

Номер 1

ISSN 0235-7119

2024



ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

МЕХАНИКА МАШИН

Задача полного гашения дифракционного звукового поля цилиндрической оболочки <i>О. И. Косарев</i>	3
Расчет оболочек вращения при использовании смешанного МКЭ с векторной аппроксимационной процедурой <i>Ю. В. Клочков, В. А. Пшеничкина, А. П. Николаев, С. С. Марченко, О. В. Вахнина, М. Ю. Клочков</i>	13

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ,
ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

Температурные колебания смазочного слоя при трении <i>А. Ю. Албагачиев, А. Тохметова</i>	28
Параметрическая устойчивость микромасштабного бесконтактного индукционного подвеса с электростатическим контуром управления жесткостью <i>П. П. Удалов, И. А. Попов, А. В. Лукин, Л. В. Штукин, К. В. Полеткин</i>	31
Оценка среднего остаточного ресурса невосстанавливаемых объектов на основе цензурированных данных о безотказных наработках <i>Г. С. Садыхов, С. С. Кудрявцева</i>	43
Методика определения термомеханической диаграммы для напряженных соединений цилиндров при их плоской деформации <i>Д. У. Хасьянова</i>	51
Особенности конструирования широкозахватных дождевальных машин <i>Л. А. Журавлева</i>	61
О трении эластомеров. 1. Постановка задачи <i>А. А. Шепелевский, А. Ю. Неверовская, А. П. Возняковский, Е. Б. Седакова</i>	70

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Моделирование удара стального шарика об алюминиевую пластину Д16 и сравнение с экспериментом <i>А. Г. Анисимов, М. Э. Ахмед Солиман</i>	79
--	----

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Управление четырехкоординатным манипулятором с удаленным центром движения
К. А. Шалюхин

88

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

Исследование износостойкости ножей в период эксплуатации и оценка эффективных методов их упрочнения

В. П. Лялякин, В. Ф. Аулов, А. В. Ишков, И. Н. Кравченко, Ю. Н. Рожков

97

Методология введения поправок при статистических исследованиях на основе контрольных карт

Н. И. Сидняев, Э. Баттулга

107

Модель статического разрушения медного проводника при токовой перегрузке

А. И. Недобитков, Б. М. Абдеев

117

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.26

ЗАДАЧА ПОЛНОГО ГАШЕНИЯ ДИФРАКЦИОННОГО ЗВУКОВОГО ПОЛЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

© 2024 г. О. И. Косарев

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия**e-mail: kosarevoi@yandex.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2023 г.

После доработки 01.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Рассмотрены варианты полного гашения рассеянного и дифракционного звукового поля цилиндрической оболочки, приведены результаты расчетов гашения дифракционного поля.

Ключевые слова: излучение, звуковое давление, импеданс, цилиндрическая оболочка, вынужденные колебания, формула Кирхгофа

DOI: 10.31857/S0235711924010017 **EDN:** SNGNYU

Статья посвящена гашению рассеянного и дифракционного звукового поля цилиндрической оболочки. Уточним используемые ниже понятия, необходимые для исследования способов гашения звукового поля. Дифракция — это рассеивание звукового поля каким-либо препятствием или телом, в данном случае цилиндрической оболочкой. Внешнее поле — это поле, создаваемое внешним источником излучения, свободно распространяющееся в среде. Падающее поле — это внешнее поле, наталкивающееся на препятствие (тело) и рассеиваемое этим телом. Рассеянное поле состоит из полей, излученного и отраженного телом. Рассеянное поле определяется на поверхности тела с использованием волнового уравнения и граничных условий. В результате действия падающего поля на оболочке возникает полное поле, равное сумме падающего и рассеянного полей. Дифракционным звуковым полем назовем поле, появляющееся в среде в результате дифракции и определяемое интегральной формулой Кирхгофа. В формулу Кирхгофа входят полное поле и его нормальная производная на заданной поверхности. Давление в точке наблюдения в дальней зоне определяется суммой внешнего поля в отсутствие тела и дифракционного поля.

Схема дифракционного звукового поля показана на рис. 1 средствами геометрической акустики. Имеется оболочка с поверхностью S . В точке M расположен внешний источник звука, создающий поле, падающее на оболочку. Падающее поле рассеивается и отражается оболочкой, вследствие чего создается дифракционное поле, наблюдаемое в дальней зоне — в точке N .

Анализ опубликованных работ. Проблеме гашения звуковых полей посвящено сравнительно мало публикаций [1–14]. В работе [1], признанной основополагающей [2–6], предложен способ гашения звукового поля с помощью датчиков (измерителей) и излучателей, расположенных на условных звукопрозрачных поверхностях S_1 и S_2 , охватывающих произвольное тело с поверхностью S . Датчики на поверхности S_1 измеряют полное поле U и его нормальную производную $\partial U/\partial n$. На основе

этих измерений путем факторизации выделяется рассеянное поле U_s , которое пересчитывается на поверхность S_2 и гасится излучателями, расположенными на S_2 . В результате этого, по мнению автора [1], тело становится акустически прозрачным.

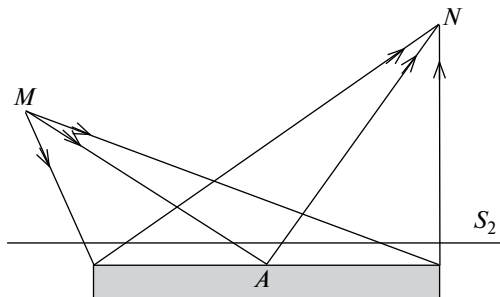


Рис. 1. Схема дифракционного поля.

Из теории дифракции звука следует, что судить о том, является ли тело акустически прозрачным или нет, можно по величине давления дифракционного поля $p(N)$ в точке наблюдения N в дальней зоне (рис. 1), которое определяется формулой Кирхгофа. В эту формулу входят полное поле p и его нормальная производная dp/dn на заданной поверхности, которые подлежат гашению. Полное поле p на поверхности тела S определяется формулой

$$p = p_0 + p_s, \quad (1)$$

где p_0 — падающее поле; p_s — рассеянное поле. В работе [1] полное поле на измерительной поверхности S_1 представлено в виде

$$U = U_0 + U_s, \quad (2)$$

где U_0 названо внешним полем в отсутствие тела; U_s — рассеянное поле.

На практике измерительная поверхность S_1 представляет собой набор датчиков, консольно закрепленных на поверхности тела S . Эти датчики неразрывно связаны с телом и поэтому не могут измерять внешнее поле в отсутствие тела. Автор [1] спутал понятия полного поля на поверхности тела или вблизи него с понятием суммарного поля, состоящего из внешнего поля в отсутствие тела и дифракционного поля. В методе Малюжинца [1] две ошибки: 1) в формуле (2) U_0 — должно быть падающее поле, а не внешнее поле в отсутствие тела, 2) для получения акустически прозрачного тела предложено гасить факторизованное рассеянное поле U_s . Поскольку рассеянное поле является частью полного поля, то в результате гашения тело не становится акустически прозрачным.

Таким образом, предложенный Малюжинцем метод получения акустически прозрачного тела является ошибочным.

В работе [2] сказано, что она носит характер комментариев к [1]. В качестве замечания к [1] отмечен большой объем вычислений, связанных с пересчетом параметров на поверхностях S_1 , S_2 . Замечаний по поводу получения акустически прозрачного тела нет.

В работе [3], так же как в [2], признан способ [1]. Рассмотрены особенности гашения рассеянного поля, касающиеся дискретного расположения на поверхности S_1 точечных измерителей и излучателей. Правильно замечено, что измерительную поверхность S_1 можно совместить с поверхностью оболочки S . Сказано, что компенсирующие излучатели не могут быть размещены на поверхности оболочки в силу

«разрывности» результирующего поля. Это утверждение не совсем верное. Действительно, функция монополюсного излучателя вида e^{ikr}/r при $r=0$ не существует, но излучатель в этой точке не вычисляется. Установить источник излучения на поверхности оболочки можно. Например, в работе [7] приведен расчет звукового поля, излучаемого точечным источником, установленным на поверхности оболочки.

В работе [4], так же как и в [1], предложено гасить рассеянное звуковое поле, но другим путем — путем создания на поверхности тела вибраций, возбуждаемых приложенными к телу непрерывно распределенными силами f_a . Полное поле на поверхности тела представлено в виде $p = p_0 + p_s + p_a$, где p_0 — падающее поле; p_s — рассеянное поле (1); p_a — компенсирующее поле, создаваемое силами f_a , т. е. $p_s + p_a = 0$. Сказано, что в результате гашения рассеянного поля тело становится акустически прозрачным. Формула гасящей силы f_a получена в виде

$$f_a = w(Z - Z_0), \quad (3)$$

где w — полное виброперемещение, соответствующее полному полю; Z — импеданс тела; Z_0 — импеданс падающего поля. Здесь взято полное перемещение w вместо полной колебательной скорости v , имеющейся в оригинале. Такая замена не принципиальная, т. к. рассматриваются гармонические звуковые волны. В соответствии с этим несколько меняется понятие импеданса как отношение давления к перемещению (а не к скорости). В работе [4] особо отмечено, что из-за наличия в формуле (3) полного виброперемещения w факторизация не нужна.

Недостатки работы [4] следующие. Давление p_a в условии компенсации рассеянного поля $p_s + p_a = 0$ не определено, и сила f_a из этого условия не получена. Сила f_a получена из другого уравнения — из уравнения скоростей, которое является неопределенным (одно уравнение с двумя неизвестными), не имеющим однозначного решения. Полученная формула силы f_a (3) ошибочная, что было отмечено ранее [9] и будет показано ниже. По этой причине факторизация здесь все же нужна. В целом в [4] и задача гашения рассеянного поля не решена, и акустически прозрачное тело не получено.

Гашение дифракционного поля цилиндрической оболочки с использованием активных сил f_a впервые было рассмотрено в работах [8, 9]. В них получены формулы гасящих сил. Недостатки этих работ следующие. Задача не была решена полностью. Физические возможности создания требуемых сил не были исследованы, варианты гашения не рассмотрены. Расчеты диаграмм направленности дифракционного поля не проведены, не дана оценка эффективности гашения. Настоящая статья является продолжением и развитием работ [8, 9].

Цель статьи — теоретически исследовать возможные варианты полного гашения дифракционного звукового поля цилиндрической оболочки.

Новизна. Предложен новый метод расчета гашения звукового поля, основанный на использовании системы трех уравнений. Рассмотрены варианты полного гашения дифракционного поля цилиндрической оболочки, показана эффективность гашения.

Полезность. Выявлены недостатки и ошибки способов гашения, которые были предложены в ранее опубликованных работах. Оценены возможности практической реализации вариантов гашения, которые можно использовать при разработке методов гашения.

Решение задачи гашения дифракционного звукового поля цилиндрической оболочки основывается на системе трех уравнений.

Первое уравнение — уравнение вынужденных колебаний цилиндрической оболочки [8, 9]

$$\left(L(\gamma) + \omega_*^2 \bar{E} \right) \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{q}(p_0 + p_s + f_a) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где падающее поле

$$p_0 = A_0 e^{ikz \cos \psi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr \sin \psi) \cos n\varphi.$$

Второе уравнение – формула Кирхгофа [7]

$$p(N) = \frac{1}{4\pi} \iint \left[p \frac{\partial G(N, A)}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n} G(N, A) \right] ds, \\ G(N, A) = \frac{e^{-ikR}}{R}, \\ R = |N, A|, \quad (5)$$

где p – полное поле в точке A на поверхности тела, $G(N, A)$ – функция Грина.

Формула Кирхгофа (5) в преобразованном виде:

$$p(N) = \frac{e^{-ikR}}{2R} i^n \left[\mu \cdot J'_n(\mu) \int_0^L (p_0 + p_s - Z_2 w) e^{ikz \cos \theta} dz \right], \quad (6) \\ Z_2 = \frac{\rho \omega^2 J_n(\mu)}{(k \sin \theta) J'_n(\mu)}, \quad \mu = k a \sin \theta, \quad Z_s = \frac{\rho \omega^2 H_n(k a \sin \psi)}{k \sin \psi H'_n(k a \sin \psi)},$$

где Z_2 – импеданс наблюдаемого поля в точке N ; θ – угол наблюдения; a – радиус; L – длина оболочки.

Третье уравнение – формула рассеянного поля p_s совместно с граничным условием [8]

$$p_s = A_0 e^{ikz \cos \psi} \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr \sin \theta) \cos n\varphi, \quad (7)$$

где $H_n^{(2)}(kr \sin \theta)$ – функция Ганкеля второго рода; r – радиальная координата некоторой точки в пространстве в цилиндрической системе координат.

Коэффициент B_n определяется из граничного условия на поверхности тела

$$\left. \frac{\partial(p_0 + p_s)}{\partial r} \right|_{r=a} = \rho \omega^2 w, \quad (8)$$

где ρ – плотность среды; ω – угловая частота; w – колебательное перемещение (виброперемещение) поверхности оболочки, вызванное падающим полем. Величина

p_s определяется в точке пространства $r \geq a$, где a — радиус цилиндра. В развернутом виде рассеянное поле p_s (6) является суммой двух составляющих $p_s = p_{sw} + p_{st}$: 1) p_{sw} — рассеяние, вызываемое деформацией упругой поверхности тела вынужденными колебаниями, возбуждаемыми падающим полем. По физической сути это повторное излучение или переизлучение; 2) p_{st} — рассеяние в виде эхосигнала, отраженного от абсолютно твердой поверхности тела.

Приведенные уравнения (4)–(8) используются в преобразованном виде

$$Zw = p_0 + p_s + f_a; \quad (9)$$

$$p_0 + p_s = Z_2 w; \quad (10)$$

$$p_s = Z_s (w - w_0). \quad (11)$$

Уравнение (9) представляет собой преобразованное уравнение вынужденных колебаний цилиндрической оболочки (4), где Z — механический импеданс оболочки. Уравнение (10) — это подынтегральная скобка, приравненная к нулю, в преобразованной формуле Кирхгофа (6). Уравнение (11) — это преобразованная формула рассеянного поля p_s (7), полученная из граничного условия (8), где Z_s — импеданс излучения оболочки, $w_0 = p_0/Z_0$ — виброперемещение падающего поля.

С использованием системы уравнений (9)–(11), являющейся основой единого подхода к решению различных задач гашения, рассмотрим несколько вариантов частичного и полного гашения рассеянного и дифракционного полей.

Гашение рассеянного поля p_s активными силами f_a . В уравнении колебаний оболочки (9) два неизвестных параметра w и f_a :

$$Zw - p_0 = p_s + f_a.$$

Из него выразим рассеянное поле

$$p_s = Zw - p_0 - f_a.$$

Из условия гашения рассеянного поля $p_s = 0$ определяем силы

$$f_a = Zw - p_0.$$

В этом выражении остается неизвестным перемещение w . Для его определения воспользуемся уравнением (11) $p_s = Z_s(w - w_0)$, из которого при $p_s = 0$ получаем $w = w_0$. Окончательно с учетом $p_0 = Z_0 w_0$

$$f_a = w_0 (Z - Z_0). \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что для определения силы f_a надо знать перемещение w_0 падающего поля p_0 , т. е. факторизация полного поля, вопреки мнению [4], нужна. Формула (12) отличается от формулы (3) тем, что в формуле (12) вместо полного виброперемещения w стоит перемещение падающего поля w_0 , что принципиально важно. Новый способ определения силы f_a еще раз доказывает ошибочность формулы силы f_a (3) в [4].

Гашение полного поля $p = p_0 + p_s$ активными силами f_a . Из уравнения колебаний оболочки (9) $Zw - f_a = p_0 + p_s$ и условия $p = p_0 + p_s = 0$ найдем гасящие силы $f_a = Zw$. В этом способе гашения надо измерять полное виброперемещение w . Факториза-

ция не нужна, т. к. гасится полное поле. При этом в формуле Кирхгофа (6) в скобке полное поле $p = p_0 + p_s = 0$, но остается составляющая $Z_2 w$, которую придется гасить излучателями.

Гашение дифракционного поля $p(N)$ активными силами f_a . Для гашения дифракционного поля из уравнений (9) и (10) системы

$$p_0 + p_s = Z w - f_a,$$

$$p_0 + p_s = Z_2 w,$$

определим гасящие силы

$$f_a = w(Z - Z_2). \quad (13)$$

Подставляя (11) во второе уравнение (10), находим

$$w = w_0 \frac{Z_0 - Z_s}{Z_2 - Z_s}. \quad (14)$$

Подставляем w (14) в f_a (13), находим гасящие силы

$$f_a = w_0 \frac{(Z_0 - Z_s)}{(Z_2 - Z_s)} (Z - Z_2), \quad (15)$$

$$Z_0 = \frac{\rho \omega^2 J_n(k a \sin \psi)}{k \sin \psi J'_n(k a \sin \psi)}, Z_2 = \frac{\rho \omega^2 J_n(k a \sin \theta)}{(k \sin \theta) J'_n(k a \sin \theta)},$$

где Z_0, Z_2 — импедансы падающего и наблюдаемого полей; ψ — угол падения; θ — угол наблюдения. Подставляем полученные выражения в круглую скобку формулы Кирхгофа (6), получаем

$$p(N) = 0,$$

т. е. получаем полное гашение дифракционного поля с нулевой диаграммой направленности и, следовательно, получаем акустически прозрачную оболочку. Итак, чтобы оболочка стала акустически прозрачной, сила f_a должна вычисляться по формуле (15). Полученный результат математически правильный, но физически не реализуемый, потому что создать вынуждающую силу f_a с импедансом Z_2 , т. е. одновременно для всех углов наблюдения θ , невозможно. Поэтому выбираем главный угол наблюдения дифракционного поля — угол зеркального отражения падающей волны $\theta = \theta_1 = \pi - \psi$. Импедансы наблюдаемого поля Z_2 для углов зеркального отражения и теневого луча $\theta = \theta_2 = \pi + \psi$ в силу свойств функций Бесселя одинаковы. С учетом этого в формуле (15) принимаем $Z_2 = Z_0$ и получаем формулу гасящей силы

$$f_a = w_0 (Z - Z_0),$$

точно такую же, как (12). При такой силе гасятся как рассеянное поле, так и дифракционное поле, причем рассеянное поле гасится полностью, а дифракционное поле гасится полностью только в двух угловых направлениях диаграммы направленности.

