

ISSN 0235-7119

Российская академия наук

# ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН



2

2023

---

**СОДЕРЖАНИЕ**

---

**Механика машин**

Моделирование внешнего волнового воздействия на микроциркуляцию и транскапиллярный обмен <i>Е. И. Велиев, Р. Ф. Ганиев, А. А. Кубатиев, Д. Л. Ревизников, Л. Е. Украинский</i>	3
Точное решение задачи излучения цилиндрической оболочки в жидкости <i>О. И. Косарев</i>	18
Влияние низкотемпературных сред на качество поверхностного слоя после комбинированной обработки <i>А. П. Яковлева, А. Ю. Албагачиев, В. А. Воронов, А. В. Борисенко, Ю. С. Иванова</i>	28
Определение влияния скорости скольжения на контактное трение при осадке с кручением <i>П. А. Петров, И. А. Бурлаков, Ю. А. Гладков, А. А. Гартвиг, Т. Х. Нгуен</i>	34
О структурных графах теории механизмов <i>М. Д. Ковалёв</i>	44

---

**Надежность, прочность, износостойкость машин и конструкций**

Точность оценки надежности образца по малой выборке безотказных опытов <i>А. В. Смирнов, Б. А. Белобрагин, Б. А. Авотынь, А. С. Левин</i>	50
Учет допусков при расчетах конструкций на прочность <i>А. О. Чернявский, О. Ф. Чернявский</i>	62
Установление закономерности повышения износостойкости модифицированного радиального подшипника скольжения <i>Д. У. Хасьянова, М. А. Мукутадзе</i>	71

---

**Новые технологии в машиностроении**

Разработка цифрового концепта на основе твердотельных 3D-объектов, обеспечивающего комфортные условия работы инженера-конструктора <i>И. Д. Долгий, А. М. Лященко, Д. В. Глазунов</i>	82
Конечноэлементное моделирование гибридной аддитивной технологии с использованием лазерно-ударно-волновой обработки <i>Г. Ж. Сахвадзе</i>	94

---

**Экспериментальная механика. Диагностика испытания**

Динамические тепловые процессы, происходящие в устройствах, обогреваемых на холоде <i>А. А. Шульженко, М. Б. Модестов</i>	103
--	-----

---

---



---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 532.517;534.1

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНЕШНЕГО ВОЛНОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ  
НА МИКРОЦИРКУЛЯЦИЮ И ТРАНСКАПИЛЛЯРНЫЙ ОБМЕН**

© 2023 г. Е. И. Велиев<sup>1</sup>, Р. Ф. Ганиев<sup>2</sup>, А. А. Кубатиев<sup>3</sup>,  
Д. Л. Ревизников<sup>2</sup>, Л. Е. Украинский<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup>Государственная клиническая больница им. С.П. Боткина  
Департамент здравоохранения Москвы, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup>Научно-исследовательский институт общей патологии и патофизиологии, Москва, Россия

\*e-mail: leukrainsky@gmail.com

Поступила в редакцию 28.09.2022 г.

После доработки 05.12.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Рассматривается влияние внешнего волнового воздействия на фильтрацию жидкостей из капилляров в окружающую капилляры ткань и из ткани в капилляры. Установлены два механизма увеличения скорости фильтрации: нерезонансный, связанный с несимметричностью изменения проницаемости поверхностного слоя капилляров и окружающей капилляр ткани на смежных полупериодах волновых воздействий и резонансный, связанный с увеличением перепада давлений, обусловленного пульсовой волной в капилляре, синхронного и синфазного с ним повышения проницаемости, обусловленного волновыми воздействиями. Установленные эффекты могут найти применение в медицине для интенсификации транскапиллярного обмена и микроциркуляции в кровеносной системе.

*Ключевые слова:* микроциркуляция, транскапиллярный обмен, пористые насыщенные жидкостью среды, проницаемость, уравнения Дарси, внешние периодические воздействия

**DOI:** 10.31857/S0235711923020104, **EDN:** CNXPQV

Моделирование гемодинамических процессов играет важную роль в анализе и диагностике сердечно-сосудистой системы. Несмотря на интенсивное развитие измерительной техники и методов обработки экспериментальных данных, многие аспекты гемодинамики остаются за рамками прямого наблюдения, что обуславливает интерес к вычислительному эксперименту. Совместному применению численного моделирования и обработки данных измерений применительно к анализу пульсовой волны посвящена работа авторов [1] и ряд других. В этих работах использовалась вычислительная модель течения крови в системе крупных артерий.

В настоящей статье рассматриваются микроциркуляционные течения, обеспечивающие снабжение элементов ткани кислородом и другими веществами, присутствующими в крови. Говоря о микроциркуляции, прежде всего, имеют в виду процессы, протекающие в микрососудах. К ним относятся капилляры, мельчайшие артериолы и вены, артериоло-венулярные анастомозы, а также лимфоносные сосуды. Часто к этим процессам добавляется течение жидкости в окружающем кровеносные сосуды тканевом пространстве. Подробно вопросы микроциркуляции рассмотрены, напри-

мер, в монографии [2]. Экспериментальному изучению микроциркуляторных процессов посвящены работы [3–7].

На протяжении последних десятилетий все больший интерес вызывает интерес к математическому моделированию микроциркуляции в живых организмах [8–13]. В общем случае, модель микроциркуляции предполагает совместное рассмотрение трех подсистем: гемо-микроциркуляторной, лимфоциркуляторной, и интерстициальной. Поскольку непосредственный обмен веществ между кровеносной системой и тканевым пространством осуществляется через стенку капилляров, в большинстве моделей ограничивают рассмотрение гемо-микроциркуляции именно капиллярами. Такой подход позволяет описывать взаимное влияние течения жидкости в кровеносных и лимфатических капиллярах, течение жидкости в межклеточном пространстве. Важную роль играет транскапиллярный обмен, связанный с фильтрацией и реабсорбцией жидкости между капиллярами и межклеточным пространством, а также абсорбцией в лимфатические капилляры. Кроме того, перенос ряда веществ через стенку капилляра осуществляется с помощью диффузионного механизма.

Модель микроциркуляции должна описывать капиллярную сеть и течение жидкости в межклеточном пространстве. Однако такая модель вычислительно очень сложна в силу большого количества капилляров. В большинстве случаев рассмотрение ограничивается одним капилляром и окружающим его тканевым цилиндром. Простейшие модели основаны на балансовых соотношениях и являются по сути нестационарными нульмерными по пространству моделями. Более сложные, пространственно-одномерные и двумерные модели, учитывают перенос массы в поперечном к оси капилляра, а также в продольном, направлениях.

**Целью** настоящей статьи является моделирование влияния внешнего волнового воздействия на интенсивность транскапиллярного обмена. В этой связи нужно рассмотреть непосредственное влияние внешних воздействий на транскапиллярный обмен, а также эффекты, связанные с взаимодействием внешнего волнового воздействия с внутренними волнами, имеющими место в микроциркуляторном русле живых организмов. Эксперименты, проведенные с помощью лазерной доплеровской флоуметрии, свидетельствуют о наличии нескольких таких волн. В спектре колебаний кожного кровотока выделяют пять поддиапазонов, соответствующих различным факторам регуляции сосудистого тонуса [5, 6]. К ним относятся: пульсовая волна с диапазоном частот 0.8–1.6 Гц, амплитуда которой зависит от состояния резистивных сосудов, дыхательная волна с диапазоном частот 0.15–0.4 Гц, обусловленная динамикой венозного давления при легочной механической активности, миогенные колебания в частотном диапазоне 0.07–0.15 Гц, происхождение которых связывают с сокращениями гладких мышечных волокон, нейрогенные колебания в диапазоне частот 0.02–0.052 Гц, а также эпителиальная активность. В настоящей статье при рассмотрении взаимодействия внешних волновых воздействий с внутренними волнами будут учитываться только внутренние волны, связанные с прохождением пульсовой волны.

**Математическая модель.** Рассматривается модель одиночного капилляра, взаимодействующего с окружающей тканью. Предполагается, что взаимодействие между капиллярами не существенно, и геометрию системы можно задать в виде цилиндрического капилляра и окружающего тканевого цилиндра (рис. 1).

Модель включает следующие уравнения: уравнения, описывающие течение жидкости в капилляре; уравнения, описывающие движение жидкости в окружающей капилляр ткани; уравнения, описывающие фильтрацию жидкости через капиллярную стенку в окружающую ткань и обратную реабсорбцию жидкости из ткани в капилляр; уравнения, описывающие дренаж жидкости из ткани в лимфатическую систему.

Течение крови в сосудах в общем случае описывается трехмерными нестационарными уравнениями для вязкой неньютоновской жидкости совместно с уравнениями динамики эластичных оболочек сосудов. Это связано с необходимостью учета реаль-

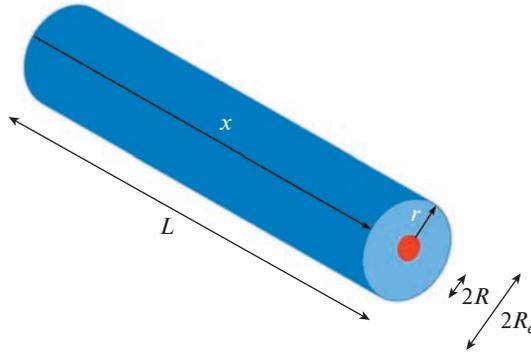


Рис. 1. Форма области “капилляр-окружающая ткань”.

ных свойств крови, пространственной геометрии сосудов, влияния вязкости, взаимного влияния гидродинамики сосудов и их деформации. Как правило, течение крови носит в основном осесимметричный характер, поэтому в вычислительной практике часто используются двумерные модели и одномерные, осредненные по поперечному сечению сосуда, модели.

В одномерной постановке течение крови в капилляре можно описать гиперболической системой уравнений [14]

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial us}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = f_e + f_R, \end{cases}$$

где  $t$  – время,  $x$  – продольная координата,  $s$  – площадь поперечного сечения сосуда,  $u$  – осредненная по поперечному сечению скорость движения крови вдоль сосуда,  $p$  – осредненное артериальное давление,  $\rho$  – плотность крови, которая считается постоянной,  $f_e$  – внешняя сила,  $f_R$  – сила сопротивления (трения), обусловленная вязкими свойствами крови.

В отличие от артерий, течение в капиллярах является медленным, скорость течения составляет порядка 0.1 мм/сек. Согласно экспериментальным данным изменение проходного сечения капилляра в ходе сердечного цикла не значительно. При этом в отличие от других сосудов стенка капилляра является проницаемой, через нее осуществляется фильтрация крови в окружающую ткань и обратно. В пренебрежении инерционными слагаемыми и изменением проходного сечения система уравнений существенно упрощается

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \xi u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R} v_f = 0,$$

где  $v_f$  – скорость фильтрации жидкости через стенку капилляра;  $\xi$  – коэффициент сопротивления. В результате задачу можно свести к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона относительно давления

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{2\xi}{R} v_f, \quad p(0) = p_{\text{left}}, \quad p(L) = p_{\text{right}}.$$

В силу относительно малой проницаемости стенки капилляра второе слагаемое в уравнении неразрывности оказывает слабое влияние и профиль давления в капилляре

близок к линейному. При этом пульсовые колебания давления можно учесть квазистационарным образом.

Уравнение для давления в окружающей капилляр ткани запишем в виде

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial P}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + J,$$

где  $\lambda$  – коэффициент проницаемости ткани;  $\zeta$  – коэффициент сжимаемости пористой каркаса;  $r$  – поперечная координата.

При этом используется закон Дарси, связывающий скорость жидкости и градиент давления.

Для описания фильтрации жидкости через стенку капилляра в окружающую ткань и обратную реабсорбцию жидкости из ткани в капилляр используется гипотеза Старлинга, согласно которой плотность потока жидкости через стенку пропорциональна локальной разности давлений в капилляре и окружающей ткани с учетом онкотической составляющей, обусловленной, главным образом, разностью концентраций белков в капилляре и ткани.

Таким образом, уравнение на границе “капилляр–ткань”, описывающее процессы фильтрации и реабсорбции имеет вид

$$-\lambda \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=R_c} = \alpha (p - P - \Delta P_o) \Big|_{r=R_c},$$

где  $\Delta P_o$  – разность онкотических давлений в капилляре и ткани;  $\alpha$  – коэффициент проницаемости капиллярной стенки.

Уравнение, описывающее дренаж жидкости из ткани в лимфатическую систему можно записать в виде

$$J = \beta (P - P_l),$$

где  $J$  – поток жидкости в лимфатическую систему,  $\beta$  – коэффициент проницаемости стенок лимфатических сосудов;  $P_l$  – давление в лимфатическом русле.

Таким образом, в модели задействованы следующие параметры: поперечный и продольный размеры кровеносного капилляра; коэффициенты проницаемости ткани и стенки кровеносного капилляра; плотность и коэффициент вязкости крови, который в случае применения модели неньютоновской жидкости зависит от напряжения сдвига, давления на артериальном и венозном концах капилляра, задаваемые как функции времени; онкотическое давление; давление в лимфатическом русле; коэффициент проницаемости стенок лимфатических сосудов. Значения параметров в настоящей работе брались из статьи [8].

Пульсационное воздействие на течение в капилляре можно описать с помощью периодического изменения давления на левой (артериальной) границе капилляра

$$p(0) = p_0(0) + \gamma_p (p_0(0) - p(L)) \sin(\omega_p t),$$

где  $\gamma_p$  – относительная амплитуда колебаний давления,  $\omega_p$  – частота колебаний внешнего воздействия. При этом учитывается затухание колебаний по мере приближения к правой (венозной) границе капилляра. Несмотря на то, что в действительности пульсовые колебания не являются гармоническими, такое приближение представляется уместным в свете анализа влияния внешнего волнового воздействия на микроциркуляционное течение.

В настоящей статье ставится задача качественного определения возможного влияния волновых воздействий на фильтрацию жидкости сквозь стенку капилляра и сквозь пористую ткань. В общем случае проницаемость ткани зависит от пористости ткани и размеров пор в ткани, а проницаемость стенки капилляра зависят от размеров межклеточного пространства и расстояний между клетками в эндотелии, причем, при

уменьшении пористости и размеров пор ткани, а также при уменьшении размеров межклеточного пространства и расстояний между клетками в эндотелии проницаемость уменьшается. Будем рассматривать такие внешние воздействия, при которых жидкость в порах ткани и проницаемой стенки капилляра не будет сжиматься, а объемы пористой ткани насыщенной жидкостью и проницаемой стенки капилляра будут изменяться без сжатия и растяжения только за счет изменения пористости и размеров пор. При этом для модельного описания волновых воздействий такого рода принимается гипотетическая модель, согласно которой объем тканевого цилиндра  $V$ , показанного на рис. 1 в виде кольцевой цилиндрической зоны, располагающейся между цилиндрами радиусов  $R$  и  $R_e$ , и объем стенки капилляра  $v$  (эндотелия, лежащего между капилляром и тканью), однозначно связаны с проницаемостями тканевого цилиндра  $\lambda$  и поверхности капилляра  $\alpha$  соответственно степенными функциями

$$\lambda = \Phi_\lambda(V), \quad \alpha = \Phi_\alpha(v),$$

где  $\Phi_\lambda(V) = V^{\eta_\lambda}$ ,  $\Phi_\alpha(v) = v^{\eta_\alpha}$ ,  $\eta_\lambda$  и  $\eta_\alpha$  показатели степеней функций, определяющих проницаемости тканевого цилиндра и пористой поверхности капилляра соответственно.

Таким образом, если объемы рассматриваемых пористых сред будут подвергаться вышеуказанным периодическим изменениям, то в выбранной здесь модели проницаемости ткани и поверхности капилляра будут также изменяться периодически. Такой упрощенный подход, ограничивающийся однозначной связью между величинами объема пористой ткани и объема стенки капилляра и их проницаемостями, позволяет установить простейшие закономерности фильтрации жидкости сквозь колеблющуюся проницаемую пористую среду. Это, в свою очередь, позволит вскрыть некоторые возможные механизмы волновых воздействий на микроциркуляцию жидкости. Конечно, для более точного и детального анализа следует перейти к более сложным моделям, учитывающим динамическое поведение насыщенных жидкостью пористых сред. В настоящей статье мы ограничимся лишь описанной выше моделью.

Будем считать, что последнее соотношение можно конкретизировать следующим образом:

$$\lambda = (\lambda_0 + \gamma_\lambda \lambda_0 \sin(\omega_\lambda t + \varphi_\lambda))^{\eta_\lambda}, \quad \alpha = (\alpha_0 + \gamma_\alpha \alpha_0 \sin(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha))^{\eta_\alpha},$$

где  $\lambda_0$  и  $\alpha_0$  – невозмущенные значения объемов тканевого цилиндра и пористой проницаемой поверхности капилляра соответственно,  $\gamma_\lambda$  и  $\gamma_\alpha$  – амплитуды колебаний объемов тканевого цилиндра и пористой проницаемой стенки капилляра.

Предложенные здесь модельные соотношения для зависимости проницаемости от колебаний объемов могут быть пригодны для широкого круга пористых систем, отвечающих различным значениям показателей  $\eta_\lambda$  и  $\eta_\alpha$ . Для уточнения этих значений можно поставить специальные эксперименты. Далее установим возможные эффекты, которые могут наблюдаться при разных значениях показателей.

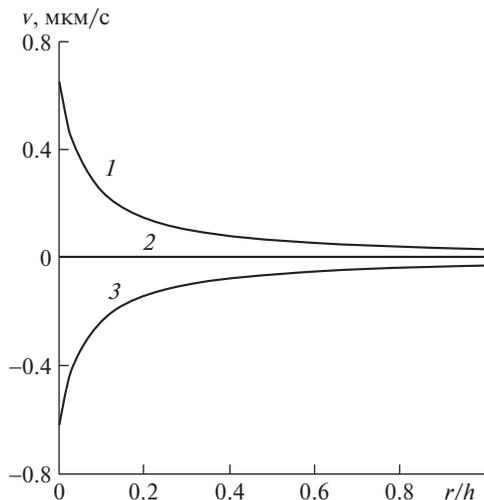
В дальнейшем будем использовать единую форму для обоих коэффициентов

$$a = (a_0 + \gamma_a a_0 \sin(\omega_a t + \varphi_a))^{\eta}, \quad (1)$$

где  $\gamma_a$  – относительная амплитуда колебаний;  $\omega_a$  – частота;  $\varphi_a$  – фаза колебаний объемов пористых элементов.

При этом в силу малых размеров капилляра и тканевого цилиндра можно считать, что колебания давления осуществляются синхронно и синфазно по всей исследуемой области.

**Результаты расчетов в двумерной постановке.** Рассмотрим сначала стационарное течение при отсутствии пульсовой волны и внешних воздействий. Давление на левой (артериальной) границе капилляра принималось равным 32 ммНг, на правой (веноз-

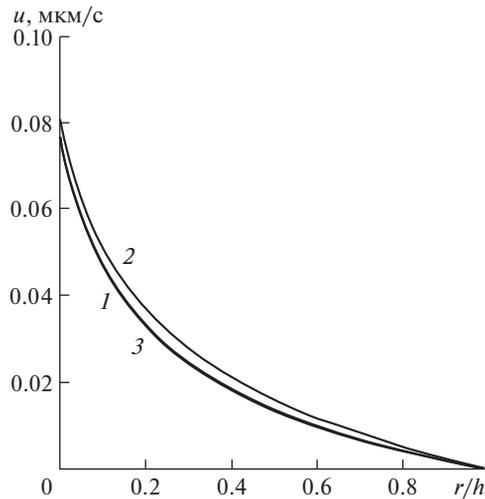


**Рис. 2.** Поперечные профили нормальной компоненты скорости в тканевом пространстве: 1 – левая граница; 2 – середина капилляра; 3 – правая граница.

ной) границе – 14 ммHg, результирующее онкотическое давление – 23 ммHg, давление на внешней границе тканевого цилиндра полагалось равным нулю. Таким образом, на левой границе капилляра фильтрация в ткани осуществляется под действием перепада давления 9 ммHg, направленного от капилляра к ткани. На правой границе капилляра действовал тот же по модулю перепад, направленный от ткани к капилляру. На левой и правой границах тканевого цилиндра задавались нулевые производные давления (нулевые потоки жидкости). Обмен жидкостью между тканью и лимфатической системой в расчетах не учитывался. Вязкость крови считается постоянной. На рис. 2 представлены профили нормальной к поверхности капилляра компоненты скорости в интерстициальном пространстве в различных сечениях. По оси абсцисс отложено безразмерное (отнесенное к толщине тканевого цилиндра) расстояние, отсчитываемое от поверхности капилляра. Кривая 1 соответствует области, граничащей с артериолой (левая граница капилляра), кривая 2 – середине капилляра, кривая 3 – области, примыкающей к венозной части (правая граница капилляра).

Видно, что в левой части капилляра происходит фильтрация жидкости в тканевое пространство (скорость положительна). В середине нормальная компонента скорости фильтрации близка к нулю, а в правой части капилляра имеет место реабсорбция жидкости из ткани в капилляр. При этом модуль скорости фильтрации быстро убывает по мере удаления от капилляра, что в определенной мере подтверждает справедливость модели одиночного капилляра. На рис. 3 показаны профили продольной компоненты скорости в тех же сечениях, что и на рис. 2. Здесь профили в левой и правой частях практически совпадают в силу симметричного расположения сечений, а наибольшая продольная скорость реализуется в средней части (кривая 2). При этом средний уровень продольной скорости существенно ниже средней абсолютной величины нормальной компоненты. Таким образом, в капилляре и окружающей ткани имеет место микроциркуляция жидкости.

Далее рассмотрим течение жидкости в тканевом пространстве при наличии пульсовой волны в капилляре и отсутствии внешнего волнового воздействия. Относительная амплитуда пульсовой волны  $\gamma_p$  в расчетах полагается равной 0.5, период колебаний



**Рис. 3.** Поперечные профили продольной компоненты скорости в тканевом пространстве: 1 – левая граница; 2 – середина капилляра; 3 – правая граница.

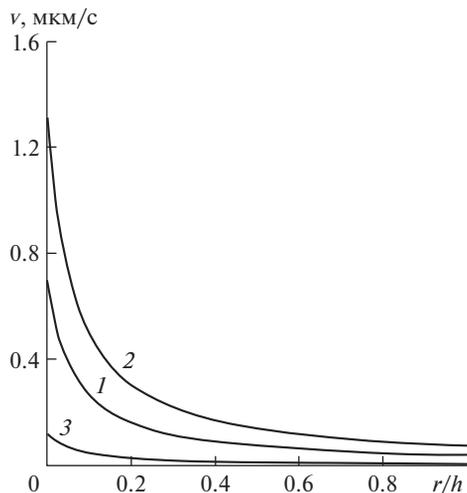
$T = 1$  с. Профили нормальной компоненты скорости в левой части рассматриваемой области (часть капилляра, граничащая с артериолой) в различные моменты времени показаны на рис. 4. Как и следовало ожидать, период максимальной интенсивности фильтрации (кривая 2) соответствует времени пика пульсовой волны (систолическая фаза), а в диастолической фазе скорость фильтрации минимальна. Рассмотрение процесса на правой стороне капилляра приводит к аналогичным результатам. Следовательно, пульсовые колебания давления жидкости в капилляре приводят к колебаниям скорости микроциркуляции и к колебаниям транскапиллярного обмена. При этом, как показывают расчеты, средняя за период колебаний скорость микроциркуляции равна скорости микроциркуляции при рассмотренном выше стационарном режиме. Таким образом, пульсации давления в капилляре приводят только к колебаниям скорости микроциркуляции, но не к их изменению в среднем. Транскапиллярный обмен остается в среднем по времени неизменным.

Перейдем к рассмотрению внешнего волнового воздействия, которое заключается в гармонических колебаниях объемов ткани и стенки капилляра. При этом коэффициенты проницаемости ткани и стенки капилляра изменяются во времени согласно соотношению (1).

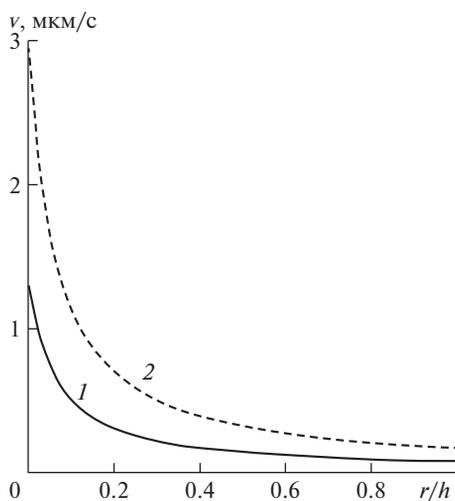
Согласно результатам численного интегрирования двумерной системы уравнений были получены следующие результаты.

На рис. 5 представлен вариант воздействия с частотой  $\omega_p$ , соответствующей пульсовой волне, т.е. частота внешних воздействий на пористую ткань, окружающую капилляр и на проницаемую стенку капилляра равна частоте пульсаций давления внутри капилляра  $\omega_a = \omega_p$ .

Относительная амплитуда воздействия  $\gamma_a$  здесь и далее равна 0.5. Показатель степени  $\eta$ , характеризующий нелинейную зависимость проницаемости от волнового воздействия, в данных расчетах равен двум. Рассматривается синфазное и синхронное воздействие. Штриховой кривой показан профиль скорости фильтрации (нормальная компонента) в окрестности левой границы области, полученный при наличии волнового воздействия, сплошная кривая – соответствует невозмущенному течению. Пред-

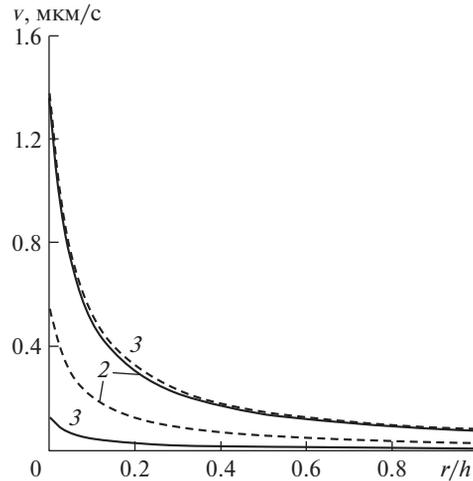


**Рис. 4.** Поперечные профили нормальной компоненты скорости в различные моменты времени: 1 –  $t = 0$ ; 2 –  $t = T/4$ ; 3 –  $t = 3T/4$ .



**Рис. 5.** Поперечные профили нормальной компоненты скорости в момент времени  $t = T/4$ : 1 – невозмущенное течение; 2 – при наличии внешнего волнового воздействия.

ставлен момент времени, когда давление в капилляре максимально и реализуется максимальная скорость фильтрации. Видно, что волновое воздействие приводит в этот момент к двукратному усилению интенсивности фильтрации. В другие моменты времени также имеет место увеличение скорости фильтрации. При этом увеличение осредненной за период скорости фильтрации составляет около 30%. Рассмотрение процесса на правом конце капилляра показало аналогичное увеличение скорости фильтрации, направленной от ткани к капилляру. Таким образом, имеет место интен-



**Рис. 6.** Поперечные профили нормальной компоненты скорости в различные моменты времени. Нумерация кривых соответствует рис. 4: сплошные кривые — невозмущенное течение; штриховые кривые — при наличии внешнего волнового воздействия.

сификация микроциркуляции и транскапиллярного обмена. Основным механизмом интенсификации фильтрации в данном варианте является синфазное и синхронное повышение давления в капилляре вследствие пульсовой волны и проницаемости окружающей капилляр среды, а также проницаемой стенки капилляра вследствие внешнего волнового воздействия. Отметим, что в этом случае интенсификация фильтрации будет наблюдаться и при линейной зависимости коэффициентов проницаемости от пористости, т.е. при  $\eta = 1$ . Ясно, что существенным фактором в данном варианте является сдвиг фаз между пульсовой волной и внешним воздействием. Наибольшее усиление фильтрации происходит при нулевом сдвиге фаз.

Другой вариант интенсификации фильтрации наблюдается при волновом воздействии с частотами, отличными от частоты пульсовой волны и не связанными с этой частотой рядом соотношений, о которых будет сказано здесь в дальнейшем. Этот вариант продемонстрирован на рис. 6. Здесь для примера рассмотрен случай, когда частота внешнего волнового воздействия в 2.5 ( $5\omega_a = 2\omega_p$ ) раза превышает частоту пульсовой волны, показатель  $\eta = 2$ . Видно, что в момент времени  $T/4$  (кривые 2) интенсивность фильтрации при волновом воздействии (штриховая кривая) оказывается ниже, чем в невозмущенном случае. Однако в момент времени  $3T/4$  (кривые 3) скорость фильтрации при волновом воздействии многократно превышает невозмущенную величину.

Как результат, средняя за период интенсификация фильтрации составляет более 10%. При этом степень интенсификации практически не зависит от частоты и сдвига фаз между пульсовой и внешней волнами, а определяется только амплитудой внешнего воздействия, которая при выбранной постановке не зависит от частоты. Отметим, что величина односторонне-направленной в среднем скорости фильтрации и скорости микроциркуляции при действии этого нерезонансного механизма существенно зависит от величины  $\eta$ , т.е. от того, каким образом проницаемость зависит от волнового воздействия.

**Упрощенная одномерная постановка. Аналитическое решение. Приближенные результаты.** Как показывают расчеты в двумерной постановке, результаты которых были

приведены в предыдущем разделе, продольная скорость жидкости существенно меньше, чем поперечная. С целью получения приближенных функциональных зависимостей для оценки влияния волнового воздействия на интенсивность фильтрации рассмотрим квазиодномерную задачу. Ограничимся случаем, когда изменением продольной скорости жидкости вдоль оси капилляра можно пренебречь. Уравнения преобразуются следующим образом:

$$P'' + \frac{1}{r} P' = 0,$$

$$\lambda \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=R} = -\alpha (P|_{r=R} - p),$$

$$P(R_e) = p_e,$$

где  $R_e$  – радиус тканевого цилиндра;  $p_e$  – давление на внешней границе тканевого цилиндра, включающее онкотическую составляющую.

В силу близкого к линейному по продольной координате профилю давления в капилляре, здесь принимаем, что давление во внутренних точках капилляра меняется во времени также, как и на границе

$$p = p_0 + \gamma_p p_0 \sin(\omega_p t),$$

где  $p_0 = p_0(x)$  исходное распределение давление в капилляре, близкое к линейному.

Вследствие внешнего волнового воздействия коэффициенты проницаемости ткани и стенки капилляра меняются по закону

$$a = (a_0 + \gamma_a a_0 \sin(\omega_a t + \varphi_a))^{\eta}.$$

Тогда фильтрационный поток жидкости через капиллярную стенку может быть получен в аналитическом виде

$$q = \frac{\alpha(p - p_e)}{1 + B}, \quad B = \frac{\alpha R}{\lambda \ln\left(\frac{R_e}{R}\right)}.$$

Возможны два предельных варианта. В первом варианте ( $B \gg 1$ ) интенсивность переноса жидкости через стенку капилляра превалирует над проницаемостью ткани, во втором – имеет место обратная картина. Отметим, что с точки зрения реальных процессов в системе транскапиллярного обмена реализуется второй вариант

$$B \ll 1: \quad q \approx \alpha(p - p_e), \quad B \gg 1: \quad q \approx \frac{\lambda \ln\left(\frac{R_e}{R}\right)}{R} (p - p_e).$$

Пусть  $\omega_a = k\omega_p$ ,  $p_e = 0$ . Тогда относительное (по отношению к величине без волнового воздействия) изменение среднего по времени односторонне направленного фильтрационного потока в обоих вариантах можно записать в виде

$$\bar{q} = \frac{q_m}{q_0} = \frac{1}{T} \int_0^T (1 + \gamma_a \sin(k\omega_p t + \varphi))^{\eta} (1 + \gamma_p \sin(\omega_p t)) dt,$$

$$q_m = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt.$$

Такое изменение можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\bar{q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2,$$

$$\bar{q}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T (1 + \gamma_a \sin(k\omega_p t + \varphi))^\eta \gamma_p \sin(\omega_p t) dt,$$

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (1 + \gamma_a \sin(k\omega_p t + \varphi))^\eta dt.$$

Первое слагаемое определяет фильтрационное течение, обусловленное взаимодействием пульсаций жидкости в капилляре и колебаний проницаемости ткани, окружающей капилляр. Оно может быть отличным от нуля только при некоторых значениях числа  $k$ , которые определяют резонансные соотношения между частотами пульсации жидкости в капилляре  $\omega_p$  и колебаний проницаемости  $\omega_a$ . Оно отвечает первому (резонансному) из рассмотренных выше механизмов усиления фильтрации. Второе слагаемое зависит только от характеристик внешнего воздействия и соответствует второму нерезонансному механизму.

Выпишем решение для некоторых частных случаев степени  $\eta$ , характеризующего нелинейность зависимости проницаемости от колебаний окружающей капилляр среды

$$\eta = 1: \quad \bar{q} = 1 + 0.5\gamma_a\gamma_p \cos \varphi, \quad k = 1;$$

$$\eta = 2: \quad \bar{q} = 1 + 0.5\gamma_a^2 + \gamma_a\gamma_p \cos \varphi, \quad k = 1,$$

$$\bar{q} = 1 + 0.5\gamma_a^2 + 0.25\gamma_a^2\gamma_p \sin 2\varphi, \quad k = 1/2,$$

$$\bar{q} = 1 + 0.5\gamma_a^2, \quad k > 1;$$

$$\eta = 3: \quad \bar{q} = 1 + 1.5\gamma_a^2 + 0.125\gamma_a^3\gamma_p \cos 3\varphi, \quad k = 1/3,$$

$$\bar{q} = 1 + 1.5\gamma_a^2 + 0.75\gamma_a^2\gamma_p \sin 2\varphi, \quad k = 1/2,$$

$$\bar{q} = 1 + 1.5\gamma_a^2 + 1.5\gamma_a\gamma_p \cos \varphi + 0.75\gamma_a^3\gamma_p \cos \varphi, \quad k = 1,$$

$$\bar{q} = 1 + 1.5\gamma_a^2, \quad k > 1.$$

Полученные решения позволяют оценить степень увеличения фильтрационного потока через стенку капилляра в зависимости от амплитуды, частоты и фазы волнового воздействия. Отметим, что для рассматриваемого частного случая при  $k = 1$ , а также  $k = 1/2$  и  $k = 1/3$ , полученные выражения включают как характеристики пульсового воздействия, так и внешнего воздействия.

Первые два слагаемых в выражениях для  $\bar{q}$  описывают дополнительную односторонне направленную фильтрацию между капилляром и тканью, происходящую благодаря только изменению проницаемости. Они не связаны с резонансом. Для них действует нерезонансный механизм возникновения дополнительной фильтрации. Отметим, что в рамках принятой здесь простейшей кинематической постановки, он реализуется для любых частот и зависит только от амплитуды воздействия. Для нахождения более реалистической зависимости скорости дополнительной фильтрации от частоты необходимо учитывать динамические зависимости колебаний пористых объемов от частоты, которые могут быть установлены из исследования более полной динамической модели насыщенных жидкостью пористых сред.

Для  $k > 1$  существенным фактором, влияющим на интенсификацию фильтрации, в рамках рассматриваемой здесь модели является только амплитуда внешнего волнового воздействия.

Для значений  $\eta < 1$  односторонне направленные в среднем скорости фильтрации существенно уменьшаются по сравнению со случаем  $\eta > 1$ . Дело в том, что в этом слу-

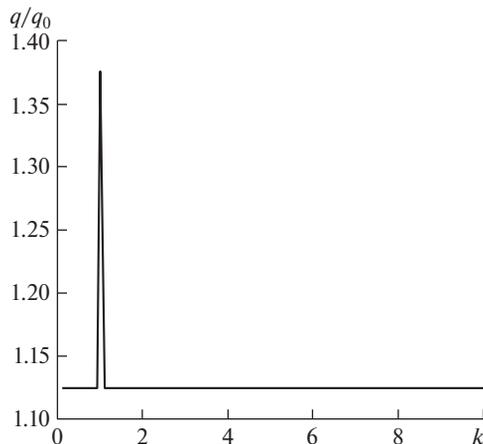


Рис. 7. Зависимость степени интенсификации фильтрации от относительной частоты волнового воздействия  $\varphi_a = 0$ .

чае значения проницаемости для всех режимов течения существенно меньше, чем ее значения в линейном случае при  $\eta = 1$ .

$$\eta = 1/2: \quad \bar{q} \approx 1 - 0.075\gamma_\alpha^2 - 0.0156\gamma_\alpha^3\gamma_p \cos 3\varphi, \quad k = 1/3,$$

$$\bar{q} \approx 1 - 0.075\gamma_\alpha^2 - 0.02734\gamma_\alpha^2\gamma_p \sin 2\varphi, \quad k = 1/2,$$

$$\bar{q} \approx 1 - 0.075\gamma_\alpha^2 + 0.25\gamma_\alpha\gamma_p \cos \varphi + 0.015625\gamma_\alpha^3\gamma_p \cos \varphi, \quad k = 1,$$

$$\bar{q} \approx 1 - 0.075\gamma_\alpha^2, \quad k > 1.$$

Для иллюстрации полученных аналитических зависимостей рассмотрим несколько частных случаев.

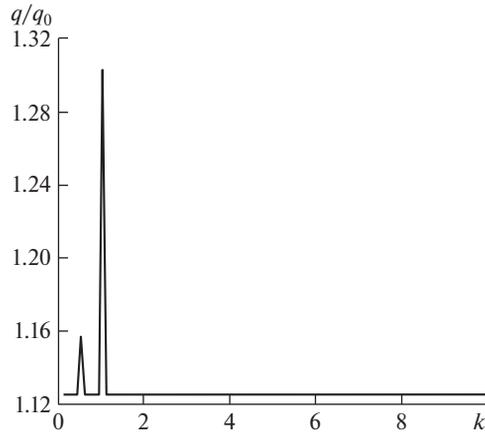
На рис. 7–9 результаты получены для  $\eta = 2$ ,  $\gamma_p = 0.5$ ,  $\gamma_a = 0.5$ , варьируется фазовый сдвиг.

Реальные резонансные кривые будут отличаться от приведенных здесь зависимостью амплитуды от частоты (резонансные кривые будут не вертикальные, а наклонные), однако основные данные, такие как значения резонансных частот, будут близкими к установленным в настоящей статье. Как было отмечено выше, более точные данные можно получить исходя из рассмотрения динамических моделей и экспериментов.

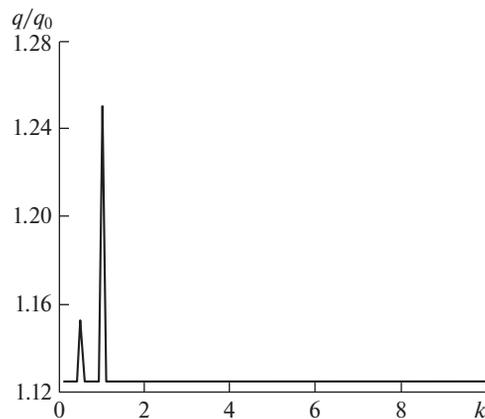
При  $k = 1$  работают оба механизма – резонансный и нерезонансный, при  $k$ , отличном от единицы, действует только нерезонансный механизм.

При  $k = 1$ ,  $k = 0.5$  работают оба механизма – резонансный и нерезонансный, при других значениях  $k$  для рассматриваемых здесь случаев действует только нерезонансный механизм. При  $\varphi_a = \pi/4$  действие резонансного механизма на основной частоте немного ослабевает, но появляется резонанс на половинной частоте.

При  $k = 1$ ,  $k = 0.5$  работают оба механизма – резонансный и нерезонансный, при других значениях  $k$  действует только нерезонансный механизм. С увеличением сдвига по фазе ослабевает действие резонансного механизма как на основной, так и на половинной частоте.



**Рис. 8.** Зависимость степени интенсификации фильтрации от относительной частоты волнового воздействия,  $\varphi_a = \pi/4$ .



**Рис. 9.** Зависимость степени интенсификации фильтрации от относительной частоты волнового воздействия,  $\varphi_a = \pi/3$ .

Отметим, что возможны и другие резонансы, например, из примеров рассмотренных выше, при  $k = 1/3$ , наблюдался резонансный режим для  $\eta = 3$  и  $\eta = 1/2$ .

В заключение подчеркнем основной вывод.

Основным резонансным механизмом интенсификации фильтрации, микроциркуляции и транскапиллярного обмена в данном случае является синфазное повышение давления в капилляре вследствие пульсовой волны и увеличение проницаемости благодаря колебаниям в окружающей капилляр среде вследствие внешнего волнового воздействия. Величина увеличения скорости микроциркуляции существенно зависит при действии указанного механизма от сдвига фаз между колебаниями давления в капилляре и колебаниями пористых элементов.

Нерезонансный механизм обусловлен несимметричными во времени колебаниями проницаемости, благодаря чему увеличение скорости жидкости, поступившей из ка-

пилляра в пористую ткань, по сравнению со стационарным режимом за ту часть периода колебательных воздействий, когда проницаемость повышена, превосходит уменьшение скорости жидкости, поступившей из капилляра в пористую ткань, по сравнению со стационарным режимом, за оставшееся до конца периода воздействий время, когда проницаемость уменьшена. Эта несимметричность определяется нелинейностью зависимости проницаемости от изменяющегося объема окружающей капилляр пористой среды и проницаемой стенки капилляра при его колебаниях. Он реализуется при  $\eta > 1$ . При  $\eta < 1$  действие этого механизма приводит к уменьшению средней скорости фильтрации. При  $\eta = 1$  (в линейном случае) этот механизм не действует.

