) = \begin{cases} c_0 - \frac{\Delta_c}{2} \left( 1 + \text{th} \frac{z - z_c}{\Delta_z} \right), & 0 \leq z < h, \\ c_b, & h \leq z \leq z_{\max}, \end{cases} \quad (19)$$

где  $c_0 = 1500$  м/с,  $\Delta_c = 25$  м/с,  $z_c = 50$  м,  $\Delta_z = 10$  м,  $c_b = 1600$  м/с,  $h = 100$  м,  $z_{\max} = 300$  м. Водная часть профиля представлена на рис. 2а.

Вторая модель соответствует подводному звуковому каналу, характерному для гидрологических условий Охотского моря и некоторых Курильских проливов [21, 22]. В этой модели первые моды являются чисто водными, а профиль скорости звука описывается выражением



**Рис. 2.** Профили скорости звука для модельных волноводов, использованных в численном моделировании: (а) – придонный звуковой канал, (б) – подводный звуковой канал с биэкспоненциальным профилем скорости звука.

$$c(z) = \begin{cases} c_0 \left[ 1 + \frac{b^2}{2} (e^{-z/z_a} - \eta)^2 \right], & 0 \leq z < h, \\ c_b, & h \leq z \leq z_{\max}, \end{cases} \quad (20)$$

$$I_m = \frac{|a_m(\theta)|^2}{\sum_m |a_m(\theta)|^2}, \quad (23)$$

где  $c_0 = 1485$  м/с,  $z_a = 50$  м,  $b = 0.4$ ,  $\eta = 0.4$ ,  $c_b = 1600$  м/с,  $h = 250$  м,  $z_{\max} = 700$  м (см. рис. 2б). Волноводы с биэкспоненциальным профилем скорости звука вида (20) были проанализированы в работах [23–25]. Ось ПЗК, соответствующая минимуму скорости звука, расположена на глубине

где

$$z_0 = -z_a \ln \eta = 45.8 \text{ м.} \quad (21)$$

$$a_m(\theta) = \int \frac{\Psi_m(z)\Psi(z, R, \theta)}{\rho(z)} dz, \quad (24)$$

Профиль плотности в обеих моделях описывается формулой

$\Psi_m(z)$  –  $m$ -я модовая функция. Расчеты проводились для тональных сигналов с частотой 300 Гц, испускаемых цепочкой, расположенной на дне,  $z = h$ . Расстояние между соседними монополями выбрано равным 10 длинам волны для определенной моды, т.е.

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_{\text{wat}}, & 0 \leq z < h, \\ \rho_{\text{sed}}, & h \leq z \leq z_{\max}, \end{cases} \quad (22)$$