Подчеркнем, что перемещение w становится равным w_0 только в результате приложения силы f_a (12). В подтверждение сказанного запишем формулу для перемещения w в виде

$$w = \frac{p_0(Z_0 - Z_s)}{Z_0(Z - Z_s)} + \frac{f_a}{Z - Z_s}. \quad (16)$$

До приложения силы $f_a = 0$ перемещение w определяется первым слагаемым в (16). После приложения силы f_a (12) и подстановки ее в (16) перемещение w становится $w = w_0$. В связи с этим результатом отличие формулы (12) от формулы (3) является принципиально важным. От него зависит необходимость проведения факторизации.

Перемещение w_0 измерить нельзя, но его можно определить расчетно-экспериментальным путем. С учетом формулы рассеянного поля (11) полное поле до приложения силы f_a можно представить в виде суммы падающего и рассеянного полей

$$p = p_0 + Z_s (w - w_0).$$

Из этого выражения находим

$$w_0 = \frac{p - Z_s w}{Z_0 - Z_s}. \quad (17)$$

Из формулы (17) по результатам измерения полного поля p и перемещения w (до приложения силы f_a) при известных импедансах Z_0 и Z_s можно определить w_0 . Поскольку выражение импеданса Z_0 зависит от угла падения ψ , то еще надо уметь определять угол падения.

Для расчетно-экспериментального определения угла падения ψ можно воспользоваться тем, что фазовое распределение полного давления p по длине оболочки z определяется фазой падающего поля $\exp(ikz \cos \psi)$ в (4). Угол падения ψ можно определить, например, путем одновременного измерения давлений p_1 и p_2 в двух поперечных сечениях оболочки, отстоящих друг от друга по длине оболочки на расстояние $\zeta = z_1 - z_2$:

$$p_1 = A e^{ikz_1 \cos \psi}, p_2 = A e^{ikz_2 \cos \psi}, p_1/p_2 = e^{ik\zeta \cos \psi}.$$

Поскольку измеренные давления p_1 и p_2 — вещественные числа, и в комплексных числах физический смысл имеют их вещественные части, то $p_1/p_2 = \cos(k\zeta \cos \psi)$, откуда

$$\cos \psi = \frac{\arccos(p_1/p_2)}{k\zeta}. \quad (18)$$

Результаты расчетов приведены на рис. 2–4. На рис. 2 приведены графики импедансов падающего Z_0 и наблюдаемого Z_2 полей, входящих в формулу (15). Импеданс Z_0 — горизонтальная пунктирная линия, импеданс Z_2 — сплошная разрывная линия. Угол падения $\psi = 80^\circ$, $n = 1$, $f = 1$ кГц. Импедансы равны в точках пересечений при значениях углов наблюдения $\theta_1 = \pi - \psi$ и $\theta_2 = \pi + \psi$, т. е. углах луча зеркального отражения и теневого луча. При этих углах наблюдения давление равно нулю. Аналогичная картина происходит при всех гармониках и на всех частотах, не смотря на то, что вид функции Z_2 сильно меняется, особенно с изменением частоты.

На рис. 3 приведены диаграммы направленности давления в дальнем поле в исходном состоянии до гашения приложения силы f_a и в результате гашения на частотах (а) $f = 1$ кГц, (б) $f = 5$ кГц при угле падения $\psi = 80^\circ$.

На рис. 4 приведены изменения пиков диаграмм направленности: 1 — зеркальный и 2 — теневой лучи до гашения, 3 — линия, совпадающая с осью абсцисс, после гашения. По оси ординат отложен модуль давления в долях амплитуды падающего поля A_0 .

Преимущество этого способа гашения — применение простых средств измерения и гашения. Гашение практически осуществляется вибраторами, точнее средствами с функциями вибраторов, которые можно выполнить в виде активного покрытия [5]. Недостаток способа — необходимость факторизации полного поля с определением параметров падающего поля, т. е. виброперемещения w_0 и угла падения ψ .

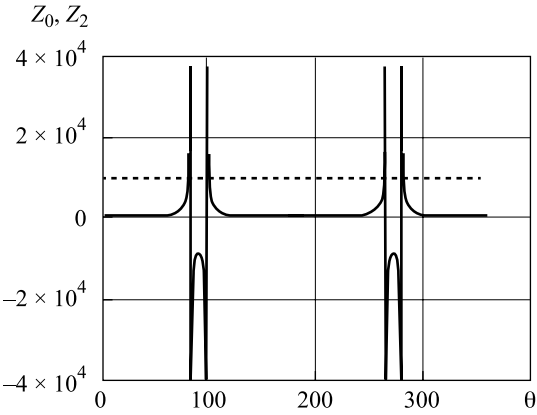


Рис. 2. Импеданс Z_0 – пунктирная линия, импеданс Z_2 – сплошная линия с разрывами.

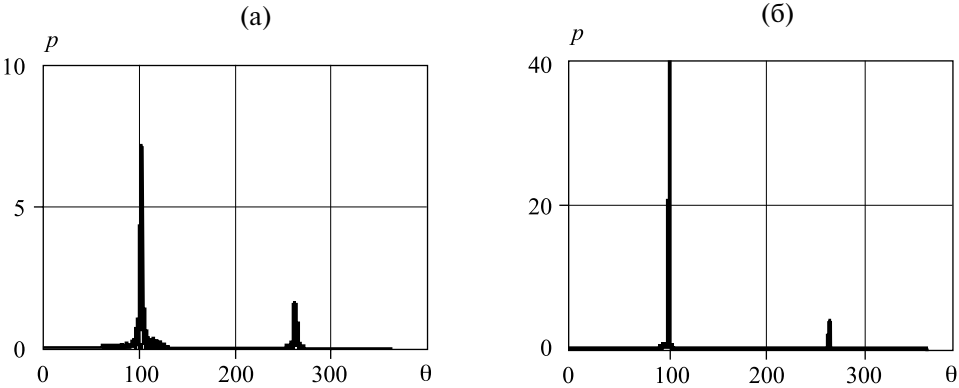


Рис. 3. Диаграммы направленности: (а) – $f = 1$ кГц; (б) – $f = 5$ кГц.

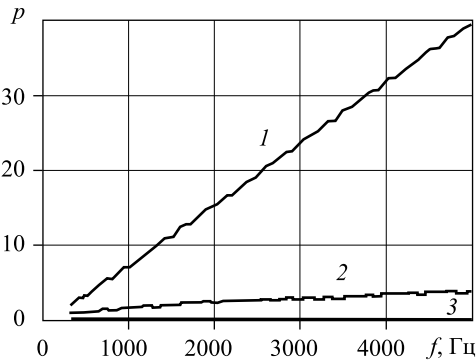


Рис. 4. Частотная зависимость пиков диаграмм давления: 1 – зеркальный и 2 – теневой лучи до гашения; 3 – после гашения.

Гашение дифракционного поля комбинированным способом — активными силами и излучателями. Комбинированный способ гашения предполагает вибрации гасить силами, а отраженное поле гасить излучателями. Силу f_a можно определить из уравнения колебаний оболочки

$$\begin{aligned} Zw &= p_0 + p_s + f_a, \\ f_a &= -(p_0 + p_s). \end{aligned}$$

При такой силе, создаваемой вибраторами, перемещение $w = 0$, что соответствует модели абсолютно твердого тела. Эту же силу f_a можно определить из граничного условия на абсолютно твердом теле. При этом на поверхность оболочки как твердого тела действует полное поле $p = p_0 + p_s$. В этом случае в формуле Кирхгофа (6) принимается $w = 0$, и полное поле p гасится излучателями, расположенными на поверхности оболочки, создающими поле p_a , противофазное полному полю p , т. е. $p + p_a = 0$ [5], где

$$p_a = -(p_0 + p_s) = w_0(Z_s - Z_0).$$

В этом случае можно полностью погасить дифракционное поле оболочки по измерениям вибраций w полного поля p на поверхности оболочки.

Гашение дифракционного поля излучателями. Полностью погасить дифракционное поле можно с помощью приемников и излучателей, расположенных на поверхности оболочки. Для этого не нужны ни виртуальные поверхности S_1 и S_2 , ни факторизация, ни перерасчет параметров на поверхностях S_1 и S_2 . Условие полного гашения дифракционного поля определяется формулой Кирхгофа

$$p(N) = \frac{1}{4\pi} \iint \left[(p - p^*) \frac{\partial G(R)}{\partial n} - \left(\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial p^*}{\partial n} \right) G(R) \right] dS = 0,$$

где $p = p_0 + p_s$ — полное поле; $\partial p / \partial n$ — градиент p на поверхности тела S ; p^* и $\partial p^* / \partial n$ — звуковое поле и его нормальная производная, создаваемые гасящими монопольными и дипольными излучателями. Условие гашения выполняется при $p = p^*$ и $\partial p / \partial n = \partial p^* / \partial n$. Теоретически это, вероятно, наиболее простой способ. Гасить надо то, что непосредственно измеряешь. Средства измерения и гашения могут быть однотипными, основанными на свойствах пьезоэлектроники.

В рассмотренном способе гашения, также как и в других, необходимо обеспечить высокую точность работы приемно-излучающей системы, чтобы исключить возможность усиления дифракционного поля вместо его ослабления [6].

Закключение. Уточнено понятие рассеянного поля, и введено понятие дифракционного звукового поля цилиндрической оболочки. Установлено, что метод Малюжинца ошибочный и что для создания акустически прозрачного тела гасить надо дифракционное поле. Предложен новый метод решения задачи гашения, основанный на использовании системы трех уравнений. Рассмотрены варианты частичного и полного гашения дифракционного звукового поля цилиндрической оболочки. Отмечены их преимущества и недостатки. Показана возможность полного гашения дифракционного поля тремя способами: 1) только вибраторами; 2) совместно вибраторами и излучателями; 3) только излучателями. По первому способу следует уточнить, что полное гашение (до нуля) происходит в двух главных направлениях диаграммы направленности — зеркально отраженного и теневого лучей. На остальных углах наблюдения сохраняются небольшие сигналы фонового (шумового) типа. Эффект снижения звукового давления на остальных углах наблюдения в зависимости

от частоты в проведенных расчетах составляет 24–50 раз. В остальных способах полное гашение происходит по всей диаграмме направленности. Наиболее перспективным для дальнейшей разработки и практической реализации представляется третий способ с применением излучателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюжинец Г. Д.* Нестационарные задачи дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью // Труды акустического института. 1971. Вып. 15. С. 124.
2. *Федорюк М. В.* О работах Г.Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов // Труды акустического института. 1971. Вып. 15. С. 124.
3. *Завадская М. П., Попов А. В., Эгельский Б. Л.* Об аппроксимации волновых потенциалов в задачах активного гашения звуковых полей по методу Малюжинца // Акустический журнал. 1975. Т. 21. № 5. С. 732.
4. *Бобровницкий Ю. И.* Новое решение задачи об акустически прозрачном теле // Акустический журнал. 2004. Т. 50. № 6. С. 751.
5. *Арабаджи В. В.* О преобразовании акустически жесткого тела в акустически прозрачное в задаче с начальными условиями // Акустический журнал. 2008. Т. 54. № 6. С. 869.
6. *Иванов В. П.* Влияние дифракционного поля на процесс активного гашения звуковых полей // Акустический журнал. 2007. Т. 51. № 6. С. 760.
7. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
8. *Косарев О. И.* Активное гашение вторичного поля цилиндрической оболочки в дальней зоне с использованием приложенных к оболочке вынуждающих сил // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 1. С. 10.
9. *Косарев О. И.* Решение задачи акустической прозрачности тела в дальнем поле // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 4. С. 36.
10. *Tolokonnikov L. A., Efimov D. Y.* Diffraction of sound waves at an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in the vicinity of the boundary of an elastic half-space // Mechanics of Solids. 2021. Т. 56. № 8. P. 1657.
11. *Skobeltsyn S. A., Tolokonnikov L. A.* Sound diffraction on a sphere with an inhomogeneous coating in a plane waveguide // Mechanics of Solids. 2020. Т. 55. № 8. P.1351.
12. *Bunkin A. F., Mikhailovich V. G., Streltsov V. N.* Sound scattering in a nanodispersed medium in the field of a standing electromagnetic wave // Physics of Wave Phenomena. 2022. Т. 30. № 4. P. 256.
13. *Bulanov V. A., Bugaeva L. K., Storozhenko A. V.* On Sound Scattering and Acoustic Properties of the Upper Layer of the Sea with Bubble Clouds // J. of Marine Science and Engineering. 2022. Т. 10. № 7. P. 827.
14. *Salin M., Razumov D.* Multi-domain boundary element method for sound scattering on a partly perturbed water surface // J. of Theoretical and Computational Acoustics. 2020. Т. 28. № 3. P. 205006.

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 539.3

**РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СМЕШАННОГО
МКЭ С ВЕКТОРНОЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРОЙ**

© 2024 г. Ю. В. Ключков^{1, *}, В. А. Пшеничкина², А. П. Николаев¹,
С. С. Марченко¹, О. В. Вахнина¹, М. Ю. Ключков²

¹Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Россия

²Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

*e-mail: klotchkov@bk.ru

Поступила в редакцию 06.04.2023 г.

После доработки 11.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Разработан конечно-элементный алгоритм в смешанной формулировке для нахождения напряжений и перемещений в оболочке вращения. Конечный элемент дискретизации принят в форме криволинейного четырехугольника срединной поверхности оболочки. Узловыми неизвестными в смешанной формулировке использованы усилия и моменты срединной поверхности с билинейной аппроксимацией, а также перемещения и их первые производные в двух вариантах аппроксимации кинематических искомых величин в скалярной и векторной форме. На примерах расчета показана эффективность использования аппроксимации кинематических искомых величин как векторных полей, и отмечена возможность определения напряжений в оболочках вращения, изготовленных из несжимаемых материалов.

Ключевые слова: смешанный функционал, векторная аппроксимация, смешанный конечный элемент, смещение твердого тела

DOI: 10.31857/S0235711924010024, **EDN:** SNGBPH

Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) объектов техносферы в виде оболочек вращения и их фрагментов в настоящее время осуществляют с помощью численных методов [1, 2], доминирующее положение среди которых занимает метод конечных элементов (МКЭ) [3–5]. Подавляющее большинство современных зарубежных и отечественных вычислительных комплексов типа ANSYS, NASTRAN, ABAQUS, “Лира” реализуют конечно-элементную процедуру в форме метода перемещений. В то же время использование МКЭ в смешанной формулировке [6] позволяет создавать вычислительные алгоритмы, обладающие рядом преимуществ по сравнению с алгоритмами, построенными на базе метода перемещений [7, 8]. В настоящей статье реализован конечно-элементный алгоритм анализа НДС оболочек вращения при реализации смешанного варианта МКЭ с использованием векторного способа интерполяции кинематических искомых неизвестных. На тестовых примерах оболочки вращения, подверженной в процессе нагружения возможности смещения как твердого тела, показаны преимущества созданного алгоритма по сравнению с формулировкой МКЭ в форме метода перемещений.

Физические и геометрические соотношения. Деформации и напряжения в произвольной точке оболочки связаны законом Гука

$$\left\{ \mu^z \right\}_{3 \times 1} = [C]_{3 \times 3} \left\{ \sigma \right\}_{3 \times 1}, \quad (1)$$

$$\text{где } \left\{ \mu^z \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \mu_{11}^z \mu_{22}^z 2\mu_{12}^z \right\}; \left\{ \sigma \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \right\}.$$

На основе гипотезы прямой нормали деформации и напряжения определяются через параметры срединной поверхности

$$\left\{ \varepsilon^z \right\}_{3 \times 1} = [G_\mu]_{3 \times 6} \left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1}; \quad \left\{ \sigma \right\}_{3 \times 1} = [G_\sigma]_{3 \times 6} \left\{ N \right\}_{6 \times 1}, \quad (2)$$

$$\text{где } \left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} 2\varepsilon_{12} \aleph_{11} \aleph_{22} 2\aleph_{12} \right\}; \left\{ N \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ N_{11} N_{22} N_{12} M_{11} M_{22} M_{12} \right\}.$$

Вектор перемещения точки срединной поверхности и его производные определяются в базисе рассматриваемой точки

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 u + \mathbf{e}_2 v + \mathbf{e}_3 w; \quad \mathbf{v}_{,\alpha} = z_\alpha^k \mathbf{e}_k; \quad \mathbf{v}_{,\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}^k \mathbf{e}_k. \quad (3)$$

Деформации и искривления срединной поверхности определяются соотношениями Коши [8] в матричном виде

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \left\{ \gamma \right\}_{3 \times 1}, \quad (4)$$

$$\text{где } \left\{ \gamma \right\}_{1 \times 3}^T = \{u \ v \ w\} \text{ — строка перемещений точки срединной поверхности; } [L]_{6 \times 3} \text{ — матрица алгебраических и дифференциальных операторов.}$$

Элемент дискретизации. В соответствии с конечно-элементной моделью срединная поверхность оболочки представлялась совокупностью четырехугольных КЭ, узлы которых i, j, k, l располагались в вершинах четырехугольников. Искомые узловыми неизвестными были выбраны продольные усилия и изгибающие моменты, а также компоненты вектора перемещения и их частные производные первого порядка.