Практическая реализация установленного эффекта для нужд медицины возможна с помощью разработанных в последние годы гидродинамических массажеров [15], которые к настоящему времени уже запатентованы и проходят клинические испытания.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по программе ФНИ РФ за 2021–2030 гг., тема 1-13ф (FFGU-2021-0009), “Развитие фундаментальных основ волнового машиностроения. Научные основы волновых технологий получения композитных материалов с уникальными свойствами и новых средств функциональной диагностики”, № гос. регистрации 121121700339-6.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Рогоза А.Н., Сластушенский Ю.В., Украинский Л.Е. Анализ и диагностика сердечно-сосудистой системы человека на принципах нелинейной волновой механики // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 2. С. 96.
2. Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A. The Mechanics of the Circulation. Second Edition, 2012.
3. Bagayev S.N., Fomin Yu.N., Orlov V.A., Panov S.V., Zakharov V.N., Metyolkin M.G. Investigation of Transcapillary Exchange by the Laser Method // Laser Physics. 2005. V. 15. № 9. P. 1292.
4. Bagayev S.N., Zakharov V.N., Orlov V.A., Panov S.V., Fomin Yu.N. Investigation of Physical Mechanisms of Blood Microcirculation and Transcapillary Exchange by Using the Phase Sensitive Laser Method // Rus. J. Biomechanics. 2006. V. 10. № 3. P. 21.
5. Подтаев С.Ю., Мизева И.А., Смирнова Е.Н. Диагностика функционального состояния микроциркуляции на основе термометрии высокого разрешения // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. 2012. № 3–4. С. 11.
6. Жарких Е.В., Маковик И.Н., Потапова Е.В., Дремин В.В., Жеребцов Е.А., Жеребцова А.И., Дунаев А.В., Сидоров В.В., Крупаткин А.И. Оптическая неинвазивная диагностика функционального состояния микроциркуляторного русла пациентов с нарушением периферической микрогемодинамики // Регионарное кровообращение и микроциркуляция. 2018. № 17 (3). С. 23.
7. Крупаткин А.И., Сидоров В.В. Функциональная диагностика состояния микроциркуляторно-тканевых систем: Колебания, информация, нелинейность. Руководство для врачей. URSS. 2022. 496 с.
8. Шабрыкина Н.С. Математическое моделирование микроциркуляторных процессов // Российский журнал биомеханики. 2005. Т. 9. № 3. С. 70.
9. Шабрыкина Н.С. Моделирование микроциркуляторных процессов: нестационарное течение жидкости в ткани // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7. Вып. 1. С. 69.
10. Хмель Т.А., Федоров А.В., Фомин В.М., Орлов В.А. Моделирование процессов микрогемодинамики с учетом пульсовых колебаний давления // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 2. С. 92.

11. *Хмель Т.А., Федоров А.В.* Моделирование пульсирующих течений в кровеносных капиллярах // Матем. биология и биоинформ. 2013. Т. 8. Вып. 1. С. 1.
12. *Моисеева И.Н.* Транскапиллярная фильтрация жидкости: модель с сосредоточенными параметрами // Биофизика. 1984. Т. XXIX. Вып. 1. С. 126.
13. *Регирер С.А., Шадрин Н.Х.* Математическое описание движения крови в микрососудистом модуле скелетной мышцы // Биофизика. 1994. Т. 39. № 1. С. 107.
14. *Мозохина А.С., Мухин С.И.* О квазиодномерном течении жидкости с анизотропной вязкостью в сокращающемся сосуде // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 956.
15. *Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Корнеев А.С., Украинский Л.Е.* Гидродинамические генераторы колебаний – новый тип устройств для осуществления периодических воздействий // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 501. С. 79.

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

534.26

**ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗЛУЧЕНИЯ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ**

© 2023 г. О. И. Косарев

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия**e-mail: kosarevoi@yandex.ru*

Поступила в редакцию 16.03.2022 г.

После доработки 20.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

На основе решения волнового уравнения в цилиндрических координатах получена точная формула звукового давления поля, излученного колеблющейся цилиндрической оболочкой, погруженной в жидкость.

*Ключевые слова:* точное решение, излучение, звуковое давление, импеданс, цилиндрическая оболочка, волновое уравнение, волновое число

**DOI:** 10.31857/S0235711923020050, **EDN:** COFQNE

**Постановка задачи.** Статья посвящена решению задачи излучения колеблющейся упругой цилиндрической оболочкой, погруженной в жидкость.

Звуковое поле, излучаемое оболочкой, характеризуется импедансом излучения, связывающим звуковое давление звуковой волны с ее колебательной скоростью (перемещением). Исследования импедансов излучения цилиндрических оболочек начались давно [1]. Им посвящено большое количество публикаций [1–18]. Но эти исследования не закончились получением приемлемого точного решения. В данном случае под точным решением понимаем решение, которое является аналитическим, законченным, доказательно обоснованным. Проблемы, связанные с излучением цилиндрических оболочек в жидкости, имеют важное теоретическое и прикладное значение в гидроакустике и являются актуальными.

По мнению авторов [2] данная задача, являющаяся классической для математической физики, имеет простое решение лишь для бесконечных круглых цилиндров. В работе [3] отмечалось, что точное выражение для импеданса излучения конечного цилиндра является сложной функцией, ее нельзя представить простым аналитическим выражением.

Анализ работ, посвященных решению данной задачи, показал, что решения, изложенные в них, существенно различаются и не имеют единой теоретической основы. Причины различий обусловлены разнотипностью оболочек (конечные, ограниченные, бесконечные), излучением оболочек в ближнем и дальнем поле, определением осевого волнового числа излучаемого звукового поля. Конечной цилиндрической оболочкой (цилиндром) будем называть оболочку со свободными граничными концевыми условиями. Оболочку, ограниченную другими концевыми условиями (Навьэ или др.), будем называть ограниченной.

**Аналитический обзор.** Приведем результаты аналитического обзора основных наиболее известных работ. С целью упрощения формул в большинстве из них опустим интегрирование и суммирование гармоник по окружному углу  $\varphi$ . Учет распределения

давления по углу  $\varphi$  не влияет на обсуждаемые результаты и может быть осуществлен известными приемами.

**Формула Скучика.** В работе [4] приведена наиболее известная формула импеданса излучения колеблющегося цилиндра

$$\frac{p}{w} = Z_1 = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}. \quad (1)$$

Формула (1) приведена без вывода. Не указаны ни способ определения параметра  $k_z$ , ни тип оболочки. Вместо вывода дана ссылка на формулу для бесконечной оболочки, где  $k_z = 2\pi m/\lambda$  [1]. Эта ссылка дает основания считать, что формула (1) тоже для бесконечной оболочки [3, 6, 8].

**Формула Янгера.** В работе [1] приведена формула звукового поля, излученного бесконечной оболочкой, на поверхности которой задано перемещение

$$w(\varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} \cos\left(\frac{2\pi m}{\lambda} z\right) \cos n\varphi, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – длина бегущей волны деформации на оболочки;  $n, m$  – окружные и продольные гармоники. Параметр  $2\pi m/\lambda$  (2) назовем волновым числом волны деформации оболочки (деформационным волновым числом). Излучаемое звуковое давление

$$p = -i\rho\omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha'_{nm} Z_2 \cos\left(\frac{2\pi m}{\lambda} z\right) \cos n\varphi, \quad (3)$$

$$Z_2 = \frac{H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\right)}{\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2} H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\right)}. \quad (4)$$

Примечательно, что формула (3) приведена тоже без вывода со ссылкой на [7], где вообще нет формул, похожих на (3) и (4), и рассмотрена только плоская задача  $k_z = 0$ .

**Формула Шендерова.** Формула звукового давления поля, излученного конечной цилиндрической оболочкой с произвольно распределенным по длине оболочки колебательным перемещением  $w(z)$ , предложена в [5]

$$p^*(r, z) = \frac{\rho\omega^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\gamma) H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - \gamma^2}\right) e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - \gamma^2}\right)} d\gamma. \quad (5)$$

**Формула Музыченко–Рыбака.** Импеданс излучения ограниченной цилиндрической оболочки приведен в [8]. В этой работе колебательная скорость цилиндрической оболочки задана в виде

$$V(\xi) = V_0 e^{iq\xi}, \quad (6)$$

где  $q = 2\pi m/L$  – деформационное волновое число, определяющее форму колебаний оболочки;  $L$  – длина оболочки;  $\xi$  – осевая координата. Скорость с использованием  $\delta$ -функции представлена в виде

$$V = \frac{V_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma(z-\xi)} d\gamma. \quad (7)$$

Без вывода и ссылки, с формулировкой обоснования “как известно”, поле акустического давления записано в виде

$$p = \frac{V_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_1 e^{i(z-\xi)\gamma} d\gamma, \quad (8)$$

где в качестве  $Z_1$  взята формула (1), названная импедансом бесконечной цилиндрической области. Импеданс ограниченной оболочки получен в виде

$$Z_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_1 \frac{\sin^2[(q-\gamma)(L/2)]}{(q-\gamma)^2 (L/2)} d\gamma, \quad (9)$$

$$Z_3 = \frac{2}{\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} i\rho\omega a \frac{H_n^{(1)}(a\sqrt{k^2-\gamma^2})}{a\sqrt{k^2-\gamma^2} H_n^{(1)\prime}(a\sqrt{k^2-\gamma^2})} \frac{\sin^2[(q-\gamma)L/2]}{(q-\gamma)^2} d\gamma.$$

Если принять во внимание, что последняя дробь в выражении (9) представляет собой  $\delta$ -функцию, то из (9) применительно к перемещению  $w(x)$  можно импеданс  $Z_3$  получить в виде

$$Z_3 = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - (2\pi m/L)^2}\right)}{\sqrt{k^2 - (2\pi m/L)^2} H_n^{(2)\prime}\left(a\sqrt{k^2 - (2\pi m/L)^2}\right)}. \quad (10)$$

Авторы [8], указали, что при стремлении длины оболочки  $L$  к бесконечности импеданс ограниченной оболочки стремится к импедансу бесконечной оболочки, что согласно (1) и (3) является ошибочным утверждением, поскольку при  $L \rightarrow \infty$  параметр  $2\pi m/L \rightarrow 0$ .

**Формула Лямшева.** В работе [9], посвященной дифракции звука на ограниченной цилиндрической оболочке получена формула звукового давления, содержащая часть, относящуюся к полю, излученному цилиндрической оболочкой. Формула получена методом функции Грина. Часть дифрагированного поля, относящаяся к звуковому давлению в излученной волне, вызванной колебаниями оболочки, имеет вид

$$p = -\frac{i\rho\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^L \varepsilon_n w(z) \frac{H_n^{(1)}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right) e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2-\gamma^2} H_n\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)} dz d\gamma, \quad (11)$$

где параметр  $\gamma$  не раскрыт.

**Формула Скенка [10].** В работе [10] звуковое давление получено в виде

$$p_s = \frac{\omega^2 \rho_0 a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\gamma) \frac{H_n\left(a\sqrt{k^2-\chi^2}\right)}{a\sqrt{k^2-\chi^2} H_n'\left(a\sqrt{k^2-\chi^2}\right)} e^{-i\chi z} d\chi, \quad (12)$$

где  $\chi$  – искомый корень дисперсионного уравнения бесконечной цилиндрической оболочки.

**Формула Авербуха.** В работе [2] при расчете излучения конечной цилиндрической оболочки в дальнем поле автор высказал утверждение, что преобразование Фурье звукового давления  $p^*$  и преобразование Фурье перемещения оболочки  $w^*$  связаны зависимостью

$$p^* = \frac{H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - (\xi)^2}\right)w^*}{\sqrt{k^2 - (\xi)^2}H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - (\xi)^2}\right)}, \quad (13)$$

где  $\xi = 2\pi/\lambda = -k\cos\theta$ ,  $\theta$  – сферическая координата точки наблюдения.

Формулу (13) можно представить в виде  $p^* = Z_2 w^*$ , где  $Z_2$  импеданс излучения бесконечной оболочки (4) [1, 2], в котором проведена замена  $2\pi/\lambda = -k\cos\theta$ . Происхождение формулы (13) не обосновано, она ошибочная, т.к.  $Z_2$  только часть импеданса. Основное замечание заключается в отсутствии обоснования замены  $2\pi/\lambda = -k\cos\theta$ . Вероятно, по этим причинам формула (13) не применялась другими авторами [3, 6, 10, 13].

Из проведенного обзора следует, что существует множество решений, различающихся по форме и содержанию и не имеющих общей теоретической основы. При наличии сходных элементов (функций Ганкеля) решения имеют принципиальные отличия. В (5) входят две экспоненты  $\exp(i\gamma z)$  и  $\exp(-i\gamma z)$ , а в (11) одна. Формулы (5) и (11) похожи, но принципиально отличаются от (1) и (10). Одинаковые по сути выражения волновых чисел  $k_z = 2\pi m/\lambda$  и  $q = 2\pi m/L$  используются в импедансах бесконечной (4) и ограниченной (10) оболочек, хотя их авторы считают, что импедансы ограниченной и бесконечной оболочек различны. Многообразие и недостаточная обоснованность некоторых формул требуют проведения дальнейших исследований.

**Цель исследований** – получить точное решение задачи излучения колеблющейся цилиндрической оболочки в жидкости, показать ошибочность и необоснованность ряда известных решений [3, 4, 8–13].

**Теоретические исследования.** Выведем формулу звукового давления поля, излучаемого цилиндрической оболочкой в жидкости, и докажем ошибочность ряда известных решений.

Рассматривается излучение боковой поверхности цилиндрической оболочки радиуса  $a$  и длины  $L$ , помещенной в цилиндрическую систему координат  $r, z, \varphi$ . Продольная ось оболочки совмещена с осью  $z$ . Как и в большинстве предыдущих работ, излучение торцевых крышек и экранов не учитывается, оно должно быть рассмотрено отдельно.

Необходимость вывода формулы (1) обусловлена тем, что: 1) вывод ни в работе [4] и в других публикациях не обнаружен; 2) параметр  $k_z$  должен быть конкретизирован; 3) вывод используется ниже для анализа ошибочных решений.

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат  $r, z, \varphi$ , описывающее излученное звуковое поле, имеет вид [4]

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2\Psi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) записывается в виде  $\Phi = R(r)Z(z)\Psi(\varphi)T(t)$ .

Решение относительно давления  $p$  звукового поля можно представить в упрощенном виде [5]

$$p(r, z) = A_n H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)e^{ik_z z}, \quad (15)$$

где  $A_n$  – искомый коэффициент;  $H_n^{(2)}(rk_z)$  – функция Ганкеля второго рода. Упрощение заключается в том, что в (15) опущено суммирование по окружным гармоникам  $\exp(in\varphi)$  и опущена зависимость параметров от времени  $\exp(i\omega t)$ . Коэффициент  $A_n$  определяется из граничного условия на поверхности оболочки

$$w(z) = \frac{1}{\omega^2 \rho} \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=a}, \quad (16)$$

где  $w(z)$  – радиальное колебательное перемещение оболочки;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\omega = 2\pi f$  – угловая частота;  $a$  – радиус оболочки. Из (15) с учетом (16) получим

$$\sqrt{k^2 - k_z^2} A_n H_n^{(2)'}(a\sqrt{k^2 - k_z^2}) e^{ik_z z} = \rho \omega^2 w(z),$$

$$A_n = \frac{\rho \omega^2 w(z)}{e^{ik_z z} \sqrt{k^2 - k_z^2} H_n^{(2)'}(a\sqrt{k^2 - k_z^2})}.$$

Подставив  $A_n$  в (15) получим формулу (1) в виде

$$p(r, z) = \frac{\rho \omega^2 H_n^{(2)}(r\sqrt{k^2 - k_z^2})}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_n^{(2)'}(a\sqrt{k^2 - k_z^2})}. \quad (17)$$

Далее в формуле (17) определим параметр  $k_z$ , являющийся главным объектом исследований. Решение уравнения (14) получают, исходя из условия [4]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= -k^2, & \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) &= -k_z^2, \\ \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right) &= -k_r^2, \end{aligned}$$

где  $k$ ,  $k_z$ ,  $k_r$  – произвольные постоянные числа, которые согласно волновому уравнению (14) находятся в соотношении

$$k_r^2 + k_z^2 = k^2. \quad (18)$$

Вясним физический смысл этих чисел и определим их математические выражения, исходя из решений уравнений (14) и (18). Приняв решения уравнения (14) в виде  $T = \exp(i\omega t)$  и  $Z = \exp(ik_z z)$ , получим:  $k = \omega/c$  – волновое число звуковой волны в жидкости,  $k_z$  – волновое число звуковой волны, распространяющегося в направлении координатной оси  $z$ . Если  $k$ ,  $k_z$  – волновые числа, значит  $k_r$  тоже волновое число волны, распространяющейся в направлении оси  $r$ . Следовательно, цилиндрическая волна в системе координат  $r, z$  распространяется вдоль оси  $r$  с волновым числом  $k_r$ , а вдоль оси  $z$  с волновым числом  $k_z$ . Цилиндрическая волна движется одновременно в радиальном и в осевом направлениях соответственно с волновыми числами  $k_r$  и  $k_z$ . Результирующее движение волны с волновым числом  $k$  происходит наклонно к оси  $z$  под углом  $\theta$ . Волновые числа  $k$ ,  $k_z$ ,  $k_r$  связаны между собой уравнением (18), из решения которого следует, что искомые волновые числа определяются выражениями

$$k_r = k \sin \theta, \quad k_z = k \cos \theta, \quad (19)$$

где  $\theta$  – угол между вектором волнового числа  $k$  и осью  $z$ , отсчитываемый от оси  $z$ .

Подставив  $k_z$  (19) в (17), получим формулу в окончательном виде

$$p(r, z) = \frac{\rho \omega^2 H_n^{(2)}(rk \sin \theta)}{k \sin \theta H_n^{(2)'}(ak \sin \theta)} w(z). \quad (20)$$

Может показаться, что отличие формул (20) и (1) малозначительное. На самом деле это отличие имеет важный принципиальный характер. Формула (1) не доведена до конца ни в части физического объяснения волнового числа  $k_z$ , ни в части его аналитического определения. Из-за неопределенности  $k_z$  формула (1) не пригодна для практического использования. Неоднозначность понимания автором [4] числа  $k_z$  подтверждается тем, что он, ссылаясь на формулу (3), допускал возможность  $k_z = 2\pi/\lambda$ . Более того, он допускал возможность  $k^2 - k_z^2 < 0$ , т.е.  $k_z > k$ , и в этом случае предлагал переходить на функцию Макдональда.

Не расшифрованное значение  $k_z$  в формуле (1) вынуждало разных авторов по своему усмотрению представлять  $k_z$ . Например, они представляли  $k_z$ : через длину волны деформаций бесконечной оболочки  $k_z = 2\pi/\lambda$  (4) [1, 2], или форму колебаний ограниченной оболочки  $k_z = 2\pi m/L$  (10) [8], или в комплексной форме  $k_z = k \sin(\alpha_1 + i\alpha_2)$  [5]. Многие авторы проводили интегрирование по  $dk_z$  при изменении  $k_z$  в пределах  $(-\infty, \infty)$  (5), (11) [5, 6, 9], хотя в таких пределах число  $k_z$  не существует. Ни в одной из работ, включая [1–13], в формуле импеданса излучения цилиндрической оболочки (1) параметр  $k_z$  не был обоснованно представлен как  $k_z = k \cos \theta$ .

В формуле (20) отсутствуют признаки типа оболочек (конечных или бесконечных). Важно понимать, что в формуле (20) параметры  $k$ ,  $r$ ,  $\theta$  и, следовательно,  $k_z = k \cos \theta$  не вычисляются, а задаются, исходя из физических условий решаемой задачи. Эти параметры характеризуют звуковое поле безотносительно к конкретному источнику излучения. Величина  $r$  может быть задана в пределах ближнего поля, начиная от  $r = a$ . В ряде случаев угол  $\theta$  известен. Например, в случае пульсирующей оболочки угол  $\theta = 90^\circ$  и  $k_z = 0$ . В случае распространения волны вдоль оси  $z$  угол  $\theta = 0^\circ$  и  $k_z = k$  [4, 5].

Из полученного решения следует, что поскольку волновое уравнение и его решение не зависят от типа оболочки, то формула (20) инвариантна к типу оболочки и характеризует только свойства излучаемой звуковой волны, создаваемой перемещением  $w(z)$  оболочки.

Перемещение  $w(z)$  в формуле (20) можно определить из решения уравнений вынужденных колебаний оболочки, либо представить рядом Фурье или интегралом Фурье.

Формула (20) определяет физический смысл и величину  $k_z$ , устраняет недосказанность и неопределенность формулы (1). Формула (20) является новой, обоснованной, правильной. Она универсальна и пригодна для решения всех задач гидроакустики любых цилиндрических оболочек. Формула нужна для решения многих задач: дисперсионных уравнений, дифракции и излучения в дальнем поле. Ее можно считать элементом теоретической основы гидроакустики цилиндрических оболочек.

**Доказательство ошибочности формулы Шендерова (5) и ей подобных.** Проследим вывод формулы (5) в [5]. При выводе используем свои обозначения, принятые с учетом временной функции  $e^{i\omega t}$ , заменой скорости  $v$  на перемещение  $w = v/i\omega$  и обозначения  $\gamma = k_z$ . Основные этапы вывода [5] следующие. Решение уравнения Гельмгольца в виде

$$p^*(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(2)} \left( r \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right) e^{i\gamma z} d\gamma. \quad (21)$$

Для определения коэффициента  $A_n$  использовано граничное условие

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial r} \right|_{r=a} = \rho \omega^2 w(z). \quad (22)$$

Из уравнения (21) и граничного условия (22) получено уравнение для определения коэффициента  $A_n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n \sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)} \left( a \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right) e^{i\gamma z} d\gamma = \rho \omega^2 w(z). \quad (23)$$

С целью решения уравнения (23) относительно коэффициента  $A_n$  перемещение  $w(z)$  представлено в виде интеграла Фурье относительно параметров  $\gamma$  и  $z$

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\gamma) e^{i\gamma z} d\gamma, \\ B(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(z) e^{-i\gamma z} dz. \end{aligned} \quad (24)$$

В результате подстановки перемещения  $w(z)$  (24) в уравнение (23) получено уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n \sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)} \left( a \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right) e^{i\gamma z} d\gamma = \frac{\rho \omega^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\gamma) e^{i\gamma z} d\gamma, \quad (25)$$

из решения (25) найден коэффициент  $A_n$

$$A_n = \frac{\rho \omega^2 B_n(\gamma)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)} \left( a \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right)}. \quad (26)$$

В результате подстановки  $A_n$  (26) в (21) получена формула (5).

**Ошибка Шендерова.** В [5] решение уравнения Гельмгольца взято в виде интегралов обеих частей равенства (15)

$$p^*(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} p d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(2)} \left( r \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right) e^{i\gamma z} d\gamma. \quad (27)$$

Тем самым давление  $p$  заменено на интеграл давления  $p^*$  (21), но интеграл давления  $p^*$  использован как давление  $p$  в граничном условии

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial r} \right|_{r=a} = \rho \omega^2 w(z). \quad (28)$$

В работе [5] перемещение  $w(z)$  представлено спектральным разложением в виде интеграла Фурье относительно параметров  $\gamma$  и  $z$ . Реальные перемещения  $w(z)$  состоят из составляющих вида  $w(z) = \exp[iqz]$ , где, например,  $q = 2\pi m/L$ . Тогда перемещение  $w(z) = \exp[iqz]$  можно представить интегралом Фурье относительно параметров  $q$  и  $z$

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(q) e^{iqz} dq, \\ B(q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(z) e^{-iqz} dz. \end{aligned} \quad (29)$$

Для определения коэффициента  $A_n$  подставим перемещение  $w(z)$  (29) в уравнение (27)

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n \sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)} \left( a \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right) e^{i\gamma z} d\gamma = \frac{\rho \omega^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(q) e^{iqz} dq. \quad (30)$$

В этом случае определить коэффициент  $A_n$  из уравнения (30) невозможно. По этой причине в [5] в функции перемещения  $w(z)$  без обоснования принято  $q = \gamma$  и в результате этого получена формула (5). Принятие равенства  $2\pi m/L = \gamma$  является ошибкой. Оно означает установление связи между длиной оболочки  $L$  и звуковым волновым числом  $\gamma$ . Волновое уравнение и его решение в левой части уравнения (30), в которые входит  $\gamma$ , не могут зависеть от длины оболочки.

Параметр  $q$  связан с вибрацией оболочки, определяется формой (модой) колебаний оболочки. Параметр  $\gamma$ -осевое волновое число звуковой волны в жидкости, определяется скоростью звука в жидкости. Взаимная замена этих параметров не имеет физического смысла, потому что они физически не однородны, у них разная физическая природа (хотя размерность одинаковая).

Формула (5) принципиально отличается от формулы (20). Главное отличие в том, что в (5) функции Ганкеля находятся под знаком несобственного интеграла. Формула (5) является следствием двух ошибочных действий: 1) граничное условие для интеграла давления  $p^*$  записано неверно; 2) параметр  $q$  приравнен к волновому числу звуковой волны в жидкости  $\gamma$ . Отсюда следует вывод, что формула (5) является ошибочной и пользоваться ею не рекомендуется. Формула (5) и подобные ошибочные формулы использовались многими авторами [6, 8, 11–13].

По поводу формулы (11) отметим, что провести ее анализ не представляется возможным из-за отсутствия в [9] вывода функции Грина. Формулы (5), (8), (11) имеют общий признак, в них функции Ганкеля входят в подынтегральную функцию несобственного интеграла с пределами интегрирования  $(-\infty, \infty)$ .

**Ошибка Янгера и Музыченко–Рыбака.** Покажем, что формулы (4) и (10) можно получить из формулы (5). Зададим перемещение в виде

$$w(z) = w_0 e^{iqz}. \quad (31)$$

Подставим перемещение (31) в выражение (5)

$$p(z) = \frac{\rho \omega^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_0 e^{iqz} e^{-i\gamma z} \frac{H_n^{(2)} \left( r \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right) e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)'} \left( a \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right)} d\gamma dz.$$

Согласно определению  $\delta$ -функции запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(q-\gamma)z} dz = 2\pi \delta(q - \gamma).$$

Подставим  $\delta$ -функцию в интеграл

$$p_s = \frac{\rho \omega^2}{2\pi} w_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n^{(2)} \left( r \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right) e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)'} \left( a \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right)} 2\pi \delta(q - \gamma) d\gamma.$$

Согласно основному свойству  $\delta$ -функции получим импеданс

$$\frac{p(z)}{w(z)} = \rho \omega^2 \frac{H_n^{(2)} \left( a \sqrt{k^2 - q^2} \right)}{\left( \sqrt{k^2 - q^2} \right) H_n^{(2)'} \left( a \sqrt{k^2 - q^2} \right)}. \quad (32)$$

Из формулы (32) получаются известные решения: формула (3) для бесконечной оболочки при  $q = 2\pi m/\lambda$  и формула (10) для ограниченной оболочки при  $q = \pi m/L$ . Получается, что формула (32) пригодна для бесконечной и для ограниченной оболочек. Поскольку формула (5) ошибочная, то и формулы (3), (10), (12) полученные из нее, тоже ошибочные. Ошибочность формулы (10) предопределена ее выводом из формулы (8). Указать причину ошибки в выводе формулы (3) не представляется возможным, поскольку вывод ее отсутствует.

**Исправление формулы Шендерова.** Формулу (5) можно исправить, даже исходя из интеграла давления  $p^*$  (21) и не прибегая к интегралу Фурье. Для этого надо вместо (2) использовать правильное граничное условие

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = \rho\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} w(z)d\gamma. \quad (33)$$

Определим коэффициент  $A_n$  из уравнения (21) и граничного условия (33)

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n \sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)} \left( a\sqrt{k^2 - \gamma^2} \right) e^{i\gamma z} d\gamma = \rho\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} w(z)d\gamma,$$

$$A_n = \frac{\rho\omega^2 w(z)}{e^{i\gamma z} \sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)'} \left( a\sqrt{k^2 - \gamma^2} \right)}.$$

Подставим этот коэффициент  $A_n$  в (21)

$$p^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)} \left( r\sqrt{k^2 - \gamma^2} \right)}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)'} \left( a\sqrt{k^2 - \gamma^2} \right)} w(z) d\gamma. \quad (34)$$

Если в (34) от интеграла давления  $p^*$  вернуться к давлению  $p$ , т.е. убрать интегрирование слева и справа равенства, то, в конечном счете, получим (20).

**Заключение.** Получено точное решение задачи излучения колеблющейся цилиндрической оболочкой, погруженной в жидкости. Формула звукового давления излученного поля получена на основе решения волнового уравнения. В числе основных результатов отметим следующие результаты: **1.** Определено осевое волновое число звукового поля, излученного цилиндрической оболочкой равное  $k_z = k \cos\theta$ . **2.** Импеданс звукового поля, излученного цилиндрической оболочкой, инвариантен по отношению к типу оболочки (конечная или бесконечная), т.е. он применим к любой цилиндрической оболочке. **3.** Физически обусловленной связи между осевым звуковым волновым числом  $k_z$  и волновыми числами деформации  $q = 2\pi m/L$  и  $q = 2\pi/\lambda$  нет. Функционально они не взаимозаменяемые. **4.** Формула Шендерова (5) и аналогичные ей формулы, в которых функции Ганкеля находятся под знаком несобственного интеграла от дифференциала  $f(\gamma)d\gamma$ , а  $\gamma = q$  – ошибочные. Формулы, выведенные из формулы Шендерова (5), также ошибочные. **5.** Полученная формула давления звукового поля, излучаемого цилиндрическими оболочками в жидкости (20), универсальна и пригодна для решения всех задач гидроакустики цилиндрических оболочек. Решение поставленной задачи можно считать законченным.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miguel C. Junger. The physical interpretation of the expression for an outgoing wave in cylindrical coordinates // J. Acoust. Soc. Amer. 1953. № 1. P. 40.
2. Авербух А.З., Вейцман Р.И., Генкин М.Д. Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.

3. *Музыченко В.В.* Дифракция звука на упругих оболочках. М.: Наука, 1993. 336 с.
4. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.
5. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 349 с.
6. *Романов В.Н., Иванов В.С.* Излучение звука элементами судовых конструкций. СПб.: Судостроение, 1993. С. 128.
7. *Морз Ф.* Колебания и звук. М.-Л.: Гос. издат. технико-теоретической литературы, 1949. 497 с.
8. *Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Импеданс излучения ограниченной цилиндрической оболочки // Акустический журнал. 1990. № 5. С. 898.
9. *Лямшев Л.М.* Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // Доклады АН СССР. 1957. Т. 115. № 2. С. 271.
10. *Скенк Г.А., Бентхайн Дж.В.* Эффективное вычисление и визуализация дисперсионных кривых для тонкой цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Акустический журнал. 1995. № 5. С. 828.
11. *Бернблит М.В.* Значения модальной эффективности акустического излучения и коэффициентов присоединения масс для ограниченной цилиндрической оболочки в жестком экране // Акустический журнал. 1977. Вып. 4. С. 528.
12. *Гринченко И.Т., Вовк И.В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. Киев: Наук. думка, 1986. 240 с.
13. *Косарев О.И., Тарханов Г.В., Остапишин Н.М., Бедный И.А., Себякина А.Н.* Колебания конечной свободной цилиндрической оболочки в жидкости. Колебания и волны в механических системах // Материалы международной научной конференции / Под ред. акад. Р.Ф. Ганиева. М.: Изд-во "Институт компьютерных исследований". 2012. С. 65.
14. *Wang X., Xu E., Jiang C., Wu W.* Vibro-acoustic behavior of double-walled cylindrical shells with general boundary conditions // Ocean engineering. 2019. Т. 192. С. 106529.
15. *Li X., Ding Q.* Sound radiation of beam with a wedge-shaped edge embedding acoustic black hole feature // J. of sound and vibration. 2019. Т. 439. С. 287.
16. *Wang X., Wu W., Lin H., Zhu Y.* Vibro-acoustic modeling of immersed cylindrical shells with variable thickness // Int. J. of Naval Architecture and Ocean Engineering. 2020. Т. 12. С. 343.
17. *Hasheminejad S.M., Cheraghin M., Jamalpoor A.* Active damping of sound transmission through an electrorheological fluid actuated sandwich cylindrical shell // J. of Sandwich Structures and Materials. 2020. Т. 22. № 3. С. 833.
18. *Deng J., Zheng L.* Noise reduction via three types of acoustic back holes // Mechanical Systems and Signal Processing. 2022. Т. 165. С. 108323.

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 624.46

**ВЛИЯНИЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СРЕД НА КАЧЕСТВО  
ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ ПОСЛЕ КОМБИНИРОВАННОЙ ОБРАБОТКИ****© 2023 г. А. П. Яковлева<sup>1,\*</sup>, А. Ю. Албагачиев<sup>2</sup>, В. А. Воронов<sup>1</sup>,  
А. В. Борисенко<sup>1</sup>, Ю. С. Иванова<sup>1</sup>**<sup>1</sup>*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*<sup>2</sup>*Институт машиноведения им. Благонравова РАН, Москва, Россия**\*e-mail: yakovleva525@mail.ru*

Поступила в редакцию 05.09.2022 г.

После доработки 22.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

По подсчетам специалистов, количество поломок и аварий, изнашивание деталей стандартной техники при эксплуатации в условиях низких температур в 3–5 раз, а иногда в 8–10 раз больше, чем в условиях умеренного климата. Поэтому повышение качества поверхностей деталей различных машин и механизмов, работающих в условиях Арктики, является актуальной задачей. В статье разработан метод комбинированной обработки, который позволяет повысить твердость, снизить шероховатость, получить оптимальные значения остаточных напряжений и создать на поверхности регулярный микрорельеф для удерживания смазки на поверхности. Но эти свойства необходимо сохранить при воздействии температур до  $-50^{\circ}\text{C}$ . Проведены исследования влияния низкотемпературных воздействий на изменение в поверхностном слое деталей после комбинированной обработки. Статья будет полезна специалистам, которые занимаются проектированием машин для работы в условиях Арктики.

*Ключевые слова:* комбинированная обработка, эксплуатационные показатели, износ, качество поверхности, Арктика

**DOI:** 10.31857/S0235711923020116, **EDN:** COSLTV

Для работы машин и механизмов в условиях Крайнего Севера необходимо получать поверхности на деталях машин с особыми свойствами. Это обосновано тем, что в Арктике очень суровые климатические условия: влажность воздуха до 90%, сильные снегопады, температура зимой опускается до  $-48^{\circ}\text{C}$ , (летом поднимается до  $+40^{\circ}\text{C}$ ), скорость ветра до 30–40 м/с. Такие климатические условия снижают работоспособность, увеличивают число отказов, возникает явление схватывания или примерзания деталей сопряжений при длительном простое техники (рис. 1) [1–7].

Специфика природно-климатических условий зоны холодного климата (низкие температуры окружающего воздуха, большая продолжительность зимнего периода со снежным покровом и заснеженными дорогами) обуславливает ряд особенностей эксплуатации механизмов.

Работы, направленные на исследования поверхностей деталей машин, которые будут иметь высокий ресурс работы в условиях низких температур являются актуальными. Повысить ресурс работы, исключить схватывание или примерзание деталей в различных сопряжениях можно разделив поверхности слоем смазки. Это позволит сни-

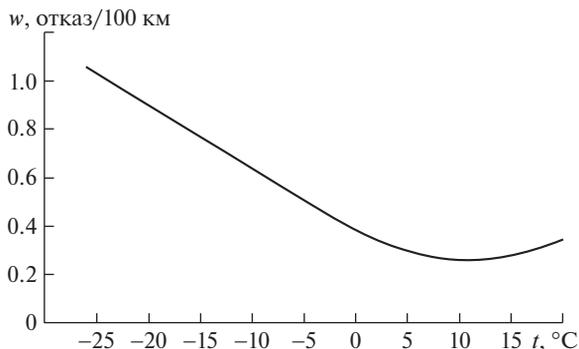


Рис. 1. Влияние температуры окружающего воздуха на удельное количество отказов.

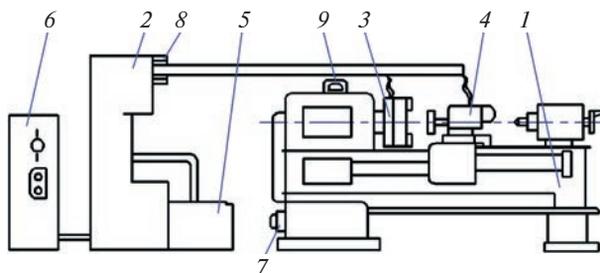


Рис. 2. Оборудование для комбинированной обработки на базе универсального токарного станка: 1 – универсальный токарно-винторезный станок; 2 – источник тока; 3 – планшайба патрона; 4 – приспособление; 5 – гидростанция для охлаждения источника тока; 6 – электрошкаф; 7 – мотор-редуктор для уменьшения скорости вращения шпинделя; 8 – трансформатор; 9 – амперметр для контроля величины силы тока.

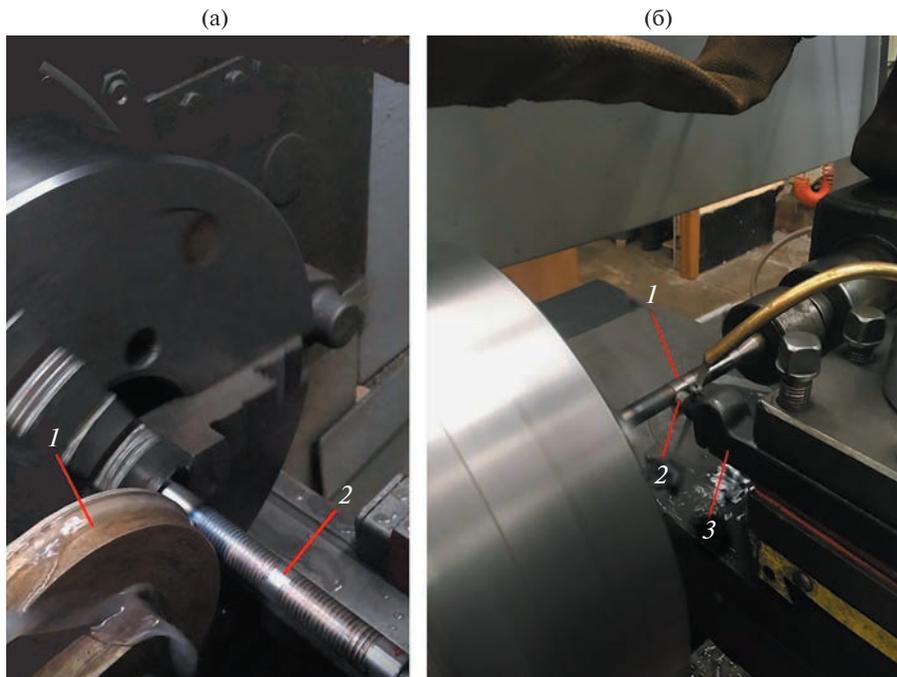
зить износ и исключить примерзание. Решение таких задач лежит в области технологий.

Авторами разработана технология комбинированной обработки, которая позволяет получить регулярные микрорельефы на цилиндрических поверхностях. Представленная технология реализуется на стандартном оборудовании [8–10]. Комбинированная обработка заключается в последовательном выполнении двух этапов: упрочняющей технологии – электромеханической обработки и отделочной – алмазном выглаживании. Преимущество разработанной технологии – вся обработка осуществляется на одном рабочем месте, т.е. за одну операцию (рис. 2). После механической обработки резанием специальным роликом-электродом проводят электромеханическую обработку (рис. 3а), а затем – алмазное выглаживание (рис. 3б).

Применение установки для комбинированной обработки (КО) на базе токарного станка позволит сократить время на промежуточные операции и повысить производительность.

После применения комбинированной обработки на поверхности образцов образуются регулярный микрорельеф, который будет удерживать смазку и исключать примерзание деталей в сопряжении.

Для бесперебойной работы машин и механизмов необходимо сохранить полученные свойства на поверхности (регулярные микрорельефы). Для этого были проведены



**Рис. 3.** Установка для комбинированной обработки: (а) – этап электромеханической обработки (1 – ролик электрод, 2 – образец); (б) – этап алмазного выравнивания (1 – образец, 2 – алмазный выравниватель, 3 – приспособление).

исследования по влиянию низких температур на изменение полученных свойств поверхностного слоя после комбинированной обработки. Эти исследования проводили путем выдержки образцов, после комбинированной обработки, при  $T = -46-50^{\circ}\text{C}$  в течение двух часов в смеси воды и спирта в кипящем азоте (рис. 4а).

Изменение свойств поверхностного слоя после низкотемпературного воздействия проводили методом сравнения значений твердости и остаточных напряжений. Твердость измеряли на твердомере Instron Wilson HardnessTUKON 2500, остаточные напряжения измеряли рентгеновским методом согласно [10, 12, 13].

Результаты измерений твердости на поверхности образцов до низкотемпературного воздействия и после воздействия представлены на рис. 5а, б, в.