$$d = 10\lambda_m, \quad \lambda_m = \frac{2\pi}{k_m}. \quad (25)$$

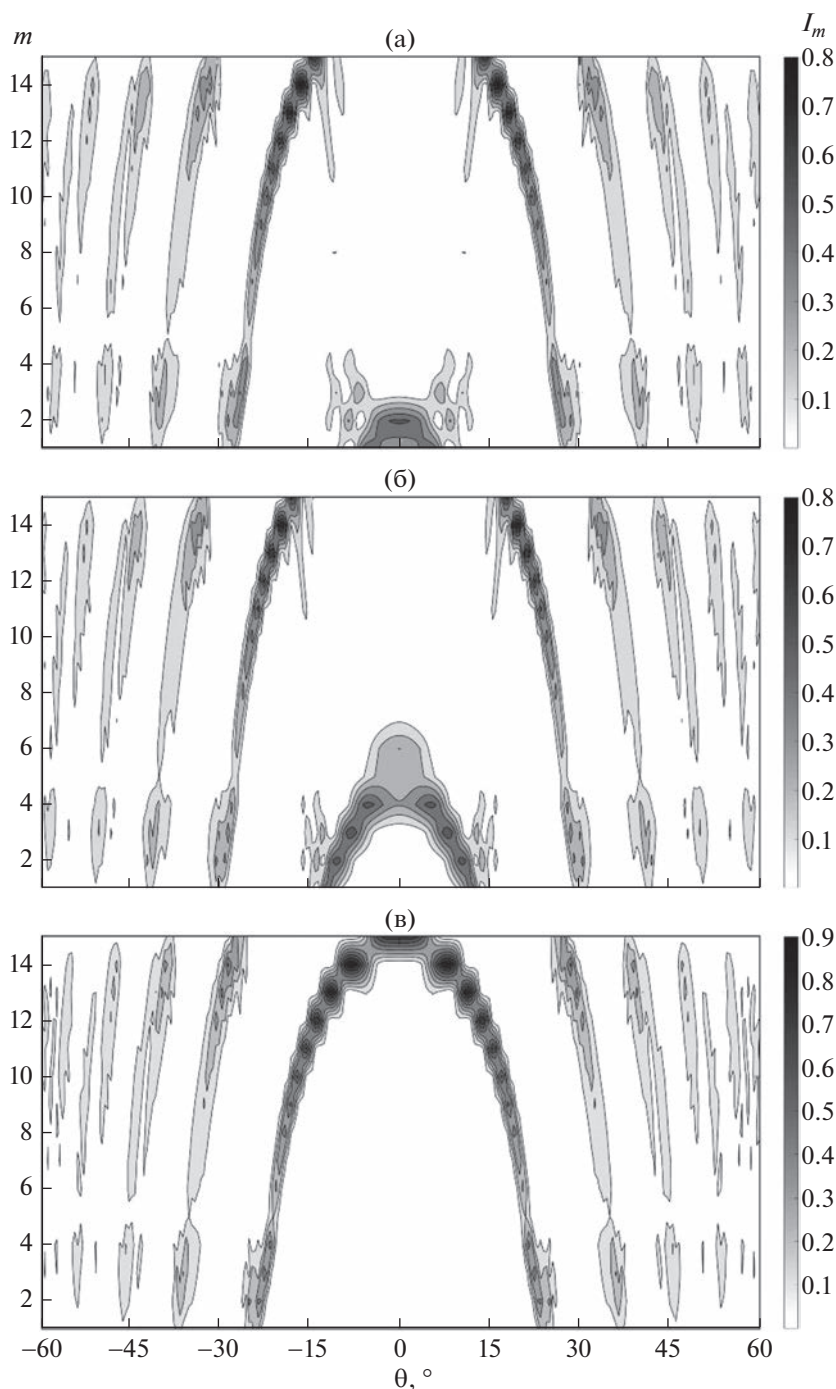
где  $\rho_{\text{wat}} = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{sed}} = 1.7$  г/см<sup>3</sup>. Коэффициент затухания в обеих моделях равен 0.25 дБ на длину волны.

При частоте 300 Гц  $d$  принимает значения, близкие к 50 м. Рассматриваются цепочки, состоящие из 11 монополей, таким образом, общая протяженность цепочки составляет около 500 м.

Для простоты в обеих моделях волноводы считаются горизонтально-однородными, что позволяет полностью описать пространственную структуру акустического поля с помощью модового представления. Для нахождения мод и соответствующих им собственных чисел использовалась программа, написанная П.С. Петровым [26].

Данные расчетов для модели с придонным звуковым каналом представлены на рис. 3. В этом случае мы имеем 15 водных мод. Настраивая расстояние между монополями на возбуждение первой моды вдоль оси цепочки (т.е. при  $\theta = 0$ ), мы видим, что получающееся поле содержит большой вклад второй моды. Это связано с тем, что вторая мода имеет существенно более высокую амплитуду на глубине излучения. С ростом номера моды, определяющего расстояние между монополями, способность цепочки возбуждать данную моду улучшается. Во всех случаях угловая зависимость модового спектра состоит из нескольких ветвей, каждая из которых отвечает зоне эффективного возбуждения в модовом пространстве. Наклон ветвей соответствует уменьшению номера возбуждаемой моды по мере отклонения от оси це-

При численном моделировании проводился расчет акустического поля, создаваемого цепочкой монополей на расстоянии  $R = 4$  км от края цепочки при различных углах  $\theta$ . Поскольку в этой работе нас в первую очередь интересует способность цепочки возбуждать отдельные моды акустического поля, наше внимание будет приковано к модовому спектру, определяемому как