Усилия и моменты точки срединной поверхности аппроксимируются через узловые значения с использованием билинейных функций:

$$\left\{ N \right\}_{6 \times 1} = [A]_{6 \times 24} \left\{ N_y \right\}_{24 \times 1}, \quad (5)$$

$$\text{где } \left\{ N_y \right\}_{1 \times 24}^T = \left\{ N_{11}^i \ N_{11}^j \ N_{11}^k \ N_{11}^l \ \dots \ N_{12}^i \ N_{12}^j \ N_{12}^k \ N_{12}^l \ M_{11}^i \ \dots \ M_{12}^l \right\}.$$

Для интерполяции перемещений и их производных используются функции формы, элементами которых являются полиномы Эрмита третьей степени:

$$\begin{aligned} q &= \left\{ \Psi \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ q_y^L \right\}_{12 \times 1}, \\ q_{,\alpha} &= \left\{ \Psi_{,\alpha} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ q_y^L \right\}_{12 \times 1}, \\ q_{,\alpha\beta} &= \left\{ \Psi_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ q_y^L \right\}_{12 \times 1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\{q_y^L\}_{1 \times 12}^T = \{q^i q^j q^k q^l q_{,\xi}^i q_{,\xi}^j q_{,\xi}^k q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta}^k q_{,\eta}^l\}$ – строка узловых неизвестных в локальной системе координат, под символом q понимаются перемещения u, v, w .

Узловые неизвестные в локальной и глобальной системах координат связаны зависимостью

$$\{q_y^L\}_{12 \times 1} = [D]_{12 \times 12} \{q_y^G\}_{12 \times 1}, \quad (7)$$

$$\text{где } \{q_y^G\}_{1 \times 12}^T = \{q^i q^j q^k q^l q_{,S}^i q_{,S}^j q_{,S}^k q_{,S}^l q_{,\phi}^i q_{,\phi}^j q_{,\phi}^k q_{,\phi}^l\}.$$

С использованием (6), (7) зависимость (4) приводится к виду

$$\{\mu\}_{6 \times 1} = [B_1]_{6 \times 36} \{U_y^G\}_{36 \times 1}, \quad (8)$$

$$\text{где } \{U_y^G\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \{u_y^G\}_{1 \times 12}^T \{v_y^G\}_{1 \times 12}^T \{w_y^G\}_{1 \times 12}^T \right\}.$$

Согласно аппроксимирующим выражениям (6) каждая компонента вектора перемещения точки, расположенной во внутренней области элемента дискретизации, выражается посредством значений этой же самой компоненты в узлах используемого конечного элемента.

Альтернативой аппроксимирующим выражениям (6) является векторная форма интерполяционной процедуры [7], которая предполагает, что в качестве объекта интерполяции выступает не какая-либо из компонент вектора перемещения, а непосредственно сам вектор в выбранной системе локальных ξ, η и глобальных S, ϕ координат:

$$\{v_y^L\}_{1 \times 12}^T = \{v^i v^j v^k v^l v_{,\xi}^i v_{,\xi}^j v_{,\xi}^k v_{,\xi}^l v_{,\eta}^i v_{,\eta}^j v_{,\eta}^k v_{,\eta}^l\}; \quad (9)$$

$$\{v_y^G\}_{1 \times 12}^T = \{v^i v^j v^k v^l v_{,S}^i v_{,S}^j v_{,S}^k v_{,S}^l v_{,\phi}^i v_{,\phi}^j v_{,\phi}^k v_{,\phi}^l\}. \quad (10)$$

Аппроксимирующие выражения записываются для векторных величин:

$$\begin{aligned} v &= \{\psi\}_{1 \times 12}^T \{U_y^L\}_{12 \times 1} = \{\psi\}_{1 \times 12}^T [D]_{12 \times 12} \{U_y^G\}_{12 \times 1} = \\ &= \{\pi\}_{1 \times 12}^T [EL]_{12 \times 36} [PR]_{36 \times 36} \{U_y^G\}_{36 \times 1}, \\ v_{,\alpha} &= \{\pi\}_{1 \times 12}^T [EL]_{12 \times 36} [PR]_{36 \times 36} \{U_y^G\}_{36 \times 1}, \\ v_{,\alpha\beta} &= \{\pi\}_{1 \times 12}^T [EL]_{12 \times 36} [PR]_{36 \times 36} \{U_y^G\}_{36 \times 1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $[EL]_{12 \times 36}$ – матрица, элементами которой являются строки базисных векторов узловых точек.

С использованием выражений базисных векторов узловых точек через базисные векторы внутренней точки срединной поверхности конечного элемента выполняются координатные преобразования. В результате получаются аппроксимирующие соотношения для компонент векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_{,\pm}$ и $\mathbf{v}_{,\pm^2}$, с использованием которых зависимость (4) представляется матричным соотношением

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \end{matrix} \right\}_{6 \times 1} = \left[\begin{matrix} B_2 \\ \end{matrix} \right]_{6 \times 36} \left\{ \begin{matrix} U_y^G \\ \end{matrix} \right\}_{36 \times 1}. \quad (12)$$

Функционал и его минимизация. Для получения матрицы податливости принятого конечного элемента использован смешанный функционал

$$\begin{aligned} F_S = & \int_V \left\{ \sigma_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \varepsilon^z \right\}_{3 \times 1} dV - \\ & 0.5 \int_V \left\{ \sigma_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left[C_e \right]_{3 \times 3} \left\{ \sigma_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} dV - \\ & 0.5 \int_S \left\{ \gamma \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ R \right\}_{3 \times 1} dS, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\{R\}$ – столбец заданной нагрузки.

При учете (2), (5), (8) и (12) функционал (13) можно представить в виде

$$\begin{aligned} F_S = & \left\{ N_y \right\}_{1 \times 24}^T \int_V [A]_{24 \times 6}^T [G_\sigma]_{6 \times 3}^T [G_\varepsilon]_{3 \times 6} [B_\alpha]_{6 \times 36} dV \left\{ U_y^G \right\}_{36 \times 1} - \\ & - 0.5 \left\{ N_y \right\}_{1 \times 24}^T \int_V [A]_{24 \times 6}^T [G_\sigma]_{6 \times 3}^T [C_e]_{3 \times 3} [G_\sigma]_{3 \times 6} [A]_{6 \times 24} dV \left\{ N_y \right\}_{24 \times 1} - 0.5 \left\{ U_y^G \right\}_{1 \times 36}^T \int_S [GY]_{36 \times 3}^T \left\{ R \right\}_{3 \times 1} dS, \end{aligned} \quad (14)$$

где использовано выражение $\left\{ \gamma \right\}_{3 \times 1} = [GY]_{3 \times 36}^T \left\{ U_y^G \right\}_{36 \times 1}$.

Минимизация функционала (14) приводит к системе матричных уравнений

$$\begin{cases} \partial F_S / \partial \left\{ N_y \right\}_{24 \times 1}^T \equiv - [J]_{24 \times 24} \left\{ N_y \right\}_{24 \times 1} - [H]_{24 \times 36} \left\{ U_y^G \right\}_{36 \times 1} = 0, \\ \partial F_S / \partial \left\{ U_y^G \right\}_{36 \times 1}^T \equiv [H]_{36 \times 24}^T \left\{ N_y \right\}_{24 \times 1} - \left\{ f \right\}_{36 \times 1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Из системы уравнений (15) можно выразить столбец силовых узловых неизвестных

$$\left\{ N_y \right\}_{24 \times 1} = [J]_{24 \times 24}^{-1} [H]_{24 \times 36} \left\{ U_y^G \right\}_{36 \times 1} \quad (16)$$

и подставить его во второе уравнение (15):

$$\begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{36 \times 24}^T \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}_{24 \times 24}^{-1} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{24 \times 36} \begin{Bmatrix} U_y^G \end{Bmatrix}_{36 \times 1} = \begin{Bmatrix} f \end{Bmatrix}_{36 \times 1}, \quad (17)$$

представляя (17) в виде

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}_{36 \times 36} \begin{Bmatrix} U_y^G \end{Bmatrix}_{36 \times 1} = \begin{Bmatrix} f \end{Bmatrix}_{36 \times 1}. \quad (18)$$

Матрица $[K]$ используется для компоновки глобальной матрицы податливости рассчитываемой оболочки вращения.

Пример расчета 1. Для осуществления процедуры верификации изложенного выше алгоритма был реализован численный эксперимент по анализу НДС оболочки, радиус вращения которой определялся функциональной зависимостью вида

$$r(x) = a + b \cos(x/C). \quad (19)$$

Входящие в (19) геометрические параметры имели следующие значения: $a = 0.9$ м; $b = 0.4$ м; $c = 0.24$ м. Осевая координата x изменялась в пределах $0 \leq x \leq 0.24\pi$ м. На левом торце оболочка первоначально имела шарнирное опирание, правый торец был свободен от закреплений. Вследствие наличия осевой симметрии оболочка моделировалась лентой элементов дискретизации, ориентированной вдоль меридиана оболочки (рис. 1).

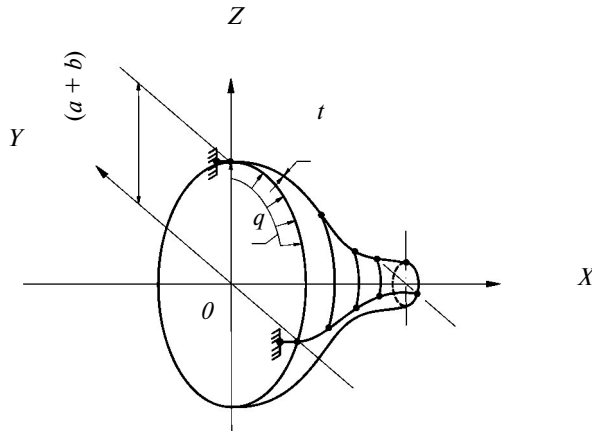


Рис. 1. Расчетная схема оболочки вращения.

Прочие исходные данные были приняты равными: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$; $q = 0.2$ МПа; $t = 0.01$ м. В процессе выполнения численного эксперимента конечно-элементные расчеты осуществлены как в смешанной формулировке, так и в формулировке метода перемещений.

Результаты вычислений на основе скалярного варианта аппроксимации МКЭ представлены в табл. 1, где приведены значения нормальных напряжений в сечениях торцов оболочки при различных сетках дискретизации.

Таблица 1. Значения нормальных напряжений в форме метода перемещений и в смешанной формулировке

Координаты точек $x, m; \theta, \text{рад.}$	Напряжения, МПа	Сетка узлов						Решение из условия равновесия
		МКЭ в форме метода перемещений			Смешанная формулировка МКЭ			
		2×49	2×61	2×81	2×49	2×61	2×81	
$x = 0.0; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	11.57	11.38	11.23	11.02	11.04	11.05	—
	σ_{ss}^{midl}	11.25	11.16	11.11	11.068	11.071	11.074	11.077
	σ_{ss}^{out}	10.92	10.94	10.98	11.11	11.10	11.09	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	−81.20	−81.27	−81.31	−81.35	−81.36	−81.36	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	−81.30	−81.33	−81.35	−81.34	−81.35	−81.35	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−81.40	−81.40	−81.39	−81.32	−81.34	−81.35	—
$x = 0.24\pi; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	−0.291	−0.16	−0.074	−0.031	−0.021	−0.0123	—
	σ_{ss}^{midl}	−0.136	−0.073	−0.032	−0.0012	−0.0007	−0.0004	0.00
	σ_{ss}^{out}	0.021	0.015	0.0098	0.029	0.019	0.0115	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	8.32	8.37	8.40	8.39	8.40	8.41	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	8.37	8.40	8.41	8.40	8.41	8.42	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	8.42	8.42	8.43	8.41	8.41	8.42	—

Анализируя данные табл. 1, можно констатировать наличие устойчивой сходимости вычислительного процесса в обеих формулировках МКЭ.

Выбранная расчетная схема позволяет проконтролировать значение меридионального напряжения в опорном торце, исходя из условия статического равновесия

$$\sigma_{ss}^{midl} = \frac{\pi(a + b)^2 - \pi(a - b)^2}{2\pi(a + b)} \cdot \frac{q}{t} = \frac{1.3^2 - 0.5^2}{2 \cdot 1.3} \cdot \frac{0.2}{0.01} = 11.077 \text{ МПа.}$$

Кроме того, очевидно, что на правом незагруженном торце меридиональные напряжения должны быть равны нулю ($\sigma_{ss}^{midl} = 0.00 \text{ МПа}$).

Меридиональные напряжения на опорном и свободном торцах (табл. 1) вполне соответствуют решению из условия статического равновесия при реализации обеих формулировок МКЭ.

Если шарнирные опоры на левом торце заменить на упругоподатливые, оболочка получит возможность смещаться вдоль осевой координаты x как абсолютно твердое тело. Величина данного жесткого смещения обратно пропорциональна жесткости пружинных опор. Очевидно, что наличие жестких смещений не должно оказывать никакого влияния на параметры НДС рассчитываемой оболочки. Для того, чтобы оценить влияние жестких смещений на величины контролируемых прочностных параметров НДС оболочки, были выполнены расчеты МКЭ при использовании приведенных вариантов интерполяционных процедур компонент вектора перемещения. В табл. 2 приведены результаты численного эксперимента по расчету НДС оболочки,

допускающей смещение как твердого тела, полученные при реализации МКЭ в формулировке метода перемещений. Использование скалярной интерполяции компонент вектора перемещения (табл. 2) приводит к существенным погрешностям вычислений напряжений даже при незначительных смещениях оболочки как абсолютно твердого тела. При более значительных величинах жестких смещений оболочки погрешность вычислений прочностных параметров НДС резко возрастает до совершенно неприемлемых значений. Так, начиная с величины жесткого смещения вдоль оси Ox , равной 0.18 м и более, значения σ_{ss} на концевом сечении возрастают на несколько порядков, а $\sigma_{\theta\theta}$ вообще изменяют свой знак.

Таблица 2. Значения нормальных напряжений при использовании скалярной и векторной интерполяции в формулировке метода перемещений

Координаты точек $x, \text{ м}; \theta, \text{ рад.}$	Напряжения, МПа	Способы интерполяции кинематических искомых величин										Реше- ние из усло- вия равно- весия
		Скалярный способ					Векторный способ					
		Величина смещения оболочки как твердого тела, м										
		0.00	0.09	0.18	0.377	0.754	0.00	0.09	0.18	0.377	0.754	
$x = 0.0; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	11.38	14.34	17.31	23.73	36.09	9.49	9.49	9.49	9.49	9.49	—
	σ_{ss}^{mid}	11.16	25.29	39.42	70.02	128.9	11.59	11.59	11.59	11.59	11.59	11.077
	σ_{ss}^{out}	10.94	36.24	61.53	116.3	221.6	13.69	13.69	13.69	13.69	13.69	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	−81.27	−82.25	−83.24	−85.38	−89.49	−80.0	−80.0	−80.0	−80.0	−80.0	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{mid}$	−81.33	−78.97	−76.61	−71.49	−61.66	−79.41	−79.41	−79.41	−79.41	−79.41	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−81.40	−75.69	−69.98	−57.60	−33.82	−78.80	−78.80	−78.80	−78.80	−78.80	—
$x = 0.24\pi; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	−0.16	−25.34	−50.52	−105.1	−209.9	−0.108	−0.108	−0.108	−0.108	−0.108	—
	σ_{ss}^{mid}	−0.073	−14.09	−28.11	−58.48	−116.9	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.00
	σ_{ss}^{out}	−0.015	−2.84	−5.7	−11.89	−23.79	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	8.37	−1.85	−12.07	−34.22	−76.78	8.51	8.51	8.51	8.51	8.51	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{mid}$	8.40	1.52	−5.35	−20.24	−48.86	8.55	8.55	8.55	8.55	8.55	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	8.42	4.90	1.37	−6.26	−20.94	8.59	8.59	8.59	8.59	8.59	—

Для корректного анализа НДС оболочек вращения в криволинейной системе координат следует использовать векторную аппроксимацию компонент вектора перемещения (9)–(12). Такой вид интерполяционной процедуры позволил корректным образом в полной мере учесть жесткие смещения оболочки. Анализируя соответствующие колонки табл. 2, можно констатировать, что при любой величине жестких смещений численные значения напряжений при реализации векторной формы интерполяции остаются абсолютно стабильными, что является необходимым условием корректности алгоритма анализа НДС оболочек вращения, допускающих жесткие смещения.

С целью визуализации результатов (табл. 2) на рис. 2 представлены графики изменения нормальных напряжений на срединной поверхности в зависимости от величины жесткого смещения оболочки вдоль оси Ox . Кривыми 1–4 показаны изменения значений напряжений σ_{ss} и $\sigma_{\theta\theta}$ при общепринятой в МКЭ форме интерполяционной процедуры (6) (кривые 1 и 2 отражают изменения напряжений в опорном сечении, а кривые 3 и 4 – в концевом сечении), а кривыми 5–8 – при использовании векторной формы интерполяции компонент вектора перемещений и их производных (9)–(12) (кривые 5 и 6 относятся к опорному сечению, а кривые 7 и 8 – к концевому сечению).