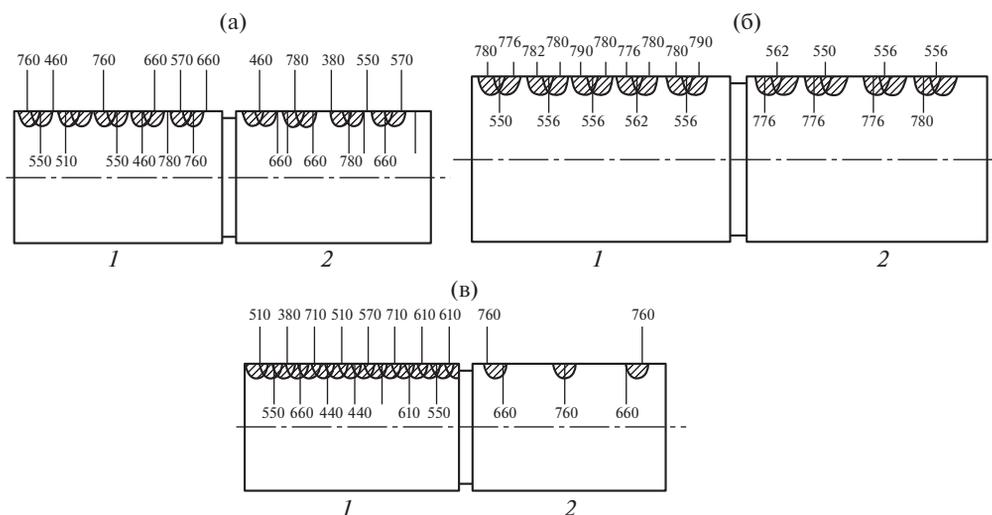
Результаты измерений остаточных напряжений на поверхности образцов до низкотемпературного воздействия и после воздействия представлены в табл. 1.

Анализ результатов исследований показывает, что низкотемпературные воздействия не изменяют основные показатели поверхностного слоя: твердость на поверхности не снижается или изменяется в пределах ошибки измерения. В работах [14–23] отмечено положительное влияние упрочнения в криогенных средах. Отмечено повышение твердости, коррозионной стойкости, получение благоприятной структуры.

После КО повышается твердость, снижается шероховатость до  $Ra\ 2.5-0.4$  мкм, образуется благоприятная структура – мелкоигльчатого мартенсита [9, 11]. Однако при низкотемпературном воздействии может произойти вторичное упрочнение: уменьшится твердость и изменится знак и величина остаточных напряжений [17, 22, 23].



**Рис. 4.** Исследования по влиянию низких температур на изменение полученных свойств поверхностного слоя после комбинированной обработки: (а) – проведение эксперимента; (б) – образцы после обработки в смеси воды и спирта в кипящем азоте.



**Рис. 5.** Результаты замеров твердости (1 – после КО, 2 – после низкотемпературного воздействия): (а) – сталь 1045; (б) – сталь 5140; (в) – сталь 420.

Исследования, проведенные авторами, не подтверждают это. Все положительные качества поверхностного слоя, полученные после КО сохраняются.

Сочетание полученных свойств позволит повысить ресурс работы деталей – увеличить износостойкость. Регулярный микрорельеф, полученный на поверхности, будет

Таблица 1.

Материал образцов	Остаточные напряжения, МПа			
	после комбинированной обработки		после низкотемпературного воздействия $T = -47-50^{\circ}\text{C}$	
	осевые	тангенциальные	осевые	тангенциальные
Сталь 5140	$-1901.2 \pm 87.7$	$-866.9 \pm 21.5$	$-1945.2 \pm 80.1$	$-910.6 \pm 19.5$
Сталь 1045	$-1774.2 \pm 91.5$	$-1409.1 \pm 44.1$	$-1701 \pm 85.0$	$-1500.7 \pm 36.0$
Сталь 420	$-1738.7 \pm 129.1$	$-1420 \pm 186.3$	$-1850.5 \pm 160.4$	$-1140 \pm 100.3$
Сталь 5140	$-1019.8 \pm 172.5$	$-1127.5 \pm 114.9$	$-1900 \pm 55.5$	$-1304 \pm 20.1$
Сталь 420	$-1760.5 \pm 14.6$	$-1975.6 \pm 41.3$	$-1700.7 \pm 12.5$	$-1050 \pm 43.1$
Сталь 1045	$-1806.1 \pm 43.4$	$-1455.7 \pm 17.8$	$-1790.1 \pm 50.6$	$-1500 \pm 25.5$

удерживать смазку, и предохранять от примерзания деталей в сопряжении при длительном простое в условиях Арктики.

**Выводы.** 1. Представленные исследования проведены впервые. 2. Решать проблемы низкого ресурса работы машин и механизмов при  $T = -50^{\circ}\text{C}$  можно технологическими методами, например, комбинированием методов. 3. Сочетание благоприятных свойств на поверхности после комбинированной обработки и сохранение этих свойств в низкотемпературной среде – результат синергетического эффекта: по отдельности метод электромеханической обработки и алмазное выглаживание не получают таких свойств. При объединении этих методов поверхность имеет новые свойства. 4. Авторы планируют продолжить исследования – разработать теоретические зависимости параметров поверхностного слоя от режимов комбинированной обработки для прогнозирования результатов на этапе технологической подготовки производства.

#### БЛАГОДАРНОСТЬ

Авторы выражают благодарность профессору МГТУ им. Н.Э. Баумана С.К. Федорову коллективу кафедры “Физические проблемы материаловедения” НИЯУ МИФИ и лично профессору М.Г. Исаенковой и аспиранту Р.А. Минушкину за помощь и добрые советы.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

У авторов нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kalia S.* Cryogenic processing: a study of materials at low temperatures // *J. of Low Temperature Physics*. 2010. V. 158 (5). P. 934.
2. *Makhutov N.A., Moskvichev V.V., Fomin V.M.* Designing machinery for the arctic: a problem of socioeconomic development of russia’s eastern regions // *Herald of the Russian Academy of Sciences*. 2015. V. 85 (1). P. 79.
3. *Rokosh K.* Technology of surface treatment of metals and alloys // *Metals*. 2019. V. 9 (11). P. 1134.
4. *Григорьев Р.С., Ларионов В.П., Уржумцев Ю.С.* Методы повышения работоспособности техники в северном исполнении. Новосибирск: Наука, 1987. 256 с.
5. *Ларионов В.П., Кузьмин В.Р., Слепцов О.И.* Хладостойкость материалов и элементов конструкций: результаты и перспективы. Новосибирск: Наука, 2005. 290 с.
6. *Surberg C.H., Stratton P.F., Lingenhöl K.* The effect of cryogenic treatment on the properties of AISI D2 // *Mater. Manuf. Process*. 2009. V. 24. P. 863.

7. *Villa M., Somer M.A.J.* Cryogenic treatment of steel: From concept to metallurgical understanding // In Proceedings of the 24th Int. Feration for Heat Treatment and Surface Engineering Congress, Nice, France, 26–29 June 2017.
8. *Fedorov S., Albagachiev A., Isaenkova M., Yakovleva A., Zaripov V., Minushkin R.* The effect of combined processing 278 schedules on the value and nature of residual stresses in the surface layer of cylindrical friction pairs // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. 279 Eng. 2019. T. 589. P. 012032. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/589/1/012032>. 280
9. *Yakovleva A.P.* Improving the durability of machine parts using a combined method // Materials Science Forum. 2019. T. 946. P. 37. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.946.37>
10. *Yakovleva A., Isaenkova M., Minushkin R.* The Effect of Combined Processing on Residual Stresses in the Surface Layer of Power Plant Parts // Materials. 2022. V. 15 (2). P. 420.
11. *Yakovleva A.P., Albagachiev A.Y.* Theoretical Investigation of the Influence of Combined Machining Modes on the Value and Character of Residual Stresses in the Surface Layer of Cylindrical Friction Pairs // J. of Machinery Manufacture and Reliabilitythis link is disabled. 2020. V. 49 (3). P. 237.
12. *Perlovich Y., Isaenkova M., Bunge H.J.* The fullest description of the structure of textured metal materials with generalized pole figures: The example of rolled Zr alloys // Mater. Sci. Forum. 2001. V. 378–381. P. 180.
13. *Perlovich Y., Isaenkova M.* Effects of dynamical deformation ageing on structure and texture of hot-rolled sheets from alloyed BCC metals // Int. J. Mater. Form. 2010. V. 3. P. 1143.
14. *Dasa D., Duttab A.K., Rayc K.K.* Correlation of microstructure with wear behavior of deepcryogenically treated AISI D2 steel // Wear. 2009. V. 267. P. 1371.
15. *Dasa D., Rayb K.K., Dutta A.K.* Influence of temperature of sub-zero treatments on the wear behavior of die steel // Wear. 2009. V. 267. P. 1361.
16. *Barron R.F.* Cryogenic treatment of metals to improve wear resistance // Cryogenics. 1982. V. 22. P. 409.
17. *Dumasia C.A., Kulkarni V.A., Sonar K.A.* Review on the effect of cryogenic treatment on metals // Int. Res. J. Eng. Technol. 2017. V. 4. P. 2402.
18. *Podgornik B., Paulin I., Zajec B., Jacobson S., Leskovšek V.* Deep cryogenic treatment of tool steels // J. Mater. Process. Technol. 2016. V. 229. P. 398.
19. *Gogte C.L., Likhite A., Peshwe D., Bhokarikar A., Shetty R.* Effect of cryogenic processing on surface roughness of age hardenable AA6061 alloy // Mater. Manuf. Process. 2014. V. 29. P. 710.
20. *Bensely A., Prabhakaran A., Mohan Lal D., Nagarajan G.* Enhancing the wear resistance of case carburized steel (En 353) by cryogenic treatment // Cryogenics. 2006. V. 45. P. 747.
21. *Barron R.F., Burt W., Byrns R., Clapp M., Clark A., Daniels A., Frederking T., Hassenzahl W., Kittell P., Klipping C. et al.* Cryogenic engineering conference/international cryogenic materials conference // Boston, MA, USA. Cryogenics. 1986. V. 26. P. 49.
22. *Das D., Dutta A.K., Ray K.K.* Sub-zero treatments of AISI D2 steel: Part I // Microstructure and hardness. Mater. Sci. Eng. A 2010. V. 527. P. 2182.
23. *Das D., Dutta A.K., Ray K.K.* Sub-zero treatments of AISI D2 steel: Part II // Wear behavior. Mater. Sci. Eng. A. 2010. V. 527. P. 2194.
24. *Darwin J.D., Mohan Lal D., Nagarajan G.* Optimization of cryogenic treatment to maximize the wear resistance of 18% Cr martensitic stainless steel by Taguchi method // J. Mater. Process. Technol. 2008. V. 195. P. 241.

## МЕХАНИКА МАШИН

УДК 620.186

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЛИЯНИЯ СКОРОСТИ СКОЛЬЖЕНИЯ  
НА КОНТАКТНОЕ ТРЕНИЕ ПРИ ОСАДКЕ С КРУЧЕНИЕМ© 2023 г. П. А. Петров<sup>1,\*</sup>, И. А. Бурлаков<sup>1,2</sup>, Ю. А. Гладков<sup>3</sup>,  
А. А. Гаргви<sup>3</sup>, Т. Х. Нгуен<sup>1</sup><sup>1</sup>Московский политехнический университет, Москва, Россия<sup>2</sup>Производственный комплекс “Салют” АО “ОДК”, Москва, Россия<sup>3</sup>ООО “КванторФорм”, Москва, Россия

\*e-mail: petrov\_p@mail.ru

Поступила в редакцию 04.01.2022 г.

После доработки 29.10.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Метод конечных элементов является прогрессивным инструментом для разработки и оптимизации технологических режимов обработки металлов давлением. Однако для получения корректных результатов моделирования необходимо максимально точно задать граничные условия. В настоящее время в расчетных программах, как правило, используются законы трения, не учитывающие скорость скольжения. Как показывают многочисленные исследования значительное влияние на процесс формообразования при обработке давлением, при определенных условиях течения деформируемого материала на границе “инструмент–заготовка”, оказывает скорость скольжения деформируемого металла по поверхности инструмента. В настоящей статье приведены результаты экспериментов и расчетов связанные с изучением влияния контактного трения на параметры процесса осадки с кручением.

*Ключевые слова:* обработка давлением, скорость скольжения, контактное трение, осадка с кручением, компьютерное моделирование

**DOI:** 10.31857/S0235711923020062, **EDN:** COTVDB

В работах исследователей [1–10] отмечается, что многие процессы обработки давлением требуют знания трибологических характеристик (износ и стойкость инструмента) на поверхности контакта инструмента с пластически деформируемой заготовкой. Наиболее существенное влияние на трибологические характеристики оказывают такие параметры, как контактное давление [9, 10], скорость скольжения по поверхности контакта [6, 9, 10], шероховатость контактной поверхности [2, 7, 11], наличие технологической смазки и ее фактор трения [2–5], температура контактной поверхности [8, 12] и др. Авторами работы [7, 8] отмечается, что при относительно низкой скорости деформируемого материала вдоль границы “инструмент–заготовка”, контактное давление на формообразующей поверхности увеличивается; как следствие, увеличивается контактное трение, что вызывает появление абразивного износа штампового инструмента [7]. С другой стороны, снижение контактного трения на границе “инструмент–заготовка” возможно за счет уменьшения шероховатости формообразующей поверхности либо увеличения толщины слоя технологической смазки/покрытия [8]. Влияние температуры контактной поверхности [8, 12] определяет текущее значение напряжения текучести деформируемого материала, а, следовательно, значение касательного напряжения на его контактной поверхности с деформирующим инструмен-

том. В работе [13] проведен детальный анализ факторов, влияющих на эффекты, происходящие на границе “инструмент–заготовка” и показано, что необходимо как можно более точно описать контактное трение при выполнении численных расчетов.

Наиболее существенное влияние рассмотренных параметров проявляется в тех процессах обработки давлением, в которых площадь контакта между инструментом и заготовкой увеличивается по мере формообразования при пластической деформации. К таким процессам, в частности, относится малоизученный процесс осадки с кручением с точки зрения влияния на течение материала и технологические параметры контактного трения, теплопереноса на контактной поверхности и ее шероховатости.

Осадку с кручением является одним из перспективных процессов изготовления тонкостенных заготовок с изотропными свойствами, изучению которых посвящен ряд работ [14, 15]. Его особенностью является значительное различие в скорости скольжения металла по поверхности вращающегося инструмента, которая увеличивается от нуля в центре вращения заготовки до максимума на периферии, при заданных геометрических размерах. Существенную роль в процессе осадки с кручением играет контактное трение на границе “инструмент–заготовка”.

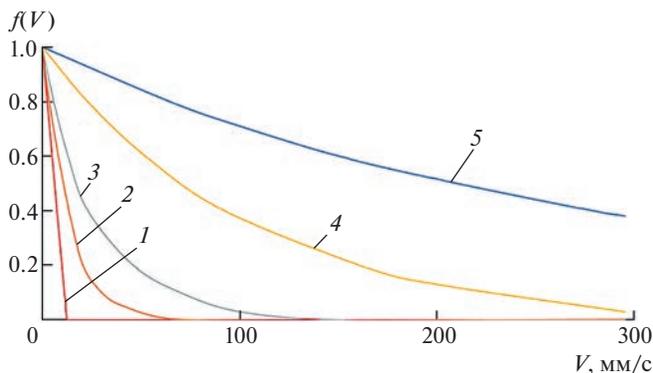
Метод конечных элементов дает возможность оптимизировать процессы формообразования, в том числе осадку с кручением. Учитывая, что граничные условия в зоне контакта заготовки и инструмента (модель контактного трения) оказывают значительное влияние на характер течения металла, важно задать корректный закон трения для точного математического моделирования процесса. Без правильного задания граничных условий и, соответственно, определения напряжений на инструменте невозможно осуществить достоверное моделирование формообразующего процесса, что возможно при правильном вычислении касательных напряжений в каждой точке контакта заготовки с инструментом. Обычно, в расчетных программах применяют расчет касательных напряжений трения, основанный на законах Кулона–Амонтона, Зибеля или Леванова. Однако скорость скольжения металла по поверхности инструмента существенно влияет на касательные напряжения в зоне контакта заготовки с инструментом [1], что учитывается в расчетах (моделировании) за счет модели контактного трения. Как показали наши исследования, имеет место существенное различие экспериментальных данных и результатов моделирования, как по силе процесса формообразования, так и по температуре при назначении при моделировании процесса осадки с кручением фактора трения постоянной величины. Ряд исследователей [16–21] считают, что для точного моделирования процесса формообразования заготовок необходимо максимально точно учитывать напряжение на границе контакта “инструмент–заготовка”. В частности, было установлено, чем выше скорость скольжения металла, тем меньше влияние контактного трения [5]. Для определения величины контактного касательного напряжения  $\tau_R$ , основываясь на работах Аласта и Ноймайер [16, 17, 19], Б.А. Беренс [5] предложил следующее уравнение (IFUM friction model):

$$\tau_R = \left[ 0.3 \left( 1 - \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_s} \right) \sigma_n + mk \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_s} \left( 1 - \exp \frac{-|\sigma_n|}{\sigma_s} \right) \right] f(v_{rel}), \quad (1)$$

где  $\sigma_{eq}$  – эквивалентное напряжение (интенсивность напряжений);  $\sigma_n$  – нормальное напряжение;  $v_{rel}$  – скорость скольжения;  $\sigma_s$  – напряжение текучести;  $k$  – максимальное касательное напряжение при сдвиге;  $m$  – фактор трения.

Формула (1) представляет собой модель контактного трения. В этой формуле влияние скорости скольжения металла определяется уравнением, оценивающим величину потерь за счет проскальзывания на контактной поверхности

$$f(v_{rel}) = \exp \frac{-1}{2} \left( \frac{f(v_{rel})}{C} \right)^2, \quad (2)$$



**Рис. 1.** Влияние коэффициента  $C$  на снижение контактного трения: 1 –  $C = 1$ ; 2 –  $C = 15$ ; 3 –  $C = 30$ ; 4 –  $C = 50$ ; 5 –  $C = 150$ .

где  $f(v_{\text{rel}})$  – функция, учитывающая влияние скорости скольжения.

В уравнении (2) эмпирический коэффициент  $C$  отражает зависимость контактного трения на границе “инструмент–заготовка” и скоростью проскальзывания (рис. 1). С увеличением значения эмпирического коэффициента  $C$  уменьшается влияние скорости скольжения на касательное напряжение скольжения.

Учитывая, что при переходе в пластическое состояние  $\sigma_{\text{eq}}/\sigma_s = 1$ , уравнение (1) примет вид

$$\tau_k = mk \left( 1 - e^{-\frac{|\sigma_n|}{\sigma_s}} \right) e^{-0.5 \left( \frac{v_{\text{rel}}}{C} \right)^2}, \quad (3)$$

где  $\tau_k$  – величина касательного напряжения на контактной поверхности;  $\sigma_n$  – нормальное напряжение;  $\sigma_s$  – напряжение текучести;  $m$  – фактор трения;  $k$  – напряжение сдвига, равное  $\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ ;  $v_{\text{rel}}$  – скорость скольжения металла заготовки по инструменту, определяемая расчетной подпрограммой, созданной для проведения данного исследования и подключенной к решателю программы QForm 10.1.5 (далее, QFORM);  $C$  – эмпирический коэффициент, определяемый экспериментально.

**Методика выполнения работы.** Напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  рассчитывались в процессе моделирования осадки с кручением медного сплава БрХ08 с использованием определенной нами реологической модели по формуле, предложенной А. Хензелем и Т. Шпиттелем [23]

$$\sigma_i = A \exp(m_1 T) T^{m_3} \epsilon_i^{m_2} \exp(m_4 / \epsilon_i) (1 + \epsilon_i)^{m_5 T} \times \exp(m_7 \epsilon_i) \dot{\epsilon}_i^{m_3} \dot{\epsilon}_i^{m_8 T}, \quad (4)$$

коэффициенты которой приведены в табл. 1.

В случае изменения %-содержания химических элементов, входящих в состав сплава БрХ08 либо изменения марки медного сплава, структура уравнения (4) не изменится; изменяются численные значения коэффициентов реологической модели. Полученная в соответствии с уравнением (4) модель сплава БрХ08 справедлива при следующих условиях:  $T \in [20; 800]^\circ\text{C}$ ,  $\epsilon \in [0.002; 1.5]$ ,  $\dot{\epsilon} \in [0.001; 0.4] \text{ c}^{-1}$ .

**Таблица 1.** Коэффициенты уравнения (4) медного сплава БрХ08

Тип деформации	$A$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_8$	$m_9$
20 и 400°C	10.0491	-0.012	0.436	0.009	-0.029	0.0004	-0.924	0	1.3935
600 и 800°C	10.0134	-0.004	0.087	-0.008	-0.045	-0.001	0.303	0	0.7614

Величина контактного касательного напряжения с учетом скорости скольжения  $v_{rel}$  в процессе моделирования определялась разработанной фирмой “КванторФорм” подпрограммой “*friction.sliding\_velocity*” (рис. 2).

Фактор трения  $m$  определяли экспериментально методом осадки кольцевого образца, подробно изложенным во многих работах, связанных с исследованием контактного трения при обработке металлов давлением, например авторами работы [23]. Далее, в разделе “Обсуждение результатов” приводится краткое описание данного метода и его применения для оценки значения фактора трения. Коэффициент  $C$  находили путем сопоставления экспериментальных и расчетных данных, наиболее точно отражающих реальный процесс формообразования.

Экспериментальная осадка с кручением (рис. 3) была осуществлена на модернизированном гидравлическом прессе с применением заготовок из медного сплава БрХ08 диаметром 40 мм и высотой 7 мм, полученных методом электроэрозионной вырезки. На модернизированном прессе имеется система сбора и анализа данных, позволяющая записывать в режиме реального времени текущее значение силы деформирования и температуры деформируемого образца. Моделирование процесса осадки с кручением осуществили с применением программы QForm [24] и приведенной выше подпрограммой “*friction.sliding\_velocity*” для определения величины контактного касательного напряжения.

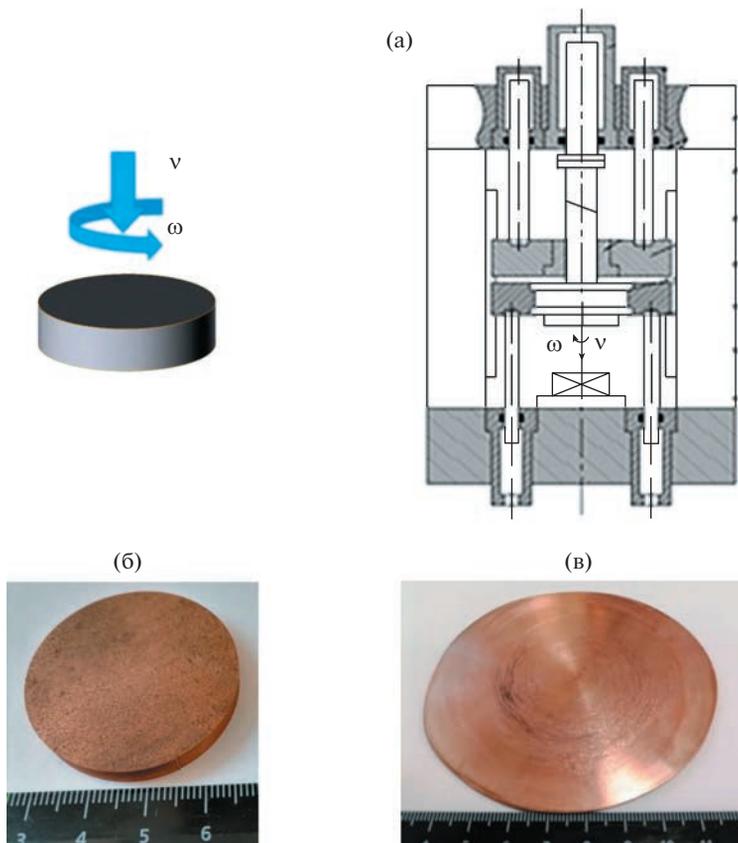
**Обсуждение результатов.** Результаты моделирования приведены на рис. 4–6. Как видно из приведенных графиков на силу процесса и, следовательно, характер процесса одновременно оказывают существенное влияние два параметра – фактор трения  $m$  и коэффициент  $C$ . Для минимизации ошибок моделирования процесса фактор трения

```

1  -- Задание коэффициентов
2  m = parameter ("m", 1) -- фактор трения (1/1)
3  a = parameter ("a", 1) -- коэффициент влияния контактного давления (1/1)
4  C = parameter ("C [мм/с]", 10)*1e-3 -- параметр влияния скорости проскальзывания(мм/с)
5
6  -- Переопределение математических операторов Lua для краткости записи
7  exp = math.exp
8  sqrt = math.sqrt
9
10 -- Расчет контактного напряжения
11 function FrictionStress (stress_flow, pressure, v_slide)
12     -- Блок защиты от деления на 0
13     if stress_flow <= 0 then stress_flow = 1 end
14     if C <= 0 then
15         C = 1
16         v_slide = 0
17     end
18
19     F = m * stress_flow / sqrt(3) *
20         (1 - exp(-a * pressure / stress_flow)) *
21         exp((-1 / 2) * (v_slide / C)^2)
22
23     return F

```

**Рис. 2.** Подпрограмма для учета влияния скорости скольжения металла  $v_{rel}$ .



**Рис. 3.** Схема исследуемого процесса осадки с кручением (а) на модернизированном гидравлическом прессе; (б) – образец медного сплава БрХ08 до осадки с кручением; (в) – образец медного сплава БрХ08 после осадки с кручением.

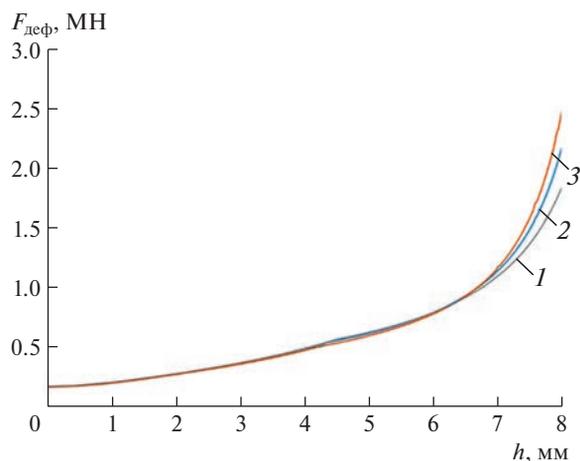
был определен экспериментально путем осадки кольцевых образцов с размерами наружного и внутреннего диаметров и высоты  $30 \times 15 \times 5$  мм на 50%.

Образцы до и после осадки показаны на рис. 7.

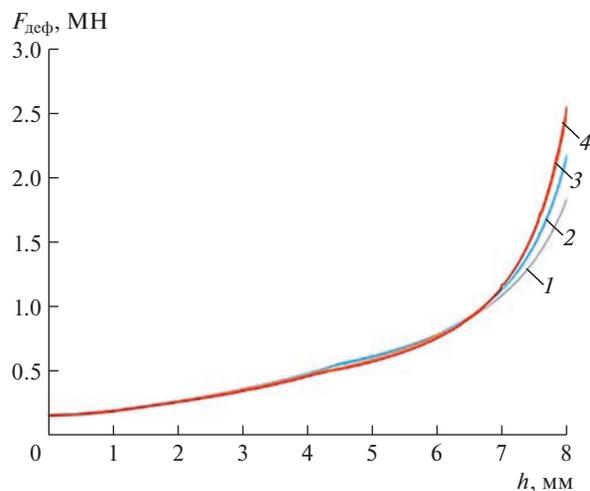
После осадки образцы имели размеры  $38.2 \times 8.39 \times 2.5$  мм. Уменьшение внутреннего диаметра составило 44.1% и уменьшение высоты 50%. В соответствии с графиком (рис. 8), фактор трения равен 0.56.

Моделирование осадки кольцевого образца с аналогичными размерами и из медного сплава БрХ08 с применением найденной реологической модели с различными факторами трения до получения заготовки с экспериментально найденными размерами позволило установить, что наилучшее совпадение расчетных и экспериментальных данных имеет место при факторе трения равным 0.61.

Для оценки влияния подпрограммы “*friction.sliding\_velocity*” на контактное трение при осадке с кручением было проведено моделирование осадки заготовки из сплава БрХ08 с ее применением и без нее (рис. 9). Как видно из графиков моделирование с фиксированным фактором трения  $m$  показывает на 15–20% более высокие значения момента.



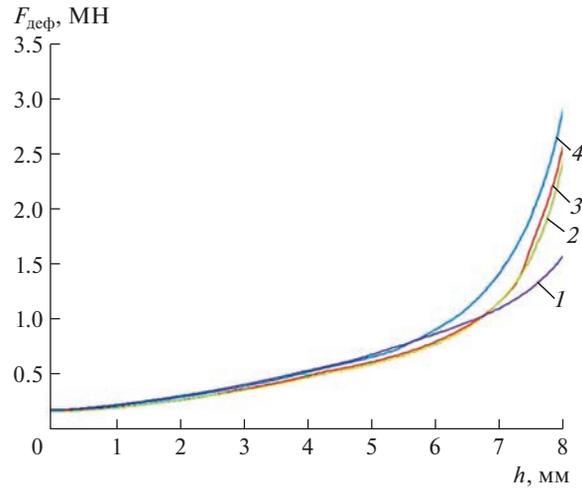
**Рис. 4.** Результаты моделирования зависимости силы ( $F_{\text{деф}}$ , МН) осадки с кручением от хода инструмента ( $h$ , мм) при разных факторах трения  $m$ , коэффициент  $C = 50$  (1, 2, 3:  $m = 0.2; 0.45; 0.7$  соответственно).



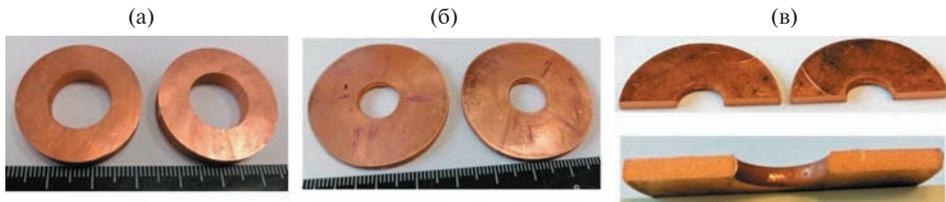
**Рис. 5.** Результаты моделирования зависимости силы ( $F_{\text{деф}}$ , МН) осадки с кручением от хода инструмента ( $h$ , мм) при разных факторах трения; коэффициент  $C = 50$  (1, 2, 3:  $m = 0.2, 0.45, 0.7$  соответственно) и при коэффициенте  $C = 1$  (4 —  $m = 0.7$ ).

С учетом полученных данных по фактору трения при осадке кольцевых заготовок и с применением подпрограммы по учету влияния скорости скольжения металла (рис. 2) были осуществлены осадка с кручением пакета из двух заготовок из медного сплава БрХ08 и моделирование процесса. Диаметр и высота каждой заготовки составляли 40 и 7 мм соответственно. Результаты моделирования и осадки приведены на рис. 10.

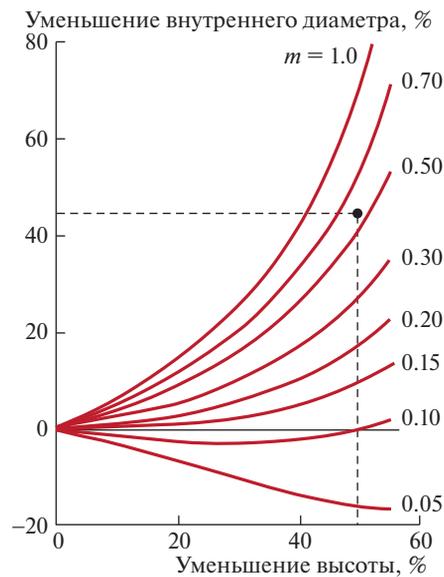
Анализ полученных данных позволил получить зависимость, отражающую влияние скорости скольжения на контактное трение. Сравнительный анализ результатов мо-



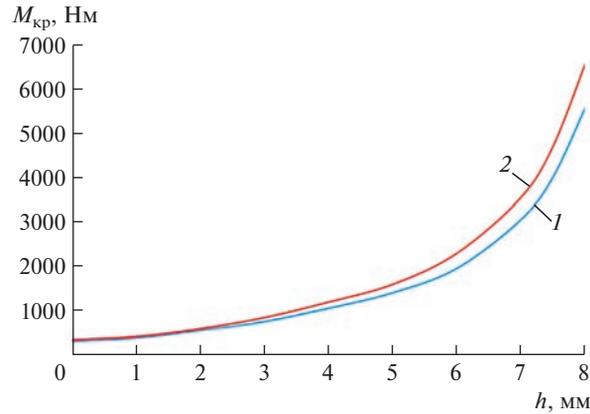
**Рис. 6.** Результаты моделирования зависимости силы ( $F_{\text{деф}}$ , МН) осадки с кручением от хода инструмента ( $h$ , мм) при разных значениях коэффициента  $C$ ; фактор трения  $m = 0.7$  (1 –  $C = 1$ ; 2 –  $C = 50$ ; 3 –  $C = 25$ ; 4 –  $C = 10$ ).



**Рис. 7.** Образцы для определения фактора трения: (а) – до осадки; (б), (в) – после осадки.



**Рис. 8.** График для определения фактора трения методом осадки образцов с соотношением геометрических размеров 6:3:1 [25].



**Рис. 9.** Результаты моделирования зависимости момента кручения ( $M_{кр}$ , Нм) на инструменте от его хода ( $h$ , мм) при осадке при факторе трения  $m = 0.61$  и  $C = 40$ , кривая 1 без применения подпрограммы LUA, 2 – с применением подпрограммы LUA.



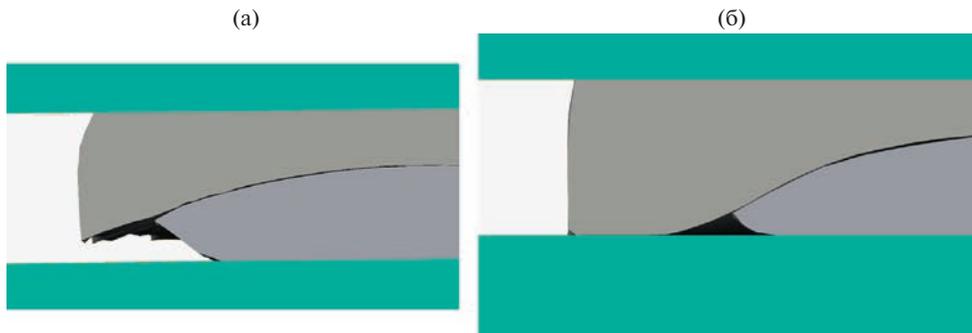
**Рис. 10.** Сравнение результатов моделирования и осадки пакета из двух заготовок из сплава БрX08: (а) – моделирование (92%); (б) – эксперимент.

делирования осадки с кручением с назначением постоянного фактора трения равным 0.61 и с дополнительным использованием подпрограммы “friction.sliding\_velocity” с фактором трения  $m = 0.61$ , коэффициентом влияния контактного давления  $a = 1.25$  и параметром влияния скорости проскальзывания  $C = 40$  показал, что учет зависимости влияния скорости проскальзывания на контактное трение дает более точные результаты моделирования как по зависимости “сила–ход инструмента”, так и по геометрическому подобию заготовок, получаемых моделированием (рис. 11) и экспериментами (рис. 10), что подтверждается микрошлифом, приведенным на рис. 10.

С учетом найденных нами данных зависимость, отражающая влияние скорости скольжения на контактное трение, имеет вид

$$\tau_k = 0.61k \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_s} \left( 1 - e^{-\frac{|\sigma_n|}{\sigma_s}} \right) e^{-0.5 \left( \frac{v_{\text{rsl}}}{40} \right)^2}. \tag{5}$$

Однако для более полного изучения процесса необходимо углубленное изучение энергосиловых параметров процесса.



**Рис. 11.** Сравнительный анализ результатов моделирования осадки с кручением с назначением постоянного фактора трения равным 0.6 и с дополнительным использованием подпрограммы “*friction.sliding\_velocity*”: (а) – моделирование с постоянным фактором трения; (б) – моделирование с теми же параметрами, как и “а”, но с применением подпрограммы “*friction.sliding\_velocity*”.

**Закключение. 1.** Экспериментами по осадке кольцевых образцов с размерами наружного и внутреннего диаметров и высоты  $30 \times 15 \times 5$  мм на 50% их начальной высоты и последующим моделированием натурального эксперимента программой QForm установлено, что при холодной осадке заготовок из медного сплава БрХ08 фактор трения  $m$  равен 0.61 (среднеарифметическое значение по результатам серии опытов). **2.** Сравнительный анализ силовых параметров процесса и геометрической формы получаемых заготовок позволил определить коэффициенты  $m$  и  $C$  (формула (3)), которые составили 0.61 и 40, соответственно. Определение значений выполнено на основе расчетов в программе QForm, в которой был поставлен виртуальный эксперимент об осадке с кручением. **3.** Выполненные теоретические и экспериментальные работы позволили определить зависимость, отражающую влияние скорости скольжения на контактное трение, в явном виде (5) и позволяющую существенно повысить точность результатов компьютерного имитационного моделирования процесса осадки с кручением.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зибель Э. Обработка металлов в пластическом состоянии. Теоретическое обоснование процессов ОМД. Пер. с нем. М.: ОНТИ, 1934. 199 с.
2. Леванов А.Н., Колмогоров В.Л. и др. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением. Изд. “Металлургия”, 1976. 416 с.
3. Behrens B.-A., Schafstall H. 2D and 3D simulation of complex multistage forging processes by use of adaptive friction coefficient // J. of Materials Processing Technology. 1998. V. 80 (1). P. 298. [https://doi.org/10.1016/S0924-0136\(98\)00187-3](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(98)00187-3)
4. Becker P., Jeon H.J., Chang C. C. et al. Modelling the Friction interface in bulk forming processes // In: Neugebauer R (ed) 10. Sä Fachtagung Umformtechnik in Chemnitz October 14–15, 2003, Wissenschaftliche Skripten, Zwickau, S. 179.
5. Behrens B.A., Bouguecha., Hadifi T., Mielke J. Advanced friction modeling for bulk metal forming processes // Prod. Eng. Res. Devel. 2011. V. 5. P. 621. <https://doi.org/10.1007/s11740-011-0344-8>
6. Jain S. C., Bramley A.N. Speed and Frictional Effects in Hot Forging // Proc.Inst.Mech.Eng. 1968. V. 182. № 39. P. 783.

7. Davoudi M., Ali Farokhi Nejad, Koloor S.S.R., Petrú M. Investigation of Effective Geometrical Parameters on Wear of Hot Forging Die // J. of Materials Research and Technology. 2021. V. 15. P. 5221.
8. Widomski P., Gronostajski Z. Comprehensive Review of Methods for Increasing the Durability of Hot Forging Tools // Procedia Manufacturing. 2020. V. 47. P. 349.
9. Lee K.J., Lee M.G. Pressure and sliding velocity dependent surface asperity based friction model: Application to springback simulation // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2019. V. 651. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/651/1/012079>
10. Cillaurren J., Galdos L., Sanchez M., Zabala A., Sáenz de Argandoña E., Mendiguren J. Contact pressure and sliding velocity ranges in sheet metal forming simulations // ESAFORM. 2021. <https://doi.org/10.25518/esaform21.426>
11. Sigvant M. et al. Friction in sheet metal forming: influence of surface roughness and strain rate on sheet metal forming simulation results // Procedia Manufacturing. 2019. V. 29. P. 512. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2019.02.169>
12. Waanders D., Marangalou J.H., Kott M., Gastebois S., Hol J. Temperature Dependent Friction Modelling: The Influence of Temperature on Product Quality // Procedia Manufacturing. 2020. V. 47. P. 535. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2020.04.159>
13. Behrens B.A., Bouguecha A., Lüken I., Mielke J., Bistron M. Tribology in Hot Forging. In: Comprehensive Materials Processing // Comprehensive Materials Processing. 2014. V. 5. P. 211.
14. Петров П.А., Бураков И.А., Нгуен Хань Тоан. Перспективы применения гибридных заготовок в машиностроении // Технология металлов. 2021. № 8. С. 10.
15. Бураков И.А., Петров П.А., Бач Ву Чонг. Изготовление осесимметричных заготовок из титана VT1-0 с изотропными свойствами // Технология металлов. 2020. № 10. С. 52.
16. Behrens B.-A., Bouguecha A., Hadifi T., Mielke J. Advanced friction modeling for bulk metal forming processes // German Academic Society for Production Engineering (WGP). 2011. № 5. P. 621.
17. Neumaier T. Zur Optimierung der Verfahrensauswahl von Kalt-, Halbwarm- und Warmmassivumformverfahren. Dissertation, Universität. Hannover, VDI Verlag Düsseldorf, 2003.
18. Alasti M. Modellierung von Reibung und Wärmeübergang in der FEM-Simulation von Warmmassivumformprozessen. Ph.D. Thesis, Leibniz Universität Hannover, 2008.
19. Nägele H. Simulation des Herstellungsprozesses präzisionsgeschmiedeter Zahnräder mit der Finite-Elemente Methode. Dissertation, Universität Hannover, VDI Verlag Düsseldorf, 1995.
20. Behrens B.-A., Alasti M., Bouguecha A., Hadifi T., Mielke J., Schäfer F. Numerical and experimental investigations on the extension of friction and heat transfer models for an improved simulation of hot forging processes // Int. J. Mater. Form. 2009. V. 2 (Suppl. 1). P. 121.
21. Doege E., Bederna C. Analysis of boundary stresses and temperatures in hot massive forming // Production Engineering, Bd. 1996. V. 3 (2). P. 89.
22. Bernhardt R. Ein Beitrag zur experimentellen und numerischen Analyse lokaler Kontaktspannungen und Kontakttemperaturen in der Wirkfuge von Gesenkgravuren unter besonderer Beachtung des Randeibungsproblems. Dissertation, TU Freiberg, 1998.
23. Хензель А., Шпунтель Т. Расчет энергосиловых параметров в процессах обработки давлением. Справочник. М.: Металлургия, 1982. 360 с.
24. Грудев А.И., Зильберг Ю.В., Тилик В.Т. Трение и смазки при обработке металлов давлением. М.: Машиностроение, 1982. 312 с.
25. [http://qform3d.ru/files\\_ru/2008\\_0001\\_0.pdf](http://qform3d.ru/files_ru/2008_0001_0.pdf) (дата обращения 12.09.2021).