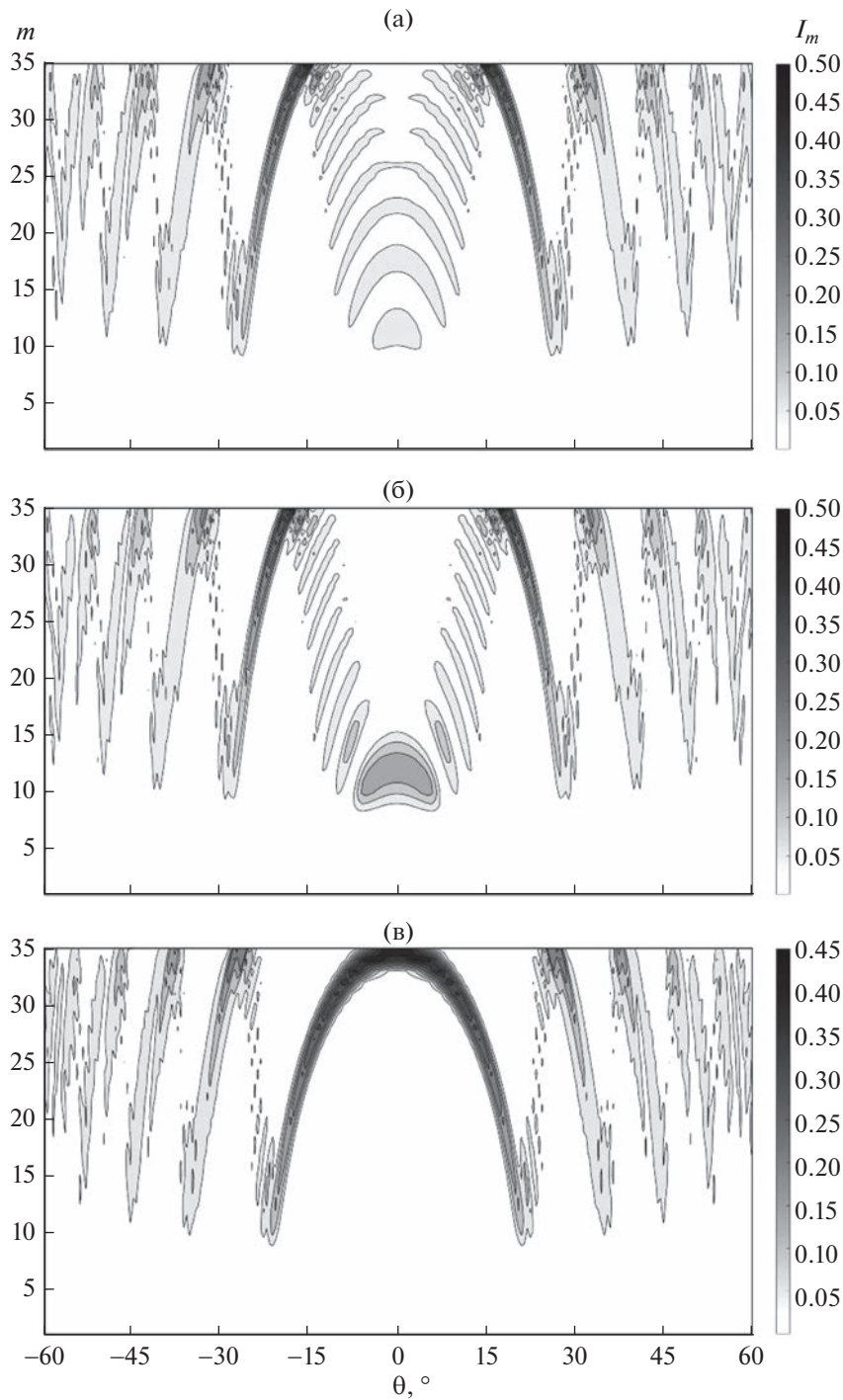


**Рис. 3.** Угловая зависимость модового спектра, создаваемого линейной горизонтальной цепочкой монополей на расстоянии 4 км от цепочки в модели волновода с придонным звуковым каналом. Расстояние между соседними монополями: (а) –  $10\lambda_1$ , (б) –  $10\lambda_5$  и (в) –  $10\lambda_{15}$ .

почки. По своей сути эти ветви являются аналогами различных порядков брэгговской дифракции.