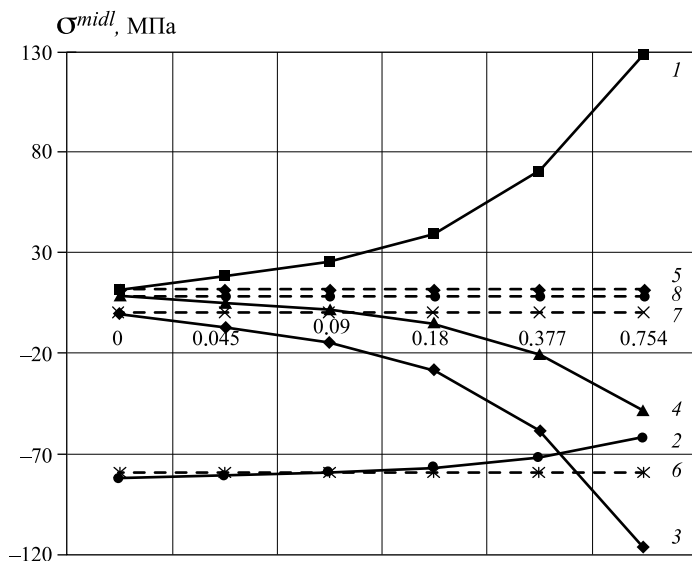


Рис. 2. Значения напряжений в формулировке метода перемещений с использованием скалярного (линии 1–4) и векторного (линии 5–8) способов интерполяции; линии 1, 3, 5, 7 – σ_{ss} , линии 2, 4, 6, 8 – $\sigma_{\theta\theta}$.

Кривые 1–4 (рис. 2) имеют весьма существенный градиент, который нарастает по мере увеличения жесткого смещения, что является недопустимым. А кривые 5–8 представляют собой строго горизонтальные линии, что указывает на то, что значения напряжений не меняются даже при значительных величинах жесткого смещения оболочки при использовании векторной формы интерполяции компонент вектора перемещения.

Результаты расчета (табл. 3) показывают, что при использовании скалярной формы интерполяции значения напряжений σ_{ss} в опорном сечении практически не меняются, а значения $\sigma_{\theta\theta}$ возрастают по мере увеличения жесткого смещения, но отмеченная погрешность составляет 16%. В концевом сечении меридиональные напряжения σ_{ss} , несмотря на жесткие смещения, демонстрируют статическое условие равновесия незагруженного торца. Кольцевые же напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на правом конце существенно снижаются (до 20 раз) по мере увеличения жестких смещений, а при величине жесткого смещения 0.754 м меняют свой знак.

Таблица 3. Значения нормальных напряжений при использовании скалярной и векторной интерполяции в смешанной формулировке

Координаты точек x , м; θ , рад.	Напряжения, МПа	Способы интерполяции кинематических искомым величин										Решение из условия равновесия
		Скалярный способ					Векторный способ					
		Величина смещения оболочки как твердого тела, м										
0.00	0.09	0.18	0.377	0.754	0.00	0.09	0.18	0.377	0.754			
$x = 0.0; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	11.07	11.03	11.02	11.00	10.96	11.04	11.04	11.04	11.04	11.04	—
	σ_{ss}^{midl}	11.07	11.07	11.07	11.07	11.07	11.07	11.07	11.07	11.07	11.07	11.077
	σ_{ss}^{out}	11.10	11.11	11.12	11.14	11.18	11.11	11.11	11.11	11.11	11.11	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-81.36	-82.94	-84.53	-87.97	-94.58	-81.30	-81.30	-81.30	-81.30	-81.30	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-81.35	-82.93	-84.52	-87.95	-94.55	-81.29	-81.29	-81.29	-81.29	-81.29	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-81.34	-82.92	-84.50	-87.93	-94.52	-81.28	-81.28	-81.28	-81.28	-81.28	—
$x = 0.24\pi; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	-0.021	-0.053	-0.085	-0.154	-0.287	-0.021	-0.021	-0.021	-0.021	-0.021	—
	σ_{ss}^{midl}	-0.001	0.000	0.001	0.002	0.004	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	0.00
	σ_{ss}^{out}	0.019	0.053	0.086	-0.158	0.296	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	8.40	6.49	4.58	0.443	7.515	8.41	8.41	8.41	8.41	8.41	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	8.41	6.51	4.61	0.495	-7.418	8.42	8.42	8.42	8.42	8.42	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	8.42	6.53	4.64	0.546	-7.321	8.42	8.42	8.42	8.42	8.42	—

Поэтому при наличии значительных величин жестких смещений оболочки и при реализации МКЭ в смешанной формулировке также целесообразно использование векторной аппроксимации перемещений. В подтверждении этого факта можно наглядно убедиться, если проанализировать правую часть табл. 3, которая заполнена по результатам реализации векторной формы интерполяционной процедуры компонент вектора перемещения. Значения σ_{ss} и $\sigma_{\theta\theta}$ и в опорном, и в концевом сечениях остаются абсолютно стабильными при любых, даже весьма существенных величинах смещения оболочки как жесткого целого.

Результаты, приведенные в табл. 3, также представлены в графической форме (рис. 3), обозначения в которой соответствуют обозначениям, принятым на рис. 2.

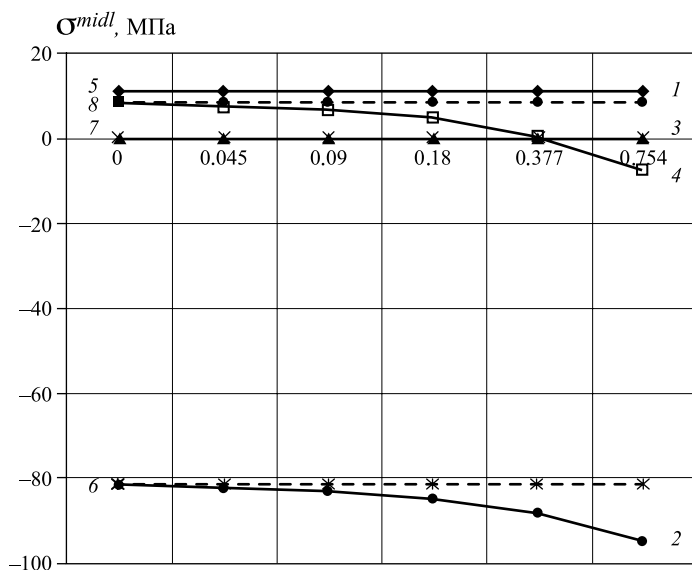


Рис. 3. Значения напряжений в формулировке смешанного метода с использованием скалярного (линии 1–4) и векторного (линии 5–8) способов интерполяции; линии 1, 3, 5, 7 – σ_{ss} , линии 2, 4, 6, 8 – $\sigma_{\theta\theta}$.

Кривые 1 и 3 (рис. 3), которые отражают изменение σ_{ss} при общепринятой в МКЭ форме интерполяции, – горизонтальные, а кривые 2 и 4, отражающие изменение $\sigma_{\theta\theta}$ при этой же форме интерполяции, имеют градиент, нарастающий при увеличении величины жесткого смещения. При использовании векторной формы интерполяционной процедуры (кривые 5–8) наблюдается абсолютная стабильность напряжений (кривые 5–8 строго горизонтальны) при всех рассматриваемых значениях величины смещения оболочки как жесткого целого, что подтверждает преимущества такой формы интерполяционной процедуры при анализе НДС оболочек вращения, в том числе допускающих жесткие смещения.

Пример расчета 2. С целью адекватной оценки точности вычисления прочностных параметров НДС оболочек вращения при использовании разработанного алгоритма на основе смешанного МКЭ с векторной аппроксимацией перемещений был выполнен сравнительный анализ конечно-элементных решений, полученных с применением разработанного алгоритма и вычислительного комплекса ANSYS. Первоначально параметр в формуле (33) был принят равным 0.10 м ($0 \leq x \leq 0.10\pi$ м), затем параметру последовательно присваивались значения $c = 0.08$ м; $c = 0.06$ м; $c = 0.05$ м. Была использована расчетная схема (рис. 1). Прочие геометрические и физические значения исходных данных соответствовали приведенным выше величинам. Результаты расчетов представлены в табличной форме (табл. 4–7).

Как следует из анализа значений напряжений (табл. 4) ($c = 0.10$ м) при существенном сгущении сетки КЭ, величины нормальных напряжений, полученные при использовании вычислительного комплекса ANSYS в опорном сечении, оказались примерно равными значениям напряжений, вычисленным при использовании разработанного алгоритма.

В конечном же сечении значения кольцевых напряжений, вычисленные в комплексе ANSYS при относительно редкой сетке КЭ, имеют противоположный знак значениям, полученным при достаточно густой сетке элементов дискретизации. Для достижения уровня точности вычисления кольцевых напряжений, соответствующего уровню точности разработанного алгоритма смешанного МКЭ с векторной

аппроксимацией перемещений, вычислительному комплексу ANSYS понадобилось как минимум в 3–4 раза большее число КЭ в меридиональном направлении. Анализируя значения нормальных напряжений, вычисленных при использовании разработанного алгоритма, можно констатировать гораздо лучшую сходимость вычислительного процесса по сравнению со сходимостью, продемонстрированной комплексом ANSYS.

Таблица 4. Значения нормальных напряжений при использовании вычислительного комплекса ANSYS и в смешанной формулировке при $c = 0.10$ м

Координаты точек $x, m; \theta, \text{рад.}$	Напряжения, МПа	Варианты расчета								Решение из условия статического равновесия	
		ANSYS Shell 181					Смешанный МКЭ с тензор- но-векторной интерполяцией				
		Сетка узлов									
		21×31	21×61	21×101	21×151	21×201	2×31	2×61	2×81		2×101
$x = 0.0; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	16.53	13.07	11.92	11.58	11.63	11.62	11.21	11.15	11.12	—
	σ_{ss}^{midl}	10.07	10.88	11.125	11.205	11.42	10.98	11.05	11.06	11.07	11.077
	σ_{ss}^{out}	3.61	8.69	10.33	10.83	11.21	10.35	10.89	10.97	11.01	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	−349.22	−379.92	−394.3	−401.88	−408.7	−402.00	−403.3	−403.5	−403.5	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	−356.65	−383.2	−395.7	−402.25	−407.7	−402.1	−403.3	−403.5	−403.6	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−364.07	−386.53	−397.01	−402.62	−406.7	−402.1	−403.4	−403.5	−403.6	—
$x = 0.10\pi; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	−0.371	−0.216	−0.098	−0.048	−0.003	−0.109	−0.0310	−0.0179	−0.0117	—
	σ_{ss}^{midl}	0.325	0.157	0.075	0.034	0.031	−0.0045	−0.0011	−0.0006	−0.0004	0.00
	σ_{ss}^{out}	1.02	0.529	0.247	0.116	0.064	0.0995	0.0288	0.0167	0.0109	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	1.8	1.79	−0.399	−1.61	−2.49	−3.131	−3.057	−3.042	−3.037	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	3.94	2.06	−0.402	−1.80	−2.95	−3.327	−3.103	−3.070	−3.055	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	6.08	2.32	−0.405	−1.98	−3.41	−3.524	−3.152	−3.097	−3.072	—

При уменьшении значения параметра до $c = 0.08$ м кривизна меридиана оболочки пропорционально возрастет. Результаты расчета при $c = 0.08$ м приведены в табл. 5.

Таблица 5. Значения нормальных напряжений при использовании вычислительного комплекса ANSYS и в смешанной формулировке при $c = 0.08$ м

Координаты точек x, y, z, θ , рад.	Напряжения, МПа	Варианты расчета									Решение из условия статического равновесия
		ANSYS Shell 181					Смешанный МКЭ с тензорно-векторной интерполяцией				
		Сетка узлов									
		21×31	21×61	21×101	21×151	21×201	2×31	2×61	2×81	2×121	
$x = 0.0; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	17.94	14.55	12.89	12.26	12.06	11.86	11.28	11.19	11.13	—
	σ_{ss}^{midl}	9.177	10.55	11.135	11.365	11.47	10.94	11.04	11.056	11.07	11.077
	σ_{ss}^{out}	0.414	6.55	9.38	10.47	10.88	10.01	10.80	10.92	11.01	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	−449.1	−492.2	−514.05	−526.1	−532.4	−520.7	−522.1	−522.3	−522.4	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	−463.95	−500.45	−518.28	−528.1	−533.15	−520.7	−522.1	−522.3	−522.45	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−478.8	−508.7	−522.5	−530.1	−533.9	−520.7	−522.2	−522.4	−522.5	—
$x = 0.08\pi; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	−0.733	−0.415	−0.21	−0.12	−0.09	−0.125	−0.0346	−0.0199	−0.009	—
	σ_{ss}^{midl}	0.379	0.223	0.118	0.001	0.025	−0.0046	−0.0011	−0.0006	−0.0003	0.00
	σ_{ss}^{out}	1.49	0.86	0.445	0.123	0.14	0.115	0.0323	0.0186	0.0084	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	3.62	−3.25	−6.91	−9.01	−10.1	−12.36	−12.47	−12.49	−12.50	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	5.29	−2.165	−6.37	−8.88	−10.25	−12.84	−12.59	−12.56	−12.53	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	6.95	−1.08	−5.83	−8.75	−10.4	−13.33	−12.72	−12.63	−12.56	—

Анализируя табличные данные, можно отметить исключительно быструю сходимость вычислительного процесса разработанного алгоритма по сравнению с ANSYS. Так, значения меридиональных и кольцевых напряжений на срединной поверхности в опорном сечении при сетке 2×31 и 2×121 изменяются всего лишь на 1.3 и 0.33% соответственно. В концевом сечении данный процент по кольцевым напряжениям составляет 2.5. Меридиональные напряжения в концевом сечении оказались достаточно близки к нулевым значениям даже при редкой сетке КЭ. При использовании программного комплекса ANSYS процент расхождения при сетке узлов 21×61 и 21×201 (сетка 21×31 во внимание даже не принималась) в опорном сечении составил 8.0 и 6.1 для меридиональных и кольцевых напряжений на срединной поверхности соответственно. В концевом же сечении для кольцевых напряжений процент расхождения составил уже 78.9. Кроме того, даже при густой сетке КЭ (21×201) кольцевые напряжения в концевом сечении, вычисленные в программном комплексе ANSYS, оказались заниженными по абсолютной величине на 20% по сравнению с кольцевыми напряжениями, полученными при использовании разработанного алгоритма.

Таблица 6. Значения нормальных напряжений при использовании вычислительного комплекса ANSYS и в смешанной формулировке при $c = 0.06$ м

Координаты точек $x, m; \theta, \text{рад.}$	Напряжения, МПа	Варианты расчета									Решение из условия статического равновесия
		ANSYS Shell 181					Смешанный МКЭ с тензорно-векторной интерполяцией				
		Сетка узлов									
		21×41	21×81	21×121	21×151	21×201	2×41	2×61	2×81	2×151	
$x = 0.0; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	17.79	15.62	14.5	14.25	13.63	11.68	11.35	11.23	11.12	—
	σ_{ss}^{midl}	8.21	10.305	11.24	11.725	11.99	10.94	11.01	11.04	11.07	11.077
	σ_{ss}^{out}	−1.37	4.99	7.98	9.2	10.35	10.20	10.68	10.85	11.01	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	−609.0	−660.2	−682.7	−692.9	−703.8	−681.8	−682.1	−682.3	−682.4	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	−636.75	−678.2	−695.15	−702.65	−710.45	−681.5	−682.1	−682.3	−682.4	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−664.5	−696.2	−707.6	−712.4	−717.1	−681.2	−682.1	−682.3	−682.4	—
$x = 0.06\pi; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	−0.84	−0.48	−0.326	−0.27	−0.23	−0.074	−0.034	−0.0194	−0.0056	—
	σ_{ss}^{midl}	0.325	0.195	0.113	0.075	0.031	−0.003	−0.0013	−0.0007	−0.0002	0.00
	σ_{ss}^{out}	1.49	0.87	0.552	0.42	0.29	0.068	0.0315	0.018	0.0052	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	−2.86	−12.61	−16.67	−18.44	−20.25	−28.76	−29.12	−29.25	−29.37	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	0.70	−10.21	−15.24	−17.6	−20.09	−29.59	−29.50	−29.46	−29.43	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	4.26	−7.81	−13.81	−16.69	−19.96	−30.43	−29.87	−29.67	−29.48	—

По данным табл. 6, которые были получены при значении параметра $c = 0.06$ м, по сравнению с данными табл. 5 сходимость вычислительного процесса программного комплекса ANSYS ухудшилась, а проценты расхождений между значениями напряжений при сетке узлов 21×41 и 21×201 увеличились до 31.5 и 10.4 для меридиональных и кольцевых напряжений в опорном сечении соответственно. Кольцевые значения в концевом сечении, вычисленные при сетке 21×201 в комплексе ANSYS, оказались заниженными по сравнению с разработанным алгоритмом уже на 31.8%.