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 621.01

**О СТРУКТУРНЫХ ГРАФАХ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ**

© 2023 г. М. Д. Ковалёв

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия**e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru*

Поступила в редакцию 24.08.2022 г.

После доработки 10.10.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

На примере плоских механизмов с вращательными парами проводится сравнение двух типов графов, которыми описывают их строение. Графы  $G$  первого типа, сопоставляющиеся шарнирно-рычажным механизмам, состоят из вершин, отвечающих шарнирам механизма, и из ребер, отвечающих его рычагам. Вершины графов  $\mathcal{G}$  второго типа отвечают звеньям механизма, а ребра — кинематическим парам. Оказывается, что при отсутствии совмещенных шарниров, графы  $G$  и  $\mathcal{G}$  равноценны для описания структуры механизмов. При наличии совмещенных шарниров граф  $\mathcal{G}$  и получаемый его модификацией в теории механизмов граф  $\mathcal{G}'$  в отличие от графа  $G$  не дают полной информации о структуре механизма.

*Ключевые слова:* математическая модель, структура механизмов, шарнирный механизм, структурный граф механизма

**DOI:** 10.31857/S023571192301008X, **EDN:** ASFXPT

Широко известно, что так называемые структурные формулы теории механизмов не всегда дают верный результат. Это относится и к простейшей и исторически первой из них, формуле Чебышева, выражающей число степеней свободы (степень подвижности) плоского шарнирно-рычажного механизма через число его звеньев и число вращательных пар. Причиной этого является сложность геометрической природы механизмов. Степень подвижности определяется не только числом кинематических пар и звеньев, но и порядком их соединения, т.е. строением механизма. Подходящий язык для описания строения механизмов доставляет математическая теория графов. Она все больше начинает применяться при изучении структуры механизмов [1–3]. С ее использованием автор [4, 5] предложил формализацию основных понятий теории механизмов на основе кинематической модели плоских шарнирно-рычажных устройств. Эта формализация позволяет дать критерий применимости к типичным<sup>1</sup> устройствам данной структуры формул для числа степеней подвижности. В ней строение шарнирно-рычажного механизма задается графом  $G$ , вершины которого отвечают шарнирам, а ребра отвечают звеньям, в качестве которых выступают несущие на своих концах шарниры прямолинейные стержни.

В теории же механизмов [1, 2] в качестве структурного графа принято брать граф  $\mathcal{G}$ , вершины которого отвечают звеньям, а ребра — кинематическим парам. В статье будет выяснено, равносильны ли описания строения плоских шарнирно-рычажных устройств графами  $G$  и  $\mathcal{G}$ . А также приведен критерий применимости структурной

<sup>1</sup> С математической точки зрения нетипичные устройства такого строения образуют множество неполной размерности в множестве всех устройств этого строения.

формулы к типичным плоским шарнирно-рычажным устройствам, строение которых задано графом  $\mathbf{G}$ .

**Кинематическая модель шарнирно-рычажных механизмов и граф  $\mathbf{G}$ .** Мы рассматриваем плоские шарнирно-рычажные устройства, составленные из прямолинейных абсолютно твердых стержней (рычагов), соединенных на своих концах шарнирами. Каждый рычаг несет по шарниру на своих концах, внутри рычагов шарниров нет<sup>2</sup>. Если в шарнире соединены лишь два рычага, то этому шарниру отвечает обычная вращательная пара, допускающая произвольное проворачивание в плоскости одного из рычагов относительно другого. Мы называем такой шарнир 1-шарниром. Если в шарнире соединены  $k > 2$  рычагов, то это так называемый совмещенный или сложный шарнир с одним общим центром вращения для всех  $k$  рычагов. Его мы называем  $(k - 1)$ -шарниром. В этом шарнире каждый из  $k$  рычагов допускает проворачивание, независимо от остальных рычагов. Если же конец рычага не соединен ни с каким другим рычагом, то в нем нет кинематической пары, но мы считаем его шарниром, и называем 0-шарниром. В теории механизмов принято рассматривать закрепленные в стойке конструкции. Мы будем проводить закрепление устройства в плоскости также допускающими полное проворачивание шарнирами, которые назовем закрепленными, и на рисунках будем обозначать крестиками в отличие от кружочков, отвечающих незакрепленным (свободным) шарнирам. В закрепленном шарнире имеется хотя бы одна кинематическая пара, и он не может быть 0-шарниром.

Нашему шарнирно-рычажному устройству естественно сопоставить граф<sup>3</sup>  $\mathbf{G}$ , вершины которого отвечают шарнирам, а ребра, понимаемые как соединяющие пары вершин отрезки прямых, отвечают рычагам. Граф  $\mathbf{G}$  мы считаем связным<sup>4</sup> без петель и кратных ребер. Более того, при наличии закрепленных шарниров, порожденный<sup>5</sup> свободными шарнирами подграф графа  $\mathbf{G}$  также считаем связным. Это условие налагается, чтобы не считать одним механизмом кинематически не связанные между собой устройства. И, естественно, в  $\mathbf{G}$  нет ребер, соединяющих вершины, отвечающие закрепленным шарнирам.

После задания в плоскости положений закрепленных шарниров исследование кинематики шарнирно-рычажных устройств с заданным графом  $\mathbf{G}$  сводится к исследованию множества решений системы квадратичных уравнений. А именно, уравнений, накладывающих условия на расстояния между шарнирами

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = d_{ij},$$

где  $(x_i, y_i)$  — координаты  $i$ -го шарнира  $p_i$ ;  $d_{ij}$  — квадрат длины рычага, несущего на концах шарниры  $p_i$  и  $p_j$ . Число уравнений равно числу рычагов в конструкции. Конфигурационное пространство механизма есть компонента связности положительной размерности множества решений этой системы. Компонентам связности нулевой размерности, т.е. состоящим из одной точки, отвечают шарнирные фермы.

В нашей идеализированной модели допускается пересечение различных рычагов и совпадение положений различных несмежных, т.е. не принадлежащих одному рычагу, шарниров.

<sup>2</sup> Если мы хотим поместить шарнир внутри рычага, то придется его закрепить там двумя рычагами, исходящими из концевых шарниров этого рычага.

<sup>3</sup> Его мы считаем абстрактным графом, т.е. совокупностью вершин и их неупорядоченных пар, называемых ребрами.

<sup>4</sup> Связность означает возможность перейти из любой вершины графа в любую другую его вершину по ребрам графа.

<sup>5</sup> То есть, состоящий из отвечающих свободным шарнирам вершин, и ребер, соединяющих эти вершины между собой.

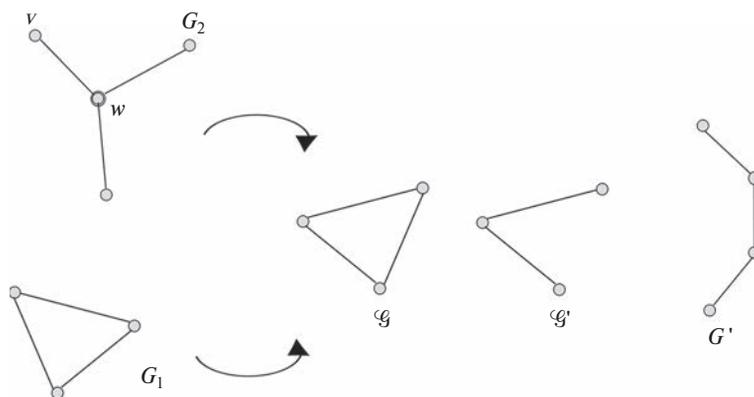


Рис. 1. Связь между графами и их реберными графами.

**Сравнение графов  $\mathbf{G}$  и  $\mathcal{G}$ .** Граф  $\mathcal{G}$  для нашего шарнирно-рычажного устройства мы получим, сопоставив каждому рычагу и стойке по вершине, а каждому  $k$ -шарниру при  $k > 0$  ребро, соединяющее вершины, отвечающие соединенным этим шарниром звеньям (либо двум рычагам, либо рычагу и стойке в случае закрепленного шарнира). 0-шарнирам ничего не сопоставляется.

Возникает вопрос: равносильно ли описание структуры шарнирно-рычажной конструкции с помощью графа  $\mathcal{G}$  ее описанию графом  $\mathbf{G}$ . На самом деле, нет, как показывает пример рис. 1. Для незакрепленных шарнирно-рычажных конструкций, для которых графом  $\mathbf{G}$  являются полный<sup>6</sup> граф  $G_1 = K_3$  и полный двудольный<sup>7</sup> граф  $G_2 = K_{1,3}$ , граф  $\mathcal{G}$  один и тот же, а именно  $K_3$ . Эти конструкции существенно различны: одна из них ферма, а другая – механизм с двумя степенями подвижности<sup>8</sup>. Итак, в этом случае по графу  $\mathcal{G}$  строение конструкции однозначно не восстанавливается. Граф  $\mathbf{G}$  несет все сведения о нем.

Однако если откинуть этот случай, то описания становятся равносильными.

Рассмотрим отвечающий незакрепленной шарнирно-рычажной конструкции граф  $G(V, E) = \mathbf{G}$ . Для него граф  $\mathcal{G}$  называют реберным<sup>9</sup> или смежностным по отношению к графу  $\mathbf{G}$ . Известна следующая теорема [6].

**Теорема.** Пусть  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{G}_1$  – связные графы, у которых реберные графы изоморфны<sup>10</sup>. Графы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{G}_1$  изоморфны всегда, кроме случая, когда один из них  $K_3$ , а другой  $K_{1,3}$ .

<sup>6</sup> Полным называют граф, содержащий все возможные ребра между данными вершинами.

<sup>7</sup> Полным двудольным  $K_{n,m}$  называют граф, вершины которого разделены на две доли: одна из  $n$  вершин, другая из  $m$  вершин, и каждая вершина одной доли соединена ребром с каждой вершиной другой доли.

<sup>8</sup> Если закрепить один из рычагов конструкции в плоскости, то размерность ее конфигурационного пространства будет равна двум.

<sup>9</sup> Реберный граф для графа  $\mathbf{G}$  в теории графов обычно обозначают как  $L(\mathbf{G})$ . Чтобы его получить, каждому ребру графа  $\mathbf{G}$  сопоставляют вершину графа  $L(\mathbf{G})$ , и если два ребра в  $\mathbf{G}$  имеют общую вершину, или, как говорят, смежны в этой вершине, то вводят в граф  $L(\mathbf{G})$  ребро между вершинами, отвечающими смежным ребрам.

<sup>10</sup> Изоморфные означает одинаково устроенные. Подробнее: графы имеют одно и то же число вершин, и их вершины можно занумеровать так, чтобы получились одинаковые списки ребер.

Из этой теоремы непосредственно вытекают следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Если в графе  $\mathbf{G}$  связной незакрепленной шарнирно-рычажной конструкции более четырех вершин, то он восстанавливается по графу  $\mathcal{G}$  с точностью до переобозначения вершин.

**Утверждение 2.** При отсутствии совмещенных шарниров описание структуры незакрепленной шарнирно-рычажной конструкции графом  $\mathcal{G}$  равносильно ее описанию графом  $\mathbf{G}$ .

Отметим, что в теории механизмов в случае наличия в устройстве совмещенных шарниров ему принято [1, 7] сопоставлять не граф  $\mathcal{G}$ , а модифицированный граф  $\mathcal{G}'$ . Граф  $\mathcal{G}'$  получается из графа  $\mathcal{G}$  удалением некоторых ребер. А именно, если  $\mathcal{G}$  содержит  $s$ -шарнир ( $s > 1$ ), то из полного подграфа  $K_{s+1}$ , отвечающего в  $\mathcal{G}$  этому шарниру, выкидывают часть ребер, чтобы получить включающее все вершины дерево<sup>11</sup>. Это можно сделать многими способами. В случае 2-шарнира (рис. 1) из подграфа  $K_3$  выкидывается одно из ребер. Однако такое действие ведет к потере информации о строении конструкции. Действительно, по полученному графу  $\mathcal{G}'$  невозможно восстановить граф  $\mathbf{G}$  нашей конструкции. Граф  $\mathcal{G}'$  (рис. 1) является реберным для графа  $\mathbf{G}$  не изоморфного ни графу  $\mathbf{G}_1$ , ни графу  $\mathbf{G}_2$ . Если взять в качестве  $\mathbf{G}$  граф  $K_{1,4}$ , то для него реберный граф  $\mathcal{G}$  есть полный граф  $K_4$ , а в качестве графа  $\mathcal{G}'$  можно выбрать, например, граф  $K_{1,3}$ , который, как легко понять, не является реберным графом ни для какого графа. Итак, в приведенных примерах по графу  $\mathcal{G}'$  граф  $\mathbf{G}$  не восстанавливается. Из этого следует вывод о том, что граф  $\mathcal{G}$  несет больше информации о строении шарнирно-рычажной конструкции, чем граф  $\mathcal{G}'$ .

**О структурных формулах.** Аналогом структурной формулы Чебышева для закрепленных устройств в нашей модели является формула

$$W = 2m - r, \quad (1)$$

где  $W$  – число степеней свободы;  $m$  – число свободных шарниров;  $r$  – число рычагов. В ней учитываются все свободные шарниры, в том числе и 0-шарниры. Смысл ее прозрачен: из числа степеней свободы всех незакрепленных шарниров вычитается число условий на их положения, налагаемых рычагами. Эти условия считаются независимыми. В отличие от формулы Чебышева эта формула справедлива и при наличии совмещенных шарниров.

Возможно такое строение механизма, что эта формула будет нарушаться в типичном случае, как это имеет место для механизма на рис. 2.

Хотя наша структурная формула дает нулевое число степеней свободы, типичное устройство такого строения есть механизм – шарнирный четырехзвенник с избыточной связью в шатунном звене. В этом случае независимо от выбора длин рычагов, налагаемые ими условия зависимы.

В комбинаторной теории жесткости [8, 9] найдены условия, необходимые и достаточные для независимости накладываемых рычагами условий в плоском случае. Опишем их. Для произвольного подграфа графа  $\mathbf{G}$  с  $m$  вершинами, отвечающими свободным шарнирам,  $n$  вершинами, отвечающими закрепленным шарнирам, и  $e$  ребрами (отвечающими рычагам конструкции) должны выполняться условия: 1) при  $n = 0$ ,  $e \leq 2m - 3$ ; 2) при  $n = 1$ ,  $e \leq 2m - 1$ ; 3) при  $n \geq 2$ ,  $e \leq 2m$ . Эти условия необходимы и достаточны для справедливости подсчета числа степеней свободы типичных шарнир-

<sup>11</sup>Деревом называют не содержащий циклов связный граф.

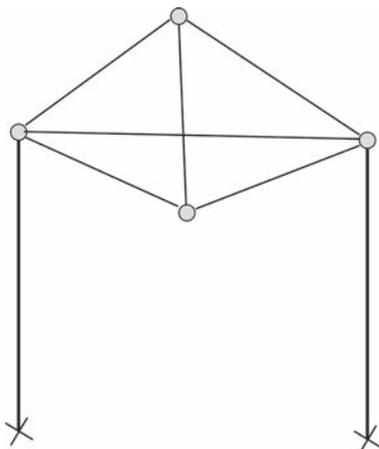


Рис. 2. Пример нарушения структурной формулы в типичном случае.

но-рычажных устройств по формуле (1). Отметим, что первое из них не выполняется для полного подграфа  $K_4$ , ребра которого нарисованы тонкими линиями на рис. 2.

**Заключение.** Строение механизмов может быть весьма сложным. Это сказывается уже при исследовании плоских механизмов с вращательными парами, структуре которых посвящены недавние работы [10, 11], выполненные в рамках традиционных понятий. Однако для анализа структуры даже шарнирно-рычажных устройств недостаточно оставаться в рамках традиционных понятий теории механизмов, таких как звенья, кинематические пары и кинематические цепи. Структуру механизмов естественно описывать графами. Одному механизму можно сопоставлять различные графы. Хотя описание графом  $\mathcal{G}$  носит общий, не зависящий от типа кинематических пар, характер, но в случае плоских шарнирно-рычажных механизмов предпочтительнее использовать граф  $\mathbf{G}$ . Особенно это заметно при изучении механизмов с совмещенными шарнирами. Использование графа  $\mathbf{G}$  позволяет на современном уровне решить вопрос о применимости аналога структурной формулы Чебышева к типичным плоским шарнирно-рычажным механизмам.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лейсах Э.Е., Нестеров В.А.* Системы проектирования плоских рычажных механизмов. М.: Машиностроение, 1988. 232 с.
2. *Диденко Е.В.* Разработка и анализ плоских многоконтурных механизмов на основе теории графов: Дис. ... канд. техн. наук, М.: ИМАШ РАН, 2019.
3. *Ding H., Hou F., Kecskemethy A., Huang Z.* Synthesis of a complete set of contracted graphs for planar non-fractionated simple-jointed kinematic chains with all possible dofs // *Mechanism and Machine Theory*. 2011. V. 46 (11). P. 1588.
4. *Ковалёв М.Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // *Известия РАН Серия математическая*. 1994. Т. 58. № 1. С. 45.

- 
5. Ковалёв М.Д. Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ, Серия Машиностроение. 2001. № 4. С. 33.
  6. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
  7. Rooney J., Wilson R.J. The mobility of a graph / Ed. by Koh K.M., Yap H.P. et al. // Conference proceedings. Graph Theory Singapore 1983. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984. V. 1073. P. 135.
  8. Graver J., Servatius B., Servatius H. Combinatorial Rigidity. American Mathematical Society, Providence, 1993. 172 p.
  9. Handbook of Geometric Constraint Systems Principles / Ed. by M. Sitharam, A.St. John, J. Sidman. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018. 577 p.
  10. Пожбелко В.И., Куц Е.Н. Целочисленный структурный синтез многоконтурных рычажных механизмов со сложными шарнирами для разных областей машиностроения // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2021. № 6. С. 23.
  11. Дворников Л.Т. О принципиальных некорректностях в исследованиях проф. Пожбелко В.И. по структуре механизмов // Теория механизмов и машин. 2016. № 3 (31). Т. 14. С. 145.

---

---

## НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

---

---

УДК 623.46.017

### ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ОБРАЗЦА ПО МАЛОЙ ВЫБОРКЕ БЕЗОТКАЗНЫХ ОПЫТОВ

© 2023 г. А. В. Смирнов<sup>1</sup>, Б. А. Белобрагин<sup>1</sup>, Б. А. Авотынь<sup>1</sup>, А. С. Левин<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Научно-производственное объединение “СПЛАВ” им. А.Н. Ганичева, Тула, Россия

\*e-mail: levin.as@splavtula.ru

Поступила в редакцию 13.09.2021 г.

После доработки 23.10.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Обсуждаются апостериорные оценки параметра надежности, полученные на основе математического ожидания параметра и дисперсии, вычисленных по результатам ограниченного количества опытов, проведенных по схеме Бернулли, с учетом дополнительной информации. Новизна полученных результатов содержится в прогнозах точности оценки показателя надежности в зависимости от метода учета априорной информации в дополнение к ограниченному количеству безотказных опытов. Область применения полученных результатов: оценки показателей надежности неремонтируемого высоконадежного образца однократного действия по малому количеству опытов с привлечением априорной информации.

*Ключевые слова:* надежность, теорема Байеса, метод моментов, метод максимального правдоподобия

**DOI:** 10.31857/S0235711923020098, **EDN:** COTZOM

Проведение определительных [1] натурных испытаний для оценки показателей надежности высоконадежных образцов очень затратно ввиду известного парадокса [2], согласно которому, чем выше показатель надежности изделия, тем сложнее его подтвердить. В этом случае, применяют расчетно-экспериментальные методы оценки показателей надежности с использованием априорной информации, позволяющие оценить надежность изделия по малому количеству опытов.

Выбор статистик, с помощью которых оцениваются показатели надежности, обусловлен причинами, лежащими за рамками настоящей статьи. Полагаем их обоснованными и включающими математическое ожидание и дисперсию.

Наполнение понятий “априорная или дополнительная информация”, “малое число наблюдений или малая выборка”, “точность оценки” и др. приведены в ГОСТ 27.201-81 [3].

Известные методы конструирования апостериорной оценки включают метод моментов, метод максимального правдоподобия, Байесовскую оценку и другие. Первые три получили наибольшее распространение. В современном зарубежном учебнике по теории вероятностей и математической статистике [4] специализированная глава 7 посвящена “наиболее распространенным методам оценки: методу моментов, методу максимального правдоподобия и Байесовским оценкам”. В современном отечественном учебном пособии [5] методы моментов, максимального правдоподобия и Байесовские оценки рассматриваются наряду с методом подстановки (с оговоркой о сложности его использования) и методом выборочных квантилей. То есть современные

воззрения на классификацию методов объединения текущей и априорной информации мало изменились по сравнению с [6]: 1) методы, использующие рандомизацию искомого показателя надежности и теорему Байеса; 2) метод линейного объединения несмещенных оценок надежности по критерию минимума дисперсии; 3) метод выделения главной части.

На форуме [7], посвященном проблемам реализации статистических методов на практике, вопросы сравнения точности и эффективности методов моментов и наибольшего правдоподобия на вопрос о научных статьях, содержащих сравнение этих методов, дается ссылка на работы Фишера 1920-х годов. Причина такого положения дел кроется в том, что каждый метод позволяет учитывать информацию вполне определенного типа [6, 8]. Поэтому последние опубликованные научные труды в основном посвящены повышению точности определенного метода для конкретных условий или повышению эффективности самой оценки точности апостериорного прогноза. Например, в работах [9, 10] рассмотрен метод наибольшего правдоподобия и обсуждаются математические выражения, определяющие эффективность оценки параметра этим методом. В [11] предлагается использовать метод моментов для оптимизации функции логарифмического правдоподобия, как заготовку для использования метода наибольшего правдоподобия.

Сравнение точности методов при контроле серийных партий изделий по критериям величин вероятностей пропуска дефектов и вероятности ложной тревоги (когда выводы, сделанные на основе выборочных данных переносятся на всю совокупность) рассматривается в работе [10]. При этом делается вывод, что наименьшую величину среднего риска принятия неправильного решения обеспечивает метод наибольшего правдоподобия.

Вопрос сравнения метода моментов и метода максимального правдоподобия рассматривается в большом количестве литературы [12–17] как через “призму” технических, так и экономических дисциплин. В диссертационной работе [15] сравниваются общепринятый метод моментов и предлагаемый в диссертации метод максимального правдоподобия. Показывается, что оценки параметров по методу максимального правдоподобия в моделях краткосрочных процентных ставок позволяют получить более точные оценки, согласно критерию смещения и меньшей дисперсии, что говорит о том, что метод максимального правдоподобия заслуживает большего внимания в теоретической разработке и имеет перспективу применения в регрессионных моделях по краткосрочной процентной ставке.

Статья [16] исследует оценки, полученные с использованием методов моментов и максимального правдоподобия в регрессионных моделях с гетероскедастичными (обладающими неравномерной дисперсией) данными. Показано, что применение метода моментов позволяет добиться меньшего смещения оценок параметров нежели с использованием метода максимального правдоподобия.

В обзорной работе [17] обсуждаются интервальные статистики. Показывается, что в теории оценок метод максимального правдоподобия обычно лучше (в смысле асимптотической дисперсии), чем метод моментов. Однако, существуют случаи в интервальной статистике, когда метод моментов дает лучшие результаты, например, при оценке параметров гамма-распределения. Правда эти и другие работы не затрагивают оценки показателей по малому числу опытов.

Сравним методы моментов, максимального правдоподобия и Байесовских оценок. За критерий сравнения методов примем точность апостериорной оценки. Мерой точности является разброс значений оценки относительно истинного значения параметра. Для несмещенных оценок обычно пользуются теоремой Рао–Крамера [4], полагая, что лучшая оценка является несмещенной оценкой с равномерно минимальной дисперсией (которая в иностранной литературе обычно обозначается как *UMVUE* [4]).

Однако: 1) для несмещенных оценок  $U$  и  $V$  случайной величины  $\lambda$   $U$  может обладать меньшей, чем  $V$  среднеквадратической ошибкой для некоторых наблюдаемых значений  $\theta$  случайной величины  $\lambda$ , в то время как  $V$  имеет меньшую среднеквадратическую ошибку для других значений  $\theta$ , так, что никакая оценка не будет однородно лучшей, чем другая; 2) часто мы не можем построить несмещенные оценки (в частности Байесовские или с использованием метода моментов). Иногда оценки являются лишь асимптотически несмещенными и состоятельными. Поэтому в качестве рабочего инструмента решения поставленной задачи в настоящей статье предложено рассматривать суммарную ошибку прогноза, включая в нее и среднеквадратическое отклонение оценки и смещение оценки.

Таким образом, предметом рассмотрения в настоящей статье является вопрос о допустимости и целесообразности использования апостериорных оценок, полученных с помощью рассматриваемых методов, для конкретного случая оценки показателей надежности высоконадежного образца с вероятностью безотказной работы 0.95 и более при его экспериментальной отработке по биномиальной схеме в условиях малого количества в пределах 15 безотказных экспериментов с привлечением дополнительной информации.

В анализируемой, наиболее часто используемой группе методов, описание которых можно найти в [12–14], полагается, что неизвестный показатель надежности  $P$  находится в некотором интервале и каждому возможному значению  $P$  соответствует определенное значение плотности вероятности  $f(P)$ . После проведения текущего испытания вероятность гипотез изменяется. Согласно Байесу выражение для условной плотности вероятности показателя  $P$  при некотором опытном значении  $\hat{P}$  имеет вид

$$f(P/\hat{P}) = \frac{f(P)f(\hat{P}/P)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(P)f(\hat{P}/P)dP},$$

где  $f(\hat{P}/P)$  – условная плотность вероятности опытного значения искомого показателя надежности  $\hat{P}$  при истинном его значении, равном  $P$ .

В функции  $f(P/\hat{P})$  сосредоточены статистическая информация, полученная в ходе текущего исследования, и априорная информация, содержащаяся в  $f(P)$ . Зная условную плотность распределения  $f(P/\hat{P})$ , можно оценить искомый показатель надежности на основе априорной информации о надежности и информации, полученной в ходе текущего исследования.

Сравним точность использования двух методов использования функции  $f(P/\hat{P})$  для оценки показателей надежности высоконадежных неремонтируемых образцов однократного применения: метода моментов и метода максимального правдоподобия. Каждый метод имеет ограниченную область применения и позволяет учитывать априорную информацию вполне определенного вида [6, 18].

**1. Метод моментов** предложен в 1894 г. Карлом Пирсоном, основывается на том, что первый теоретический момент для оцениваемых параметров приравнивают к эмпирическому [19].

Если оцениваемым параметром является вероятность безотказной работы  $P$ , а испытания проводятся по схеме Бернулли, описываемому биномиальным распределением

$$P_{N,m} = \binom{N}{m} P^{N-m} (1-P)^m, \quad (1)$$

где  $P$  – вероятность безотказной работы изделия, параметр распределения;  $P_{N, m}$  – вероятность того, что в  $N$  испытаний произошло  $m$  отказов;  $\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$  – число сочетаний из  $N$  по  $m$ , то первый теоретический момент  $v_1$  определится как математическое ожидание величины  $P$  [20]

$$v_1 = M\{P\} = \int_0^1 f(P|\hat{P}) \cdot P dP, \quad (2)$$

где  $f(P|\hat{P})$  – условная плотность вероятности случайной величины  $P$  при некотором опытном значении  $\hat{P}$ .

Первый эмпирический момент  $v_1^*$  для случайной величины  $P$  будет

$$v_1^* = \frac{1}{N} \sum_i^N P_i.$$

Полагая, что  $P$  для каждого образца приблизительно одинакова, получаем

$$v_1^* = \frac{1}{N} \sum_i^N P_i = \frac{NP}{N} = P. \quad (3)$$

В данном случае математическое ожидание случайной величины  $M\{P\}$  одновременно является оценкой случайной величины  $\hat{P}_0$  [20].

Согласно методу моментов из (2) и (3) и получим

$$P = \hat{P}_0 = \int_0^1 f(P|\hat{P}) \cdot P dP, \quad (4)$$

Формула Байеса для условной плотности вероятности случайной величины  $P$  при некотором опытном значении  $\hat{P}$  [6] имеет вид

$$f(P|\hat{P}) = \frac{f(P)f(\hat{P}|P)}{\int_0^1 f(P)f(\hat{P}|P)dP}. \quad (5)$$

Для дискретной случайной величины  $f(\hat{P}|P) = P_{N,m}$  [6]. Подставим в (5) выражение (1)

$$f(P|\hat{P}) = \frac{f(P) \binom{N}{m} P^{N-m} (1-P)^m}{\int_0^1 f(P) \binom{N}{m} P^{N-m} (1-P)^m dP} = \frac{f(P) P^{N-m} (1-P)^m}{\int_0^1 f(P) P^{N-m} (1-P)^m dP}. \quad (6)$$

Воспользуемся гипотезой о том, что плотность вероятности случайной величины  $P$  равномерно распределена на интервале от  $P_b$  до 1 (метод рандомизации)

$$f(P) = \begin{cases} 0, & 0 < P < P_b, \\ \frac{1}{1-P_b}, & P_b \leq P \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Подставим (6) в (2) в рамках гипотезы (7), учитывая, что при наличии априорных данных об известном  $P_b$ , нижний предел случайной величины  $P$  сместится от 0 к  $P_b$ .

$$\hat{P}_o = \int_{P_b}^1 P \frac{f(P)P^{N-m}(1-P)^m}{\int_{P_b}^1 f(P)P^{N-m}(1-P)^m dP} dP = \int_{P_b}^1 \frac{f(P)P^{N-m+1}(1-P)^m}{\int_{P_b}^1 f(P)P^{N-m}(1-P)^m dP} dP.$$

Выражение в знаменателе дроби – константа, следовательно, выражение для  $\hat{P}_o$  можно записать в виде

$$\hat{P}_o = \frac{\int_{P_b}^1 f(P)P^{N-m+1}(1-P)^m dP}{\int_{P_b}^1 f(P)P^{N-m}(1-P)^m dP},$$

или с учетом гипотезы (7)

$$\hat{P}_o = \frac{\int_{P_b}^1 \frac{1}{1-P_b} P^{N-m+1}(1-P)^m dP}{\int_{P_b}^1 \frac{1}{1-P_b} P^{N-m}(1-P)^m dP} = \frac{\int_{P_b}^1 P^{N-m+1}(1-P)^m dP}{\int_{P_b}^1 P^{N-m}(1-P)^m dP}. \quad (8)$$

Запишем выражение для безотказной ( $m = 0$ ) серии  $N$  опытов

$$\hat{P}_o = \frac{\int_{P_b}^1 P^{N-0+1}(1-P)^0 dP}{\int_{P_b}^1 P^{N-0}(1-P)^0 dP} = \frac{1-P_b^{N+2}}{N+2} \frac{N+1}{1-P_b^{N+1}},$$

или в общепринятом виде [3]

$$\hat{P}_o = \frac{N+1}{N+2} \frac{1-P_b^{N+2}}{1-P_b^{N+1}}. \quad (9)$$

Смещение  $\Delta$  оценки  $\hat{P}_o$  при безотказных опытах определяется как

$$\Delta = M\{P\} - P = \frac{N+1}{N+2} \frac{1-P_b^{N+2}}{1-P_b^{N+1}} - P. \quad (10)$$

При этом будем иметь в виду, что при применении других гипотез об априорной плотности распределения случайной величины  $P$ , поведение смещения оценки может меняться. Рекомендации иных способов учета априорной информации изложены в статье [18].

Дисперсия апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$

$$D_{\hat{P}_o} = \int_{P_b}^1 P^2 f(P|\hat{P}_o) dP - \hat{P}_o^2,$$

иначе

$$D_{\hat{P}_0} = \frac{N+1}{N+3} \frac{1-P_b^{N+3}}{1-P_b^{N+1}} - \left( \frac{N+1}{N+2} \frac{1-P_b^{N+2}}{1-P_b^{N+1}} \right)^2. \quad (11)$$

**2. Метод максимального правдоподобия.** Основу метода составляет нахождение корней уравнения (12), которые максимизируют функцию правдоподобия (13)

$$\frac{\partial L}{\partial P} = 0; \quad (12)$$

$$L = f(P|\hat{P}). \quad (13)$$

Согласно методу рандомизации

$$P = F(P') = \frac{P' - P_b}{1 - P_b}, \quad (14)$$

где  $P'$  – апостериорная вероятность безотказной работы.

Подставим (7) и (14) в (6) и получим

$$f(P|\hat{P}) = \frac{\left( \frac{P' - P_b}{1 - P_b} \right)^{N-m} \left( \frac{1 - P'}{1 - P_b} \right)^m}{\int_{P_b}^1 \left( \frac{P' - P_b}{1 - P_b} \right)^{N-m} \left( \frac{P' - P_b}{1 - P_b} \right)^m dP'}, \quad (15)$$

$$f(P|\hat{P}) = \frac{(P' - P_b)^{N-m} (1 - P')^m}{\int_{P_b}^1 (P' - P_b)^{N-m} (1 - P')^m dP'}$$

При безотказных испытаниях

$$f(P|\hat{P}) = \frac{(P' - P_b)^{N-0} (1 - P')^0}{\int_{P_b}^1 (P' - P_b)^{N-0} (1 - P')^0 dP'} = \frac{(P' - P_b)^N}{\int_{P_b}^1 (P' - P_b)^N dP'}$$

Найдем интеграл в знаменателе

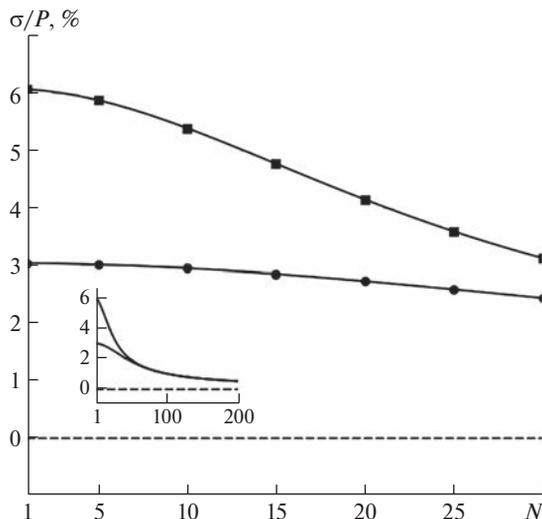
$$\int_{P_b}^1 (P' - P_b)^N dP' = \int_0^{1-P_b} (P' - P_b)^N d(P' - P_b) = \frac{(1 - P_b)^{N+1}}{N+1}, \quad (16)$$

$$f(P|\hat{P}) = \frac{(N+1)(P' - P_b)^N}{(1 - P_b)^{N+1}}.$$

Найдем решение уравнения (13)

$$\frac{\partial \frac{(N+1)(P' - P_b)^N}{(1 - P_b)^{N+1}}}{\partial P'} = 0,$$

$$\frac{N(N+1)(P' - P_b)^{N-1}}{(1 - P_b)^{N+1}} = 0.$$



**Рис. 1.** Среднеквадратические отклонения апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$ , полученной с использованием метода моментов (сплошная линия) и метода максимального правдоподобия (пунктирная линия для  $P_b = 0.8$  и  $P_b = 0.9$ ). Отметки “квадратом” соответствуют  $P_b = 0.8$ ; “точками” –  $P_b = 0.9$ .

Для первого уравнения при безотказных опытах существует очевидный корень

$$\hat{P}_o = P_b.$$

Таким образом, методу максимального правдоподобия присуще смещение оценки в случае безотказного числа опытов

$$\Delta = M\{P\} - P = P_b - P.$$

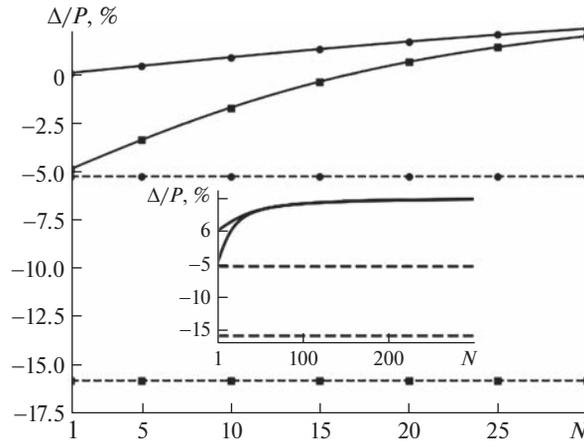
Дисперсия апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$ , полученной с использованием метода максимального правдоподобия [6]

$$D_{\hat{P}_o} = \frac{(\hat{P}_o - P_b)(1 - \hat{P}_o)}{N}.$$

Проследим за изменением количественных апостериорных оценок отдельно по критерию минимума интервальной оценки (precision) и критерию смещения оценки.

На рис. 1 представлены среднеквадратические отклонения  $\sigma = \sqrt{D_{\hat{P}_o}}$  апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$  в процентах от теоретически прогнозируемой величины  $P$ , полученной с использованием метода моментов и метода максимального правдоподобия, в зависимости от количества опытов при теоретическом прогнозе  $P = 0.95$ . На основной график (этого и всех последующих рисунков) наложен график в уменьшенном масштабе, позволяющий проследить асимптотичность зависимости.

Сопоставление среднеквадратических отклонений апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$  (рис. 1), полученной с использованием метода моментов и метода максимального правдоподобия, показывает, что отклонение апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$ , полученной с использованием метода максимального правдоподобия, равно нулю и не зависит от числа опытов и величины



**Рис. 2.** Смещение апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$ , полученной с использованием метода моментов (сплошная линия) и метода максимального правдоподобия (пунктирная линия). Отметки “квадратом” соответствуют  $P_b = 0.8$ ; “точками” –  $P_b = 0.9$ .

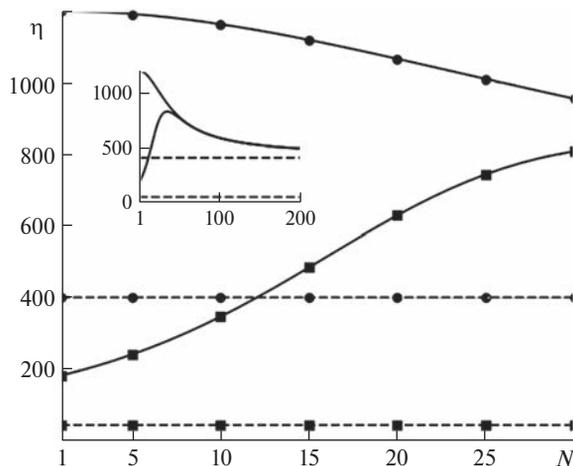
априорной вероятности. Методу моментов в рассматриваемом диапазоне ограниченной выборки присущ значительный доверительный интервал апостериорной оценки ( $\pm 3\sigma \approx \pm 15\%$  для 15 опытов и неудачно выбранной априорной оценки показателя надежности 0.8 при теоретической оценке 0.95). При увеличении числа опытов среднеквадратические отклонения апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$ , полученной с использованием метода моментов, стремятся к нулю также как и для метода максимального правдоподобия.

На рис. 2 приведены значения смещения апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$  в процентах к теоретически прогнозируемому значению  $P$ , полученной с использованием метода моментов и метода максимального правдоподобия в зависимости от количества опытов при теоретическом прогнозе  $P = 0.95$ .