Отметим, что в случае придонного звукового канала практически при любых значениях угла  $\theta$  существуют выделенные пики модового спектра, указывающие на возможность селективного воз-

буждения определенных мод. В случае волновода с биэкспоненциальным профилем скорости звука это не так. На рис. 4 на панелях (а) и (б) мы видим набор вложенных дугообразных структур в окрестности  $\theta = 0$ , связанных с резонансами, описываемыми выражением (14), и препятствующим



**Рис. 4.** Угловая зависимость модового спектра, создаваемого линейной горизонтальной цепочкой монополей на расстоянии 4 км от цепочки в модели волновода с биэкспоненциальным профилем скорости звука. Расстояние между соседними монополями: (а) –  $10\lambda_1$ , (б) –  $10\lambda_{10}$  и (в) –  $10\lambda_{35}$ .

щих селективному возбуждению. Следы этих резонансов заметны и при больших угловых отклонениях. Отметим также, что донная цепочка монополей не способна возбуждать первые девять мод, являющихся чисто водными и практически

не достигающими дна. Как и в предыдущем примере, наблюдается тенденция улучшения селективности в модовом пространстве с ростом номера моды, определяющего расстояние между монополями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе рассмотрены свойства акустического поля, создаваемого горизонтальной цепочкой ненаправленных излучателей (монополей). Показано, что при относительно небольшом числе монополей такая цепочка способна концентрировать излучаемую энергию в определенной волноводной моде, при этом номер этой моды зависит от углового направления. Угловая зависимость модового спектра имеет зонную структуру, характерную для брэгговской дифракции. Наличие нескольких зон связано, по всей видимости, с разреженностью цепочки, и это подтверждается численным моделированием для цепочек с высокой плотностью монополей (эти результаты не представлены в статье). Указанные особенности рассматриваемой конфигурации излучателей могут быть полезными с точки зрения решения различных практических задач, например, реализации многомодового акустического сканирования океанической среды.

Безусловно, данная работа не отвечает на все вопросы, которые должны возникать при практической реализации рассматриваемой излучающей системы. Модели горизонтально-однородных волноводов, использованные в данной работе для иллюстрации ее возможностей, являются излишне идеализированными. Гидрологические и батиметрические неоднородности способны существенно повлиять на пространственную структуру акустического поля, создаваемого горизонтальной цепочкой излучателей. Кроме того, изменения среды во времени нередко сопровождаются изменениями формы профиля скорости звука. Как следствие, меняется и форма акустических мод, и соответствующие им горизонтальные волновые числа. Это означает, что изменения среды “перенастраивают” свойства антенны, в частности, ее угловую диаграмму направленности. Эти процессы требуют детального изучения и учета при практической реализации представленного метода возбуждения волноводных мод. Отдельного внимания требует случай, когда монополи антенны находятся в районе материкового склона. Все эти задачи являются принципиально важными для дальнейшего развития теории горизонтальных цепочек излучателей и должны быть рассмотрены в ближайшем будущем. Кроме того, нельзя обойти вниманием свойства цепочек, излучающих в импульсном режиме. В представленной работе скорее формулируется общая идея для излучающих систем такого типа, нежели предлагается конкретная реализация. Вместе с тем, есть основания полагать, что предлагаемый тип излучающих конфигураций может вполне оказаться полезным с точки зрения различных приложений.