Таблица 7. Значения нормальных напряжений при использовании вычислительного комплекса ANSYS и в смешанной формулировке при $c = 0.05$ м

Координаты точек $x, m; \theta, \text{рад.}$	Напряжения, МПа	Варианты расчета									Решение из условия статического равновесия
		ANSYS Shell 181					Смешанный МКЭ с тензорно-векторной интерполяцией				
		Сетка узлов									
		21×61	21×101	21×151	21×181	21×201	2×61	2×81	2×101	2×151	
$x = 0.0; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	16.33	15.79	15.21	14.98	14.87	11.37	11.24	11.18	11.12	—
	σ_{ss}^{midl}	8.62	10.49	11.78	12.23	12.45	10.99	11.02	11.04	11.06	11.077
	σ_{ss}^{out}	0.919	5.19	8.34	9.47	10.02	10.60	10.80	10.90	11.0	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	−740.8	−780.3	−805.65	−815.4	−820.4	−782.9	−782.9	−782.9	−782.9	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	−775.25	−805.15	−822.63	−829.05	−832.4	−782.7	−782.9	−782.9	−782.9	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−809.7	−830.0	−839.6	−842.7	−844.4	−782.5	−782.8	−782.9	−782.95	—
$x = 0.05\pi; \theta = 0.0$	σ_{ss}^{in}	−1.17	−0.69	−0.44	−0.407	−0.39	−0.026	−0.0146	−0.0094	−0.0041	—
	σ_{ss}^{midl}	0.13	0.085	0.005	0.017	0.015	−0.0015	−0.0008	−0.0005	−0.0002	0.00
	σ_{ss}^{out}	1.43	0.86	0.45	0.44	0.42	0.0227	0.0143	0.0084	0.0037	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	6.89	0.602	−6.34	−5.17	−4.78	−33.27	−33.55	−33.67	−33.80	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	14.06	6.63	−1.7	−1.35	−1.22	−33.99	−33.45	−33.93	−33.90	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	21.23	12.65	2.94	2.48	2.34	−34.71	−34.35	−34.18	−34.01	—

Если значение параметра уменьшить до $c = 0.05$ м, то кривизна меридиана оболочки возрастет, и погрешность значений напряжений, полученных с помощью программного комплекса ANSYS, возрастет. Это подтверждается анализом результатов (табл. 7) при значении параметра $c = 0.05$ м. Если в опорном сечении сходимость вычислительного процесса еще наблюдается (хотя σ_{ss}^{midl} отличаются на 12.4% от σ_{ss} по условиям равновесия при сетке узлов 21×201 , а $\sigma_{\theta\theta}^{midl}$ монотонно возрастают от 775.25 до 832.4 МПа), то в концевом сечении сходимость по кольцевым напряжениям явно неудовлетворительная. Кроме того, значения $\sigma_{\theta\theta}$ на внутренней и наружной поверхностях оболочки имеют разный знак, чего не наблюдалось при предыдущих значениях параметра c , равных 0.10, 0.08, 0.06 м. Также следует отметить, что при значении параметра $c = 0.05$ м нарушается выявленная при других значениях параметра c закономерность, которая заключается в том, что при уменьшении параметра c напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в концевом сечении возрастают по абсолютной величине. Анализируя правую часть табл. 7, в которой представлены значения напряжений, вычисленных при использовании разработанного алгоритма, можно наблюдать абсолютную сходимость вычислительного процесса при любом варианте сетки дискретизации и практическое совпадение меридиональных напряжений σ_{ss}^{midl} с напряжениями, вычисленными из условия статического равновесия оболочки.

Выводы.

1. МКЭ в смешанной формулировке позволяет непосредственно получать внутренние силовые факторы (усилия и моменты) в интересующих узловых точках без дополнительных вычислительных процедур, обязательных при использовании МКЭ в форме метода перемещений.

2. Вычислительный алгоритм МКЭ в смешанной формулировке, предназначенный для анализа НДС тонких оболочек вращения, менее сложный по сравнению с алгоритмом МКЭ в форме метода перемещений из-за отсутствия необходимости организации вычислительной процедуры по нахождению численных значений вторых производных перемещений вдоль нормалей к срединной поверхности и дальнейшего их использования в соотношениях Коши для определения деформаций и напряжений в узловых точках.

3. При наличии жестких смещений у рассчитываемой оболочки МКЭ в смешанной формулировке демонстрируется лучшая, по сравнению с МКЭ в форме метода перемещений, устойчивость вычислительного процесса при использовании общепринятой интерполяционной процедуры перемещений как скалярных полей.

4. На основании выполненного сравнительного анализа результатов конечно-элементных решений, полученных с использованием комплекса ANSYS и разработанного алгоритма, можно сделать вывод, что при расчете пологих оболочек вращения контролируемые параметры НДС, вычисленные с помощью ANSYS и разработанного алгоритма, оказываются достаточно близкими по своим значениям. Но по мере увеличения кривизны меридиана оболочки погрешность вычислений в программном комплексе ANSYS возрастает и может превысить предельно допустимый уровень. Значения напряжений, полученные при использовании разработанного алгоритма расчета на основе смешанного МКЭ с векторной аппроксимацией перемещений, оказываются корректными даже при относительно редкой сетке узлов дискретизации, что позволяет эффективно исследовать НДС оболочек вращения при минимальных затратах времени и ограниченных ресурсах вычислительной техники.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Storozhuk E. A.* Stress–Strain State and Stability of a Flexible Circular Cylindrical Shell with Transverse Shear Strains // *International Applied Mechanics*. 2021. V. 57 (5). P. 554.
2. *Bakulin V. N.* A model for analyzing the stress-strain state of three-layer cylindrical shells with rectangular cutouts // *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mechanics of a Rigid Body*. 2022. V. 1. P. 122.
3. *Zhelezov L. P., Kabanov V. V., Boiko D. V.* Nonlinear Deformation and Stability of Discrete-Reinforced Elliptical Cylindrical Composite Shells under Torsion and Internal Pressure // *Russian Aeronautics*. 2018. V. 61 (2). P. 175.
4. *Lalin V., Rybakov V., Sergey A.* The finite elements for design of frame of thin-walled beams // *Applied Mechanics and Materials*. 2014. V. 578–579. P. 858.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858>
5. *Yakupov S. N., Kiyamov H. G., Yakupov N. M.* Modeling a Synthesized Element of Complex Geometry Based Upon Three-Dimensional and Two-Dimensional Finite Elements // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. V. 42 (9). P. 2263.
6. *Lei Zh., Gillot F., Jezeguel L.* Developments of the mixed grid isogeometric Reissner-Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced // *Int. J. Mech*. 2015. V. 54. P. 105.
7. *Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P., Sobolevskaya T. A. et al.* The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. V. 41 (3). P. 373.
8. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2010. 378 с.

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 621.892

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ ПРИ ТРЕНИИ

© 2024 г. А. Ю. Албагачиев¹, А. Тохметова^{1, *}¹Институт машиноведения имени А.А. Благодного РАН, Москва, Россия*e-mail: aygerim.tokhmetova@mail.ru

Поступила в редакцию 03.08.2023 г.

После доработки 01.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Исследована задача о теплопереносе при колебаниях смазочного слоя. В результате сравнения теоретических данных с экспериментами можно сделать вывод, что разница составила не более 3%. Приведены результаты исследования декремента затухания колебаний.

Ключевые слова: расчет температуры смазочного слоя, колебания смазочного слоя, теплоперенос, декремент затуханий

DOI: 10.31857/S0235711924010031, **EDN:** SNFQZD

Исследование процесса теплопереноса в смазочном слое является актуальной задачей в связи с прогнозированием тепловых характеристик [1–9]. Температура, генерированная в процессе трения, оказывает влияние на механические свойства смазочного материала. В настоящей статье исследуется задача теплопереноса в смазочном слое при колебаниях и декремент затухания.

Цель статьи – сравнение результатов определения температуры при колебаниях смазочного слоя с экспериментальными исследованиями.

Исследование тепловой задачи. Рассмотрим тепловую задачу при колебательном движении смазочного слоя. Для исследования теплопереноса воспользуемся формулой суммы тепловых потоков, которую запишем в виде

$$Q_{\text{об}} = Q_1 + Q_2. \quad (1)$$

Здесь $Q_{\text{об}}$ – суммарное тепловыделение в смазочном слое; Q_1, Q_2 – тепловыделение подвижной поверхности и смазочного слоя. Количество теплоты связано с теплоемкостью тела c , плотностью ρ , объемом V и температурой θ соотношением

$$Q = \theta \rho V c. \quad (2)$$

Объем определяется произведением глубины распространения теплового импульса h на площадь поперечного сечения A . Глубину распространения импульса можно вычислить по формуле

$$h = 1.73 \sqrt{a t}, \quad (3)$$

где a – температуропроводность. Приведенные формулы позволяют рассчитать, какое количество теплоты выделилось в смазочной среде:

$$Q = 1.730A\sqrt{t} \sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1 + \lambda_2 \rho_2 c_2}. \quad (4)$$

Здесь ρ_1, ρ_2 — плотность подвижной поверхности и смазочной среды, c_1, c_2 — теплоемкость подвижной поверхности и смазочной среды.

Тепловыделение в смазочном слое можно описать как

$$Q = Nt, \quad (5)$$

где N — мощность трения; t — время. Мощность трения определяется скалярным произведением нагрузки P на скорость v , с которой движется поверхность

$$N = Pv. \quad (6)$$

Колебания нагрузки представлены в виде $P = P_0 \cos 2\pi vt$, а скорость колебательного движения поверхности как $v = v_0 \cos 2\pi vt$. Здесь P_0 — амплитуда нагрузки; v_0 — амплитуда скорости; v — частота колебаний. Анализируя уравнение (5), получим следующее выражение:

$$Q = P_0 v_0 t \cos^2 2\pi vt. \quad (7)$$

Применяя формулы (4) и (7), получим уравнение для определения температуры смазочного слоя

$$\theta = \frac{P_0 v_0 t \cos^2 2\pi vt}{1.73A\sqrt{t} \sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1 + \lambda_2 \rho_2 c_2}}. \quad (8)$$

Ниже представлены результаты расчета температуры смазочного слоя при $P_0 = 500$ Н, $v = 0.073$ м/с, $\nu = 50$ Гц, $t = 60$ с, $h_0 = 1.8 \cdot 10^{-6}$ м, $\lambda_1 = 79 \frac{\text{Вт}}{\text{м}} \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho_1 = 8660 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $c_1 = 343 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, $\lambda_2 = 0.134 \frac{\text{Вт}}{\text{м}} \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho_2 = 892 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $c_2 = 2000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$. Температура смазочного слоя равна $\theta = 36.77^\circ\text{C}$. Разница между теоретическим и эмпирическим значением составляет 3%.

Скорость затухания определяется декрементом колебаний λ , который показывает, во сколько раз уменьшается амплитуда в следующем полупериоде по сравнению с предыдущим [10–12]:

$$\lambda = \ln e^{\frac{nT}{2}}. \quad (9)$$

Здесь n — коэффициент затухания; T — период свободных колебаний.

Степень $\frac{nT}{2}$ называется логарифмическим показателем колебаний δ . Логарифмический показатель в двигателях машин можно принять $\delta = 0.5$ [14, 15]. Частота свободных колебаний $\nu = 50$ Гц. Период свободных колебаний T определяется из выражения

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ с}. \quad (10)$$

Коэффициент затухания находим по формуле

$$n = \frac{2\delta}{T} = \frac{2 \cdot 0.5}{0.02} = 50 \text{ с}^{-1}. \quad (11)$$

Таким образом, декремент затухания определяется как

$$\lambda = \ln e^{\frac{nT}{2}} = 0.5. \quad (12)$$

Заключение. Представленная методика исследования позволяет определить теплоперенос в колебательном смазочном слое и декремент затухания. Разница между теоретическим и эмпирическим значением температуры при колебаниях смазочного слоя составляет 3%. Проведенные исследования показали, что декремент затухания снижает колебания в 2 раза. Смазочный материал между контактирующими телами действительно играет роль демпфера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tamminen N. M., Mutra R. R.* A review on recent advancements in an automotive turbocharger rotor system supported on the ball bearings, oil film and oil-free bearings // J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 2023. № 45. P. 1.
2. *Kamarapu S. K., Muniyappa A., Bheemappa S. et al.* Tribological and vibration characteristics of the palm-mineral blend as a sustainable lubricant in steel-steel contacts // Biomass Conv. Bioref. 2022. P. 1.
3. *Antonova N. M., Shorkin V. S., Romashin S. N. et al.* Adhesion of a Vibration Mechanochemical Solid-Lubricant MoS₂ Coating // J. Surf. Investig. 2019. № 13. P. 848.
4. *Bolshtyanskii A. P., Lysenko E. A., Vedruchenko V. R. et al.* Gaseous Lubricant in the Cylinders of Internal Combustion Engines // Russ. Engin. Res. 2021. № 41. P. 687.
5. *Zheng Z., Guo Z., Liu W. et al.* Low friction of superslippery and superlubricity // A review. Friction. 2023. № 11. P. 1121.
6. *Meng Y., Xu J., Ma L. et al.* A review of advances in tribology in 2020–2021. Friction. 2022. № 10. P. 1443.
7. *Tokhmetova A. B.* Study of the Influence of Lubricant Compositions Based on Serpentine on the Wear Intensity and Temperature of the Lubricant Layer // J. Mach. Manuf. Reliab. 2022. V. 51. P. 852.
8. *Yang X., Zhang L., Politis D. J. et al.* Experimental and modelling studies of the transient tribological behaviour of a two-phase lubricant under complex loading conditions // Friction. 2022. № 10. P. 911.
9. *Elagina O. Y., Buklakov A. G., Dumansky S. I.* Tribotechnical Characteristics of Lubricant under Conditions of High Temperatures // J. Frict. Wear. 2023. № 44. P. 42.
10. *Мачнев В. А.* Вибрации в зубчатых колесах коробки передач // Нива Поволжья. 2008. № 2. С. 55.
11. *Мачнев В. А.* Основные предпосылки вибрационного диагностирования // Нива Поволжья. 2007. № 1. С. 25.
12. *Мачнев В. А., Комаров В. А., Рыблов М. В., Кадеркаев Р. Р.* Влияние смазки на амплитуду вибрационных сигналов коробок передач тракторов // Нива Поволжья. 2016. № 2 (39). С. 82.

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 537.853

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МИКРОМАСШТАБНОГО БЕСКОНТАКТНОГО ИНДУКЦИОННОГО ПОДВЕСА С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ КОНТУРОМ УПРАВЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТЬЮ

© 2024 г. П. П. Удалов^{1, *}, И. А. Попов¹, А. В. Лукин¹, Л. В. Штукин¹,
К. В. Полеткин²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург,
Россия

²Университет Хэфэя, Хэфэй, Китай

*e-mail: pp_udalov@mail.ru

Поступила в редакцию 23.06.2023 г.

После доработки 09.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

В статье выполнено аналитическое исследование параметрических колебаний недеформируемого диска, находящегося в бесконтактном электромагнитном подвесе с электростатическим контуром управления эффективной жесткостью. На основе асимптотических методов нелинейной динамики получены аналитические выражения для переходных кривых стационарного положения левитирующего тела в областях главного и вторичных параметрических резонансов. Получены оценки параметров системы, для которых бесконтактный подвес с квазиулевым электромагнитной жесткостью является асимптотически устойчивым.

Ключевые слова: электромагнитный подвес, левитация, акселерометр, гравиметр, нелинейная динамика, параметрический резонанс, устойчивость колебаний

DOI: 10.31857/S0235711924010043, **EDN:** SNDNET

Электромагнитный подвес – устройство для бесконтактной стабилизации инерционного тела в поле тяжести, работающее на принципе электромагнитной индукции [1]. Технология производства бесконтактного подвеса обеспечивает низкую стоимость производства и обслуживания, точность управления, малые размеры. Применение электромагнитного подвеса в интересах разработки датчиков инерциальной информации представляется перспективным, поскольку позволяет реализовать архитектуры как высокоточных, так и более доступных акселерометров и гироскопов, обладающих преимуществами в долговечности, помехозащищенности и температурной стабильности [2, 3].

В настоящее время интенсивное развитие получает направление разработки электромагнитных подвесов с комбинированным использованием электростатического [4, 5] и индукционного [6–8] принципов воздействия на инерционное тело. Конструкция подвеса принципиально включает в себя как катушки индуктивности для создания переменного магнитного поля, так и электроды для создания электростатического поля. Функция катушки индуктивности состоит в создании силы Ампера, посредством которой обеспечивается стабилизация подвижного элемента. Функция

конденсаторов заключается в управлении эффективной жесткостью подвеса посредством формируемых электростатических сил, величина которых зависит от перемещения инерционного тела. Такой подход позволяет использовать индукционный подвес как высокочувствительный акселерометр/гравиметр с квазинулевой жесткостью.

Вопросам экспериментального и аналитического исследований режимов работы электромагнитного подвеса посвящено большое число публикаций. В работах [9–14] представлены исследования экспериментального прототипа микромасштабного индукционного подвеса. Отмечается, что такое устройство можно использовать при создании микроакселерометров, микрогироскопов, микрозеркал. В работе [15] демонстрируется технология создания схемы формирования возбуждающего электрического сигнала катушки индуктивности, которая позволяет избежать использования высокочастотных усилителей тока и заменить их интегральной схемой управления, включающей генератор сигнала и усилитель. Показано, что предлагаемая схема имеет геометрические размеры, сравнимые с размерами чувствительного элемента устройства. В работах [16, 17] обсуждаются вопросы, посвященные построению систем снятия информации о положении ротора, используя для этого сигналы малой емкости при наличии большой зашумленности сигнала, вызванной электромагнитными помехами. В работах [18–20] исследуются аналитические модели акселерометра и гироскопа соответственно, основанные на принципе электромагнитной левитации. В [21, 22] рассмотрены вопросы, посвященные аналитическим расчетам собственных и взаимных индуктивностей проводов и контуров. В [23, 24] приводятся оценки сил и жесткостей чувствительного элемента индукционного подвеса. В [25] исследуются вопросы устойчивости индукционного подвеса. Работы [26, 27] посвящены экспериментальному и аналитическому исследованию эффекта схлопывания, заключающегося в прилипании инерционной массы электромагнитного подвеса к обкладкам конденсаторов при достижении на них критической величины напряжения как для дискообразной, так и для прямоугольной инерционных масс. Численные исследования режимов работы и силовых характеристик устройства электромагнитного подвеса на основе метода конечных элементов приведены в [28–31].