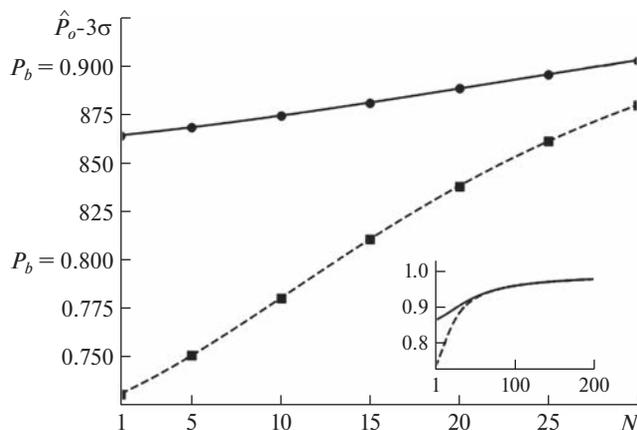
Анализ поведения величин смещения апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$ , показывает, что отрицательное смещение, присущее методу максимального правдоподобия, обусловлено априорной оценкой и не зависит от опытной оценки. При этом, чем больше разница между априорной оценкой и теоретически прогнозируемой для опытного образца, тем больше смещение. Например, при теоретически прогнозируемом значении показателя надежности, равном 0.95, и априорной вероятности безотказной работы 0.8, занижение апостериорной оценки составит 16%. Смещение апостериорной оценки вероятности безотказной работы, полученное с помощью метода моментов – положительное, составляет в пределе примерно 5% вне зависимости от априорной оценки. В рассматриваемом же диапазоне количества экспериментов (до 15 опытов) – смещение практически отсутствует.

Введем комплексный критерий точности апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$

$$\eta = \frac{1}{D_{\hat{P}_o} + \Delta^2}. \quad (17)$$



**Рис. 3.** Точность апостериорной оценки вероятности безотказной работы  $\hat{P}_o$ , полученной с использованием метода моментов и метода максимального правдоподобия: сплошная линия – метод моментов; пунктирная линия – метод максимального правдоподобия. Отметки “квадратом” соответствуют  $P_b = 0.8$ ; “точками” –  $P_b = 0.9$ .



**Рис. 4.** Оценка нижней границы апостериорного значения вероятности безотказной работы, полученной с использованием метода моментов: сплошная линия – для  $P_b = 0.9$ ; пунктирная линия – для  $P_b = 0.8$ .

На рис. 3 проиллюстрирован критерий точности для  $N$ -го количества опытов. Расчеты выполнены с использованием языка программирования *Python* и библиотек *SciPy* и *Matplotlib*.

Результаты расчетов (рис. 3), демонстрируют точность оценок согласно критерию (17) с использованием методов моментов и максимального правдоподобия. Согласно смыслу критерия, чем больше его значение, тем точнее метод. Замечаем, что метод моментов “выигрывает” по точности у метода наибольшего правдоподобия, особенно в области малого количества опытов.

Для иллюстрации проблемы приведем еще один приближенный график (рис. 4), на котором можно проследить характер изменения нижней границы апостериорной оценки показателя безотказности образца.

Из данных графика (рис. 4) следует, что в интересующем нас диапазоне количества опытов (до 15) нижняя граница апостериорной оценки значения показателя безотказности, полученная с использованием метода моментов, может быть значительно ниже априорной, что в ряде случаев может вызвать вопросы. Например, при использовании в конструкции опытного образца штатных составных частей апостериорная надежность опытного образца не должна сильно отличаться от надежности аналогов. В этом случае метод наибольшего правдоподобия дает более логичный результат.

Наконец, сравним точечные апостериорные оценки показателя надежности, полученные с использованием метода моментов и классического Байесовского распределения.

Расчет апостериорного распределения, согласно методу Байеса, следующий из распределения Пуассона (для малых вероятностей отказа совпадающего с Биномиальным законом распределения) запишем как

$$P_{N,m} = \frac{1}{m!} (Nq)^m e^{-Nq},$$

где  $q$  – вероятность одного отрицательного результата ( $q = 1 - P$ );  $m$  – количество отрицательных результатов.

Тогда согласно формуле Байеса (5), используя гипотезу о равномерном распределении величины  $q$  на интервале от  $a$  до  $b$ , запишем апостериорную плотность вероятности

$$f(q|\hat{q}) = \frac{\frac{1}{b-a} \frac{1}{m!} (Nq)^m e^{-Nq}}{\int_a^b \frac{1}{b-a} \frac{1}{m!} (Nq)^m e^{-Nq} dq} = \frac{(Nq)^m e^{-Nq}}{\int_a^b (Nq)^m e^{-Nq} dq}.$$

Функция распределения для данной плотности вероятности будет определяться выражением

$$F(q) = \int_0^1 f(q|\hat{q}) dq. \quad (18)$$

Точечная оценка вероятности безотказной работы по методу Байеса для последующего численного интегрирования описывается выражением

$$\hat{P}_0 = 1 - \frac{\int_0^1 q^{m+1} e^{-Nq} dq}{\int_{1-P_0}^1 q^m e^{-Nq} dq}. \quad (19)$$

Приведем график (рис. 5) для демонстрации разницы точечных оценок, полученных методом моментов и численно по методу Байеса (19).

Из графиков следует небольшое расхождение значений, полученных сравниваемыми методами, в рассматриваемой области.

Итак, в диапазоне малой экспериментальной выборки, к результатам испытаний которой приобщается априорная информация, еще до выбора метода приобщения необходимо предварительное сопоставление априорной информации с теоретически прогнозируемым для опытного образца с помощью представленного в настоящей статье математического аппарата, т.к. от соотношения априорных, опытных и теоретиче-

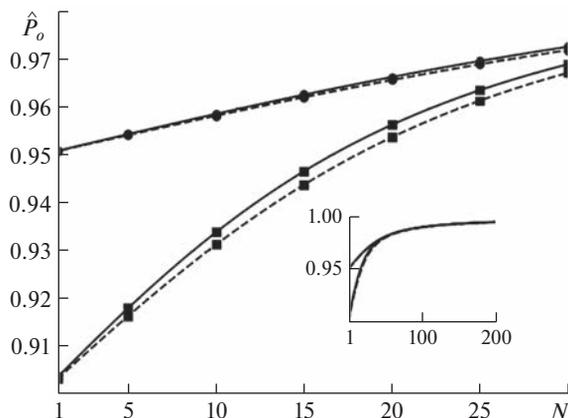


Рис. 5. Сравнение точечных апостериорных оценок вероятности безотказной работы  $\hat{P}_0$ , полученных с использованием метода моментов и метода Байеса: сплошная линия – метод моментов; пунктирная линия – метод Байеса. Отметки “квадратом” соответствуют  $P_b = 0.8$ ; “точками” –  $P_b = 0.9$ .

ски прогнозируемых данных и метода их обобщения сильно зависит результат апостериорной оценки.

**Заключение.** Для высоконадежных неремонтируемых образцов: **1.** При оценках показателя надежности по результатам ограниченного количества безотказных испытаний с учетом априорной информации важно учитывать то, что результат является смещенным. Смещение оказывает влияние на точность апостериорной оценки. **2.** Представленный в статье математический аппарат позволяет аргументированно подойти к выбору метода использования априорной информации в рамках прогнозирования апостериорной величины показателя безотказности. **3.** При условии достаточной уверенности в дополнительной информации (когда дисперсией априорной оценки можно пренебречь) анализу подлежит только дисперсия экспериментально полученного результата. При этом в области малого объема экспериментальной информации целесообразно исходить из большей приемлемости метода моментов.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- ГОСТ 27883-88 Средства измерения и управления технологическими процессами. Надежность. Общие требования и методы испытаний. М.: ИПК Изд-во стандартов, 1999. 12 с.
- Орлов А.И. Математические основы выборочного контроля качества. Теория принятия решений. М.: Март, 2004. 17 с.
- ГОСТ 27.201-81 Надежность в технике. Оценка показателей надежности при малом числе наблюдений с использованием дополнительной информации. Общие положения. М.: Изд-во стандартов, 1982. 27 с.
- Siegrist K. Probability Distributions on Partially Ordered Sets and Positive Semigroups. Alabama: University of Alabama in Huntsville, Department of Mathematical Sciences, 2016. 168 p.
- Марков А. Математическая статистика. Курс лекций МФТИ / Сайт МИРТ.ru. 2017. 49 с.
- Прохоренко В.А., Голиков В.Ф. Учет априорной информации при оценке надежности. Мн.: “Наука и техника”, 1979. 208 с.

7. Stack Exchange [Электронный ресурс], 2014. URL: <https://stats.stackexchange.com/questions/80380/examples-where-method-of-moments-can-beat-maximum-likelihood-in-small-samples>
8. Милехин Ю.М., Берсон А.Ю., Кавицкая В.К., Еренбург Э.И. Надежность ракетных двигателей на твердом топливе: Монография. М.: МГУП, 2005. 878 с.
9. Габарук В.В., Фоменко В.Н. Учет априорной информации о параметре в методе наибольшего правдоподобия // Известия Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I. 2016. № 3. С. 403.
10. Науменко А.П., Кудрявцева И.С., Одинец А.И. Учебное текстовое электронное издание локального распространения. Вероятностно-статистические методы принятия решений: теория, примеры, задачи. Омск: Изд-во Омского государственного технического университета, 2018. 85 с.
11. Wicklin R. The method of moments: A smart way to choose initial parameters for MLE // Analytics platform SAS Machine Learning 27.11.2017.
12. Денежкин Г.А., Белобрагин Б.А., Авотынь Б.А. Оценки показателя надежности неремонтируемого образца однократного действия по малым статистическим выборкам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 76.
13. Белобрагин Б.А., Авотынь Б.А., Устинкин А.И. Сравнительная эффективность статистик условных распределений для оценки показателя надежности высоконадежных неремонтируемых изделий однократного действия // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 2. С. 46.
14. Belobragin B.A., Avotyn' B.A., Ustinkin A.I. Consideration of A Priori Information under Serial Production of Nonrepairable Single-Action Items for Optimization of Sampling Plan Parameters // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. V. 49. № 7. P. 639.
15. Severin H. Comparing maximum likelihood and generalized method of moments in short term interest rate models. Bergen: University of Bergen, department of mathematics, 2016. 76 p.
16. Rohimatul A., Anik D., Aji Hamim W. Comparison of maximum likelihood and generalized method of moments in spatial autoregressive model with Heteroskedasticity // ICSEA, Indonesia, 2020. <https://doi.org/10.4108/cai.2-8-2019.2290489>
17. Orlov A.I. Interval statistics: maximum likelihood method and method of moments // J. of Mathematical Sciences. 1998. V. 88. № 6. P. 833.
18. Судаков Р.С., Чеканов А.Н. К вопросу об учете предварительной информации в схеме биномиальных испытаний // Надежность и контроль качества. М.: Изд-во стандартов, 1974.
19. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами / Под ред. В.Г. Горского. Пер. с англ. В.Д. Скаражинский. М.: Мир, 1973. 960 с.
20. Герасимович А.И. Математическая статистика. Учеб. пособие для инж. техн. и экон. спец. вузов. 2-е изд., перераб. и доп. Мн.: Вышш. школа, 1983. 279 с., ил.

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ**

---

---

**МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 621.01

**УЧЕТ ДОПУСКОВ ПРИ РАСЧЕТАХ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ**© 2023 г. А. О. Чернявский<sup>1,\*</sup>, О. Ф. Чернявский<sup>1</sup><sup>1</sup>Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

\*e-mail: cherniavskii@osusu.ru

Поступила в редакцию 26.10.2022 г.

После доработки 24.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Расчеты с учетом вариаций параметров конструкции в поле допусков, направленные на обеспечение надежности, должны учитывать не только допуски на геометрию деталей, но также допуски на свойства материалов и программу нагружения, и даже в большей мере. На примерах показано, что часто используемые подходы, например, задание во всей конструкции минимальных свойств материала в поле допусков, могут вести к ошибкам. Рассмотрены и редко оговариваемые допуски на программу нагружения; показано, что соответствующие вариации могут влиять на качественные особенности поведения конструкций и существенно менять коэффициенты запаса.

*Ключевые слова:* прочность, допуск, неупругое деформирование, разрушение

**DOI:** 10.31857/S0235711923020037, **EDN:** COUNGX

Современные постановки задач прочностного анализа часто включают в себя анализ решения при изменении параметров конструкции в пределах поля допусков, так называемое “робастное” моделирование. В распространенной форме такого моделирования случайные вариации размеров конструкции и свойств материалов учитываются путем использования метода Монте-Карло, требующего многократного повторения расчетов [1, 2]. Этот подход используется не только в исследовательских работах: коммерческие программы, реализующие метод конечных элементов, сейчас включают такие команды, как, например, \*PERTURBATION и \*MAT\_STOCHASTIC в пакете LS-DYNA. Такие расчеты нередко ориентированы на массовые конструкции и выбор параметров (включая поля допусков), обеспечивающих сочетание приемлемой вероятности безотказной работы с не слишком высокой ценой производства [3]. В англоязычной литературе такой подход получил название “Reliability Based Design Optimization”.

Для ответственных конструкций с высокой стоимостью отказа применение такого подхода затрудняется низкой допустимой вероятностью отказа. Необходимое число проб при использовании метода Монте-Карло оказывается слишком велико даже при использовании специальных приемов для повышения эффективности [4]. В этом случае вместо метода Монте-Карло можно использовать целенаправленный поиск “наихудшего” сочетания параметров, с точки зрения прочности. Обоснование границ изменения параметров, обеспечивающих выполнение требований прочности, может обозначаться термином “Robust Parameter Design” [5].

Вычислительные трудности и методы их преодоления обсуждаются в достаточно большом количестве работ, например [6–8] и др. Сложность и трудоемкость задачи

вынуждает вводить определенные ограничения, например, рассматривать только линейные системы, Гауссово распределение и т.п.

Высокоответственные опасные конструкции, кроме высоких требований к вероятности безотказной работы, осложняющих применение метода Монте-Карло, имеют еще одну особенность — эти конструкции часто являются высоконагруженными и работают за пределами упругости, в некоторых случаях, в условиях циклического неупругого деформирования. Поэтому допуски должны задаваться не только на величины (размеры, механические характеристики материала), но и на функции (диаграмму деформирования, изменение нагрузок во времени). При этом возникают как вычислительные проблемы, так и проблемы с недостатком исходной информации. Обсуждаемые в литературе ограничения на геометрию конструкции обычно являются малыми и строго оговоренными — по причинам, связанным не с прочностью, а с точностью и взаимозаменяемостью. Хотя в некоторых случаях даже такие малые допуски вызывают достаточно большой разброс напряжений [9]. Допуск на свойства материала обычно задается в форме нижней границы (“минимальные” значения свойств, как в нормативных документах [10, 11]), при этом обычно не регламентируется ни вариация свойств для конкретной детали, ни диаграмма деформирования, вариация которой при фиксированных значениях предела прочности и предела текучести может существенно влиять на прогноз прочности и долговечности. К вариациям свойств материала могут относиться и дефекты, например, трещины и поры в твердом материале или даже разрушенные (отсутствующие) элементы конструкции [12]. Допуск на программу нагружения может быть вообще не задан: так например, в технических характеристиках теплообменников приводятся значения максимального давления и температуры, но не оговариваются программы их изменения.

В некоторых случаях к задачам об учете допусков на случайные величины примыкают детерминированные, но плохо определенные задачи. Так, ограничение на скорость изменения температуры на внутренней поверхности стенки толстостенного сосуда давления, контролируемое по термопаре, размещенной на некоторой глубине в стенке, с учетом погрешностей измерения температур термопарой может давать достаточно большой диапазон скоростей изменения температур, и, соответственно, температурных напряжений на внутренней поверхности.

Рассмотренные вопросы непосредственно связаны с созданием эффективных и надежных (робастных) вычислительных процедур. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1. Допуск на геометрию.** Влияние вариаций размеров на напряженно-деформированное состояние деталей должно особенно сильно сказываться около концентраторов напряжений. Однако в качестве методического примера рассмотрим задачу, в которой концентратор напряжений как таковой отсутствует. Покажем, что даже в таких задачах учет допусков может быть нетривиальным.

Пусть деформируемая балка закреплена консольно и имеет на конце жесткий рычаг, к которому прикладывается нагрузка (рис. 1а). Предположим, что ось балки не является идеально прямой и в начальном состоянии, до приложения нагрузки, описывается некоторой гладкой функцией  $u_0(z)$ ; начальные отклонения малы по сравнению с длиной балки:  $\max|u_0(z)| = \delta \ll L$ . Будем считать балку достаточно жесткой (или нагрузки достаточно малыми) для того, чтобы задачу можно было решать в геометрически линейной постановке. Отклонение геометрии конструкции от идеальной приводит к тому, что плечи сил, и, соответственно, изгибающие моменты, отличаются от рассчитанных без учета этих отклонений. Если “допуск”  $\delta$  на величину начальных отклонений мал, то наибольший изгибающий момент возникает в сечении балки у заделки и задача легко решается аналитически.

Предположим, что начальная форма балки описывается кубическим многочленом вида  $u_0(z) = B_1 z^2 + B_2 z^3$  (у заделки  $v(z) = 0$  и  $dv/dz = 0$ ). На рис. 1б сплошной черной

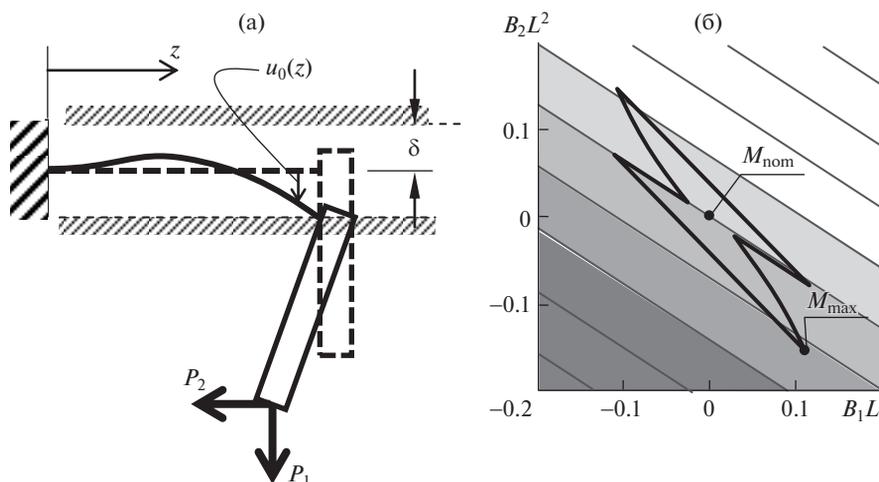


Рис. 1. Пример учета допусков на геометрию (пояснения в тексте).

линией показана область в пространстве  $B_1$ – $B_2$ , в которой  $\delta = \max|u_0(z)| \leq 0.02L$ . Линиями уровня показаны значения моментов в сечении у заделки – с учетом изменения плеч этих сил вследствие начальных отклонений формы (показан пример для  $P_1 = P_2 = 1$  и  $a/L = 5$ ).

Отметим, что максимальный момент достигается в угловой точке области допустимых значений  $B_1$  и  $B_2$ , попадание в которую при использовании метода Монте-Карло в классической постановке маловероятно (либо требует большого числа испытаний). Более того, для разных значений отношения  $a/L$  углы области, в которых достигаются максимальные моменты, различны.

**Пример 2. Допуск на геометрию.** Рассмотрим шарнирно закрепленный стержень при сжимающей нагрузке (хорошо известная задача Эйлера). Предположим, что ось стержня в ненагруженном состоянии не является прямой (рис. 2), допуск на геометрию оси имеет вид

$$|u_0(z)| \leq a; \quad u_0(0) = u_0(l) = 0.$$

Поставим задачу поиска такой начальной формы оси  $u_0(z)$ , которая приводит к максимальной прогибу при определенной нагрузке  $P_0$  (рис. 2б)

$$u_0(z): |u(z, P_0)| \rightarrow \max.$$

Очевидное решение этой задачи показано на рис. 2в. В полном соответствии с известными теоретическими решениями теории оптимального управления это решение является разрывным

$$u_0(0) = u_0(l) = 0, \quad u_0(z) = a, \quad \forall z \neq 0, l,$$

что, конечно, противоречит физике задачи (если не рассматривать допуск на положение точки приложения силы на торце стержня). Добавление ограничений на непрерывность и гладкость функции  $u_0(z)$  не исправляет положения – оптимальное решение будет настолько близко к разрывному, насколько это позволят введенные дополнительные ограничения на вид  $u_0(z)$ .

**Пример 3. Допуск на свойства материала.** Вариацию свойств материала по объему детали можно вызвать изменениями, вызванными контролируруемыми либо неконтро-

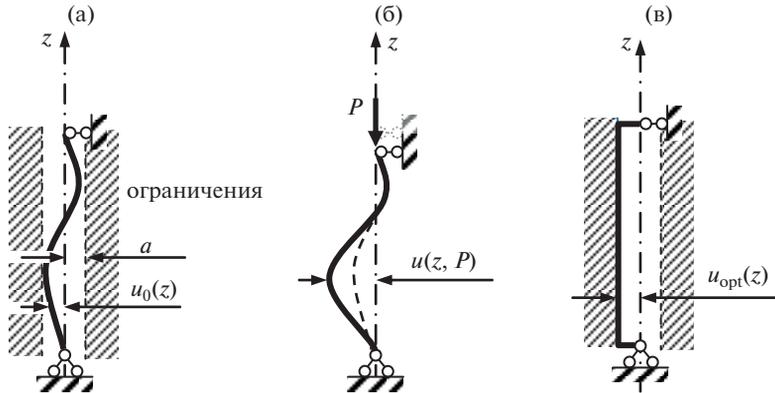


Рис. 2. Поиск формы стержня, обеспечивающей максимальный прогиб при заданной нагрузке.

лируемыми (не фиксируемыми) технологическими факторами. Вариация свойств, обусловленная технологией (в частности — пластической деформацией), может быть учтена. По-видимому, одной из первых подробных работ в этом плане была работа [13]. В настоящее время попытки такого учета включаются в коммерческие пакеты МКЭ, хотя и в ограниченном объеме (например, как в пакете LS-DYNA, где есть специальные команды для переноса остаточных напряжений из задач штамповки в задачи расчетов конструкций на прочность). Однако исходные данные для учета влияния технологии на свойства не относятся к стандартным справочным характеристикам материала, хотя влияние деформационного и циклического упрочнения (в первых — технологических — циклах) может быть достаточно велико [14].

Разбросы второго типа, вызванные трудно контролируруемыми факторами, обычно рассматриваются как случайные. Наиболее распространенным способом их учета является использование “минимальных” свойств. Понятие “минимальный” может использоваться либо в статистическом смысле, с заданной доверительной вероятностью [15], либо не уточняться и относиться к определенному уровню технологии изготовления и контроля [11].

Принято считать, что использование в расчетах материала с однородными “минимальными” (в любом заданном смысле) свойствами обеспечивает получение нижней оценки прочности. В некоторых случаях это можно строго доказать. Например, кинематическая теорема теории предельного равновесия позволяет утверждать, что равномерно распределенные по детали минимальные свойства действительно обеспечивают нижнюю оценку предельной нагрузки для конструкции из идеально пластического материала, т.е. нагрузки, малое приращение которой вызывает большое приращение перемещений.

Однако возможны и другие постановки задач — с другими ответами. Рассмотрим, например, конструкцию из двух параллельных стержней, соединенных абсолютно жесткой и абсолютно прочной балкой (рис. 3а). Пусть материал стержней — упруго-пластический с линейным упрочнением и конечной разрушающей деформацией (рис. 3б).

На рис. 3в показаны зависимости “сила—перемещение точки приложения силы” для конструкций из стержней с одинаковыми и различными свойствами. Повышение свойств одного стержня приводит к тому, что пластические деформации в нем не возникают, и концентрируются только в более слабом стержне. Предельная нагрузка при этом не меняется, но соответствующее ей перемещение уменьшается вдвое. Таким об-

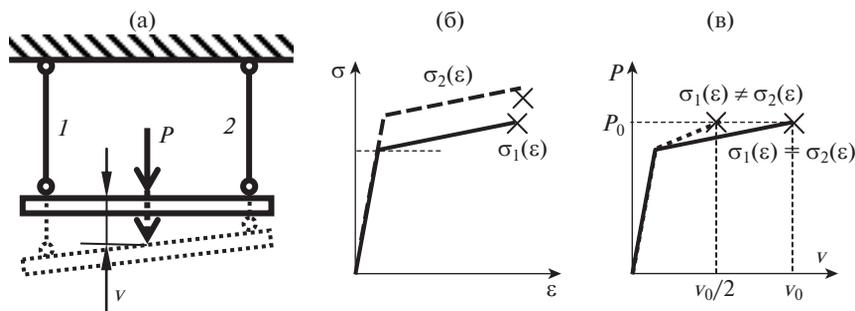


Рис. 3. Модельная конструкция (пояснения в тексте).

разом, если прочность конструкции оценивается по возможности достижения определенного перемещения (что нередко встречается, например, в теплонапряженных конструкциях), использование равномерно распределенных минимальных свойств может не давать нижней оценки прочности.

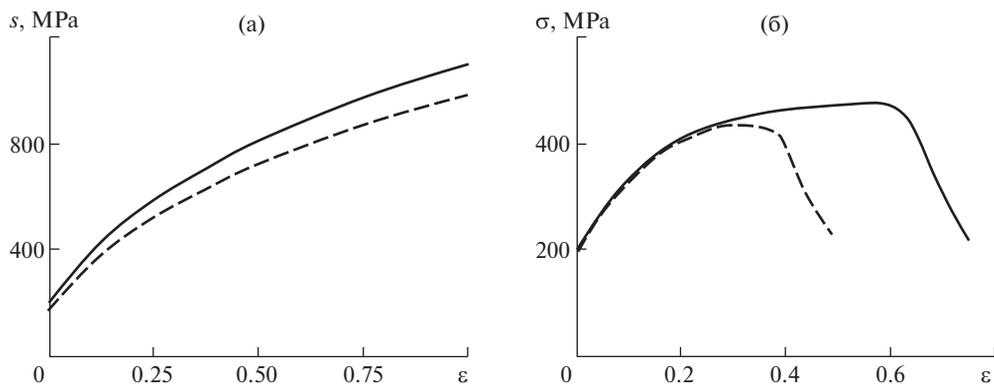
Несложно построить аналогичные примеры и для непрерывных конструкций — например, растяжения полосы.

Одной из особенностей учета допусков на свойства материала является проявляющаяся в некоторых задачах неустойчивость — существенное изменение поведения конструкции при относительно небольшом изменении свойств материала. В качестве примера на рис. 4 приведены диаграммы деформирования круглых 5-кратных образцов, полученные расчетом с учетом геометрической нелинейности (образования шейки). Истинная диаграмма деформирования, восстановленная с использованием формул из [10] (Section VIII, Division 2, Annex 3-D) по справочным свойствам аустенитной стали 12X18H10T, показана сплошной линией. Снижение величины упрочнения на истинной диаграмме на 10% (штриховая линия) приводит к практически 2-кратному снижению деформации, соответствующей пределу прочности. Для сравнения: отличия диаграмм деформирования этой стали в двух последовательных циклах с амплитудой пластической деформации 0.6% (очень небольшой по технологическим меркам) приводит примерно к 10%-ному изменению диаграммы [14]. Выбранный материал 12X18H10T характеризуется большим деформационным упрочнением, для материалов с малым упрочнением эффект еще более выражен.

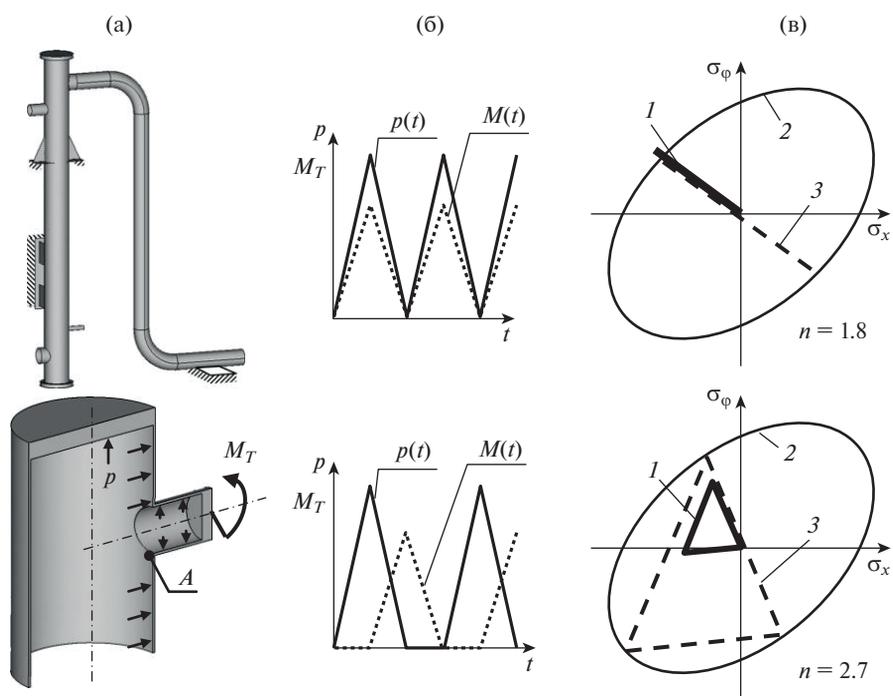
**Пример 4. Допуск на программу нагружения.** Рассмотрим в качестве примера место присоединения патрубка к корпусу теплообменника (рис. 5а). Теплообменник нагружен внутренним давлением. Горячий теплоноситель вызывает нагрев и тепловое расширение патрубка, приводящее к появлению напряжений (“напряжения компенсации” по классификации Норм [11]); на рис. 5а показан момент  $M_T$ , создаваемый этим температурным расширением патрубка.

При пуске и остановке теплообменника давление и температура, или, что то же, давление  $p$  и момент  $M_T$ , меняются по времени, программы их изменения определяют изменение напряжений в точке А. Эти изменения зависят от параметров конструкции — длины трубы, толщины стенки, температуры, скорости изменения потока и т.д. Рассмотрим две различные возможные программы изменения  $p$  и  $M_T$  во времени (рис. 5б) учитывая, что технические требования к конструкции часто регламентируют лишь максимальные значения этих параметров, не регламентируя соотношение между ними.

На рис. 5в в координатах “осевое напряжение  $\sigma_x$ —окружное напряжение  $\sigma_\varphi$ ” жирной линией 1 показан годограф условных упругих напряжений, соответствующих



**Рис. 4.** Диаграммы деформирования: (а) – истинные  $s(\epsilon)$ ; (б) – рассчитанные по ним условные  $\sigma(\epsilon)$ . Сплошная линия – по справочным данным для стали 12Х18Н10Т, штриховая – для сниженного на 10% упрочнения.



**Рис. 5.** Изменение напряжений в модельной конструкции: (а) – схема конструкции; (б) – программы нагружения; (в) – напряжения (пояснения в тексте).

приведенной слева программе изменения нагрузок. Тонкой линией 2 показана поверхность текучести, линией 3 – масштабированный годограф напряжений, вписанный в поверхность текучести для определения запаса по знакопеременному течению, рядом приведены вычисленные коэффициенты запаса (процедура определения коэф-

фициента запаса и ее программная реализация описаны в [16]). Видим, что разным программам нагружения соответствуют не только существенно разные коэффициенты запаса  $n$ , но и разные механизмы деформирования: в первом случае имеет место знакопеременное деформирование без накопления деформаций (и разрушение путем образования трещины малоциклового усталости), а во втором случае – сочетание знакопеременного течения с односторонним накоплением деформаций и возможностью квазистатического разрушения.

**Обсуждение.** Трудоемкость использования метода Монте-Карло для учета допусков и недостаточная его надежность при ограниченном количестве испытаний (пример 1), со сложной формой области определения параметров функции, подталкивают к использованию либо методов оптимизации с поиском “наихудшей” по заданному критерию конструкции в поле допусков, либо прямых методов, аналогично тому, как это делается при определении предельных нагрузок. Проблемой является не столько поиск подходящего алгоритма, сколько формулировка ограничений – подобно тому, как в примере 2 требуются дополнительные ограничения на гладкость функции, численные значения которых неочевидны.

При постановке задачи оптимизации следует учитывать, что ограничения отклонений геометрии конструкции от идеальной, проверяемые в каждом узле конечно-элементной сетки, приведут не только к большой трудоемкости задачи, но и к нефизическим результатам (пример 2). Возможным вариантом является постановка задачи оптимизации, в которой отклонения геометрии конструкции от идеальной задаются положением некоторого количества узлов (не всех). Проверка выполнения ограничений не во всех, а лишь в выбранных узлах, расширит допустимую область и даст, таким образом, нижнюю оценку прочности.

Еще большей проблемой является учет допусков на свойства материала и программы нагружения, особенно при повторных нагружениях за пределами упругости (примеры 3, 4). Независимо от метода поиска “наихудшей конструкции” – Монте-Карло или направленная оптимизация – эти задачи оказываются очень трудоемкими. Одним из выходов, по-видимому, является комбинация направленной оптимизации с “прямыми” методами оценки предельной нагрузки – по аналогии с прямыми методами теории приспособляемости.

Оценка того, что найденное решение действительно является оптимальным (в рассматриваемых случаях – наихудшим с точки зрения прочности конструкции), обычно делается с использованием понятия чувствительности. В некоторых случаях используются комбинированные подходы с одновременным требованием и достижения экстремума и малой чувствительности [6]. При этом оценки чувствительности можно использовать либо для доказательства того, что найденное решение действительно является экстремальным, либо для обоснования поля допусков. Однако в реальных задачах использовать чувствительность для этого второго применения достаточно трудно, поскольку часть допусков задается из других соображений (например, конструкторских), а другие допуски (например, на программу нагружения) трудно описать в этих терминах и контролировать.

**Заключение.** Задачу о влиянии допусков и организации “надежного” моделирования можно поставить как в вероятностной, так и в детерминированной постановке. Первая предполагает ответ на вопрос о возможной доле отказов и пригодна для массовых конструкций. Вторая постановка задачи – обеспечение гарантированного функционирования конструкции при вариации ее параметров в поле допусков – более актуальна для единичных ответственных конструкций, хотя, конечно, может использоваться и для массовых. Эта вторая постановка требует разработки методов поиска

наихудшего сочетания параметров, т.к. использование метода Монте-Карло оказывается либо слишком затратным, либо ненадежным.

Приведенные в статье примеры демонстрируют некоторые сложности на этом пути. Наиболее трудным вопросом является назначение, обоснование и контроль допуска на программу нагружения при многопараметрическом нагружении. Сложным вопросом оказывается также назначение допусков на свойства материала в задачах с нелинейным деформированием. Рассматриваемые во многих работах вопросы допусков на геометрию детали, также имеют значение, хотя и меньшее, чем допуски на программу нагружения и свойства материала.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stefanou G.* The stochastic finite element method: Past, present and future // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009. V. 198 (9–12). P. 1031.  
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.11.007>
2. *Лепухин А.М., Махутов Н.А., Москвичев В.В., Черняев А.П.* Вероятностный риск-анализ конструкций технических систем. Новосибирск: Наука, 2003. 174 с.
3. *Khodaygan S.* A framework for tolerance design considering systematic and random uncertainties due to operating conditions // *Assembly Automation*. 2019. V. 39 (5). P. 854.  
<https://doi.org/10.1108/AA-10-2018-0160>
4. *Rosa U.L., Goncalves L.K.S., de Lima A.M.G.* Robust design of stochastic dynamic systems based on fatigue damage (Conf. Paper) // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2021. P. 406.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-53669-5\\_30](https://doi.org/10.1007/978-3-030-53669-5_30)
5. *Robust Parameter Design*. In: *Process Optimization*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer, Boston, MA. 2007. V. 105. P. 223.  
[https://doi.org/10.1007/978-0-387-71435-6\\_9](https://doi.org/10.1007/978-0-387-71435-6_9)
6. *Lee K.-H., Park G.-J.* Robust optimization considering tolerances of design variables // *Computers and Structures*. 2001. V. 79 (1). P. 77.  
[https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00117-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00117-6)
7. *Couture A., Francois V., Cuilliere J.-C., Pilvin P.* Automatic statistical volume element modeling based on the unified topology model // *Int. J. of Solids and Structures*. 2020. V. 191. P. 26.
8. *Kriegesmann B.* Robust design optimization with design-dependent random input variables // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2020. V. 61. Iss. 2. P. 661.
9. *Похабов Ю.П., Шендалёв Д.О., Колобов А.Ю., Наговицин В.Н., Иванов Е.А.* К вопросу установления коэффициентов безопасности и запасов прочности при заданной вероятности неразрушения силовых конструкций // *Сибирский аэрокосмический журнал*. 2021. Т. 22. № 1. С. 166.  
<https://doi.org/10.31772/2712-8970-2021-22-1-166-176>
10. ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section VIII – Rules for Construction of Pressure Vessels. Division 2 – Alternative Rules (BPVC-VIII-2-2019). American Society of Mechanical Engineers, 2019. 872 p.
11. *Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок ПНАЭ Г-7-002-86*. М.: Энергоатомиздат, 1989. 525 с.
12. *Martínez-Frutos J., Ortigosa R.* Robust topology optimization of continuum structures under uncertain partial collapses // *Computers and Structures*. 2021. V. 257. P. 106677.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106677>

13. *Зарубин В.С.* Прикладные задачи термочности элементов конструкций М.: Машиностроение, 1985. 293 с.
14. *Гохфельд Д.А., Гецов Л.Б., Кононов К.М. и др.* Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении. Справочник. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. 408 с.
15. *Ножницкий Ю.А., Качанов Е.Б., Голубовский Е.Р., Кувда В.К.* Требования к порядку и процедурам оценки расчетных значений характеристик конструкционной прочности металлических материалов основных и особо ответственных деталей при сертификации авиационных газотурбинных двигателей // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва. 2015. Т. 14. № 3-1. С. 37.
16. *Махутов Н.А., Чернявский О.Ф., Чернявский А.О., Гаденин М.М.* Условия существования знакопеременного неупругого деформирования при малоцикловом нагружении // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 5. С. 53.

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ  
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

---

---

УДК 51: 621.891

**УСТАНОВЛЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПОВЫШЕНИЯ  
ИЗНОСОСТОЙКОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО  
РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ**© 2023 г. Д. У. Хасьянова<sup>1,\*</sup>, М. А. Мукутадзе<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup>*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*<sup>2</sup>*Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия**\*e-mail: dinara.khasyanova@mail.ru**\*\*e-mail: murman1963@yandex.ru*

Поступила в редакцию 16.01.2022 г.

После доработки 17.10.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

Для повышения ресурса и уровня надежности в статье рассмотрен радиальный подшипник скольжения с металлическим покрытием поверхности вала и адаптированным к условиям трения опорным профилем подшипниковой втулки. Теоретическое исследование проведено с использованием общеизвестных уравнений движения микрополярной жидкости для “тонкого слоя”, уравнения неразрывности и уравнения, описывающего радиус расплавленного контура вала с учетом формулы скорости диссипации механической энергии. Найдено точное автомодельное и асимптотическое решение с учетом и без учета расплава покрытия, а также при учете зависимости вязкости смазочного материала и расплава покрытия, обладающих при ламинарном режиме течения микрополярными реологическими свойствами, от давления. Экспериментальное исследование модифицированного подшипника скольжения проведено на модернизированной машине трения модели ИИ 5018.

*Ключевые слова:* гидродинамический режим, повышение износостойкости, уровень надежности, металлическое покрытие, адаптированный профиль, фаз эволюции трибосистемы, расплавы покрытия

**DOI:** 10.31857/S0235711923010066, **EDN:** ASKRNH

Вопросы надежности машин всегда были актуальны для промышленности, а повышение их ресурса — важной задачей, имеющей большое экономическое значение. Для повышения эффективности производства и производительности труда возникает необходимость решения проблемы надежности вновь создаваемых и эксплуатируемых машин на этапе проектирования машин, когда принимаются принципиальные решения о конструктивном исполнении деталей и их сопряжений, применяемых материалах и технологиях, обеспечивающих требуемый уровень надежности. В этой связи данное исследование является актуальным, поскольку затрагивает проблемы прогнозирования и обеспечения показателей надежности одного из самых распространенных сопряжений деталей машин в технике — подшипника скольжения. При этом подшипники скольжения определяют безотказность работы машин и механизмов, а их ресурс лимитирует состояние (износ) рабочих поверхностей — поверхностей трения.

Отказы подшипников скольжения машин и технологического оборудования приводят к их полной остановке, прекращению производственных процессов, значитель-

ным временным и финансовым затратам. В связи с этим прогнозирование ресурса подшипников скольжения является актуальной проблемой как на этапе проектирования, так и на этапе эксплуатации машин и механизмов, что требует развития моделей отказов, методов расчета ресурса подшипников скольжения на основе физики процессов с учетом конструктивных, эксплуатационных и режимных факторов.

Разработке расчетной модели радиальных подшипников скольжения с металлическим покрытием посвящено значительное количество работ [1–5]. Однако процесс смазывания на расплавах покрытий не является самоподдерживающимся процессом. Для обеспечения самоподдерживающегося процесса смазывания подшипников скольжения возникает необходимость не только в наличии покрытия на одной из контактных поверхностей, но и постоянного наличия смазочного материала, которое можно обеспечить при постоянной подаче смазочного материала или пористым покрытием на другой контактной поверхности [6–15], а также нестандартным опорным профилем.

В предлагаемой статье приводится расчетная модель радиального подшипника скольжения с нестандартным опорным профилем подшипниковой втулки и покрытием поверхности вала с учетом зависимости вязкости смазочного материала и расплава покрытия, обладающая микрополярными реологическими свойствами в зависимости от давления при ламинарном режиме течения. Визуализация разработанных теоретических расчетных моделей и оценка их точности, выполненная на основе сравнения результатов их численного анализа и триботехнических параметров, рассчитанных по адекватным регрессионным моделям, полученным экспериментально, доказали их высокую эффективность, точность (в пределах 9–13%) и применимость во всем исследованном диапазоне размеров и нагрузочных скоростных режимов. Параллельный анализ уровня температуры в контактной области и величины коэффициента трения в процессе работы при постепенном прекращении подачи смазочного материала позволил установить последовательность фаз перехода от смазывания маслом к смазыванию металлическим расплавом при сохранении гидродинамического режима.