Автор признателен П.С. Петрову за предоставленную возможность использовать код [26]. Работа выполнена в рамках госбюджетной тематики ТОИ ДВО РАН “Моделирование разномасштабных динамических процессов в океане” (рег. номер темы 121021700341-2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Таланов В.И.* О синтезе антенн в многомодовых волноводах // Изв. Вузов. Радиофизика. 1986. Т. 28. № 7. С. 872–829.
2. *Городецкая Е.Ю., Малеханов А.И., Таланов В.И., Фикс И.Ш.* Синтез и анализ акустических полей в океане / В сборнике “Формирование акустических полей в океане”, Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1991, С. 9–31.
3. *Clay C.S., Huang K.* Single mode transmission and acoustic backscattering measurements in a laboratory waveguide // J. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67. № 3. P. 792–794.
4. *Gazanhes C., Garnier J.L.* Experiments on signal mode excitation in shallow water propagation // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 69. № 4. P. 963–969.
5. *Buck J.R., Preisig J.C., Johnson M., Catipovic J.* Single-mode excitation in the shallow-water acoustic channel using feedback control // IEEE J. Ocean. Engin. 1997. V. 22. № 4. P. 281–291.
6. *Елисеевнин В.А.* Концентрация энергии в одну нормальную волну, излучаемую в водном слое вертикальной линейной антенной // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 2. С. 275–279.
7. *Голубева Е.В., Елисеевнин В.А.* Излучение одной нормальной волны вертикальной дискретной линейной антенной в водном слое // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 1. С. 62–68.
8. *Голубева Е.В., Елисеевнин В.А.* Мощность, излучаемая вертикальной компенсированной линейной антенной в волноводе Пекериса // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 5. С. 767–773.
9. *Голубева Е.В., Елисеевнин В.А.* Излучение одной нормальной волны вертикальной дискретной линейной антенной в волноводе Пекериса // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 1. С. 70–76.
10. *Peng D., Gao T., Zeng J.* Study on single-mode excitation in time-variant shallow water environment // J. Comput. Acoust. 2014. № 1. P. 1440001.
11. *Zeng J., Zhao W.Y., Peng D.Y., Li H.F., Gao T.F., Shang E.C.* Measurements of ocean bottom low-angle backscattering by single-mode reverberation // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V. 136. № 6. 2976–2986.
12. *Макаров Д.В.* Применение метода дискретного представления переменных для формирования амплитудно-фазовых распределений поля на вертикальной антенной решетке в волноводе // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 4. С. 413–430.
13. *Rutenko A.N., Zykov M.M., Gritsenko V.A., Fershalov M.Yu., Jenkerson M.R., Racca R., Nechayuk V.E.* // Environ. Monitor. Assess. 2022. V. 194. 745.

14. *Елисеевнин В.А.* О работе горизонтальной линейной антенны в водном слое // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 2. С. 227–233.
15. *Елисеевнин В.А.* О работе горизонтальной линейной антенны в мелком море // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 1. С. 44–49.
16. *Елисеевнин В.А.* Диаграмма направленности компенсированной излучающей горизонтальной линейной антенны в волноводе // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 3. С. 468–472.
17. *Dungan M.R., Dowling D.R.* Orientation effects on linear time-reversing array retrofocusing in shallow water // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112. № 5. P. 1842–1852.
18. *Smirnov I.P., Virovlyansky A.L., Edelman M., Zaslavsky G.M.* Chaos-induced intensification of wave scattering // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. № 2. 026206.
19. *Makarov D.V., Petrov P.S.* Full reconstruction of acoustic wavefields by means of pointwise measurements // Wave Motion. 2022. V. 115. 103084.
20. *Komissarov A.A., Makarov D.V., Kholmogorov A.O., Shakirov R.B.* Low-frequency sound propagation in an underwater waveguide with a giant gassy pockmark // J. Mar. Sci. Engin. 2023. V. 11. 211.
21. *Вадов Р.А.* Открытие подводного звукового канала, экспериментальные исследования, региональные различия // Акуст. журн. 2007. № 3. С. 313–328.
22. *Свергун Е.И., Коник А.А., Родионов А.А., Зимин А.В.* Короткопериодная изменчивость гидрофизических полей и процессов в Четвертом Курильском проливе по данным экспедиционных исследований // Подвод. Иссл. Робототех. 2022. № 4. С. 53–61.
23. *Makarov D.V., Uleysky M.Yu., Prants S.V.* Ray chaos and ray clustering in an oceanic waveguide // Chaos. 2004. № 1. P. 79–95.
24. *Kon'kov L.E., Makarov D.V., Sosedko E.V., Uleysky M.Yu.* Recovery of ordered periodic orbits with increasing wavelength for sound propagation in a range-dependent waveguide // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. № 5. 056212.
25. *Макаров Д.В., Улейский М.Ю.* Высвечивание лучей и горизонтально-неоднородного подводного звукового канала // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 565–573.
26. *Petrov P.S.* ac\_modes: simple matlab code for the computation of acoustical normal modes in the ocean. 2019. [https://github.com/kaustikos/ac\\_modes](https://github.com/kaustikos/ac_modes)