Основная **цель** настоящей статьи состоит в качественном аналитическом исследовании эффекта параметрического резонанса [32] в бесконтактном электромагнитном подвесе, проявляющегося в возникновении зон раскачки и затухания колебаний, на примере одномерных колебаний твердой дискообразной массы. Особое внимание уделяется задаче определения диапазона параметров системы, в котором наблюдается асимптотическая устойчивость инерционной массы при квазинулевой эффективной жесткости системы.

Математическая модель нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса. Рассмотрим одномерную модель колебаний инерционной массы (ИМ), выполненную в форме твердого диска и находящуюся в переменных электромагнитном и электрическом полях (рис. 1).

Для создания устойчивого равновесия подвижного тела y_0 на катушку индуктивности срединного радиуса r_l толщины t_l подается переменный ток i_1 амплитуды i_a с частотой ω : $i_1 = i_a \sin \omega t$. Вследствие закона электромагнитной индукции [1] в дископодобной ИМ толщины t_{pm} радиуса r_{pm} возникает наведенный ток i_2 , который при взаимодействии с током i_1 порождает силу Ампера, что приводит к левитации ИМ. Управляющая высотой левитации катушка, по которой течет ток i_1 , называется левитационной (на рис. 1 она обозначена черными прямоугольниками). Стабилизирующая катушка, обозначенная на рис. 1 серым цветом, необходима для исключения возможности боковых смещений ИМ и, как следствие, обеспечения устойчивости положения равновесия y_0 . Ток i_s , протекающий по стабилизирующей катушке срединного радиуса r_s толщины t_s , в общем случае может отличаться от тока i_1 . В дальнейшем примем, что ток i_s с точностью до амплитуды и фазы равняется току i_1 , т. е.

$i_s = i_a^s \sin \omega t$, где i_a^s – амплитуда тока стабилизирующей катушки. Подавая постоянные напряжения u_1, u_2 на электроды E_1, E_2 при заземленных электродах E_3, E_4 соответственно, генерируется постоянное электрическое поле [4]. При выборе определенных величин u_1, u_2 возможно добиться квази нулевой жесткости, что отвечает цели конструирования высокочувствительного датчика [18].

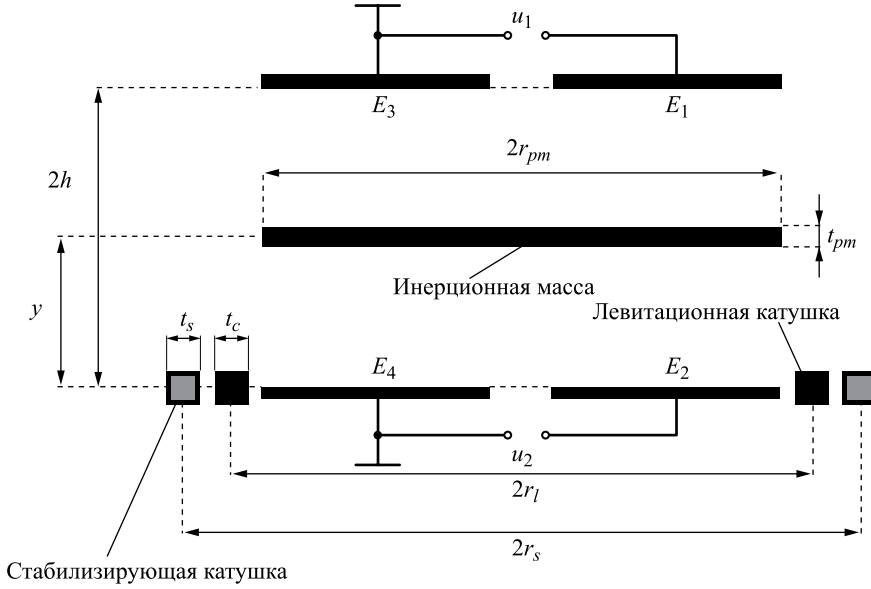


Рис. 1. Схематическое изображение электромагнитного подвеса.

Применяя формализм Лагранжа – Максвелла, система уравнений колебаний ИМ запишется как [33]

$$\begin{aligned}
 & L_2 \ddot{i}_2 + \left(\frac{dM_{12}(y)}{dy} i_a + \frac{dM_{s2}(y)}{dy} i_a^s \right) \dot{y} \sin \omega t + \\
 & + \left(M_{12}(y) i_a + M_{s2}(y) i_a^s \right) \omega \cos \omega t + R_2 \dot{i}_2 = 0, \\
 & \tilde{m} \ddot{y} + \mu \dot{y} - \left(\frac{dM_{12}(y)}{dy} i_a + \frac{dM_{s2}(y)}{dy} i_a^s \right) i_2 \sin \omega t + \tilde{m} (g_0 + \Delta g) - \\
 & - \frac{e_1^2}{2A} + \frac{e_2^2}{2A} + \frac{(e_1 + e_2)^2}{2Ah} (h - y) = 0, \\
 & \frac{(2h - y)}{A} e_1 + \frac{y(2h - y)}{2Ah} (e_1 + e_2) = u_1, \\
 & \frac{y}{A} e_2 + \frac{y(2h - y)}{2Ah} (e_1 + e_2) = u_2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где L_2 – собственная индуктивность ИМ; $M_{12}(y)$ – взаимная индуктивность между левитационной катушкой и ИМ; $M_{s2}(y)$ – между стабилизирующей катушкой и ИМ;

t – время; R_2 – электрическое сопротивление ИМ; $\tilde{m}$ – массы ИМ; μ – коэффициент вязкого трения между ИМ и окружающей средой; g_0 – постоянная величина ускорения свободного падения; Δg – переменная составляющая ускорения свободного падения; $A = \epsilon_e \epsilon_0 A_e$; ϵ_0 – относительная диэлектрическая проницаемость; ϵ_e – диэлектрическая постоянная; A_e – площадь электродов; $2h$ – зазор между верхними и нижними пластинами электродов; $\epsilon_1, \epsilon_2, u_1, u_2$ – заряды и напряжения пар электродов E_1, E_3 и E_2, E_4 соответственно; y – вертикальная координата движения ИМ.

Вводя безразмерные параметры

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{L_1 i_a^2}{2\tilde{m}g_0 h}, \tau = \omega t, \varepsilon = \frac{g_0}{2\omega^2 h}, \lambda = \frac{\mu}{\tilde{m}\omega}, \xi = \frac{y}{2h}, j_2 = \frac{i_2}{i_a}, \hat{e}_1 = \frac{e_1}{e_0}, \\ \hat{e}_2 &= \frac{e_2}{e_0}, W_0 = \frac{e_0^2}{2A}, l = \frac{L_2}{L_1}, r = \frac{R_2}{L_1 \omega}, u_c = \frac{2he_0}{A}, u_{01} = \frac{u_1}{u_c}, u_{02} = \frac{u_2}{u_c}, \zeta = \frac{W_0}{\tilde{m}g_0}, \\ \beta_l &= \frac{\mu_0 r_l}{L_1}, \beta_s = \frac{\mu_0 r_s}{L_1}, a = \frac{r_{pm}}{h}, a_l = \frac{r_l}{h}, a_s = \frac{r_s}{h}, j_s = \frac{i_s}{i_a}, \Gamma = \frac{\Delta g}{g_0}, \\ m_{l2} &= \frac{M_{l2}}{L_1} = \beta_l \sqrt{\frac{a}{a_l}} \left[\left(\frac{2}{\kappa_{l2}} - \kappa_{l2} \right) K(\kappa_{l2}) - \frac{2}{\kappa_{l2}} E(\kappa_{l2}) \right], \\ \frac{dm_{l2}}{d\xi} &= -\frac{8\beta_l a}{\kappa_{l2}^2} \left[\frac{(2 - \kappa_{l2}^2) E(\kappa_{l2})}{1 - \kappa_{l2}^2} - 2K(\kappa_{l2}) \right] \frac{\xi}{\left((a + a_l)^2 + 4\xi^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \\ m_{s2} &= \frac{M_{s2}}{L_1} = \beta_s \sqrt{\frac{a}{a_s}} \left[\left(\frac{2}{\kappa_{s2}} - \kappa_{s2} \right) K(\kappa_{s2}) - \frac{2}{\kappa_{s2}} E(\kappa_{s2}) \right], \\ \frac{dm_{s2}}{d\xi} &= -\frac{8\beta_s a}{\kappa_{s2}^2} \left[\frac{(2 - \kappa_{s2}^2) E(\kappa_{s2})}{1 - \kappa_{s2}^2} - 2K(\kappa_{s2}) \right] \frac{\xi}{\left((a + a_s)^2 + 4\xi^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \kappa_{l2}^2(y) &= \frac{4aa_l}{(a + a_l)^2 + 4\xi^2}, \kappa_{s2}^2(y) = \frac{4aa_s}{(a + a_s)^2 + 4\xi^2},\end{aligned}$$

перепишем систему (1) в виде [33]

$$\begin{aligned}lj_2' + rj_2 &= -m^\xi \xi' \sin \tau - m \cos \tau, \\ \xi'' + \lambda \xi' &= \varepsilon \left(\alpha m^\xi j_2 \sin \tau - 1 - \Gamma + \zeta \hat{e}_1^2 - \zeta \hat{e}_2^2 + \zeta (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)^2 (2\xi - 1) \right), \\ (1 - \xi) \hat{e}_1 + \xi (1 - \xi) (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) &= u_{01}, \xi \hat{e}_2 + \xi (1 - \xi) (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = u_{02},\end{aligned}\quad (2)$$

где $m = m_{l2} + j_s m_{s2}$; $m^\xi = m_{l2}^\xi + j_s m_{s2}^\xi$; $(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial \tau}$; $(\cdot)'' = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$; $(\cdot)^\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}$; $(\cdot)^{\xi\xi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$; L_1 – собственная индуктивность левитационной катушки; μ_0 – магнитная постоянная.

В выражении (2) в дальнейшем примем, что $\zeta = 1$, т. е. $W_0 = \tilde{m}g_0$, откуда

$$e_0 = \sqrt{2A\tilde{m}g_0},$$

что определяет величину заряда e_0 , накопленного на обкладках конденсаторов, при котором соблюдается баланс между электрической и потенциальной энергиями системы.

Динамика инерционной массы вблизи положения равновесия. Для исследования малых колебаний вблизи положения равновесия системы ξ_0 , которая определяется как [33]

$$\frac{u_{01}^2}{(\xi_0 - 1)^2} - \frac{u_{02}^2}{\xi_0^2} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{l} m(\xi_0) m^\xi(\xi_0) - 2(1 + \Gamma) = 0,$$

введем переменную

$$z \triangleq \xi - \xi_0$$

и перепишем второе уравнение в (2) как

$$z'' + \lambda z' = \varepsilon \left[\alpha m^z(z + \xi_0) j_2(z + \xi_0, \tau) + \right. \\ \left. + \hat{e}_1^2(z + \xi_0) - \hat{e}_2^2(z + \xi_0) + 2(z + \xi_0)(\hat{e}_1(z + \xi_0) + \hat{e}_2(z + \xi_0))^2 \right], \quad (3)$$

где $()^z = \frac{\partial}{\partial z}, ()^{zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Предполагая малость смещений относительно положения равновесия, разложим правую часть в ряд Тейлора, удержав при этом только линейные по z члены:

$$m(z + \xi_0) = m(\xi_0) + z m^z(\xi_0) + O(z^2); \quad (4)$$

$$m^z(z + \xi_0) = m^z(\xi_0) + z m^{zz}(\xi_0) + O(z^2); \quad (5)$$

$$j_2(z + \xi_0, \tau) = j_2(\xi_0, \tau) - \frac{z m^z(\xi_0)}{l} \cos \gamma \sin(\tau + \gamma) + O(z^2); \quad (6)$$

$$e_1(z + \xi_0) = e_1(\xi_0) + \frac{u_1}{2(1 - \xi_0)^2} z + O(z^2); \quad (7)$$

$$e_2(z + \xi_0) = e_2(\xi_0) - \frac{u_2}{2\xi_0^2} z + O(z^2). \quad (8)$$

Исходя из (4)–(8), выражение (3) примет вид

$$z'' + \lambda z' + (\delta - \hat{\varepsilon} \cos(2\tau + \gamma)) z = 0, \quad (9)$$

где

$$\sigma = \frac{\alpha \cos \gamma}{l} \left[\left(m^z(\xi_0) \right)^2 + m(\xi_0) m^{zz}(\xi_0) \right], \delta = \varepsilon \omega^2, \varepsilon = \frac{\sigma \varepsilon}{2},$$

$$\eta = \frac{u_{01}^2}{(\xi_0 - 1)^3} - \frac{u_{02}^2}{\xi_0^3}, \omega^2 = \frac{\sigma \cos \gamma}{2} + \eta.$$

Уравнение (9) описывает линейную динамику чувствительного элемента вблизи его положения равновесия. Вследствие периодичности тока катушки магнитная

жесткость системы имеет периодическую компоненту с удвоенной частотой тока возбуждения. Уравнение (9) представляет собой уравнение Матье. Для нахождения переходных кривых (кривых, разделяющих области устойчивости и неустойчивости параметрических колебаний) применим метод растянутых параметров [32].

Для этого ищется равномерно пригодное разложение вида

$$z = \varepsilon z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^3 z_2, \delta = n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2, \quad (10)$$

определяя при этом коэффициенты δ_i ($i = 1, 2, 3$) из условия периодичности асимптотического решения.

Также предположим, что трение между подвижной частью прибора и окружающей средой мало, и примем λ как $\lambda = \varepsilon \nu$, ν – положительная величина.

Подстановка разложений (10) в исходное уравнение (9) дает

$$\begin{aligned} & (\varepsilon z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^3 z_2)'' + \varepsilon \nu (\varepsilon z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^3 z_2)' + \\ & + (n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 - \varepsilon \cos(2t + \gamma)) (\varepsilon z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^3 z_2) = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при последовательных степенях ε , получаем

$$z_0'' + n^2 z_0 = 0; \quad (11)$$

$$z_1'' + n^2 z_1 = -z_0 (\delta_1 - \cos(2t + \gamma)) - \nu z_0'; \quad (12)$$

$$z_2'' + n^2 z_2 = -z_1 (\delta_1 - \cos(2t + \gamma)) - \nu z_1' - \delta_2 z_0. \quad (13)$$

Общее решение (11) можно представить в виде

$$z_0 = c_1 \sin nt + c_2 \cos nt, \quad (14)$$

где c_1, c_2 – константы.

Случай $n = 0$.

В этом случае уравнение (14) сводится к

$$z_0 = c_2.$$

При этом уравнение (12) принимает вид

$$z_1'' = -c_2 \delta_1 + c_2 \cos(2t + \gamma). \quad (15)$$

Требование к отсутствию секулярного слагаемого в правой части (15), порождающего секулярный член в решении для z_1 , приводит к условию

$$\delta_1 = 0.$$

В результате этого частное решение уравнения (15) имеет вид

$$z_1 = -\frac{c_2}{4} \cos(2t + \gamma).$$

При этом уравнение (13) представляется как

$$z_2'' = -c_2 \delta_2 - \frac{c_2}{8} - \frac{c_2 \nu}{2} \sin(2t + \gamma) - \frac{c_2}{8} \cos 2(2t + \gamma). \quad (16)$$

Для периодичности z_2 требуется выполнение условия

$$c_2\delta_2 - \frac{c_2}{8} = 0,$$

откуда при $c_2 \neq 0$ (нетривиальность решения) имеем

$$\delta_2 = -\frac{1}{8}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), частное решение уравнения (16) примет вид

$$z_2 = \frac{c_2 v}{8} \sin(2t + \gamma) + \frac{c_2}{128} \cos 2(2t + \gamma).$$

Используя полученные результаты, решение имеет вид

$$z = \varepsilon c_2 - \frac{\varepsilon^2 c_2}{4} \cos(2t + \gamma) + \frac{\varepsilon^3 c_2}{8} \left(v \sin(2t + \gamma) + \frac{1}{8} \cos 2(2t + \gamma) \right), \delta = -\frac{1}{8} \varepsilon^2 + \dots \quad (18)$$

Следовательно, переходная кривая, разделяющая области устойчивости и неустойчивости и выходящая из точки $\varepsilon = 0, \delta = 0$, описывается уравнениями (18); при этом они показывают, что на этих ветвях решение z периодически с периодом π .

Случай $n = 1$.