**Постановка задачи.** Рассматривается установившееся течение несжимаемой жидкости и расплава покрытия в рабочем зазоре, обладающее микрополярными реологическими свойствами. Подшипник с некруговым профилем опорной поверхности неподвижен, а вал при наличии легкоплавкого покрытия на его поверхности вращается со скоростью  $\Omega$ . В полярной системе координат (рис. 1)  $r'$ ,  $\theta$  с полюсом в центре вала уравнения контуров вала с легкоплавким покрытием  $C_1$ , вала с расплавленным контуром поверхности  $C_0$ , подшипниковой втулки некруговым профилем опорной поверхности  $C_2$  и подшипниковой втулки запишутся в виде

$$\begin{aligned} C_1 : r' &= r_0, & C_0 : r' &= r_0 - \lambda' f(\theta), \\ C_2 : r' &= r_1(1 + H) - a' \sin \omega\theta, & C_3 : r' &= r_1(1 + H), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H = \varepsilon \cos \theta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \theta + \dots$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{r_0}$ ,  $r_0$  – радиус вала с легкоплавким покрытием;  $r_1$  – радиус подшипниковой втулки;  $e$  – эксцентриситет;  $\varepsilon$  – относительный эксцентриситет;  $\lambda' f(\theta)$  – функция, определяющая профиль расплавленного контура покрытия вала;  $a'$  и  $\omega$  – амплитуда возмущения и параметр адаптированного профиля втулки соответственно.

Полагаем, что вязкостные характеристики зависят от давления по закону

$$\mu' = \mu_0 e^{\tilde{\alpha} p'}, \quad \kappa' = \kappa_0 e^{\tilde{\alpha} p'}, \quad \gamma' = \gamma_0 e^{\tilde{\alpha} p'}, \quad (2)$$

где  $\mu'$  – коэффициент динамической вязкости смазочного материала;  $\kappa'$ ,  $\gamma'$  – коэффициенты вязкости микрополярного смазочного материала;  $\mu_0$  – характерная вязкость

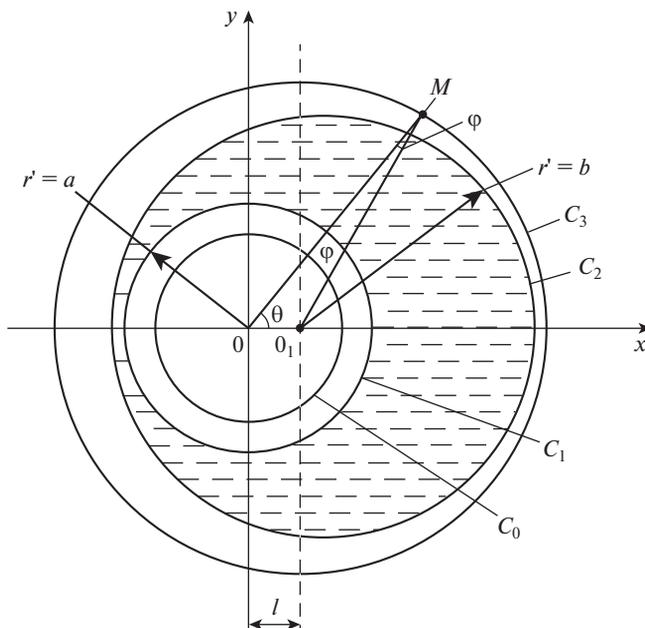


Рис. 1. Расчетная модель.

ньютоновского смазочного материала;  $p'$  – гидродинамическое давление в смазочном слое;  $\tilde{\alpha}$  – экспериментальная постоянная величина;  $\kappa_0$ ,  $\gamma_0$  – характерная вязкость микрополярного смазочного материала.

Исходными базовыми уравнениями с учетом (2) являются безразмерные уравнения: движения несжимаемой микрополярной жидкости для “тонкого слоя”, уравнение неразрывности и уравнение, описывающее профиль расплавленного контура покрытия поверхности вала с учетом скорости диссипации механической энергии с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + N^2 \frac{\partial v}{\partial r} &= e^{-\alpha p} \frac{dp}{d\theta}; & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{v}{N_1} + \frac{1}{N_1} \frac{du}{dr}; & \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} &= 0; \\ -\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} &= Ke^{-\alpha p} \int_{-\Phi(\theta)}^{h(\theta)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} \right)^2 dr, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u_0 = 0$ ,  $v = 0$ ,  $v = 0$  при  $r = 1 + \eta \cos \theta - \eta_1 \sin \omega \theta = h(\theta)$ ;

$$u = 1, \quad v = 0, \quad v = 1 \quad \text{при} \quad r = r_0 - \Phi(\theta); \quad p(0) = p(2\pi) = \frac{P_g}{p^*}, \quad (4)$$

где  $K = \frac{(2\mu_0 + \kappa_0)\Omega(r_0 - \lambda'f(\theta))}{L'\delta}$ ;  $\Phi(\theta) = \lambda'f(\theta)$ ;  $\eta = \frac{e}{\delta}$ ;  $\eta_1 = \frac{a'}{\delta}$ .

Переход к безразмерным переменным реализован на основе следующих формул:

$$r' = (r_0 - \lambda'f(\theta)) + \delta r; \quad \delta = r_1 - (r_0 - \lambda'f(\theta)); \quad v_{r'} = \Omega \delta u,$$

$$v_\theta = \Omega v (r_0 - \lambda' f(\theta)); \quad p' = p^* p; \quad p^* = \frac{(2\mu_0 + \kappa_0) \Omega (r_0 - \lambda' f(\theta))^2}{2\delta^2}; \quad (5)$$

$$v' = v, \quad \mu' = \mu_0 \mu, \quad \kappa' = \kappa_0 \kappa, \quad \gamma' = \gamma_0 \gamma,$$

$$N^2 = \frac{\kappa_0}{2\mu_0 + \kappa_0}; \quad N_1 = \frac{2\mu_0 l^2}{\delta^2 \kappa_0}; \quad l^2 = \frac{\gamma_0}{4\mu_0}.$$

Введя обозначение  $z = e^{-\alpha p}$  и учитывая, что зазор мал и  $v = 0$ , осредним второе уравнение системы (3) по толщине смазочного слоя, в результате получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{N^2}{2N_1 h} (2r - h) = -\frac{1}{\alpha} \frac{dz}{d\theta}; \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0; \quad v = \frac{1}{2N_1 h} (r^2 - rh);$$

$$z \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} = -K \int_{-\Phi(\theta)}^{h(\theta)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} \right)^2 dr, \quad (6)$$

с соответствующими граничными условиями

$$v = 0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 + \eta \cos \theta - \eta_1 \sin \omega \theta;$$

$$v = 0, \quad u = 1 \quad \text{при} \quad r = 0 - \Phi(\theta); \quad z(0) = z(2\pi) = e^{-\alpha \frac{p_g}{p^*}}. \quad (7)$$

Асимптотическое решение системы дифференциальных уравнений (6) с учетом (7) ищем по параметру  $K$ , характеризующему расплав покрытия

$$v(r, \theta) = v_0(r, \theta) + K v_1(r, \theta) + K^2 v_2(r, \theta) + \dots,$$

$$u(r, \theta) = u_0(r, \theta) + K u_1(r, \theta) + K^2 u_2(r, \theta) + \dots,$$

$$\Phi(\theta) = -K \Phi_1(\theta) - K^2 \Phi_2(\theta) - K^3 \Phi_3(\theta) - \dots,$$

$$p(\theta) = p_0(\theta) + K p_1(\theta) + K^2 p_2(\theta) + K^3 p_3(\theta) + \dots \quad (8)$$

Тогда уравнения (6)–(7) примут вид:

– для нулевого приближения

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{N^2}{2N_1 h} (2r - h) = -\frac{1}{\alpha} \frac{dz_0}{d\theta}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\partial u_0}{\partial \theta} = 0, \quad (9)$$

с граничными условиями

$$v_0 = 0, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 + \eta \cos \theta - \eta_1 \sin \omega \theta,$$

$$v_0 = 0, \quad u_0 = 1, \quad v_0 = 0 \quad \text{при} \quad r = 0 - \Phi(\theta); \quad z_0(0) = z_0(2\pi) = e^{-\alpha \frac{p_g}{p^*}}; \quad (10)$$

– для первого приближения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} = -\frac{1}{\alpha} \frac{dz_1}{d\theta}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} = 0, \quad z_0 \frac{d\Phi_1(\theta)}{d\theta} = -K \int_{\Phi}^{h(\theta)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} \right)^2 dr, \quad (11)$$

с граничными условиями

$$v_1 = \left( \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} \cdot \check{\Phi}; \quad u_1 = \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} \cdot \check{\Phi},$$

$$v_1 = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{при} \quad r = h(\theta) + \check{\Phi}, \quad (12)$$

$$z_1(0) = z_1(2\pi) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi) = h_0^*.$$

Точное автомодельное решение задачи для нулевого и первого приближения будем искать по известному методу [9, 10]. В результате для поля скоростей и давления получим следующие аналитические выражения:

– для нулевого приближения

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}'_0(\xi) &= \frac{\tilde{C}_2}{2}(\xi^2 - \xi), \\ \tilde{u}_0 &= \tilde{C}_1 \frac{\xi^2}{2} - \frac{N^2}{2N_1} \left( \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} \right) - \left( \frac{N^2}{12N_1} + \frac{\tilde{C}_1}{2} + 1 \right) \xi + 1, \quad \tilde{C}_1 = 6, \\ z_0 &= -6\alpha \left( \eta \sin \theta + \frac{\eta_1}{\omega} (\cos \omega\theta - 1) - \frac{\eta_1 \theta}{2\pi\omega} (\cos 2\pi\omega - 1) \right) + e^{-\alpha \frac{p_g}{p^*}}; \end{aligned} \quad (13)$$

– для первого приближения

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}'_1(\xi) &= \frac{\tilde{C}_2}{2}(\xi^2 - \xi), \quad \tilde{u}_1(\xi) = \tilde{C}_1 \frac{\xi^2}{2} - \left( \frac{\tilde{C}_1}{2} + M \right) \xi + M, \quad \tilde{C}_1 = 6M, \\ z_1 &= -6M\alpha \frac{\left( \tilde{\eta} \sin \theta + \frac{\tilde{\eta}_1}{\omega} (\cos \omega\theta - 1) - \frac{\tilde{\eta}_1 \theta}{2\pi\omega} (\cos 2\pi\omega - 1) \right)}{(1 + \tilde{\Phi})^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } \tilde{\eta} = \frac{\eta}{1 + \tilde{\Phi}}; \tilde{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{1 + \tilde{\Phi}}; \Phi_1(\theta) = \frac{1}{\sup_{\theta \in [0; 2\pi]} z_0} \left( \theta - \eta \sin \theta - \frac{\eta_1}{\omega} \cos \omega\theta \right) \left( 1 - \frac{N^4}{720N_1^2} \right) + I_0^*.$$

Применяя разложение в ряд Тейлора для функции  $e^{-\alpha p}$  и  $e^{-\alpha \frac{p_g}{p^*}}$ , получим

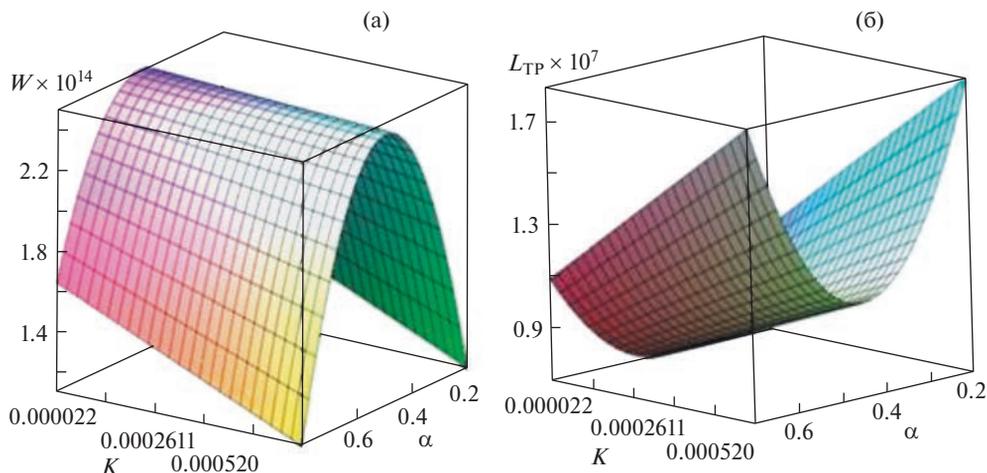
$$p = \frac{p_g}{p^*} - 6(A + KMB) \left( 1 + \alpha \frac{p_g}{p^*} - \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{p_g}{p^*} \right)^2 \right), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A &= - \left[ \eta \sin \theta - \frac{\eta_1}{\omega} (\cos \omega\theta - 1) + \frac{\eta_1 \theta}{2\pi\omega} (\cos 2\pi\omega - 1) \right]; \\ B &= \frac{\tilde{\eta} \sin \theta + \frac{\tilde{\eta}_1}{\omega} (\cos \omega\theta - 1) - \frac{\tilde{\eta}_1 \theta}{2\pi\omega} (\cos 2\pi\omega - 1)}{(1 + \tilde{\Phi})^2}. \end{aligned}$$

С учетом (9), (11) и (15) для составляющей вектора поддерживающей силы и силы трения получим

$$\begin{aligned} R_y &= p^* r_0 \int_0^{2\pi} \left( p - \frac{p_g}{p^*} \right) \sin \theta d\theta = \frac{6(2\mu_0 + \kappa_0) \Omega r_0^3}{\delta^2} \left( 1 + \alpha \frac{p_g}{p^*} - \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{p_g}{p^*} \right)^2 \right) \times \\ &\quad \times \left[ \eta\pi + \frac{\eta_1}{\omega} (\cos 2\pi\omega - 1) - KM \left( \frac{\tilde{\eta}\pi + \frac{\tilde{\eta}_1}{\omega} (\cos 2\pi\omega - 1)}{(1 + \tilde{\Phi})^2} \right) \right], \\ L_{\text{тр}} &= \mu \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=0} + K \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=0} \right] d\theta = (2\mu_0 + \kappa_0) \left( 1 - \alpha p + \frac{\alpha^2 p^2}{2} \right) \times \end{aligned} \quad (16)$$



**Рис. 2.** Влияние параметра  $\omega$ , характеризующего адаптированный профиль, и параметра  $\alpha$ , характеризующего зависимость вязкости от давления, на величину: (а) – несущей способности и (б) – силы трения.

$$\times \left[ -2\pi + \frac{\eta_{II}}{\omega} (\cos 2\pi\omega - 1) + \frac{N^2}{4N_1} \left( 2\pi + \frac{\eta_{II}}{\omega} (\cos 2\pi\omega - 1) \right) + \right. \\ \left. + \check{\Phi} K \left( 2\pi - \frac{2\eta_{II}}{\omega} (\cos 2\pi\omega - 1) \right) \right].$$

В результате численного анализа построены зависимости (рис. 2).

**Экспериментальное исследование.** Для подтверждения выводов, сделанных на основе теоретических результатов, а также для проверки эффективности сделанных рекомендаций проведено экспериментальное исследование.

При изготовлении образцов и проведении экспериментальных исследований использовался ряд материалов, марки и состав которых приведены в табл. 1.

Наименее трудоемкой и наиболее эффективной статистической методикой является применение стандартных оптимальных полнофакторных двухуровневых экспери-

**Таблица 1.** Применяемые материалы

№ п/п	Наименование	Марка	Состав	ГОСТ
1	Сталь	Сталь 45	C – 0.42–0.50%	1050-84
2	Бронза	Бр АЖ 9-4	Al – 9%, Fe – 4%	1628-78
3	Сплав Вуда	Сплав Вуда	Bi – 50%; Pb – 25% Sn – 12.5%; Co – 12%	10928-90
4	Медь порошковая	МП-1	Cu – 99.5%	4960-75
5	Авиационное масло	МС-20	по ГОСТ	21743-76
6	Турбинное масло	Тп-22С	по ГОСТ	101821-2001

Исходные данные для экспериментальных полнофакторных исследований приведены в табл. 2.

**Таблица 2.** План полнофакторных экспериментальных исследований типа  $2^2$ 

№ п/п	Переменные факторы		Величина переменных факторов			
	наименование	размерность	нижний уровень	верхний уровень	нулевой уровень	интервал варьиров
1	Контактная нагрузка	МПа	0.5	3.5	2.0	1.5
2	Скорость	м/с	1.0	2.0	1.5	0.5

ментальных планов типа  $2^k$ , позволяющее получить адекватные регрессионные модели для инженерных расчетов.

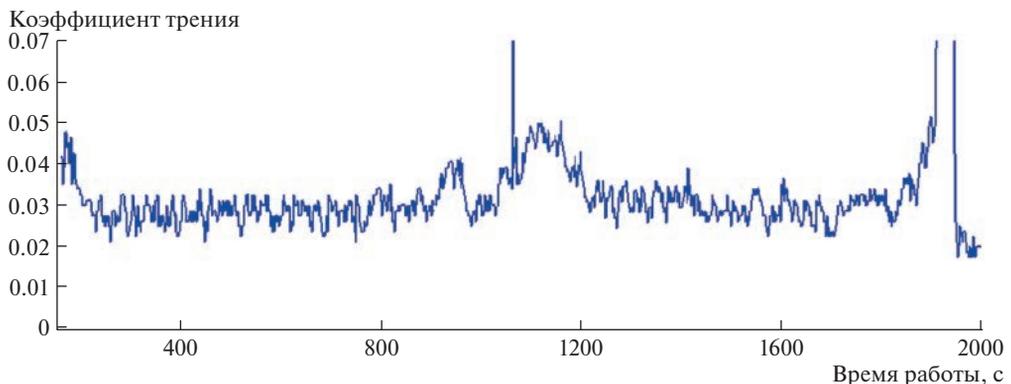
Схема экспериментальных исследований включала следующие этапы: 1 – работа в режиме гидродинамического смазывания; 2 – прекращение подачи жидкого смазочного материала смазывания; 3 – работа до полного расхода расплава или разрушения легкоплавкого покрытия.

При этом на компьютере постоянно фиксировалась величина коэффициента трения  $f$ , а предварительно устанавливалась несущая способность подшипника.

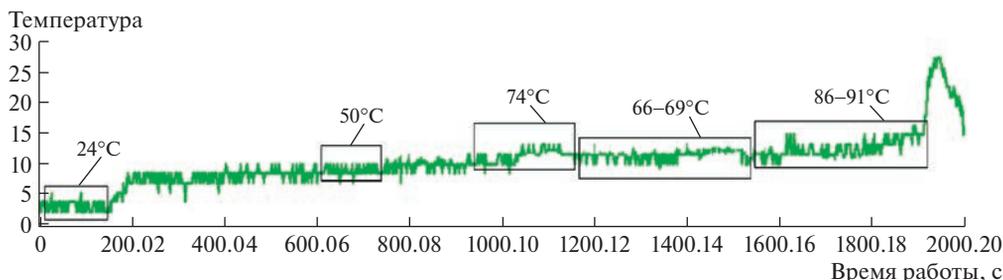
Наличие пленки жидкого смазочного материала имело место только на первом, начальном, этапе при смазывании маслом. Затем на втором, конечном, этапе подача смазочного материала прекращалась, и с ростом температуры подшипник смазывался металлическим расплавом. Гидродинамический режим смазывания сохранялся постоянно.

Примеры типичных осциллограмм изменений коэффициента трения и температуры в процессе работы исследуемой трибосистемы приведены на рис. 3, 4.

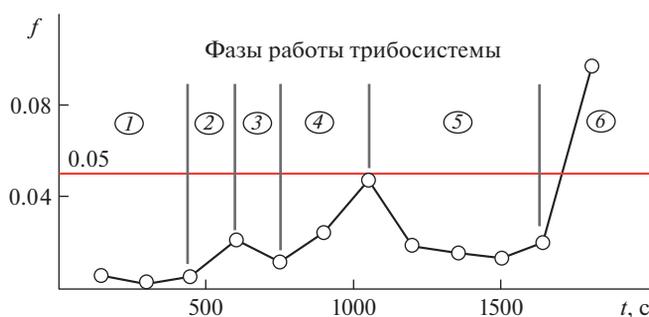
На приведенных осциллограммах можно отметить первоначальный незначительный рост температуры при смазывании маслом (гидродинамический режим) и более интенсивный – с прекращением его подачи. Затем температура растет до плавления покрытия ( $68^\circ\text{C}$ ), потом снижается в связи со смазыванием расплавом (гидродинамический режим) и растет до  $91^\circ\text{C}$ , а затем благодаря утечкам расплава и его расходу резко повышается.



**Рис. 3.** Осциллограмма изменений коэффициента трения, снятая в процессе испытаний модели радиально-го подшипника на машине трения с легкоплавким покрытием из сплава Вуда.



**Рис. 4.** Оциллограмма изменения температуры при испытаниях радиальных подшипников (машина трения ИИ 5018).



**Рис. 5.** Фазы эволюции трибосистемы: 1 – приработка; 2 – прекращение подачи смазочного материала; 3 – сухая приработка покрытия; 4 – уменьшение смазывания; 5 – смазывание расплавом; 6 – разрушение покрытия.

Точки на рис. 4 выбраны из фиксированной на компьютере оциллограммы через каждые 150 с. Оциллограмма получена на машине трения при смазывании авиационным маслом марки МС-20.

Схема перехода трибосистемы на смазывание расплавом представлена на рис. 5. Общий анализ оциллограмм изменений коэффициента трения и температуры контактной зоны испытываемых образцов радиальных и упорных подшипников скольжения позволил установить последовательность и выделить общие фазы исследуемого процесса гидродинамического смазывания металлическим расплавом в следующем виде.

Более подробно фазы эволюции трибосистемы (рис. 5): 1 – исходная работа в режиме гидродинамического смазывания жидким смазочным материалом; 2 – прекращение подачи жидкого смазочного материала, переход к “голодному” смазыванию, рост коэффициента трения и температуры; 3 – приработка контактной поверхности покрытия в условиях дефицита смазочного материала и некоторое снижение коэффициента трения; 4 – сухое трение, практически без смазочного материала, и дальнейший рост коэффициента трения и контактной температуры; 5 – плавление легкоплавкого металлического покрытия (сплав Вуда) и смазывание расплавом в гидродинамическом режиме; 6 – вытеснение расплава из зоны трения, резкий рост коэффициента трения.

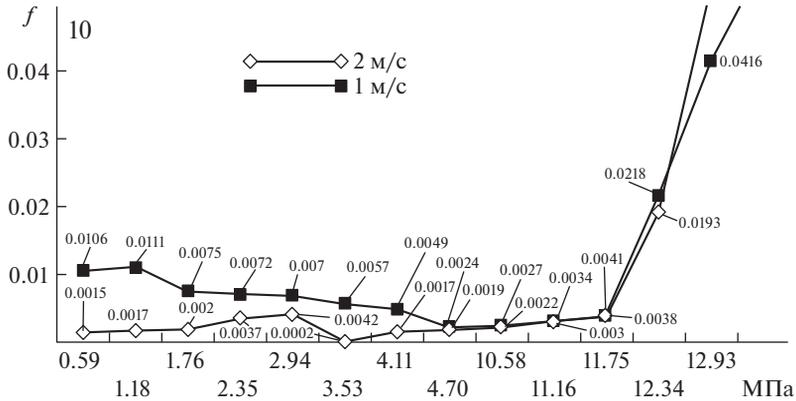


Рис. 6. Несущая способность исследуемых трибосистем.

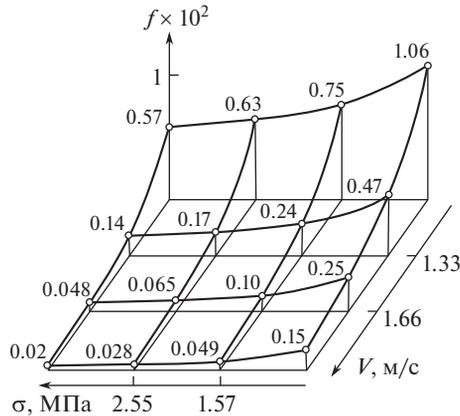


Рис. 7. Влияние нагрузочно-скоростных режимов на коэффициент трения подшипников.

Таким образом, установлены последовательные этапы механизма смазывания подшипников скольжения металлическими расплавами. Это может быть использовано как некоторая компенсация аварийного прекращения подачи смазочного материала, а также как определенный ограничитель температуры трибосистемы.

К основным эксплуатационным характеристикам исследуемых подшипников скольжения относятся их нагрузочная способность и коэффициенты трения в исследуемом диапазоне нагрузочно-скоростных режимов. Знание несущей способности позволяет ограничить нагрузку в области исследований для определения коэффициента трения (рис. 6–8).

В табл. 3 приведены результаты верификации расчетных моделей, полученных теоретически, путем их сравнения с данными экспериментальных исследований.

Величины коэффициентов трения (табл. 3), с высокой достоверностью подтверждают наличие стабильного гидродинамического режима смазывания в условиях проведенного эксперимента и удовлетворительную сходимость результатов эксперимента

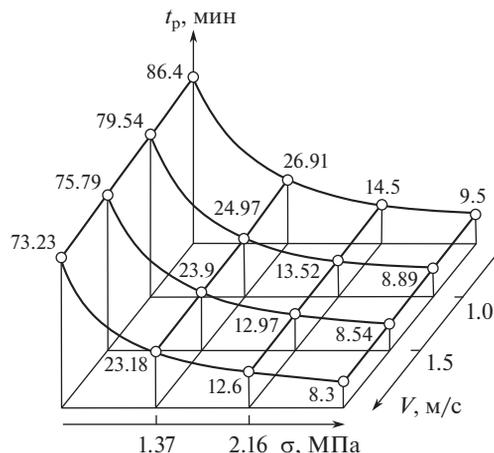


Рис. 8. Влияние нагрузочно-скоростных режимов на ресурс подшипников.

с итогами теоретических исследований. Наибольшая невязка сравниваемых величин не превышает 5%.

**Выводы. 1.** Оценка комплексного влияния гидродинамического давления на реологию микрополярных смазочных материалов (минерального масла и легкоплавкого металлического расплава) при получении расчетных моделей подшипников скольжения обеспечила повышение точности расчетов основных параметров трибосистем (коэффициента трения и несущей способности) на 8–11%. **2.** Визуализация разработанных теоретически расчетных моделей и оценка их точности, выполненная на основе сравнения результатов их численного анализа и триботехнических параметров, рассчитанных по адекватным регрессионным моделям, полученных экспериментально, доказала их высокую эффективность, точность (в пределах 9–13%) и применимость во всем исследованном диапазоне размеров и нагрузочно-скоростных режимов ( $d = 10–100$  мм;  $V = 0.5–11$  м/с;  $\sigma = 8–11$  МПа). **3.** Параллельный анализ уровня температуры в контактной области и величины коэффициента трения в процессе работы подшипника с легкоплавким металлическим покрытием при постепенном прекращении подачи жидкого смазочного материала в рабочую зону позволил установить последовательность фаз перехода от смазывания минеральным маслом к смазыванию металлическим расплавом при сохранении гидродинамического режима.

Таблица 3. Сравнение расчетных и экспериментальных коэффициентов трения при смазывании расплавом

№ п/п	Исходный смазочный материал	Режимы нагружения		Коэффициент трения, $f$		Погрешность, %
		$\sigma$ , МПа	$V$ , м/с	эксперимент	расчет	
1	МС-20	4.0	0.5	0.0270	0.0280	3–5
2	Тп-22С + + 5% Cu (вес)	4.0	0.5	0.0344	0.03270	
3		2.0	0.5	0.0318	0.03080	
4		4.0	2.0	0.0475	0.04860	
5	2.0	2.0	0.0437	0.04221		

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akhverdiev K. S., Mukutadze A.M.* Damper with porous anisotropic ring // *Mechanical Engineering Research*. 2016. V. 6. № 2. P. 1.
2. *Mukutadze M.A., Khasyanova D.U.* Optimization of the supporting surface of a slider bearing according to the load-carrying capacity taking into account the lubricant viscosity depending on pressure and temperature // *J. of Machinery Manufacture and Reliability*. 2018. V. 47. № 4. P. 356.
3. *Opatskikh A.* Ferromagnetic lubricants in a bearing with a porous coating of a base ring // *Key Engineering Materials*. 2022. T. 909 KEM. C. 123.
4. *Kharlamov P.* Application of elastic-dissipative characteristics of the friction contact monitoring for the study of tribological processes in the system “railway track-rolling stock” // *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022. T. 403 LNNS. C. 510.
5. *Куманин С.В.* Устойчивый режим работы клиновидной опоры скольжения повышенной несущей способности, работающей на сжимаемом смазочном материале и на собственном расплаве // *Инженерный вестник Дона*. 2022. № 6 (90). С. 766.
6. *Ильичев В.Ю.* Разработка методики определения характеристик упорных подшипников скольжения // *Научные известия*. 2022. № 26. С. 142.
7. *Кохановский В.А., Поляков В.Н.* Опорный профиль трибосистем скольжения // *Вестник машиностроения*. 2021. № 3. С. 53.
8. *Ахвердиев К.С., Болгова Е.А., Лагунова Е.О., Куманин С.В.* Гидродинамический расчет клиновидной системы “ползун-направляющая”, работающей на сжимаемом смазочном материале в условиях наличия расплава на поверхности направляющей // *Омский научный вестник*. 2021. № 2 (176). С. 10.
9. *Ахвердиев К.С., Болгова Е.А.* Клиновидная опора скольжения с податливой опорной поверхностью, работающая на сжимаемом материале в условиях наличия расплава на поверхности направляющей // *Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения*. 2021. № 2 (82). С. 8.
10. *Ахвердиев К.С., Василенко В.В., Лагунова Е.О.* Расчетная модель упорного подшипника с плавким покрытием ползуна и пористым покрытием направляющей // *Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения*. 2021. № 3 (83). С. 8.
11. *Vagrova V.N., Kolobov I.A.* Ways to improve wear resistance and damping properties of radial bearings taking into account inertial forces // В сборнике: *J. of Physics: Conf. Series. “Int. Conf. on Automatics and Energy, ICAE-2021”*. 2021. С. 012105.
12. *Задорожная Н.С.* Спектральная краевая задача колебаний невязкой жидкости бесконечной электропроводности // В сборнике: *Сборник научных трудов “Транспорт: наука, образование, производство”*. Труды Международной научно-практической конференции. 2020. С. 226.
13. *Ахвердиев К.С., Лагунова Е.О.* Математическая модель вязкоупругого смазочного материала // В сборнике: *Сборник научных трудов “Транспорт: наука, образование, производство”*. Труды Международной научно-практической конференции. 2020. С. 177.
14. *Ахвердиев К.С., Лагунова Е.О., Солон К.С.* Расчетная модель упорного подшипника скольжения на основе нелинейного реологического уравнения Максвелла с учетом существования предельного напряжения сдвига // *Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения*. 2015. № 4 (60). С. 129.
15. *Ахвердиев К.С., Колесников И.В., Митрофанов С.В., Копотун Б.Е.* Метод гидродинамического расчета упорного подшипника с учетом зависимости вязкости слоистой смазочной жидкости от температуры // *Инженерный вестник Дона*. 2015. № 3 (37). С. 141.

---

---

**НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В МАШИНОСТРОЕНИИ**

---

---

УДК 004

**РАЗРАБОТКА ЦИФРОВОГО КОНЦЕПТА  
НА ОСНОВЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ 3D-ОБЪЕКТОВ,  
ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО КОМФОРТНЫЕ УСЛОВИЯ РАБОТЫ  
ИНЖЕНЕРА-КОНСТРУКТОРА**© 2023 г. И. Д. Долгий<sup>1</sup>, А. М. Лященко<sup>1</sup>, Д. В. Глазунов<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>*Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия**\*e-mail: glazunovdm@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.06.2022 г.

После доработки 18.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

В статье приводится описание процесса создания трехмерных моделей на основе метода AAA-пайплайна. Установлено, что старт построения проекта и любой модели начинается с идеи, являющейся интерпретацией желания заказчика, которую необходимо предоставить клиентам путем выполнения поставленных задач и требований, как для целой команды, так и для отдельно взятого разработчика. Предложена инвариантная метрика сравнения изображений. Рассмотрен новейший процесс разработки в IT-сфере – AAA-пайплайн. Приведено поэтапное применение процесса AAA-пайплайна для создания твердотельных 3D-объектов, включающее восемь основных этапов выполнения пайплайна. Проведена разработка моделей цифрового концепта, обеспечивающего комфортные условия работы инженера-конструктора. Выполнено экспортирование созданных 3D-моделей в иной графический редактор.

*Ключевые слова:* контент, цифровизация, процесс, ресурс, разработка, модель, стиль, карта, анимация, AAA-пайплайн, оптимизация, графика, полигон, блокинг

DOI: 10.31857/S0235711923020049, EDN: COYDMI

**Современное состояние рассматриваемой проблемы.** При разработке проекта планировки пространства очень важно учесть основные факторы: количество сотрудников, схему развития организации, показатели роста, потребности во вспомогательных помещениях, которые сегодня не ограничиваются только комнатами для переговоров. В настоящее время 30–35% конструкторских пространств в организациях не заняты рабочими местами. Как следствие, зарождаются некие хабы – зоны, где инженеры-конструкторы могут пересекаться. Намечается тенденция поощрять общение и взаимодействие среди конструкторов, что очень важно для определения местоположения подобных зон при разработке планировки конструкторского пространства. Универсальная планировка пространств снижает управленческие расходы. Поэтому хорошо продуманное решение о расположении зон в пространстве, о порядке управления пространствами становится важным для таких организаций как конструкторские бюро.

Одним из новейших технологий разработки цифрового концепта, например, конструкторских пространств, является применение процесса AAA-пайплайна для создания твердотельных 3D-объектов. AAA-пайплайн получил свое название от трех латинских букв “А”, каждая буква имеет информационную важность [1–7]. Соответственно, расшифровка аббревиатуры имеет следующий вид: “A lot of time (большое количество

затраченного времени со стороны разработчиков), A lot of resources (множество ресурсов, которые были использованы в процессе разработки), A lot of money (сумма инвестированных денег со стороны спонсорских контор)” [8–14].

Этот процесс является настоящим технологическим прогрессом, благодаря которому проведено оптимизирование процесса создания 3D-моделей, т.к. ускоряются темпы при работе со следующими технически важными вопросами: выбор стиля моделей, подсчет количества полигонов в итоговых моделях; определение необходимости задеирования карты нормалей (normal map); выбор использования “плоских” цветов или переход на современные физически корректные материалы (PBR); определение необходимости использования карт с бликами; выбор разрешения текстур в UV-пространстве (измеряемого в текселях); определение разрешения текстурных карт (измеряемого в пикселях); необходимость смены положения объектов с заднего на передний план и, наоборот, для каждой модели в зависимости от ракурса, который предстает перед зрителем; оценка необходимости создания анимации каждой модели; выбор графического редактора для создания предварительных текстурных карт (“запечка” нормалей); оценка необходимости детализации частей объектов или переход на “визуальный обман”, который реализуется в текстурном графическом редакторе; предварительное конвертирование каждого полигона в соединение двух треугольников; определение необходимости задеирования карты прозрачности; оценка необходимости использования “атласов” (использование одной текстурной карты для нескольких объектов); выбор расширения при создании итоговых текстурных карт; создание драфтовых моделей, находящихся на большом расстоянии (“лоды”); оценка необходимости использования геометрии, которая работает с физикой и ее просчетом (“колижн”).

Таким образом, выполнение пайплайна позволяет создать красивую, качественную, а главное грамотно оптимизированную под графический движок (Unity, Unreal Engine и др.) 3D-модель.

Все этапы пайплайна основываются на соблюдении четырех функций: 1) последовательность – выполнение работы строго пошагово. Разработчик не имеет права нарушать структуры пайплайна, т.к. это приведет к замедлению рабочего процесса и даже к некорректной финальной версии 3D-модели; 2) вариативность – смена некоторых этапов разработки в зависимости от рабочего проекта. Например, разница в использовании технического оборудования при моделировании (для твердотельных Maya 3D или 3D Max, а для мягкотельных Zbrush или Modo); 3) завершенность – невыполнение одного этапа ведет к итоговому провалу. Например, отсутствие корректной UV-развертки не позволит создать разноцветные текстурные карты для модели; 4) универсальность – оптимизация всего этапа разработки под любой набор программного обеспечения (ПО).

Следовательно, использование различных графических редакторов позволит получить итоговый продукт. С целью создания твердотельных 3D-объектов с использованием процесса AAA-пайплайна, необходимо выбрать способ сравнения изображений.

**Выбор способа сравнения изображений.** Алгоритм нахождения чистой ячейки основан на предположении, что чистые ячейки похожи между собой сильнее, чем ячейки, загороженные объектами переднего плана. Так как существующие способы сравнения изображений не позволяют надежно определять похожие ячейки, была предложена новая метрика. Чтобы сделать метрику инвариантной к изменениям в освещении сравниваются не сами изображения, а градиенты на них. Для компенсации возможных небольших несоответствий в положении ячеек решеток предлагается размывать найденные на изображении края с помощью преобразования расстояний (distance transform). Для каждого пикселя изображения записывается расстояние до ближайшего к нему края. Сравнение полученных изображений ведется попиксельно как сумма

квадратов разностей. Чистой ячейкой объявляется та, сумма расстояний от которой до других по метрике минимальна.

Задачу сегментации можно сформулировать как необходимость присвоения каждому пикселю каждой ячейки метки объекта или метки объектов переднего плана [15]. Для сегментации используется модель Марковского случайного поля (MRF) – графическая модель, состоящая из набора случайных величин и связей между ними. Всем пикселям изображения ставятся в соответствии случайные величины, принимающие значения цветов этих пикселей, и неизвестные случайные величины, соответствующие метке пикселя. Проставляются связи, показывающие непосредственно зависящие друг от друга пиксели. Необходимо максимизировать общую апостериорную вероятность модели за счет выбора значений меток. Задачу максимизации вероятности можно представить как задачу минимизации энергии на графе. Вершины такого графа соответствуют пикселям изображения. Каждой вершине сопоставляется метка. Ребра графа строятся между пикселями, связанными друг с другом в модели. Функция энергии состоит из двух видов слагаемых: бинарных, которые формулируются для каждой связи между пикселями, и унарных, которые формулируются для каждого пикселя

$$E = \sum_p E_u(p, l) + \sum_{p, q} E_b(p, q, l_p, l_q),$$

где  $p, q$  – различные пиксели;  $l$  – метка, которая может принимать бинарное значение “объект” или “объект переднего плана”.

Используемая функция энергии удовлетворяет условиям регулярности и может быть минимизирована алгоритмом разреза графа. Граф строится для каждой имеющейся ячейки. Значения бинарных слагаемых для соседних точек отражают тот факт, что близкие по значению пиксели, скорее всего, относятся к одному классу. В случае различных меток пикселей энергия зависит от цвета соседних пикселей и обратно пропорциональна их схожести. В случае одинаковых меток энергия равна нулю

$$E_b(p, q, l_p, l_q) = \begin{cases} \exp(-\|I(p) - I(q)\|), & l_p \neq l_q, \\ 0, & l_p = l_q. \end{cases}$$

Унарные слагаемые отражают вероятность пикселей быть частью объекта или частью объектов переднего плана. Известна только одна чистая ячейка, соответственно можно считать, что чем ближе пиксель по цвету к соответствующему пикселю чистой ячейки, тем больше у него шансов быть частью объекта. При метке “объект переднего плана” значение унарного слагаемого является просто некоторой константой

$$E_u(p, l) = \begin{cases} \exp(-\lambda * \|I(p) - I_{\text{best}}(p)\|), & l = \text{facade}, \\ \exp(-\lambda * C), & l = \text{foreground}, \end{cases}$$

где  $I_{\text{best}}$  – абсолютно чистая ячейка;  $C$  – экспериментально подобранная константа. Единственным параметром системы, который показывает важность бинарных слагаемых по сравнению с унарными, остается параметр  $\lambda$ . Изменяя только его, можно добиться приемлемого результата. Единого значения  $\lambda$  для всех случаев не существует. Это обусловлено различиями в освещенности ячеек и характере текстуры. Для восстановления текстуры в найденных областях в них попиксельно копируется чистая ячейка. Для компенсации различий в освещенности ячеек и неточности нахождения решеток, применяется метод вставки части одного изображения в другое, основанный на построении и решении уравнения Пуассона с краевыми условиями Дирихле. Метод учитывает перепады цвета во вставляемой части и краевые условия векторного поля градиентов из целевого изображения. Далее рассмотрим поэтапное применение процесса AAA-пайплайна для создания твердотельных 3D-объектов.



Рис. 1. Референс нового формата для учебной аудитории образовательного кампуса.