Подставляя (14) в уравнение (11) и полагая $n = 1$, получим

$$\begin{aligned} z_1'' + z_1 = & \left[c_1 \left(v + \frac{\sin \gamma}{2} \right) + c_2 \left(\delta_1 - \frac{\cos \gamma}{2} \right) \right] \cos t + \frac{c_2}{2} \cos(3t + \gamma) + \\ & + \left[c_1 \left(\delta_1 + \frac{\cos \gamma}{2} \right) + c_2 \left(\frac{\sin \gamma}{2} - v \right) \right] \sin t + \frac{c_1}{2} \sin(3t + \gamma). \end{aligned} \quad (19)$$

Требование к исключению слагаемых, порождающих секулярные члены в z_1 , приводит к условиям

$$\begin{aligned} c_1 \left(v + \frac{\sin \gamma}{2} \right) + c_2 \left(\delta_1 - \frac{\cos \gamma}{2} \right) &= 0, \\ c_1 \left(\delta_1 + \frac{\cos \gamma}{2} \right) + c_2 \left(\frac{\sin \gamma}{2} - v \right) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В результате уравнение (28) принимает вид

$$z_1'' + z_1 = \frac{c_1}{2} \sin(3t + \gamma) + \frac{c_2}{2} \cos(3t + \gamma). \quad (21)$$

Нетривиальное решение системы (20) удовлетворяется при условии тривиальности ее определителя. Таким образом, условие на отсутствие секулярного слагаемого в (19) при нетривиальном решении (20) примет вид

$$\delta_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2}. \quad (22)$$

При подстановке (22) в (20) получаем следующую связь между константами c_1, c_2 :

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\cos \gamma - 2\delta_1}{2v + \sin \gamma}.$$

Следовательно, частное решение уравнения (21) с учетом (22) имеет вид

$$z_1 = \frac{c_2 \pi^\mp}{16} \sin(3t + \gamma) - \frac{c_2}{16} \cos(3t + \gamma), \quad (23)$$

$$\text{где } \pi^\mp = \frac{\cos \gamma \mp \sqrt{1 - 4v^2}}{2v + \sin \gamma}.$$

Подставляя (23) в (13), получим

$$\begin{aligned} z_2'' + z_2 = & -c_2 \left(\frac{1}{32} + \delta_2 \right) \cos t - c_2 \pi^\mp \left(\frac{1}{32} + \delta_2 \right) \sin t + \\ & + \frac{c_2}{16} \left(3\pi^\mp v \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2} \right) \cos(3t + \gamma) + \\ & + \frac{c_2}{16} \left(-3v \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2} \pi^\mp \right) \sin(3t + \gamma) - \\ & - \frac{c_2 \cos(5t + 2\gamma)}{32} - \frac{c_2 \pi^\mp \sin(5t + 2\gamma)}{32}. \end{aligned} \quad (24)$$

Потребовав исключения секулярных членов из z_2 , приходим к соотношениям

$$c_2 \left(\frac{1}{32} + \delta_2 \right) = 0, c_2 \pi^\mp \left(\frac{1}{32} + \delta_2 \right) = 0,$$

или в предположении о нетривиальности c_2

$$\delta_2 = -\frac{1}{32}. \quad (25)$$

После подстановки (25) в (24) частное решение уравнения (24) примет вид

$$\begin{aligned} z_2 = & \frac{c_2}{768} \cos(5t + 2\gamma) + \frac{c_2 \pi^\mp}{768} \sin(5t + 2\gamma) - \frac{c_2}{128} \left(3\pi^\mp v \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2} \right) \cos(3t + \gamma) - \\ & - \frac{c_2}{128} \left(-3v \pm \frac{\pi^\mp \sqrt{1 - 4v^2}}{2} \right) \sin(3t + \gamma). \end{aligned}$$

Итак, область раскачки колебаний и выражения для колебаний на ее границах имеют вид

$$\begin{aligned} \delta = & 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 - 4\lambda^2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \dots, \\ z = & \varepsilon c_2 \left[\pi^\mp \sin t + \cos t \right] + \frac{\varepsilon^2 c_2}{16} \left[\pi^\mp \sin(3t + \gamma) - \cos(3t + \gamma) \right] + \\ & + \frac{\varepsilon^3 c_2}{768} \left[\cos(5t + 2\gamma) + \pi^\mp \sin(5t + 2\gamma) - 6 \left(3\pi^\mp v \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2} \right) \cos(3t + \gamma) - \right. \\ & \left. - 6 \left(-3v \pm \frac{\pi^\mp \sqrt{1 - 4v^2}}{2} \right) \sin(3t + \gamma) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнения (26) описывают две ветви переходной кривой, выходящие из точки $\varepsilon = 2\lambda$, $\delta = 1$. При этом они показывают, что на этих ветвях решение z периодически с периодом 2π .

“Критическое” значение величины $\varepsilon = \varepsilon_\lambda$, больше которого подкоренное выражение в первом выражении (26) становится комплексным, равно

$$\varepsilon_\lambda = 2\lambda.$$

На рис. 2 изображено сравнение выражений переходных кривых, задаваемых выражениями (18), (26), с численными результатами, полученными для выражения (9) согласно теории Флоке [32].

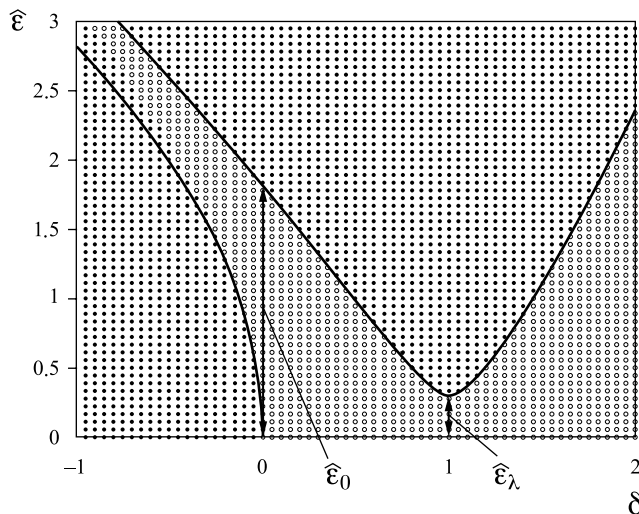


Рис. 2. Области устойчивости (окружности) и неустойчивости (черные точки) в плоскости параметров (ε, δ) . Черные линии — переходные кривые, задаваемые выражениями (18), (26); $\nu = 0.15$.

Аналитические выражения переходных ветвей (18), (26) (рис. 2) с хорошей точностью совпадают с численным решением задачи (9). В случае оценки колебаний вблизи положения равновесия рабочими областями являются области затуханий колебаний (область окружностей) вследствие потребности удержания колебаний вблизи положения равновесия ξ_0 .

Особенно важной задачей в конструировании акселерометров данного типа является нахождение соотношений между параметрами системы, при которых жесткость системы становится нулевой или квазинулевой.

Исходя из (9) видно, что нулевой жесткости отвечает случай $\delta = 0$. В этом случае следует (рис. 2), что область затуханий колебаний определяется следующим интервалом величины ε :

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0 = 4\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{24 - \lambda^2}}$ — критическое значение величины ε , выше которого распадается зона неустойчивости уравнения (9) при $\delta = 0$.

Таким образом, на основе анализа параметрических колебаний показана ограниченность допустимого диапазона параметров системы для стабильной реализации режима квазинулевой жесткости. Основные результаты и соотношения приведены ниже:

- уравнение для определения равновесия ξ_0 :

$$\frac{u_{01}^2}{(\xi_0 - 1)^2} - \frac{u_{02}^2}{\xi_0^2} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{l} m(\xi_0) m^\xi(\xi_0) - 2(1 + \Gamma) = 0;$$

- неравенство для статической устойчивости равновесия ξ_0 :

$$\left(m^z(\xi_0)\right)^2 + m(\xi_0) m^{zz}(\xi_0) > 0;$$

- уравнение для обеспечения квазинулевой жесткости подвеса:

$$\frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} \frac{1}{l} \left[\left(m^z(\xi_0)\right)^2 + m(\xi_0) m^{zz}(\xi_0) \right] + \frac{u_{01}^2}{(\xi_0 - 1)^3} - \frac{u_{02}^2}{\xi_0^3} = 0;$$

- неравенство для параметрической устойчивости:

$$0 < \frac{\varepsilon \alpha \cos \gamma}{l} \left[\left(m^z(\xi_0)\right)^2 + m(\xi_0) m^{zz}(\xi_0) \right] < 8\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{24 - \lambda^2}}.$$

Выводы. В статье рассмотрена аналитическая модель нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса, выполненного в виде недеформируемого дископодобного тела. Уравнение, описывающее линейную динамику чувствительного элемента бесконтактного подвеса вблизи его положения равновесия, представляет собой уравнение Матье. На основе асимптотических методов нелинейной динамики получены аналитические выражения для переходных кривых стационарного положения левитирующего тела в областях главного и вторичных параметрических резонансов. Получены оценки параметров системы, для которых бесконтактный подвес с квазинулевой электромагнитной жесткостью является асимптотически устойчивым. Отмечается, что для устойчивой работы предложенного устройства необходимо выбрать как геометрические (радиусы и толщины катушек индуктивности и ИМ), так и физические параметры (амплитуды и частоты питающих токов катушек, материал ИМ) таким образом, чтобы аналитически найденная величина положения равновесия ξ_0 удовлетворяла одновременно условиям на статическую и параметрическую устойчивость, сведенным в конце работы.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Han H. S., Kim D. S. Magnetic levitation // Springer Tracts on Transportation and Traffic. Heidelberg: Springer Netherlands, 2016. P. 247.
2. Leland R. P. Mechanical-thermal noise in MEMS gyroscopes // IEEE Sensors J. 2005. V. 5 (3). P. 493.
3. Prikhodko I. P. et al. Sub-degree-per-hour silicon MEMS rate sensor with 1 million Q-factor // 2011 16th Int. Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference, IEEE, 2011. P. 2809.
4. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
5. Мартыненко Ю. Г. Аналитическая динамика электромеханических систем. М.: Изд-во МЭИ, 1984. 64 с.
6. Xiao Q. et al. Design and experiment of an electromagnetic levitation system for a micro mirror // Microsystem Technologies. 2019. V. 25. P. 3119.

7. Бадыков Р. Р. и др. Разработка экспериментальной установки для исследования несущей способности одноступенного магнитного подвеса ротора // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. 2022. Т. 4 (143). С. 4.
8. Пириева Н. М. Методика проектирования индукционного левитатора // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2022. Т. 65 (2). С. 69.
9. Williams C. B. et al. Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor // Sensors and Actuators A: Physical. 1997. V. 61 (1–3). P. 469.
10. Williams C. B. et al. Initial fabrication of a micro-induction gyroscope // Microelectronic Engineering. 1996. V. 30 (1–4). P. 531.
11. Shearwood C. et al. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope // Sensors and actuators A: physical. 2000. V. 83 (1–3). P. 85.
12. Wu X.S. et al. Micromotor with electromagnetically levitated rotor using separated coils // Electronics Letters. 2004. V. 40 (16). P. 996.
13. Liu W. et al. Variable-capacitance micromotor with levitated diamagnetic rotor // Electronics Letters. 2008. V. 44 (11). P. 681.
14. Liu W., Zhang W., Chen W. Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor // J. of Magnetism and Magnetic Materials. 2019. V. 492. P. 165634.
15. Vlnieska V. et al. Development of control circuit for inductive levitation micro-actuators // Proceedings. MDPI, 2020. V. 64 (1). P. 1.
16. Zhang W. et al. The study of an electromagnetic levitating micromotor for application in a rotating gyroscope // Sensors and actuators A: physical. 2006. V. 132 (2). P. 651.
17. Xiaogang H. et al. High resolution differential capacitance detection scheme for micro levitated rotor gyroscope // Chinese J. of Aeronautics. 2007. V. 20 (6). P. 546.
18. Xu Y. et al. Passive diamagnetic contactless suspension rotor with electrostatic glass motor // Micro & Nano Letters. 2019. V. 14 (10). P. 1056.
19. Yang B. et al. Research on a new microelectromechanical hybrid gyroscope // The 2010 IEEE Int. Conf. on Information and Automation. IEEE. 2010. P. 1520.
20. Xia D., Yu C., Kong L. A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance // Sensors. 2013. V. 13 (2). P. 2176.
21. Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. 488 с.
22. Rosa E. B., Grover F. W. Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance. Washington, DC: US Government Printing Office, 1948. V. 169.
23. Zhang X., Quan C., Li Z. Mutual inductance calculation of circular coils for an arbitrary position with electromagnetic shielding in wireless power transfer systems // IEEE Transactions on Transportation Electrification. 2021. V. 7 (3). P. 1196.
24. Babic S., Akyel C. Magnetic force between inclined circular loops (Lorentz approach) // Progress in Electromagnetics Research B. 2012. V. 38. P. 333.
25. Sari I., Kraft M. A MEMS linear accelerator for levitated micro-objects // Sensors and Actuators A: Physical. 2015. V. 222. P. 15.
26. Xiao Q. et al. Design of contactless electromagnetic levitation and electrostatic driven rotation control system for a micro mirror // 2018 15th Int. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV), IEEE. 2018. P. 1176.
27. Xu Y. et al. Realization of a diamagnetically levitating rotor driven by electrostatic field // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2017. V. 22 (5). P. 2387.
28. Liu K. et al. An innovative micro-diamagnetic levitation system with coils applied in micro-gyroscope // Microsystem technologies. 2010. V. 16. P. 431.
29. Liu W., Zhang W., Chen W. Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor // J. of Magnetism and Magnetic Materials. 2019. V. 492. P. 165634.

-
30. *Xia D., Yu C., Kong L.* A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance // *Sensors*. 2013. V. 13 (2). P. 2176.
 31. *Poletkin K.* Quasi-finite Element Modelling // *Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators*. 2021. P. 45.
 32. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods. New-York: John Wiley & Sons, 2008. P. 425.
 33. *Удалов П. П. и др.* Статическая устойчивость трехстепенной модели индукционного подвеса // В сб. трудов конф. “МИКМУС-2023”, Москва, 2–23. С. 567.

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 62.192

ОЦЕНКА СРЕДНЕГО ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ЦЕНЗУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ О БЕЗОТКАЗНЫХ НАРАБОТКАХ

© 2024 г. Г. С. Садыхов^{1,*}, С. С. Кудрявцева¹

¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
*e-mail: gsadykhov@gmail.com

Поступила в редакцию 08.03.2023 г.

После доработки 08.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Доказаны формулы расчета и оценок среднего остаточного ресурса невосстанавливаемых технических объектов на основе использования цензурированных данных о безотказных наработках. Полученные результаты можно использовать в задачах продления сроков эксплуатации объектов. Приведены примеры оценок среднего остаточного ресурса объектов. Доказанные оценки среднего остаточного ресурса справедливы для любого закона расходования ресурса невосстанавливаемых технических объектов.

Ключевые слова: средний остаточный ресурс, вероятность безотказной работы, функция распределения ресурса

DOI: 10.31857/S0235711924010059, EDN: SNCKRG

Постановка задачи. Для расчета среднего остаточного ресурса невосстанавливаемого технического объекта сверх времени τ используется формула [1–8]

$$\rho(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_0^{\infty} P(\tau + u) du,$$

где $P(\cdot)$ — функция вероятности безотказной работы в течение времени, указанного внутри скобок.

Например, для объекта, у которого функция вероятности безотказной работы в течение времени u имеет вид $P(u) = \frac{1}{1+u}$, где $u \in [0, \infty)$, найдем

$$\rho(\tau) = \infty.$$

Такой же результат можно получить и для множества других функций вероятностей безотказной работы. Очевидно, что эти результаты расчета нельзя использовать, например, в задачах продления сроков эксплуатации объектов, где надо найти конкретное значение продлеваемых сроков эксплуатации сверх времени τ .

В связи с этим возникает задача вывода другой формулы расчета среднего остаточного ресурса сверх времени τ , которая позволила бы обосновать продлеваемые сроки эксплуатации сверх первоначально назначенного.

Средний остаточный ресурс. Пусть безотказные наработки объекта сверх времени τ цензурированы сверху величиной l . Введем случайную величину $\eta_l(\tau)$, которая равна величине безотказной наработки, если внутри интервала (τ, l) у объекта отказа не было, т. е. $\eta_l(\tau) = l - \tau$ при $\zeta > l$, где ζ — наработка до отказа, либо равна величине $\zeta - \tau$, если отказ произошел на интервале (τ, l) , т. е. $\zeta \in (\tau, l)$.

Поскольку условием для равенства $\eta_l(\tau) = l - \tau$ является событие $(\zeta > l) / (\zeta > \tau)$, а условием для равенства $\eta_l(\tau) = \zeta - \tau$ — событие $\zeta \in (\tau, l) / (\zeta > \tau)$, то величина $\eta_l(\tau)$ есть не что иное, как остаточный ресурс объекта сверх времени τ в течение длительности $l - \tau$. Другими словами,

$$\eta_l(\tau) = \begin{cases} l - \tau, & \text{если } (\zeta > l) / (\zeta > \tau), \\ \zeta - \tau, & \text{если } \zeta \in (\tau, l) / (\zeta > \tau). \end{cases} \quad (1)$$

Определение. Под средним остаточным ресурсом объекта сверх времени τ в течение длительности $l - \tau$ будем понимать значение математического ожидания величины (1), равное

$$R_l(\tau) = E[\eta_l(\tau)], \quad (2)$$

где $E[\cdot]$ — обозначение математического ожидания величины, стоящей внутри скобок.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть безотказные наработки объекта цензурированы сверху величиной l . Тогда справедлива формула расчета среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ в течение продолжительности $l - \tau$

$$R_l(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_{\tau}^l P(u) du, \quad (3)$$

где $P(u)$ — функция вероятности безотказной работы объекта в течение времени u , ($\tau < u < l$).

Доказательство. Случайная величина (1) — дискретно-непрерывная, т. к. верхняя строка (1) соответствует дискретной, а нижняя — непрерывной части.