**Поэтапное применение процесса AAA-пайплайна для создания твердотельных 3D-объектов.** Успешное выполнение пайплайна основывается на восьми основных этапах: 1) взаимодействие с референсами (вспомогательными изображениями); 2) создание силуэта и основных форм объекта (“Драфт”); 3) детализация 3D-модели; 4) создание многомиллионной модели и малополигонального аналога (“Сетка”); 5) создание 2D-аналога 3D-объекта в UV-пространстве (“Развертка”); 6) перенос элементов с многомиллионной модели на малополигональный аналог (“Запечка”); 7) создание текстурных карт (“Текстурирование”); 8) создание рендеров со всех необходимых сторон и углов (“Визуализация”).

*Первым этапом* процесса разработки является взаимодействие с референсами (вспомогательные изображения), которые не только значительно сокращают время работы разработчиков, но и напрямую выступают в качестве необходимого инструмента для того, чтобы работа была выполнена корректно. Референсы оптимизируют работу на всех этапах разработки, т.к. выступают наглядным примером того, какой продукт необходимо получить в конечном итоге. Например, в строительной сфере люди используют эскизы, технические рисунки и чертежи. В IT-сфере референсы применяются повсеместно в Web-дизайне, при обработке баз данных, соответственно в 3D и др. В качестве референса может выступать абсолютно любое изображение или его часть, которое позволяет увеличить темпы разработки.

В 3D-сфере референсы позволяют определить внешний вид объекта, составные динамические и статические части, пересекающиеся и зависимые элементы и что крайне важно, целые детали, которые не требуется моделировать из-за их малых габаритов или отсутствия информационной значимости со стороны пользователей (например, в киноиндустрии – проезжая часть всегда только из верхнего слоя асфальта, т.к. зрители никогда не увидят песок и гравий, которые необходимы для структурного состояния дороги). Процесс получения референсов напрямую зависит от задач, стоящих перед командой или разработчиком, т.е., если задача состоит в создании стилистически точного объекта, то набор изображений будет состоять из фотографий необходимой архитектурной единицы со всех ракурсов, которые сделаны в реальном мире. Это позволит определить габариты всех составных частей объекта. Если цель проекта состоит в создании чего-то совершенно нового, не имеющего аналогов в окружающем мире, то получение референсов будет зависеть от творческих возможностей художников.

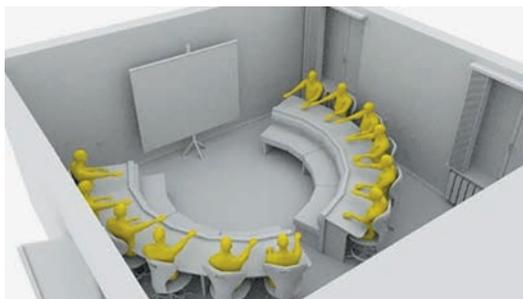
Таким образом, получить референс можно следующим образом: поиск в сети, создание фотографий в реальном мире и выполнение художником (рис. 1).



Рис. 2. Демонстрация внешнего вида модели офисного кресла созданного на основе блокинга.

*Второй этап* разработки включает создание общей формы объекта, иными словами, создается силуэт 3D-модели. Изначально все объекты в сцене имеют угловатую, собирательную форму. Такой формат упрощенных моделей получил название драфт. Соответственно вся работа на данном этапе выполняется по методу блокинга, это позволяет создать будущий некий шаблон каждой модели в кратчайшие сроки относительно всего проекта. На данном этапе разработчики используют только крупные и средние формы стандартных объектов (кубы, цилиндры и сферы) для того, чтобы попасть в стилистику и пропорции перед переходом к обработке деталей. Такой набор примитивов создает силуэт объекта, который передает суть модели. Блокинг позволяет создать читаемую и информационно понятную модель, используя простые и примитивные объекты. Таким образом, это работа с крупными моделями, позволяющими в своем сочетании воплотить соответствие пропорций и эффективный силуэт. Этап занимает в среднем 30–60 мин, что является чрезвычайно малым временным промежутком в 3D-сфере. На данном этапе разработчик беспокоится лишь о внешнем виде объектов, т.к. модели выполняют функцию образца – некая 3D-интерпретация 2D-референса. В итоге многие полигоны имеют низкое качество, т.е. неправильное количество ребер, вершин, а также нормали зачастую имеют некорректное направление. Выполнение булевых операций происходит без соблюдения необходимых правил, что приводит к математически неправильной 2D-сетке моделей. Объяснение этого основывается на продолжительности данного этапа – один рабочий час разработчик затрачивает на создание информационно читаемого силуэта, иначе нарушается последовательность AAA-пайплайна. В свою очередь на данном этапе модель зачастую обладает большим количеством однотонных текстурных материалов, позволяющих заранее продумать какую цветовую палитру использовать при создании текстурных карт, чтоб все необходимые акценты объекта имели презентабельный внешний вид.

Выполнение второго этапа позволяет получить не готовую модель, а лишь ее детальный образец, позволяющий зрителю определить функциональность и назначение объектов. Некорректное выполнение этапа приведет к сильным затруднениям в дальнейшей разработке, т.к. формы драфта являются прямым эскизом для 3D-разработчика, который необходимо выполнить с абсолютной точностью. Соответственно, проявление ответственности в процессе блокинга позволяет создать финальную модель достоверно точной и интересной для зрителя. На следующих этапах разработки модель будет лишь наполняться составными малыми элементами, но общие внешние формы будут неизменны (рис. 2).



**Рис. 3.** Коллаборация low-poly (интерьер) и high-poly (студенты) моделей при моделировании нового формата аудитории.

Успешное завершение второго этапа основывается на выполнении следующих правил: итоговый объект понятен для зрителя; силуэт объекта понятен и информационно читаем; соблюдены пропорции, основанные на предоставленном референсе; модель обладает уникальной читаемой функциональностью; объект обладает всеми необходимыми структурными элементами, грамотное сочетание однотонных цветовых материалов, визуальное принятие со стороны разработчика. Этот этап пайплайна в плане творческого подхода и ответственности со стороны разработчика является вторым по сложности после создания текстурных карт, т.к. остальная работа основывается на соблюдении технических и математических правил.

*Третий этап* разработки 3D-моделей называется детализацией, который обозначает механику движения модели, позволяющую зрителю определить функциональность данного объекта. Необходимо грамотно проработать пересечения и геометрические переходы, отвечающие за смысловые участки детали. Это позволяет придать 3D-модели визуальную интересность и сложность.

*Четвертый этап* разработки основывается на моделировании малополигональной модели (low-poly) и ее многомиллионной версии (high-poly). Переход к данному этапу нельзя совершить без создания грамотного силуэта и геометрических форм разрабатываемого объекта. В редких ситуациях создается модель средней сложности (mid-poly), в основном используемая в киноиндустрии, т.к. в этой сфере нет высокого приоритета оптимизации 3D-объектов из-за того, что киностудия обладает большими ресурсами, которые позволяют предоставить разработчикам новейшее ПО. Low-poly – низкополигональная модель, отвечающая за силуэт объекта, его блик от светового прибора. Основная задача этого формата заключается в экспортировании в графический редактор текстурных карт и игровой движок, поэтому разработчик создает UV-развертку именно на этой модели. Оптимизация low-poly (современная игровая модель имеет около 20–40 тысяч полигонов) реализуется путем удаления ненужных полигонов или даже целых геометрически отдельных частей (shell). В основном, ненужный полигон это тот, который никогда не увидит зритель. Также в модели сокращается разрядность (например, зритель не сможет отличить 25- и 20-гранник). Главная задача такой модели – полигональная оптимизация и визуальная выразительность с сохранением важных геометрических частей, т.к. именно на них в процессе “запечки” будут перенесены элементы с многомиллионного аналога. High-poly – максимально детализированный формат 3D-модели (количество полигонов модели измеряется в десятках миллионов), задача которого исключительно внешний вид, который будет перенесен на low-poly в процессе “запечки”. Соответственно, отсутствует ограничение в количестве полигонов, т.к. данная модель не обладает корректной UV-разверткой. Единственное что необходимо учитывать – это возможность

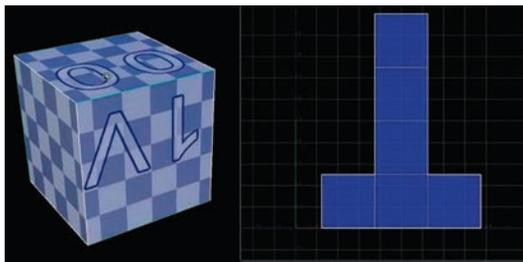


Рис. 4. Стандартная UV-развертка куба.



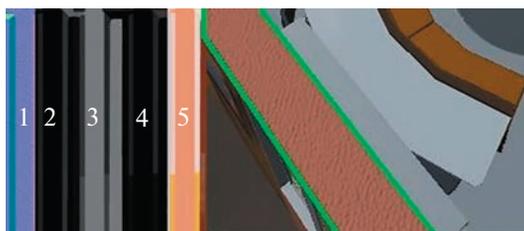
Рис. 5. Демонстрация внешнего вида low-poly модели офисного кресла с картой нормалей и сохраненной топологией.

ПО для обработки данного объекта. Задача high-poly основывается на сглаживании смежных граней, придании округлости фактурам и важным деталям, а также определении положения блика составных частей. Из-за того, что такая модель является дополнительной, разработчик вправе проявить весь творческий потенциал при ее создании (рис. 3).

Последовательность создания high-poly и low-poly напрямую зависит от физических качеств модели. Твердотельные (здания, мебель, авто и др.) объекты моделируются с low-poly, мягкотелые (флора и фауна) с high-poly, а модели, которые будут созданы исключительно для рендера обладают и вовсе только одним форматом.

На *пятом этапе* разработки создается UV-развертка 3D-модели в 2D-пространстве. Успешное выполнение этого необходимого и важного процесса позволит провести “запечку” и создать текстурные карты, т.к. графические редакторы работают исключительно с картинками, которые являются двухмерной интерпретацией объектов. Задача разработчика на данном этапе заключается в нарезке модели на составные части по одному математическому правилу: если угол пересечения смежных граней меньше, либо равен  $90^\circ$ , то совершается разрез. Далее необходимо сделать развертку каждой детали модели по единому разрешению, измеряемому в текселях. Оптимизация в UV-пространстве реализуется путем наложения (overlap) друг на друга повторяющихся или идентичных объектов (например, левый и правый глаз), а также путем использования корректного расстояния между элементами модели (padding) (рис. 4).

*Шестой этап* пайплайна основывается на “запечке”, т.е. на создании предварительных текстурных карт. Это осуществляется путем переноса важных визуальных



**Рис. 6.** Визуальное отображение участка стены учебной аудитории при использовании всех необходимых текстурных карт.

элементов с high-poly на low-poly без изменения количества полигонов и UV-развертки. То есть, происходит “визуальный обман”, т.к. низкополигональная модель теперь обладает такими же сглаженными фасками, фактурой, силуэтом, бликом, углублениями как у многомиллионного аналога благодаря карте нормалей (появилась в 2001 г. с выходом киноленты “Властелин колец”) (рис. 5).

Благодаря Normal map при текстурировании low-poly модель на рендере будет иметь внешний вид ничем не отличимый от high-poly.

На *седьмом этапе* AAA-пайплайна происходит текстурирование низкополигональной модели. Данная часть работы является самой сложной с точки зрения творческих возможностей разработчика. 3D-специалист должен обладать художественными навыками (например, иметь понятие о грамотном сочетании цветов). Существуют различные способы визуализации картинок. При создании текстурных карт, которые будут использованы в мультфильме, используется чистый цвет, т.е. без карт шероховатостей (Roughness) и металла (Metallic). Модели компьютерных игр конца 90-х и начала 2000-х годов обладали текстурами с вложенными картами бликов, света, отражений и теней для оптимизации при экспорте в игровой движок. Для моделей в AAA-проектах используют набор текстур, который состоит из карт цвета (Diffuse), высоты и глубины (Height), нормалей (Normal), бликов и затенений (Specular), гладкости и шершавости (Roughness), металла и пластмасса (Metallic), отражения и прозрачности (Opacity), а также свечения (Emission) (рис. 6).

Таким образом, для создания концепта штукатурки стены аудитории необходимо использовать следующие текстурные карты: 1) карта нормалей — задача заключается в визуальном отображении углублений на поверхности стены; 2) карта металла — инвертированная карта позволяет создать шершавый внешний вид; 3) карта высоты — использование данной текстуры позволяет создать воздушные возвышенности штукатурки; 4) карта освещенности — отвечает за отсутствие блика и придание тусклого внешнего вида; 5) карта цвета — задача заключается в окончательном визуальном отображении участка модели.

*Восьмой этап* AAA-пайплайна является основным, т.к. происходит визуализация всех этапов проделанной работы. Успех на данном этапе зависит не только от выполнения предыдущих шагов, но и от грамотного выбора ракурса, заднего фона и количества яркости и затенения вокруг модели (рис. 7).

Цифровое отображение позволяет придать моделям средней сложности весьма презентабельный внешний вид на основе коллаборации всех текстурных карт. Недостаток состоит в необходимости высококачественного ПО, а также длительности создания рендеров (от десятка минут до нескольких часов). Выполнение всех нюансов на данном этапе работы позволяет предоставить заказчику созданную модель в более выгодной форме с точки зрения визуального отображения.



Рис. 7. Внешний вид нового формата аудитории на основе процесса AAA-пайплайна.

**Оптимизация моделей для использования в среде разработки.** Многочисленные модели с подробной, точечной детализацией применяются в тех случаях, когда 3D-специалисты разрабатывают объекты под высокопроизводительное техническое оборудование. Также такие объекты создаются для визуального интерпретирования, т.е. выступают в качестве итогового продукта, который не будет использован в приложениях. В основном разработчики применяют малополигональные аналоги, над которыми перед применением проводится ряд необходимых последовательных действий, позволяющих оптимизировать 3D-модели. Выполнение данных операций позволяет создать графически упрощенные объекты, которые будут применены в программе. Тем самым реализуется меньшая нагрузка на ПО, что приводит к снижению требований к аппаратной части.

Набор наиболее популярных методов по оптимизации моделей: уменьшение общего количества числа полигонов в каждом составном элементе; уменьшение количества используемых и применяемых текстурных материалов; удаление всей истории обработки каждой составной части 3D-модели; обнуление всех модификационных компонентов, которые влияют на внешний вид модели; редактирование участков UV-развертки путем применения наложения элементов друг на друга (overlap); сокращение межэлементного пространства на UV-развертке путем использования корректного расстояния (padding); использование одинаковой текстурной карты для пересекающихся и похожих моделей (“атлас”); снижение уровня качества материалов в UV-пространстве, измеряемого в текселях; удаление тех граней объекта, которые обладают малым информационным приоритетом для зрителя; переход на использование примитивных частей (кубы, сферы) малых элементов в плане габаритов; переход на более низкий уровень качества текстурных карт, измеряемый в пикселях. Количество полигонов играет важную роль, значительно влияющую на объем затрачиваемых ресурсов, со стороны технического оборудования, требуемого для выполнения каждого этапа пайплайна, а также для визуализации всей работы в цифровой сцене. Это особенно важно в тех случаях, когда в одном пространстве находятся много созданных 3D-моделей. В большинстве случаев объекты содержат очень много элементов для фонового пространства, которые являются лишними с точки зрения видимости зрителя, а также имеют скрытые грани, которые разработчик упрощает путем объединения без влияния на визуализацию силуэта деталей.

Оптимизация модели реализуется путем использования меньшего количества материалов, что увеличивает процесс текстурирования, но уменьшает объем файла, кото-

рый измеряется в мегабайтах. Очистка истории процесса создания и обнуление всех модификационных компонентов (move, translate, rotate) позволяет сократить время обработки модели со стороны персонального компьютера. Сокращение общего веса модели, который зависит от текстур в UV-пространстве, проходит с соблюдением следующих правил: расположение одинаковых, зеркальных и повторяющихся частей друг на друге, максимальное сокращение межэлементного пространства, а также применение минимально возможного качества, измеряемого в текселях. Обеспечение меньшей нагрузки на ПО со стороны моделей при текстуровании реализуется путем отказа от использования всего набора текстурных карт. Например, в качестве аналога карты отражения выступает прорисовка бликов поверх основных цветов. Также разработчик использует минимально допустимое разрешение текстурных карт. Например, при работе с мультимпликацией используется качество текстур равное  $512 \times 512$ , т.к. применяются однотонные цвета.

Таким образом, соблюдение правил оптимизации при создании текстурных карт позволяет создать виртуальную визуализацию пола, которая имеет один полигон. Оптимизация модели проводится 3D-специалистом вручную, либо с использованием набора имеющегося функционала и дополнительного инструментария графических редакторов и стандартных программ.

**Экспортирование моделей в графический редактор.** Непосредственно перед выполнением экспортирования созданных 3D-моделей в иной графический редактор необходимо провести ряд операций. Изначально проводится проверка наличия очищенной истории каждого элемента, а также обнуление всех модификационных компонентов, с помощью метода “заморозки” (“freeze components”). Выполнение данных правил позволяет обеспечить корректное положение и направление трех осей для управляющих элементов “скелета” модели, а также расположить модель в правильных, необходимых координатах в графическом движке. Затем проверяется масштаб модели, т.к. графический движок по стандарту имеет систему, измеряемую в метрах, а трехмерные редакторы в свою очередь обладают сантиметровой. Поэтому необходимо заранее сократить увеличить 3D-модель путем несложной математической операции, чтобы сократить время работы над моделью. Далее проводится обработка всех имеющихся артефактов (темные, некорректные затенения на объекте, которые появляются из-за неправильного положения нормалей), ошибок блика и освещения. Затем происходит распределение по группам в зависимости от назначения и иерархической зависимости. Например, приоритет коленного сустава всегда выше голеностопного. Это позволяет избежать ошибок на следующих этапах работы, таких как: ригинг (создание иерархического опорного “скелета” 3D-модели, обладающего удобными элементами управления для дальнейшего анимирования), скининг (перенос модели на скелетный каркас путем использования некоторых математических операций) и анимация.

При экспортировании 3D-модели, имеющей анимацию и скелетный каркас, необходимо указать в окне экспортирования ключевые кости и анимационные клипы для того, чтобы иметь возможность их использования. Также при экспорте требуется учитывать выделение всех составных частей объекта в иерархической системе, чтобы избежать фатальных ситуаций: потеря кусков объекта и некорректная обработка анимационных клипов. Перенос анимации из рабочего графического редактора Maya 3D проводится путем использования специальной утилиты “Game Exporter”, которая позволяет кадрково разделить весь анимационный фильм на именные сюжеты и экспортировать каждый независимо друг от друга в необходимом формате. Непосредственно при экспорте необходимо выбрать формат файла 3D-модели, который напрямую отвечает за чтение другими системами и редакторами, обрабатывающими полученный объект. Наиболее популярный формат, которым обладают модели – это fbx, т.к. он позволяет беспрепятственно переносить 3D-объекты, 2D-объекты с текстурной картой высоты, имеющимися источниками света, настроенными камерами и

уникальными материалами между всеми популярными системами и графическими редакторами. Данный формат обладает всеми необходимыми видами аспектов модели: собственной геометрией, набором материалов, текстурами, группой анимационных клипов, ограничителями по атрибутам и цепочками инверсивной кинематики, а также настроенным освещением. Fbx-формат постоянно оснащается и модернизируется со стороны компании Autodesk, которая оптимизирует функционал, тем самым реализует уменьшение объема итогового файла. В открытом доступе имеется бесплатный набор средств разработки (SDK). Недостаток формата заключается в закрытом исходном коде, который позволяет компании-владельцу обладать некой монополией и тем самым не позволять сторонним разработчикам редактировать функционал собственноручно.

Наиболее популярные ошибки при экспорте моделей: наличие у 3D-модели лишних полигонов и ребер, сгенерированных отдельно от основного объекта, но которые приводят к критическим ошибкам при математических расчетах со стороны ПО; наличие некорректной UV-развертки и полное отсутствие шаблонного аналога; отличие алгоритмов созданной UV-развертки от используемой в конечной программе; некорректное разделение анимационного фильма на клипы, что приводит к неправильному отображению анимации или к конвертированию в отдельные объекты; использование специфического формата итоговой 3D-модели, который не обрабатывается со стороны конечного ПО; использование автоматических математических и физических операций, которые увеличивают темп работы, но обладают риском создания некорректной сетки 3D-объектов.

Таким образом, процесс экспортирования играет значительную роль с точки зрения рабочего процесса, а также напрямую зависит от используемого ПО и знаний правил со стороны разработчика. Корректное выполнение данного этапа позволяет совершить перенос 3D-модели из одного графического редактора в другой для дальнейшей работы или предоставления конечному пользователю.

**Обсуждение результатов в научном и прикладном аспектах.** В настоящей статье определен и подробно описан поэтапный, современный способ создания цифровых аналогов объектов реального мира, который в IT-сфере имеет название AAA-пайплайн. Выбранный процесс позволяет реализовать любой дизайнерский проект по всем правилам и требованиям нынешнего выполнения 3D-моделей.

Разработаны необходимые методы по оптимизации объектов для графических редакторов, снижающие нагрузку на ПО, а также описаны правила по корректному экспортированию, позволяющие избежать фатальных ошибок на всех этапах работы.

Выбран набор необходимых методов для выполнения концептов нового формата аудиторий и коридора любых сложно архитектурных зданий.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиева Э.Ф., Алексеева А.С., Ванданова Э.Л., Карташова Е.В., Резапкина Г.В. Цифровая переподготовка: обучение руководителей образовательных организаций // Образовательная политика. 2020. № 1 (81). С. 54.
2. Антонова Д.А., Оспеникова Е.В., Спирин Е.В. Цифровая трансформация системы образования. Проектирование ресурсов для современной цифровой учебной среды как одно из ее основных направлений // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия: Информационные компьютерные технологии в образовании. 2018. № 14. С. 5.

3. *Бороненко Т.А., Кайсина А.В., Федотова В.С.* Развитие цифровой грамотности школьников в условиях создания цифровой образовательной среды // *Перспективы науки и образования.* 2019. № 2 (38). С. 167.
4. *Буцык С.В.* “Цифровое” поколение в образовательной системе российского региона: проблемы и пути решения // *Открытое образование.* 2019. № 1. С. 27.
5. *Гэйбл Э.* Цифровая трансформация школьного образования. Международный опыт, тренды, глобальные рекомендации / Пер. с англ. Под науч. ред. П.А. Сергоманова. Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Институт образования. М.: НИУ ВШЭ, 2019. 108 с. (Современная аналитика образования. № 2 (23)).
6. *Биленко П.Н., Блинов В.И., Дулинов М.В., Есенина Е.Ю., Кондаков А.М., Сергеев И.С.* Дидактическая концепция цифрового профессионального образования и обучения / Под науч. ред. В.И. Блинова. М.: “Перо”, 2019. 98 с.
7. *Маниковская М.А.* Цифровизация образования: вызовы традиционным нормам и принципам морали // *Власть и управление на Востоке России.* 2019. № 2 (87). С. 100.
8. *Морозов А.В., Самборская Л.Н.* Профессионализм учителя как важнейший ресурс и детерминанта качества педагогической деятельности в условиях цифровой образовательной среды // *Казанский педагогический журнал.* 2018. № 6 (131). С. 43.
9. *Мухин О.И.* Формирование таланта в эпоху цифровизации. Модель обучения одаренных и талантливых учащихся // *Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета.* Серия: Информационные компьютерные технологии в образовании. 2017. № 13. С. 19.
10. *Уваров А.Ю., Ван С., Кан Ц. и др.* Проблемы и перспективы цифровой трансформации образования в России и Китае // II Российско-китайская конференция исследователей образования “Цифровая трансформация образования и искусственный интеллект”, 26–27 сентября 2019 г. Москва, Россия / Отв. ред. И.В. Дворецкая. Пер. с кит. Н.С. Кучмы. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2019. 155 с.
11. *Уваров А.Ю., Гейбл Э., Дворецкая И.В. и др.* Трудности и перспективы цифровой трансформации образования / Под ред. А.Ю. Уварова, И.Д. Фрумина; М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2019. 343 с.
12. *Уваров А.Ю.* На пути к цифровой трансформации школы. М.: Образование и информатика, 2018. 120 с.
13. *Уваров А.Ю.* Модель цифровой школы и цифровая трансформация образования // *Исследователь.* 2019. № 1–2. С. 22.
14. Формирование цифровой грамотности обучающихся: Методические рекомендации для работников образования в рамках реализации Федерального проекта “Цифровая образовательная среда” / Авт.-сост. М. В. Кузьмина и др. Киров: ИРО Кировской области, 2019. 47 с.
15. *Якубенко А.А.* Алгоритмы построения трехмерных моделей объектов с регулярной структурой по фотографиям при взаимодействии с пользователем для виртуальных сред: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова, 2012.

---

---

**НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В МАШИНОСТРОЕНИИ**

---

---

УДК 539.3

**КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ГИБРИДНОЙ АДДИТИВНОЙ ТЕХНОЛОГИИ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛАЗЕРНО-УДАРНО-ВОЛНОВОЙ ОБРАБОТКИ**

© 2023 г. Г. Ж. Сахвадзе

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия**e-mail: sakhvadze@mail.ru*

Поступила в редакцию 07.07.2022 г.

После доработки 18.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

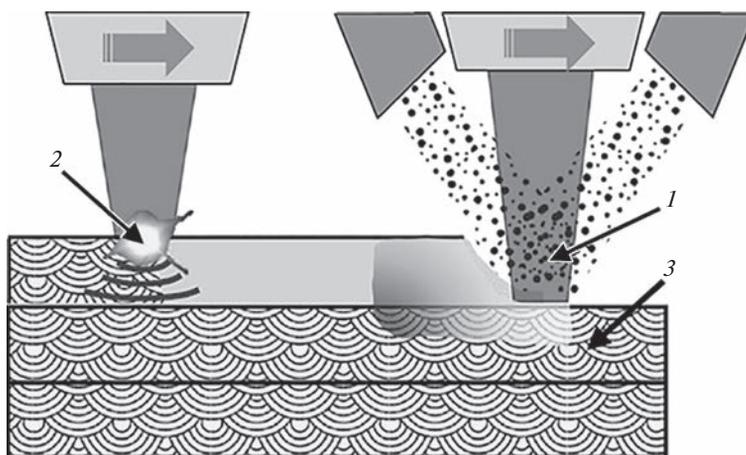
Металлические изделия, изготовленные с помощью аддитивных технологий, обычно имеют неблагоприятные механические характеристики. Лазерно-ударно-волновая обработка – это механическая обработка поверхностей с высокой скоростью деформирования, которая упрочняет приповерхностный слой изделия и обеспечивает создание благоприятных механических свойств. В настоящей статье путем объединения технологий лазерно-ударно-волновой обработки и аддитивных технологий разрабатывается гибридная аддитивная технология, и исследуется роль лазерно-ударно-волновой обработки в гибридной аддитивной технологии с использованием метода конечных элементов. Полученные результаты показывают, что частота упрочненного слоя является критическим технологическим параметром, влияющим на перераспределение остаточных напряжений, который сильно зависит от количества тепла, выделяемого в процессе 3D-печати. Благодаря полученным результатам, разработанная гибридная аддитивная технология получает свое место в разновидностях аддитивных технологий и имеет потенциал для внедрения на практике в качестве нового способа производства высококачественных металлических изделий.

*Ключевые слова:* аддитивные технологии, лазерно-ударно-волновая обработка, гибридная аддитивная технология, метод конечных элементов, остаточные напряжения

**DOI:** 10.31857/S0235711923020074, **EDN:** CPDMRD

Свойства металлических изделий, созданных с помощью аддитивных технологий (АТ), остаются важным и актуальным направлением исследований во всем мире [1]. Неудовлетворительные механические свойства полученных изделий и низкая производительность являются основными техническими препятствиями для более широкого внедрения на практике технологии аддитивного производства (АП). В частности, большие растягивающие остаточные напряжения (РОН), и, как следствие, растрескивания, остаются серьезной проблемой для эксплуатационных характеристик полученных 3D-изделий. Сегодня для снятия РОН обычно используют термическую обработку. Хотя термообработка действительно уменьшает РОН, предотвращая большие деформации и растрескивание, она имеет свои очевидные недостатки [2].

Гибридные аддитивные технологии (ГАТ) возникли как совместное использование классических АТ с одним или несколькими вторичными технологиями, которые дополняют друг друга и в итоге возникает синергетический эффект, что благоприятно



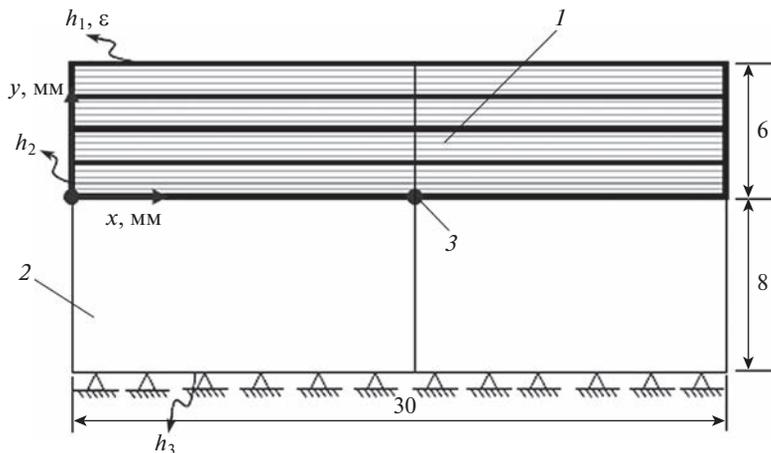
**Рис. 1.** Схема гибридной аддитивной технологии (ГАТ) с использованием совмещения технологий ПОМ (в качестве первичной технологии) и ЛУВО (в качестве вторичной технологии): 1 – ПОМ; 2 – ЛУВО; 3 – один из слоев ГАТ-изделия.

отражается на качестве получаемых изделий и их функциональных характеристиках [2]. Гибридная аддитивная технология, использующая механическую обработку поверхности, такую как лазерно-ударно-волновую обработку (ЛУВО), представляет большой интерес, например, при производстве подшипников, различных инструментов и штампов, из-за способности ЛУВО к упрочнению и созданию благоприятных сжимающих остаточных напряжений (СОН) на глубинах, превышающих обычную глубину проникновения СОН, доступных при классической поверхностной обработке.

ЛУВО при распространении ударной волны в материале вызывает сильную пластическую деформацию с высокой скоростью деформирования, что создает в приповерхностной области мощных полей СОН. Следовательно, повышается усталостная долговечность и износостойкость материалов за счет замедления зарождения и распространения трещин. В настоящей статье предлагается сочетание аддитивного производства с послыльным лазерно-ударно-волновым упрочнением в качестве нового подхода к управлению объемными механическими свойствами ГАТ-изделий, которое продлевает их срок службы.

**Схематизация гибридной аддитивной технологий (ГАТ).** В гибридной аддитивной технологии первичной технологией должна быть одна из традиционных аддитивных технологий – либо технология прямого осаждения материала (Directed energy deposition DED, в дальнейшем – ПОМ), либо технология сплавления в порошковом слое (powder bed fusion PBF), либо технология изготовления объектов с использованием ламинирования (laminated object manufacturing LOM). В настоящей статье технология ПОМ выступает в качестве первичной технологии, объединяясь с технологией ЛУВО, которая выступает в качестве вторичной технологии. Схема ГАТ, с использованием технологий ПОМ и ЛУВО, показана на рис. 1.

**Конечно-элементное моделирование ГАТ.** При ПОМ по мере добавления слоев возникают остаточные напряжения, которые с каждым шагом меняются, что влияет на механические свойства и последующие эксплуатационные характеристики готового изделия. Основными элементами, необходимыми для успешного моделирования технологии ПОМ, являются: движущийся источник тепла (в нашем случае – лазер), спо-



**Рис. 2.** Схема для моделирования технологии ГАТ с тепловыми и механическими граничными условиями: 1 – печатное 3D-изделие; 2 – подложка; 3 – узел № 751 в конечноэлементной модели.

соб добавления новых слоев, граничные условия и модель материала, характеристики которого зависят от температуры.

Для моделирования технологии ГАТ разработана двумерная модель (рис. 2).

На подложку наносится 20 слоев, каждый шириной 30 мм и толщиной 0.3 мм. Подложка под слоями имеет размеры 30 мм на 8 мм. Для моделирования ГАТ разрабатываются сразу две модели с идентичной геометрией: одна – для теплового анализа (ПОМ), другая – для механического анализа (ЛУВО). В тепловой модели используются конечные элементы типа DC2D4, которые представляют собой 4-узловые диффузионные теплопроводящие элементы, используемые для измерения температур, возникающих при применении движущегося источника тепла. В механической модели используются конечные элементы типа CPE4, которые представляют собой 4-узловые билинейные плоские деформационные элементы, которые способны определять напряжения, возникающие как от источника тепла, так и от ЛУВО. Размеры конечных элементов в слоях составляют  $20 \times 20$  мкм, а в подложке они гораздо больше  $80 \times 80$  мкм, чтобы минимизировать время вычислений. Добавление материала во время ГАТ моделируется посредством последовательной активации нового набора элементов в начале каждого шага (используется так называемый метод неактивных элементов).

Для моделирования динамики температур, возникающих во время ПОМ в каждом слое, используется методика движущегося теплового потока [3]. Тепловой поток представлен как неравномерно распределенное тепло, величина которого зависит от местоположения и времени. Принято, что тепловой поток соответствует гауссову распределению, моделируется с использованием конечноэлементного пакета ABAQUS, в частности, подпрограммой DFLUX, и равен [4]

$$q = \frac{CP}{\pi r^2} e^{-\frac{2(x-vt)^2}{r^2}}, \quad (1)$$

где  $C$  – коэффициент поглощения;  $P$  – мощность лазерного излучения, Вт;  $r$  – радиус лазерного луча, м;  $v$  – скорость сканирования теплового потока, м/с. Основные параметры технологии ПОМ, которые используются для моделирования процесса АТ, приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Параметры теплового потока при АТ

Мощность лазера, Вт	Размер лазерного пятна, мм	Скорость сканирования, мм/с	Длина сканирования, мм
400	1.36	10	30

Таким образом, к модели ставятся тепловые граничные условия по теплопроводности, конвекции и излучению. Передача тепла между слоями учитывается через коэффициент теплопроводности  $k$ , коэффициент конвективной теплопередачи  $h$  и коэффициент излучения  $\epsilon$ . Тепло, отводимое подложке, определяется через свободную конвекцию в нижней части подложки  $h_3 = 1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ . Граничные условия для принудительной конвекции и излучения задаются на верхней поверхности каждого слоя во время нанесения материала  $h_1 = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ ,  $\epsilon = 0.62$ . Тем самым учитывается как тепло, передаваемое через инертный газ, вдуваемого в ванну с расплавом, так и тепло, излученное в окружающую среду. Свободная конвекция в окружающую среду задается в качестве граничных условий на краях слоев и подложки  $h_2 = 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ .

**Моделирование добавления слоя.** Чтобы смоделировать добавление нового слоя во время ПОМ, большинство исследователей используют один из двух методов: метод тихих элементов и метод неактивных элементов [5]. В методе тихих элементов в самом начале анализа в модели уже присутствуют печатаемые элементы, но им присваиваются пониженные свойства материала. Эти свойства получаются путем умножения начальных свойств на соответствующие коэффициенты масштабирования [6]. Элементы с пониженными свойствами сначала никак не влияют на процесс (их как будто бы нет). По мере продвижения процесса и готовности этих тихих элементов к печати, им присваиваются реальные свойства материала, тем самым обозначается их появление в модели.

Метод неактивных элементов – это еще один подход, аналогичный методу тихого элемента. Разница между ними заключается в том, что осажденные элементы деактивированы с самого начала анализа. Элементы активируются на каждом этапе по отдельности (или в виде слоя), когда источник тепла воздействует на этот слой. В настоящей статье используется именно этот метод.

**Исследуемый материал.** В статье исследуется подшипниковая сталь ШХ15 (зарубежный аналог – AISI 52100), которая широко применяется в машиностроительной и авиационно-космической отраслях, причем не только для производства подшипников, но и других деталей, где требуется высокая твердость, износостойкость и контактная прочность.

При анализе теплопередачи для определения температурных полей используются механические и теплофизические свойства, зависящие от температуры. В табл. 2 приведены упругие свойства (зависимость модуля Юнга и коэффициента Пуассона от температуры).

Зависимости пластических и физических свойств (предела текучести, пластической деформации, параметров определяющего соотношения Джонсона–Кука, плотности, коэффициента теплового расширения, коэффициента теплопроводности) от температуры приведены в [7].

**Общая схема конечноэлементного моделирования ГАТ.** Для моделирования технологии ГАТ был использован конечноэлементный пакет ABAQUS, в частности – его модули ABAQUS/Standard (для определения температур и термонапряжений) и ABAQUS/Explicit (для определения остаточных напряжений при ЛУВО). Блок-схема процедуры моделирования показана на рис. 3. Для моделирования ГАТ разрабатываются сразу две модели с идентичной геометрией: одна модель для анализа процесса

**Таблица 2.** Зависимость упругих характеристик подшипниковой стали ШХ15 от температуры

Температура, К	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона
295	201.33	0.277
473	178.58	0.269
673	162.72	0.255
873	103.42	0.342
1073	86.57	0.396
1273	66.58	0.490

теплопередачи с элементами DC2D4, а другая – для анализа напряжений с элементами CPE4.

При моделировании ГАТ (рис. 3) сначала анализируется процесс теплопередачи и определяются распределения температур по слоям, далее полученные температуры экспортируются для вычисления термонапряжений, возникающих от воздействия вы-

**Рис. 3.** Блок-схема моделирования ГАТ с использованием ЛУВО.

численных температур. Затем анализируется процедура ЛУВО, где в качестве начальных данных импортируются термонапряжения, возникающие от добавления слоев, и определяются остаточные напряжения, чем и завершается первый цикл упрочнения. В следующем цикле добавляется еще один набор слоев и опять происходит анализ теплопередачи. В этом анализе напряжения от рассчитанных заново температур вычисляются с учетом напряжений, возникающих от предыдущей ЛУВО, которые в этом анализе выступают в качестве начальных данных.

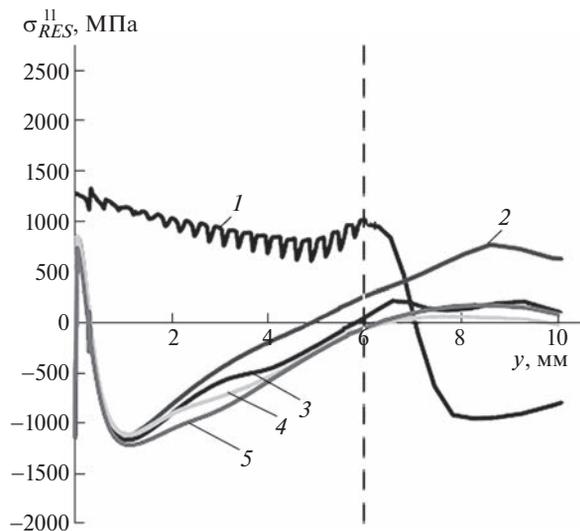
Этот же цикл повторялся до тех пор, пока не напечатаны все слои. Разные аспекты такого моделирования приведены в работах [8–15]. Особенности моделирования только ЛУВО приведены в [16, 17].

**Полученные результаты и их анализ.** В настоящей статье проводится моделирование 5-ти характерных для ГАТ режимов: 1) вместо ГАТ исследуется чистая АТ (т.е., режим без ЛУВО); 2) технология ЛУВО применяется только на окончательной поверхности (режим поверхностной ЛУВО); 3) ГАТ при использовании ЛУВО через каждые 10 слоев (Г10-режим); 4) использование ЛУВО через каждые 5 слоев (Г5-режим); 5) использование ЛУВО на каждом слое (Г1-режим). Результаты этих пяти случаев сопоставляются и анализируются, определяя тем самым влияние частоты упрочненного слоя на характер распределения остаточных напряжений в самых слоях. Заметим, что все случаи моделируются для исследуемого материала ШХ15.

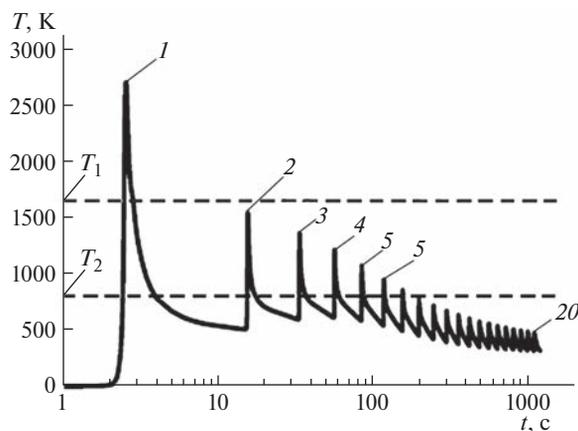
**Распределения остаточных напряжений в изделии при разных режимах ГАТ.** Окончательные распределения остаточных напряжений по глубине (рис. 2, по направлению  $y$ ) для всех 5-ти исследуемых режимов показаны на рис. 4. Режим “Без ЛУВО” представляет собой модель традиционной АТ без ЛУВО. Из графика (рис. 4, кривая 1) видно, что остаточные напряжения в этом режиме во всех слоях растягивающие из-за непрерывного приложения теплового потока к слоям (в изделии всюду имеем РОН). Этот непрерывный тепловой поток расширяет материал и вызывают в них РОН, величина которых в слоях колеблется 600–1325 МПа. Для сопоставления результатов в разных гибридных режимах был смоделирован и режим однократного лазерного упрочнения, нанесенного на поверхность после напечатания двадцатого слоя (“режим поверхностной ЛУВО”). В этом случае нельзя сказать, что имеет место чистая ГАТ, т.к. здесь ЛУВО не полностью сопрягается с технологией ПОМ.

Скорее всего, здесь имеет место традиционная лазерно-ударно-волновой обработки поверхности. Как видим (рис. 4, линия 2), РОН от ЛУВО превращаются в СОН и достигают своего максимума в величину 1120 МПа. СОН в этом случае сохраняются до глубины 4.9 мм, далее они переходят в РОН. Также были исследованы три гибридных режима при различных частотах упрочненного слоя (рис. 4, линии 3–5). Глубина СОН увеличивается по мере увеличения частоты упрочненного слоя от 5.8 мм для Г10-режима до 6.5 мм для Г5-режима. Здесь достигается своеобразная точка насыщения, т.к. при дальнейшем увеличении частоты упрочненного слоя до единицы (Г1-режим) глубина СОН уменьшается до 6.3 мм. Хотя, несмотря на достижение точки насыщения, видим, что повышение частоты упрочненного слоя увеличивает ширину области со СОН. Заметим, что величина пиковых значений СОН для всех случаев варьируются от –1120 до –1220 МПа.

**Анализ изменения температуры.** Динамика термического состояния во время ГАТ имеет решающее значение для изучения эволюции остаточных напряжений в изделии. Температуры, возникающие от теплового потока во время добавления слоя, стимулируют возникновение так называемого эффекта “термического подавления” СОН и других эффектов, возникающих в результате ЛУВО [18]. При моделировании технологии ПОМ тепловой поток направляется на каждый слой и определяется распределение температур, возникающих во время 3D-печати. Температуры, образующейся в ранее добавленных слоях, также изменяются по мере нанесения новых слоев. Для наблюдения за динамикой температур для удобства был выбран узел номер 751 (рис. 2) в



**Рис. 4.** Профили остаточных напряжений ( $\sigma_{RES}^{11}$ ) для изучаемых 5-ти режимов ГАТ: 1 – режим без ЛУВО; 2 – режим поверхностной ЛУВО; 3 – Г10-режим; 4 – Г5-режим; 5 – Г1-режим. Слева от вертикальной пунктирной линии расположены слои 1–20 печатаемого изделия, справа – подложка.



**Рис. 5.** Изменения температуры во времени по мере добавления всех слоев изделия (1–20) в узле № 751 (рис. 2);  $T_1$  – температура плавления;  $T_2$  – критическая температура.

середине верхней части подложки. В этом узле рассчитаются температуры от добавления всех 20 слоев. Изменения температуры во времени по мере добавления слоев показаны на рис. 5. При добавлении первого слоя (линия 1) пиковая температура на верхней части подложки достигает 2700 К. При добавлении второго слоя температура составляет уже 1544 К. По мере добавления следующих слоев пиковая температура в узле уменьшается экспоненциально. Как известно [19, 20], температуры выше критической температуры (приблизительно 820 К), влияют на микроструктуру слоев. Тем-

пература в исследуемом узле выше критической температуры до добавления седьмого слоя. Когда добавляется восьмой слой, температура падает ниже температуры перехода (она равна 778 К). Это указывает на то, что тепловой поток при добавлении нового слоя влияет на микроструктуру семи слоев под ним. Хотя в этой статье изменение микроструктуры не рассматривается, очень важно знать об этом хотя бы на качественном уровне.

**Выводы.** Разработана конечно-элементная 2D-модель гибридной аддитивной технологии (ГАТ), состоящая от последовательно применяемых технологий прямого осаждения материала (ПОМ) и лазерно-ударно-волновой обработки (ЛУВО). Показано, что благодаря послойному упрочнению слоев по технологии ЛУВО, во время ГАТ в печатаемых изделиях образуются сжимающие остаточные напряжения (СОН), которые хоть и испытывают тепловое и/или механическое перераспределение, полностью не исчезают и остаются в изделии.

Показано, что уменьшение частоты упрочненного слоя с 20 до 5 увеличивает глубину упрочненного слоя (т.е., слоя со стабильными СОН). Также показано, что глубина упрочненного слоя максимальна при упрочнении каждого 5-го слоя (в Г5-режиме), т.е., показано, что, упрочнение чаще, чем через каждые пять слоев, не увеличивает глубину СОН, что имеет важное практическое значение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huang Y., Leu M.C., Mazumder J. et al. Additive manufacturing: current state, future potential, gaps and needs, and recommendations // J. Manuf. Sci. Eng. 2015. V. 137. P. 1.
2. Sealy M.P., Madireddy G., Willims R. et al. Hybrid processes in additive manufacturing // J. Manuf. Sci. Eng. 2018. V. 140. P. 1.
3. Manvatkar V.D., Gokhale A.A., Jagan R. et al. Estimation of melt pool dimensions, thermal cycle, and hardness distribution in the laser-engineered net shaping process of austenitic stainless steel // Metall. Mater. Trans. 2011. V. 42. P. 1.
4. Heigel J.C., Michaleris P., Reutzel E.W. Thermo-mechanical model development and validation of directed energy deposition additive manufacturing of Ti-6Al-4V // Addit. Manuf. 2015. V. 5. P. 9.
5. Wang L., Felicelli S.D., Pratt P. Residual stresses in LENS-deposited AISI410 stainless steel plates // Mater. Sci. Eng. A. 2008. V. 496. P. 234.
6. Chiumenti M., Lin X., Cervera M. et al. Numerical simulation and experimental calibration of additive manufacturing by blown powder technology. Part I: thermal analysis // Rapid Prototyp. J. 2017. V. 23. P. 448.
7. Anca A., Fachinotti V.D., Escobar-Palafox G. et al. Computational modelling of shaped metal deposition // Int. J. Numer. Methods Eng. 2011. V. 85. P. 84.
8. Chiumenti M., Cervera M., Salmi A. et al. Finite element modeling of multi-pass welding and shaped metal deposition processes // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2010. V. 199. P. 2343.
9. Peyre P., Aubry P., Fabbro R. et al. Analytical and numerical modeling of direct metal deposition laser process // J. Phys. Appl. 2008. V. 41. P. 1.
10. Denlinger E.R., Heigel J.C., Michaleris P. Residual stress and distortion modeling of electron beam direct manufacturing Ti-6Al-4V // Proceedings of the IMechE. 2015. V. 229. P. 1803.
11. Marimuthu S., Clark D., Allen J. et al. Finite element modelling of substrate thermal distortion in direct laser additive manufacture of an aero-engine component // Proc. IMechE. 2013. V. 227. P. 1987.
12. Voothaluru R., Richard L.C., Cheng G.J. Finite element analysis of the variation in residual stress distribution in laser shock peening of steels // J. Manuf. Sci. Eng. 2012. V. 134. P. 061010.
13. Sealy M.P., Madireddy G., Li C. et al. Finite element modeling of hybrid additive manufacturing by laser shock peening // Proc. Annual Int. Solid Freeform Fabrication Symposium. 2016. P. 306.
14. Anurag S., Guo Y.B., Horstemeyer M.F. The effect of materials testing modes on finite element simulation of hard machining via the use of internal state variable plasticity model coupled with experimental study // Comput. Struct. 2009. V. 87. P. 303.

15. *Shah S.M., Nelias D., Zain-ul-abdein M. et al.* Numerical simulation of grinding induced phase transformation and residual stresses in AISI-52100 steel // *Finite Elem. Anal. Des.* 2012. V. 61. P. 1.
16. *Sakhvadze G.Zh., Sakhvadze G.G., Kavtaradze R.Z.* Increasing the Crack Resistance of Materials by Means of Laser Shock Processing // *Russian Engineering Research.* 2021. V. 41. № 1. P. 27.
17. *Sakhvadze G.Zh.* Simulation of the Technology of Laser-Shock-Wave Processing of Titanium Alloys with Shape Memory Using Dimensional Analysis // *J. of Machinery Manufacture and Reliability.* 2021. V. 50. № 4. P. 332.
18. *Adu-Gyamfi S., Ren X.D., Larson E.A. et al.* The effects of laser shock peening scanning patterns on residual stress distribution and fatigue life of AA2024 aluminium alloy // *Opt. Laser Technol.* 2018. V. 108. P. 177.
19. *Huang S., Sheng J., Wang Z. et al.* Finite element and experimental analysis of elevated-temperature fatigue behavior of IN718 alloy subjected to laser peening // *Int. J. Fatigue.* 2020. V. 131. P. 105337.
20. *Xu S., Huang S., Meng X. et al.* Thermal evolution of residual stress in IN718 alloy subjected to laser peening // *Opt. Lasers Eng.* 2017. V. 94. P. 70.

---

---

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА.  
ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ**

---

---

УДК 621.3.036.212

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ, ПРОИСХОДЯЩИЕ  
В УСТРОЙСТВАХ, ОБОГРЕВАЕМЫХ НА ХОЛОДЕ**© 2023 г. А. А. Шульженко<sup>1,\*</sup>, М. Б. Модестов<sup>1</sup><sup>1</sup>*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия**\*e-mail: aa\_shulzhenko.01@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.

После доработки 29.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

В ходе работы были проведены математические эксперименты по изучению динамических тепловых процессов, происходящих при обогреве технических устройств, выносимых на холод. Новизной является получение объемных представлений о тепловых процессах, протекающих в этих устройствах во времени: обогреве их на уровне нижней границы рабочего диапазона температур, использовании ранее накопленной тепловой энергии в теплом помещении и при повышении ее за счет дополнительного нагрева тканями электронагревателями в период нахождения устройств в теплом помещении. Настоящая статья может интересовать разработчиков нагревательных систем, в которых применяются автономные источники электроэнергии.

*Ключевые слова:* тканый электронагреватель, обогреваемые устройства, обогрев аккумулятора, автономные источники электроэнергии, остаточное тепло, математическое моделирование

**DOI:** 10.31857/S0235711923020086, **EDN:** CPGRQH

Многие технические устройства, работающие на открытом воздухе, испытывают воздействие холода. Например, кино-, фотоаппаратура, измерительные устройства, которые для производства работ выносятся на холод из теплых помещений, аккумуляторы, находящиеся в двигательных отсеках транспортных средств и т.д. Работоспособность этих устройств, зависит от обеспечения температурной стабильности, т.е. от соблюдения температурного рабочего диапазона. Эксплуатация устройств на холоде без дополнительных мер по теплозащите приводит к росту погрешностей при измерениях, к затруднениям при эксплуатации, или к полной потере работоспособности [1–5].

Только применяя тепловые способы защиты можно добиться нормальной эксплуатации устройств. Обычно применяются, как пассивные (дополнительные слои тепловой изоляции), так и активные (дополнительные нагревательные устройства) средства тепловой защиты объекта.

Что касается использования только пассивных средств тепловой защиты, то их применение приведет к некоторому продлению поддержания условий, обеспечивающих нормальную работу технических средств, однако, их возможности в плане тепловой защиты, особенно в регионах Севера, ограничены [3, 6–9].

**Целью** настоящей статьи является рассмотрение динамических тепловых процессов, происходящих в устройстве при его нагреве на холоде, с применением не только активных, но и активных в сочетании с пассивными средствами тепловой защиты, при использовании ранее накопленного тепла. Изучение динамических тепловых процессов, происходящих при таких условиях, позволит не только получить инфор-

мацию об их протекании в устройствах, но и дать рекомендации по эксплуатации обогреваемых технических устройств в условиях холода.

В качестве активных средств тепловой защиты будем применять тканые электронагреватели (далее нагреватели), а в качестве источников электроэнергии для них – автономные источники. Как правило, автономные источники обладают ограниченными запасами электроэнергии, поэтому очень важно рационально расходовать электроэнергию для обогрева устройств. Для снижения энергетических затрат будем рассматривать и обогрев, обеспечивающий работу обогреваемым устройствам в области нижних границ температур их рабочего диапазона. Такой режим работы является особенно актуальным в регионах Севера, в районах со стабильно низкими зимними температурами, значительно ниже нижней границы температур рабочего диапазона.

Для обеспечения возможности сопоставления, будем считать, что при всех экспериментах используется одно и то же устройство. Также, во всех случаях нагрев будет проводиться одним и тем же нагревателем, обладающим неизменными мощностными параметрами. Так как толщина нагревателя крайне мала, то будем считать, что нагреватель является внутренним источником тепла, расположенным по поверхности обогреваемого устройства.

Пусть, с момента включения нагреватель работает непрерывно.

Будем изменять моменты включения нагревателя относительно времени выноса устройства из тепла на холод и уровни температуры на устройстве перед выносом.

Пусть число БИО, характеризующее соотношение внутреннего и внешнего теплового сопротивления устройства  $Bi < 0.1$ . Сначала рассмотрим уже известные данные о динамике тепловых процессов, происходящих при нагреве и охлаждении таких объектов. Изменение температуры будем отслеживать в одной точке, например, на поверхности устройства.

Аналитическое выражение, описывающее общий характер изменения температуры предварительно нагретого тела при его охлаждении, можно записать как

$$U = U_1 K_1 \exp(-k_1 t), \quad (1)$$

где  $U = T - T_{cp}$ ;  $T$  – текущее значение температуры;  $T_{cp}$  – температура окружающей среды;  $U_1 = T_1 - T_{cp}$  – стационарный температурный напор в теплом помещении;  $T_1$  – температура теплого помещения, до которой нагревается объект;  $t$  – относительное время протекания теплового процесса;  $k_1$  – коэффициент;  $K_1$  – коэффициент, отражающий особенности структуры устройства.

Характер изменения температуры устройства при его нагреве можно представить в виде

$$U = U_2 K_2 [1 - \exp(-k_2 t)], \quad (2)$$

где  $U_2 = T_2 - T_{cp}$  – стационарный температурный напор нагревателя;  $T_2$  – максимальная температура нагрева нагревателя;  $k_2$  – коэффициент;  $K_2$  – коэффициент, отражающий особенности структуры нагревателя.

Предположим, что устройство, равномерно разогретое до температуры помещения, в котором оно находилось, вынесли на холод и, одновременно, включили нагреватель. Тепловые процессы во времени, используя (1), (2), можно представить как

$$U = U_1 K_1 \exp(-k_1 t) + U_2 K_2 [1 - \exp(-k_2 t)]. \quad (3)$$

Выражения (1)–(3) были выведены и многократно использовались в широком круге работ [6–9].

Рассмотрим еще один случай, который можно описать с помощью выражений (1)–(3), когда нагреватель включался в период нахождения устройства в помещении.

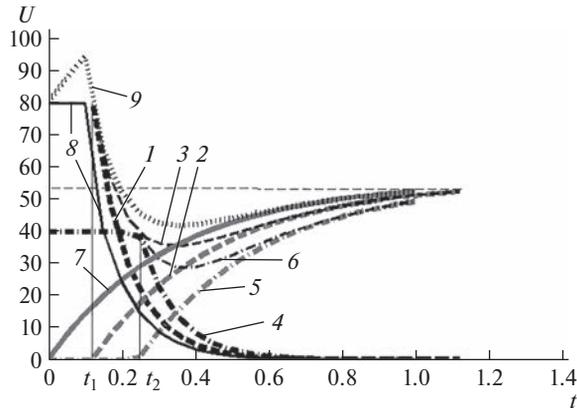


Рис. 1. График распределения температур во времени на устройстве при различных условиях:  $J1$ – $J9$  — линии графика  $1$ – $9$  соответственно.

Устройство, нагретое теплом помещения и дополнительно нагревателем, в момент времени  $t_1$  выносится на холод. Этот процесс можно представить в виде

$$\begin{cases} U = U_1 + U_2 K_2 [1 - \exp(-k_2 t)] & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ U = \{U_1 + U_2 K_2 [1 - \exp(-k_2 t_1)]\} \exp(-k_1 t) + \\ + U_2 K_2 [1 - \exp(-k_2 t)] & \text{при } t_1 \leq t \leq t_3, \end{cases} \quad (4)$$

где  $t_1$  — относительное время выноса объекта из помещения на холод;  $t_3 = 1$  — полное относительное время протекания теплового процесса.

На основании выбранных тепловых параметров устройства, нагревателя и данных внешней среды построим графики температурных распределений с использованием выражений (1)–(4), при разном времени включения нагревателя и разных температурах устройства в момент их выноса на холод. Проведем их анализ.

На рис. 1 показано изменение температуры на поверхности устройства во времени.

На рис. 1, линия 1, происходит охлаждение устройства с момента его выноса из теплого помещения,  $t_1$  — условие  $J1$ . Снижение от температуры равной температуре помещения  $U_1$ , до уровня температуры внешней среды происходит по экспоненте (1).

Условие  $J2$  отражает нагрев от  $T_{cp}$  до  $T_2$  в области поверхности тела, при включении нагревателя в момент выноса устройства из теплого помещения (рис. 1, линия 2).  $U_2$  — стационарный температурный напор нагревателя (2).

Условие  $J3$ , описанное выражением (3), отображает результирующее изменение температуры при одновременном воздействии тепловых условий  $J1$  и  $J2$  [6–10]. В нашем случае наблюдается сначала экспоненциальное снижение температуры до уровня, лежащего ниже уровня нижней границы температур рабочего диапазона, а затем повышение суммарной температуры (рис. 1, линия 3) до уровня стационарного температурного напора нагревателя.

В следующем эксперименте  $J4$  — уровень температуры нагретого устройства в момент начала охлаждения  $t_2$  соответствует нижней границе рабочего диапазона устройства  $U_3$  (рис. 1, линия 4). Далее оно охлаждается до температуры среды аналогично (3).

Параметры нагревателя остаются такими же, как и в первом случае. Однако, включение нагревателя, расположенного на поверхности устройства, охлажденного до температуры внешней среды, происходит в момент  $t_2$ , когда температура устройства соот-

ветствует температуре нижней границы температур рабочего диапазона устройства – условие *J5* (рис. 1, линия 5).

Суммарное изменение температуры устройства, условие *J6*, при одновременном действии охлаждения по условию *J4* и нагрева нагревателем, условие *J5*, продемонстрировано на рис. 1, линия 6.

Сопоставление результатов, приведенных на рис. 1 линии 3 и 6, показывает, что при включении нагревателя сразу после выноса устройства из теплого помещения (условие *U3*) наблюдается снижение температуры, но оно незначительно на меньшее время выходит за пределы температур рабочего диапазона устройства. Этому способствует использование остаточного тепла, накопленного устройством. Обеспечение более длительного нахождения устройства в диапазоне рабочих температур, в первом случае, обеспечивает более правильную работу устройства.

Оценим значение остаточного тепла. Расчеты показывают, что накопленная остаточная тепловая энергия в ряде случаев позволяет сэкономить значительную энергию используемого для обогрева аккумулятора, до ~12% от его расчетной емкости [1]. Так как процесс охлаждения устройства при выносе его из тепла во внешнюю среду достаточно быстрый, то рационально включать нагреватель сразу, после выноса его из теплого помещения, чтобы максимально использовать накопленную в помещении (или отсеке) тепловую энергию. Использование устройства через длительный срок после выноса его на холод приводит к его остыванию, потере накопленной энергии, и при дальнейшем его нагреве необходимо затратить дополнительно энергию автономного источника электропитания нагревателя для достижения уровня температур на устройстве, соответствующего уровню температур, обеспечивавшегося остаточным теплом.

Теперь рассмотрим случай, когда нагреватель включается, когда устройство находится еще в теплом помещении (условие *J7*). Работа нагревателя показана на рис. 1, линия 7.

Изменение температуры согласно условию *J8*: сначала – поддержание температуры на постоянном уровне в теплом помещении, а затем – экспоненциальное охлаждение (рис. 1, линия 8).

Суммарное изменение температуры при одновременном воздействии тепловых условий (рис. 1, линии 7 и 8) – условие *J9*, описанное в формуле (4), показано на рис. 1, линия 9). Условие *J9* демонстрирует, что если нагреватель включается, еще до выноса устройства из тепла, то это обеспечивает устройству дополнительный нагрев относительно температуры помещения. Максимальное дополнительное тепло будет достигаться при выходе нагревателя на уровень стационарного температурного напора в период нахождения в обогреваемом помещении.

Таким образом, на обогреваемом устройстве при выбранных условиях может обеспечиваться тепловой процесс по сравнению с условиями *J3* (представлены на рис. 1, линия 3) с изменениями температуры, не выходящими за пределы температур рабочего диапазона в течение всего времени его протекания (рис. 1, линия 9).

Как отмечалось, процессы, показанные на рис. 1, соответствуют нагреву и охлаждению устройства, но только в одной точке. В нашем случае выбрана точка на его поверхности. Реально происходит более сложная картина. Для ее демонстрации необходимо иметь более полное представление о тепловых процессах, происходящих в устройстве. Использовать аналитические методы для описания тепловых процессов даже для упрощенного вида устройства и внешних условий становится затруднительным [8, 9].

Поэтому, для получения более реальных данных о процессах, происходящих в устройстве при его нагреве и охлаждении, в соответствии с поставленной целью, было

проведено математическое моделирование методом конечных разностей объемных тепловых процессов, протекавших во времени.

При формулировании математической задачи учитывались следующие требования и допущения. Во всех случаях рассматривалось одно и то же устройство в виде параллелепипеда. Тепловые свойства устройства по его объему при различных условиях воздействия предполагались постоянными. Исследовались тепловые процессы, происходившие при различных условиях выноса устройства из тепла, при различных моментах включения электронагревателей, и, для большей полноты представления, продемонстрированы варианты с использованием и при отсутствии пассивных средств тепловой защиты.

В качестве электронагревателя применялся тканый электронагреватель со свойственными ему теплофизическими параметрами и очень малой толщиной. Тепловые свойства материала нагревателя близки к тепловым свойствам обогреваемого устройства. Нагреватель был размещен по всей поверхности объекта обогрева. Для описания объемных тепловых процессов, происходящих в устройстве и одновременно отражающих работу электронагревателя, использовалось трехмерное уравнение Фурье с внутренними источниками.

При моделировании температурные режимы на границах обогреваемого объекта определялись с помощью граничных условий третьего рода.

Под температурой понималась разность  $U$  между текущими значениями температуры  $T$  и температурой окружающей среды  $T_{cp} = -50^{\circ}\text{C}$ ,  $U = T - T_{cp}$ . Будем считать, что

$$U_3 = T_{нгр} - T_{cp},$$

где  $T_{нгр}$  — температура нижней границы рабочего диапазона устройства.

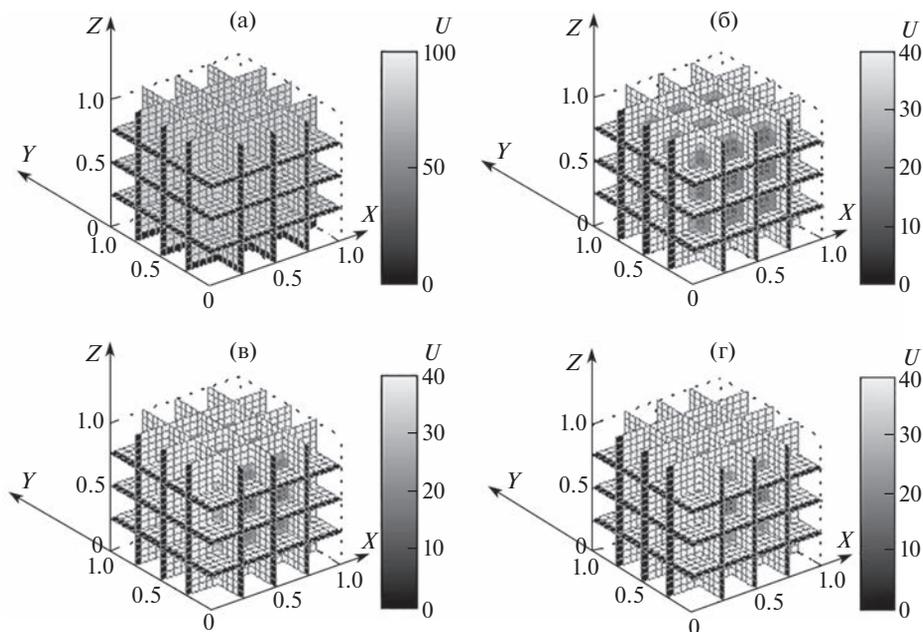
Будем считать, что во всех экспериментах  $T_{нгр} = -10^{\circ}\text{C}$ . Тогда разность температур на уровне нижней границы среды будет равна  $U_3 = 40^{\circ}\text{C}$ .

Для удобства рассмотрения настроим максимальные значения на шкалах температур, на рис. 2а–5а, на уровень  $U = 100^{\circ}\text{C}$ , а на всех остальных, на рис. 2б, в, г–рис. 5б, в, г, на уровень нижней границы рабочего диапазона температур устройства,  $U = 40^{\circ}\text{C}$ .

Сформулированная математическая задача имела вид

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{x1} = T_{x1} - T_{cp} = 0 \quad \text{при } t = 0, x1_0 \leq x1 \leq x1_1, \\ U_{x2} = T_{x2} - T_{cp} = 0 \quad \text{при } t = 0, x2_0 \leq x2 \leq x2_1, \\ U_{x3} = T_{x3} - T_{cp} = 0 \quad \text{при } t = 0, x3_0 \leq x3 \leq x3_1, \\ -\lambda \frac{\partial U_{x1}}{\partial x1} = -\alpha(T_{x1} - T_{sr}) \quad \text{при } t > 0, x1 = x1_0, x1 = x1_1, \\ -\lambda \frac{\partial U_{x2}}{\partial x2} = -\alpha(T_{x2} - T_{sr}) \quad \text{при } t > 0, x2 = x2_0, x2 = x2_1, \\ -\lambda \frac{\partial U_{x3}}{\partial x3} = -\alpha(T_{x3} - T_{sr}) \quad \text{при } t > 0, x3 = x3_0, x3 = x3_1, \\ \rho c \frac{\partial U}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 U_{x1}}{\partial (x1)^2} + \frac{\partial^2 U_{x2}}{\partial (x2)^2} + \frac{\partial^2 U_{x3}}{\partial (x3)^2} \right) + q_v \\ \text{при } t > 0, x1_0 < x1 < x1_1, x2_0 < x2 < x2_1, x3_0 < x3 < x3_1. \end{array} \right. \quad (5)$$

На основании поставленной математической задачи (5) была разработана программа [10], с помощью которой получены результаты моделирования тепловых процессов, происходящих в устройстве при его нагреве на холоде во времени и в объеме.

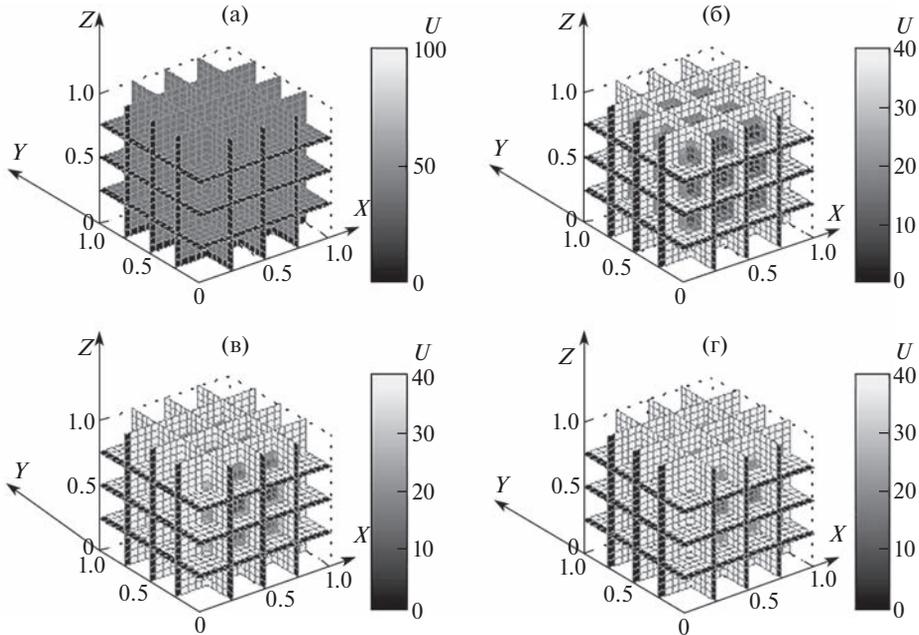


**Рис. 2.** Температурное распределение по объему обогреваемого устройства в разное время при его начальном нагреве до температуры помещения: (а) – в момент выноса устройства из теплого помещения; в моменты времени, соответствующие значениям координаты  $t$  рис. 1: (б) – 0.4; (в) – 0.5; (г) – 0.6.

Следует отметить, что при численных экспериментах использовались фиксированные временные точки для обеспечения возможности сопоставления температурных изменений в устройстве при различных условиях теплового воздействия.

На рис. 2 показан тепловой процесс, происходящий при нагреве устройства нагревателем, расположенным по всей его поверхности, при одновременном остывании этого устройства под воздействием внешней среды с уровня температуры, соответствующего оставшемуся теплу от нахождения его в теплом помещении. Нагреватель включали одновременно с выносом объекта из теплого помещения. Приведенные характерные точки, отражающие тепловое состояние устройства, примерно соответствовали точкам рис. 1, со значениями временной координаты  $t$ : 0.1, 0.4, 0.5, 0.6. Эти же точки использовались при всех экспериментах с объемными тепловыми процессами и соответствовали временным значениям, показанным на рис. 2–5, графиках: (а), (б), (в) и (г) соответственно.

На рис. 2а показано температурное распределение по устройству в момент его выноса из теплого помещения. В этот момент температура равномерно распределена по всему объему и равна температуре устройства в помещении,  $U_1 = 80^\circ\text{C}$ . Она существенно превышает температуру нижней границы рабочей зоны. То есть, устройство имеет накопленное тепло. Через некоторое время, в ходе охлаждения температура большей части объема устройства выходит практически полностью за пределы рабочей зоны (рис. 2б). В этот период нагреватель еще не вышел на максимальный режим нагрева. Однако, уже на следующем рис. 2в, зафиксированном спустя еще некоторое время, видно, что устройство опять почти полностью находится в пределах зоны рабочих температур. На рис. 2г видно, что распределение температур по объему объекта еще больше выравнивается.



**Рис. 3.** Температурное распределение по объему обогреваемого устройства в разное время при его начальной температуре, равной температуре нижней границы рабочего диапазона,  $U_{\text{нгр}} = 40^\circ\text{C}$ : (а) – в момент времени начала охлаждения и одновременно включения нагревателя; в моменты времени, соответствующие значениям координаты  $t$  рис. 1: (б) – 0.4; (в) – 0.5; (г) – 0.6.

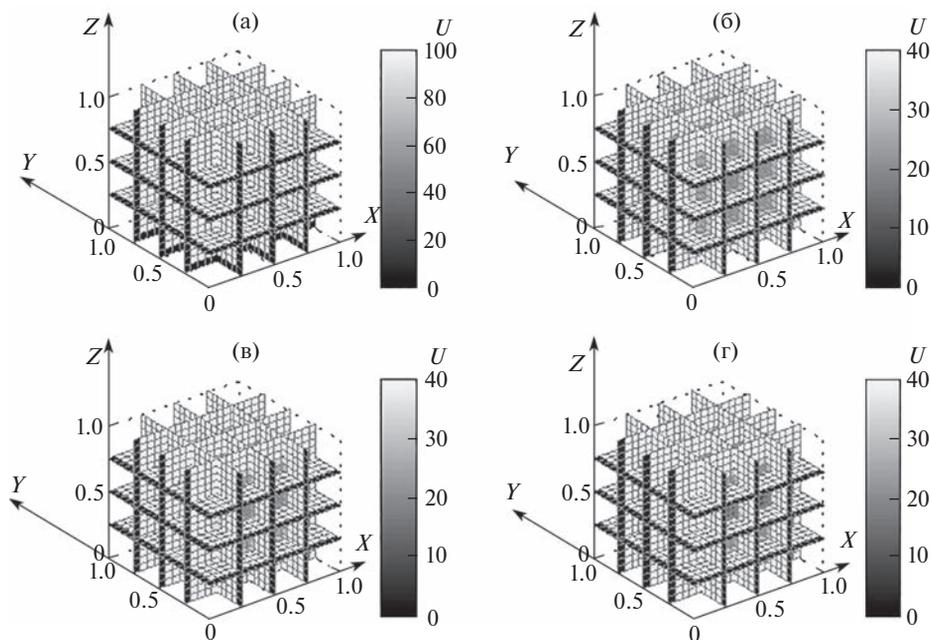
На рис. 3 показан тепловой процесс, также происходящий при нагреве устройства нагревателем. В момент выноса устройства во внешнюю среду оно имело равномерно распределенную температуру, соответствующую температуре нижней границы рабочей зоны,  $U_3 = 40^\circ\text{C}$  (рис. 3а). В этот момент включался нагреватель, находящийся на его поверхности.

На рис. 3б, в можно наблюдать, что температурное распределение по устройству значительно выходит за границы рабочей зоны. И только на рис. 3г температурное распределение выравнивается и почти полностью соответствует рабочему диапазону температур. То есть, данный результат демонстрирует ухудшение в распределении температур по объему устройства и во времени.

Температурные изменения, показанные на рис. 2, 3, происходящие в устройстве, аналогичны характеру температурных изменений, представленных на рис. 1, линии 3 и 6. Меньший выход температур за границы рабочего диапазона зафиксирован на рис. 2. Эти изменения температур аналогичны изменениям, продемонстрированным на рис. 1, линия 3. Основными причинами, приводящими к снижению уровня и длительности выхода температур за границу рабочего диапазона, является включение нагревателя в момент выноса устройства из теплого помещения, что позволяет использовать тепловую энергию, запасенную в теплом помещении.

Теперь рассмотрим, что произойдет, если нагреватель включить при нахождении устройства еще в помещении и дополнительно, равномерно его нагреть.

На рис. 4 отчетливо видно, что степень выхода температур за границы рабочего диапазона, по сравнению с тепловыми процессами, показанными на рис. 2, стала еще меньше. Аналогичная картина наблюдается и при сравнении рис. 1, линия 9 и



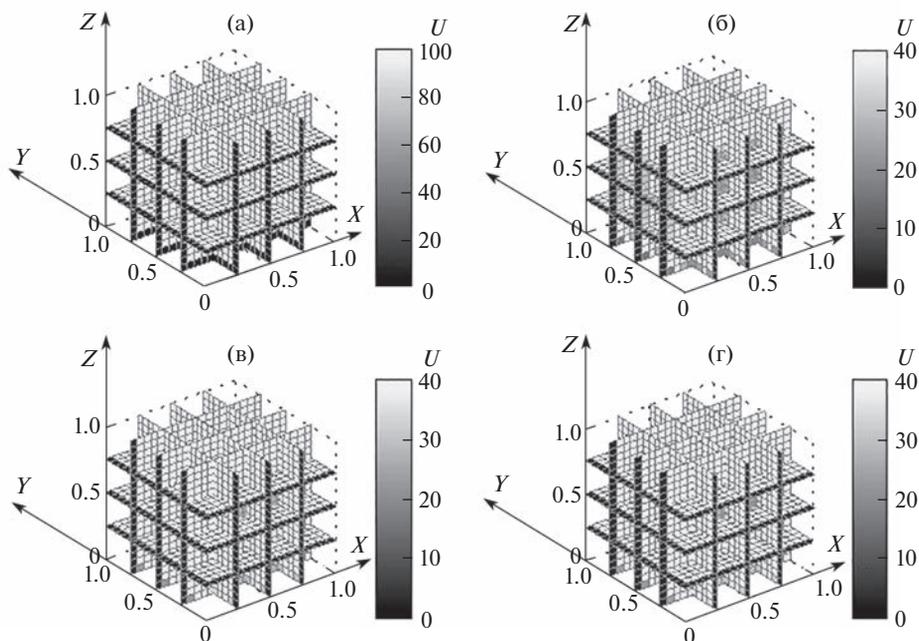
**Рис. 4.** Температурное распределение по объему обогреваемого устройства в различное время при включении нагревателя еще в теплом помещении: (а) – в момент выноса устройства из теплого помещения; в моменты времени, соответствующие значениям координаты  $t$  рис. 1: (б) – 0.4; (в) – 0.5; (г) – 0.6.

линия 3. Отличие в распределении температур по сравнению с рис. 2 также объясняется ростом температуры за счет дополнительного к температуре помещения нагрева нагревателем устройства во время пребывания в помещении, что обеспечивает дополнительный подъем температуры в период нахождения устройства вне помещения (рис. 4б, в, г). Температура устройства в момент его выноса равна  $U = 95^\circ\text{C}$ .

Следует отметить, что процессы, показанные на рис. 4, имеют распределение температур по объему устройства, незначительно выходящее за пределы границ температур рабочего диапазона (рис. 4б), хотя на рис. 1, линия 9, вся кривая, отслеживающая тепловое состояние в одной точке на поверхности устройства, полностью находится в пределах границ температур рабочего диапазона. То есть, более полное представление о степени нахождения или ненахождения устройства в области рабочих температур при протекании переходных процессов дает объемное тепловое поле.

Рассмотрим распределение температур по объему устройства во времени при одновременном использовании активных и пассивных средств тепловой защиты при нахождении его на холоде. Начальная температура устройства в момент его выноса из помещения равнялась, как и в предыдущем случае,  $U = 95^\circ\text{C}$ .

Сопоставляя тепловые процессы, показанные на рис. 4, 5, хорошо видно, что на рис. 5, наблюдается улучшение результатов обогрева устройства за счет использования теплоизоляционного слоя. В рассматриваемом случае, активный обогрев в сочетании с применением теплоизоляционного слоя обеспечивает практически в течение



**Рис. 5.** Температурное распределение по объему устройства в разное время при использовании теплоизоляционного слоя на поверхности нагревателя: (а) – в момент выноса устройства из теплого помещения; в моменты времени, соответствующие значениям координаты  $t$  рис. 1: (б) – 0.4; (в) – 0.5; (г) – 0.6.

всего времени работы в условиях холода распределение температур по объему устройства, не выходящее за пределы нижних температур рабочего диапазона (рис. 5б).

Даже небольшой дополнительный теплоизоляционный слой позволяет добиться существенного снижения степени охлаждения, приводящего за одно и то же время, к более равномерному распределению тепла во времени и более высокому уровню нагрева устройства при тех же энергетических затратах со стороны нагревательной системы.

**Выводы.** Используя режим поддержания температуры устройства в области нижней границы рабочего диапазона температур можно добиться снижения энергетических затрат автономного источника электропитания на обогрев устройства в условиях сильного холода. Однако необходимо учитывать, что при таком нагреве присутствует возможность выхода устройства за границу температур рабочего диапазона.

Снижения периода выхода за границы температур рабочего диапазона во время протекания динамических тепловых процессов при обогреве устройства на холоде можно добиться при использовании остаточного тепла при выносе устройства из теплого помещения.

Этот эффект можно усилить, если включать нагреватели еще в момент нахождения устройства в теплом помещении, т.к., в этом случае, дополнительно к теплу, накопленному в помещении, добавляется энергия от нагревателей.

Полученные в ходе моделирования данные о тепловых процессах в устройстве показывают, что в реальных условиях для настройки тепловой системы: нагреватель–объект–внешняя среда, нужно использовать методы измерения, позволяющие учесть температурные изменения, происходящие в нем и по объему, и во времени.

Применение слоев пассивной теплозащиты повышает эффективность обогрева устройств, то есть позволяет обеспечить им при меньших энергетических затратах более устойчивое соблюдение температурного режима в пределах температур рабочего диапазона устройства и по объему, и во времени.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотовский В.И., Вайсгант З.И.* Эксплуатация, обслуживание и ремонт свинцовых аккумуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1988. 208 с.
2. Сайт Компании “Выбор”: <https://wybor-battery.com/stati/ehkspluataciya-svincovo-kislotnyh-akkumulyatornyh-batarej-pri-otricatelnyh-temperaturah/19.12.20> г.
3. *Александров В.И., Большаков Ю.Н., Макарихин И.В., Салихов И.И.* Особенности эксплуатации аккумуляторных батарей в северных условиях // Актуальные исследования. 2021. № 39 (66). С. 11.
4. Сайт Компании “ПромПрибор” г. Москва. URL:<https://www.промприбор.москва> (дата обращения 07.03.2022).
5. Сайт ООО СП “Унибелус” URL:<https://www.unibelus.by/itm/K88341> (дата обращения 07.03.2022).
6. *Бухмиров В.В.* Теплообмен. Учеб. пособие. Иваново: Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, 2014. 360 с.
7. *Лобасова М.С., Финников К.А., Миловидова Т.А., Дектерев А.А., Серебренников Д.С., Минаков А.В., Кузоватов И.А., Васильев В.В.* Теплообмен [Электронный ресурс]: Курс лекций. Красноярск: ИПК СФУ, 2009.
8. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
9. *Жуковский В.С.* Основы теории теплопередачи. Л.: Энергия, 1969. 224 с.
10. *Дмитриев А.С.* Введение в нанотеплофизику. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 790 с.
11. *Шульженко А.А., Модестов М.Б.* Программа моделирования пространственных тепловых процессов в аккумуляторе на холоде. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2021612869, Москва, 2021.