Согласно (2) и правилу вычисления математического ожидания смешанных случайных величин [9] имеем

$$R_l(\tau) = (l - \tau) P_r[(\zeta > l) / (\zeta > \tau)] + \int_0^{l-\tau} x d[\Phi_{\tau}(x)], \quad (4)$$

где $P_r[(\zeta > l) / (\zeta > \tau)]$ — вероятность того, что случайная величина ζ — наработка до отказа — удовлетворяет соотношению $\zeta < l$ при условии, что $\zeta > \tau$; $\Phi_{\tau}(x)$ — функция распределения непрерывной части случайной величины (1)

$$\Phi_{\tau}(x) = P_r[(\zeta - \tau < x) / (\zeta > \tau)]. \quad (5)$$

Используя формулу умножения вероятностей $P_r(\zeta > l)$ и $P_r(\zeta > \tau)$ при условии, что $\tau < l$, имеем

$$P_r[(\zeta > l) / (\zeta > \tau)] = \frac{P(l)}{P(\tau)}.$$

Учитывая это, в (4) получим

$$R_l(\tau) = \frac{(l - \tau)P(l)}{P(\tau)} + \int_0^{l-\tau} x d[\Phi_\tau(x)]. \quad (6)$$

Так как согласно (5)

$$\Phi_\tau(x) = P_r[(\zeta < \tau + x) / (\zeta > \tau)],$$

то

$$\Phi_\tau(x) = \frac{F(u)|_\tau^{\tau+x}}{P_r(\zeta > \tau)}, \quad (7)$$

где $F(u) = P_r(\zeta < u)$ – функция распределения вероятностей случайной величины ζ .
Далее, согласно формуле (7) имеем

$$\Phi_\tau(x) = \frac{P_r(\zeta > \tau) - P_r(\zeta > \tau + x)}{P_r(\zeta > \tau)},$$

откуда получим

$$\Phi_\tau(x) = \frac{P(\tau) - P(\tau + x)}{P(\tau)}, \quad (8)$$

где $P(\cdot)$ – функция вероятности безотказной работы в течение времени, указанного внутри скобок. Учитывая (8) в соотношении (6), найдем

$$R_l(\tau) = \frac{(l - \tau)P(l)}{P(\tau)} - \frac{1}{P(\tau)} \int_0^{l-\tau} x d[P(\tau + x)]. \quad (9)$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{l-\tau} x d[P(\tau + x)] &= xP(\tau + x)|_0^{l-\tau} - \\ &- \int_0^{l-\tau} P(\tau + x) dx = (l - \tau)P(l) - \int_0^{l-\tau} P(\tau + x) dx, \end{aligned}$$

то согласно (9) получим

$$R_l(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_0^{l-\tau} P(\tau + x) dx.$$

Сделав замену переменной в интеграле $\tau + x = u$, найдем искомую формулу (3), что и доказывает теорему.

Доказанная формула (3) справедлива для любого закона распределения безотказных наработок до отказа, цензурированных сверху, и поэтому является источником нахождения формул расчета среднего остаточного ресурса для конкретных законов. Продемонстрируем это на следующей задаче.

Задача. Пусть безотказные наработки объекта цензурированы сверху величиной l и распределены на отрезке времени $(0, l)$ равномерно. Вывести формулу расчета среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ , $(0 < \tau < l)$ в течение продолжительности $l - \tau$.

Решение. Так как для этого закона функция вероятности безотказной работы объекта в течение времени t равна [10] $P(t) = 1 - \frac{t}{l}$, где $0 < t < l$, то согласно формуле (3) имеем

$$R_l(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_{\tau}^l \left(1 - \frac{u}{l}\right) du.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\int_{\tau}^l \left(1 - \frac{u}{l}\right) du = (l - \tau) \left[1 - \frac{1}{2l}(l + \tau)\right]. \quad (10)$$

Учитывая это в (10), найдем формулу расчета среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ в течение длительности $l - \tau$:

$$R_l(\tau) = \frac{l - \tau}{2}. \quad (11)$$

Видно, что для этого закона средний остаточный ресурс сверх времени τ в течение продолжительности $l - \tau$ равен среднему значению этой продолжительности.

Например, если $l = 4500 G$, $\tau = 500 G$, то средний остаточный ресурс, согласно формуле (11), равен

$$R_l(\tau) = 2000 G.$$

Следствие из теоремы 1. Пусть безотказные наработки объекта имеют произвольный закон распределения вероятностей и цензурированы сверху величиной l . Тогда R_l – средний (безостаточный) ресурс объекта в течение продолжительности l рассчитывается по формуле $R_l = \int_0^l P(u) du$, где $P(u)$ – функция вероятностей безотказной работы в течение времени u ($u < l$).

В самом деле, полагая в формуле (3) $\tau = 0$, получим искомую формулу, т. е. $R_l = R_l(0)$.

Статистическая (точечная) оценка показателя (3). Формула (3) позволяет рассчитать истинное значение среднего остаточного ресурса объекта при заданной функции вероятности безотказной работы объекта. Однако в практических задачах возникает вопрос оценки среднего остаточного ресурса по результатам подконтрольной эксплуатации или испытаний однотипных объектов. В связи с этим докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть k объектов отказали в течение времени τ из n однотипных, а остальные в количестве $n - k$ после времени τ , причем, безотказные наработки цензурированы сверху величиной l . Тогда статистической (точечной) оценкой среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ в течение продолжительности $l - \tau$ будет служить величина $R_l^{(k)}(\tau)$, определяемая по формуле

$$R_l^{(k)} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (t_i - \tau)}{n - k}, & 5A; 8 k < n; \\ 0, 5A; & 8 k = n, \end{cases} \quad (12)$$

где t_i – наработка до отказа i -го объекта после времени τ , ($i = 1, 2, \dots, n - k$).

Доказательство. Не нарушая дальнейших рассуждений, будем считать, что

$$\tau < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_{n-k} < l.$$

Установим соотношение (12), используя формулу (3), в которой функции вероятностей безотказной работы заменены их точечными оценками по временным интервалам следующим образом:

$$\hat{P}(x) = \begin{cases} \frac{n-k}{n}, 5A; & 8 x \in [\tau, t_1); \\ \frac{n-k-1}{n}, 5A; & 8 x \in [t_1, t_2); \\ \frac{n-k-2}{n}, 5A; & 8 x \in [t_2, t_3); \\ \vdots & \vdots \\ \frac{n-k-i}{n}, 5A; & 8 x \in [t_i, t_{i+1}); \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n}, 5A; & 8 x \in [t_{n-k-1}, t_{n-k}); \\ 0, 5A; & 8 x \in [t_{n-k}, l). \end{cases}$$

Интегрируя ступенчатую функцию $\hat{P}(x)$, имеем

$$\int_{\tau}^l \hat{P}(x) dx = \frac{1}{n} [(n-k)(t_1 - \tau) + (n-k-1)(t_2 - t_1) + (n-k-2)(t_3 - t_2) + \dots + (n-k-i)(t_{i+1} - t_i) + \dots + (t_{n-k} - t_{n-k-1})].$$

Представив выражение $(n-k)(t_1 - \tau)$ в виде $(t_1 - \tau) + (n-k-1)(t_1 - \tau)$, получим

$$\int_{\tau}^l \hat{P}(x) dx = \frac{1}{n} [(t_1 - \tau) + (n-k-1)(t_1 - \tau + t_2 - t_1) + (n-k-2)(t_3 - t_2) + \dots + (n-k-i)(t_{i+1} - t_i) + \dots + (t_{n-k} - t_{n-k-1})].$$

После приведения подобных членов второе слагаемое внутри квадратных скобок, имеющее вид $(n-k-1)(t_2 - \tau)$, запишем в виде $(t_2 - \tau) + (n-k-2)(t_2 - \tau)$.

Тогда после приведения подобных членов уже для третьего слагаемого внутри квадратных скобок получим

$$\int_{\tau}^l \hat{P}(x) dx = \frac{1}{n} [(t_1 - \tau) + (t_2 - \tau) + (n-k-2)(t_3 - \tau) + \dots + (n-k-i)(t_{i+1} - t_i) + \dots + (t_{n-k} - t_{n-k-1})].$$

Далее выделим выражение $(t_3 - \tau)$ из третьего слагаемого согласно равенству $(n-k-2)(t_3 - \tau) = (t_3 - \tau) + (n-k-3)(t_3 - \tau)$.

Продолжая таким способом процесс выделения слагаемых вида $t_i - \tau$, окончательно получим

$$\int_{\tau}^l \hat{P}(x) dx = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (t_i - \tau)}{n - k}.$$

Поскольку $\hat{P}(\tau) = \frac{n - k}{n}$, то из последних двух соотношений, согласно формуле (3), имеем

$$R_l^{(k)}(\tau) = \frac{\int_{\tau}^l \hat{P}(x) dx}{\hat{P}(\tau)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (t_i - \tau)}{n - k}.$$

Таким образом, соотношение (12) установлено, что и доказывает теорему.

Следствие из теоремы 2. Пусть в течение времени τ число отказавших объектов равно k из количества n . Остальные объекты либо отказали в количестве m , либо были безотказны сверх времени τ . Причем безотказные наработки объектов цензурированы сверх величины l . Тогда статистической (точечной) оценкой среднего остаточного ресурса исследуемых объектов сверх времени τ в течение продолжительности $l - \tau$ будет служить величина

$$R_l^{(k)}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{n - k} \left[\sum_{i=1}^m (t_i - \tau) + (n - k - m)(l - \tau) \right], & 5A; 8k < n; \\ 0, 5A; 8k = n. \end{cases} \quad (13)$$

В самом деле, т. к.

$$\sum_{i=1}^{n-k} (t_i - \tau) = \sum_{i=1}^m (t_i - \tau) + \sum_{i=m+1}^{n-k} (t_i - \tau),$$

где $\sum_{i=m+1}^{n-k} (t_i - \tau) = (n - k - m)(l - \tau)$, то оценка (13) следует из (12).

Пример. Девять однотипных объектов, безотказно проработавших в течение 1000 ч, поставлены на ресурсные испытания в течение 4000 ч. В результате испытания два объекта отказали: первый через 2000 ч; второй через 3000 ч (сверх времени 1000 ч). Рассчитать статистическую (точечную) оценку среднего остаточного ресурса исследуемого объекта сверх времени 1000 ч в течение продолжительности 4000 ч.

Решение. Поскольку $n = 9$, $k = 0$, $m = 2$, $\tau = 1000 G$, $l = 5000 G$, $l - \tau = 4000 G$, $t_1 - \tau = 2000 G$, $t_2 - \tau = 3000 G$, то согласно (13) имеем

$$R_l^{(k)}(\tau) = \frac{1}{9} [2000 G + 3000 G + (9 - 2)4000 G] = 3666.6 G.$$

Итак, статистическая (точечная) оценка среднего остаточного ресурса исследуемого объекта сверх времени 1000 ч в течение продолжительности 4000 ч равна 3666.6 ч.

Исследование смещенности оценок (12) и (13). В связи с использованием оценок (12) и (13) возникает вопрос, насколько точечные оценки уклоняются от истинного значения показателя $R_l(\tau)$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть

$$Z_n[P(\tau)] = 1 - [1 - P(\tau)]^n. \quad (14)$$

Тогда выражение $\frac{R_l^{(k)}(\tau)}{Z_n[P(\tau)]}$ является несмещенной статистической (точечной) оценкой показателя $R_l(\tau)$, т. е.

$$E\left[\frac{R_l^{(k)}(\tau)}{Z_n[P(\tau)]}\right] = R_l(\tau). \quad (15)$$

Доказательство. Согласно формуле (12) при $t_i = \tau + \eta_l^{(i)}(\tau)$, где $\eta_l^{(i)}(\tau)$ – остаточный ресурс i -го объекта (сверх времени τ в течение длительности $1 - \tau$), оценка $R_l^{(k)}(\tau)$ равна

$$R_l^{(k)}(\tau) = \frac{1}{n-k} \left[\sum_{i=1}^{n-k} t_i - \tau(n-k) \right] = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \eta_l^{(i)}(\tau).$$

Так как

$$E[\eta_l^i(\tau)] = R_l(\tau), (i = 1, 2, \dots, n-k),$$

то математическое ожидание оценки (12) при фиксированном значении k равно

$$E[R_l^{(k)}(\tau) / k] = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} E[\eta_l^i(\tau)] = R_l(\tau).$$

Учитывая это соотношение и вторую строку формулы (12) в следующей расчетной формуле:

$$E[R_l^{(k)}(\tau)] = \sum_{k=0}^n E[R_l^{(k)}(\tau) / k] \cdot P_n(k),$$

где $P_n(k)$ – вероятность того, что в n независимых наблюдениях k объектов откажут, получим

$$E[R_l^{(k)}(\tau)] = R_l(\tau) \sum_{k=0}^{n-1} P_n(k). \quad (16)$$

Так как согласно формуле Бернулли [10, 11]

$$P_n(k) = C_n^k [1 - P(\tau)]^k [P(\tau)]^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k , то

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_n(k) = 1 - P_n(n) = 1 - [1 - P(\tau)]^n.$$

Учитывая это соотношение в (16) и формулу (14), найдем

$$E[R_l^{(k)}(\tau)] = R_l(\tau)Z_n[P(\tau)],$$

откуда следует формула (15), что доказывает теорему.

Следствие из теоремы 3. При $k = 0$ статистические (точечные) оценки (12) и (13) являются несмещенными относительно показателя $R_l(\tau)$.

В самом деле, т. к. согласно (14) $Z_n[P(\tau)] = 1 - \left(1 - \frac{n-k}{n}\right)^n = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^n$, то при $k = 0$ получим $Z_n[P(\tau)] = 1$.

Используя полученное в формуле (15), найдем $E[R_l^{(k)}(\tau)] = R_l(\tau)$. Это доказывает несмещенность оценок (12) и (13) относительно показателя $R_l(\tau)$.

Таким образом, доказана формула расчета среднего остаточного ресурса невосстанавливаемых технических объектов, безотказные наработки которых цензурированы сверху. Доказанная формула справедлива для любого закона распределения вероятностей безотказных наработок объекта. Кроме того, найдены несмещенные (точечные) оценки среднего остаточного ресурса объекта. Приведены примеры расчета и оценок среднего остаточного ресурса сверх заданного времени.

Финансирование работы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-08-00574-а и № 10-08-00607-а).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садыхов Г. С., Савченко В. П., Сидняев Н. И. Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 382 с.
2. Ганиев Р. Ф., Балакишин О. Б., Кухаренко Б. Г. Флаттер с предельным циклом колебания лопаток ротора турбокомпрессора // Докл. АН. 2012. Т. 446. № 2. С. 159.
3. ГОСТ 27.002.2009. Надежность в технике. Термины и определения. М.: Стандартиформ, 2011. 32 с.
4. Klass P. J. Cycling Tests Increase Reliability Factor // Aviation Week. 1960. Sept. V. 73. № 5. P. 14.
5. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Европин С. В. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2013. № 11. С. 3.
6. Артюхов А. А. Оценка средней наработки до отказа при частых срабатываниях // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. 2015. № 18. С. 295.
7. Басов В. Н., Нестеренко Г. И. Экспериментальное исследование характеристик статической прочности, усталостной долговечности и циклической трещиностойкости листов из алюминивно-литиевых сплавов // Труды ЦАГИ. 2007. Вып. 2675. С. 181.
8. Петушков В. А. К прогнозированию остаточного ресурса конструкций с повреждениями, подвергаемых в эксплуатации ударным воздействиям // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 91.
9. Северцев Н. А., Юрков Н. К., Нгуен К. Т. Показатель «средний остаточный срок утилизации технических объектов» и его свойства // Надежность и качество: Труды междунар. симпозиума / Под ред. Н.К. Юркова. Т. 1. Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. С. 202.
10. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 2001. 298 с.
11. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности и их статистический анализ. М.: URSS, 2013. 584 с.

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 621.79.05

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ДИАГРАММЫ ДЛЯ НАПРЯЖЕННЫХ СОЕДИНЕНИЙ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ИХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

© 2024 г. Д. У. Хасьянова

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

e-mail: dinara.khasyanova@mail.ru

Проступила в редакцию 09.06.2023 г.

После доработки 10.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

В статье представлена практическая методика определения диаграммы при измерении окружных деформаций свободных поверхностей цилиндров в их напряженных соединениях, представлены деформационно-силовые характеристики сплавов на основе TiNi с памятью формы в интервале мартенситных превращений.

Ключевые слова: никелид титана, эффект памяти формы, сверхупругость, термомеханическое соединение, фазовые превращения, термомеханические характеристики, муфта

DOI: 10.31857/S0235711924010065, **EDN:** SNBUMQ

Основной деформационно-силовой характеристикой сплавов с эффектом памяти формы (ЭПФ) в интервале мартенситной неупругости является термомеханическая диаграмма [1]. Она представляет собой зависимость $\sigma_R(\epsilon_S)$ реактивных напряжений от величины деформации недовосстановления, причем ее однозначность подтверждена экспериментально в ряде работ [2–7].

При паспортизации специальных свойств материала термомеханическую диаграмму обычно определяют при заданной деформации растяжением ϵ_p^+ . Для построения этой зависимости берется партия образцов одной плавки, одинакового химического состава и термообработки при изготовлении полуфабрикатов из исследуемого материала по единому технологическому процессу. Графическая иллюстрация методики ее экспериментального определения показана стрелками на рис. 1.

Для термомеханических соединений трубопроводов (ТМС) муфты изготавливают из сплава TiNiK с интервалом фазовых переходов в области криогенных температур. Поэтому при исследовании такого материала предварительная деформация образцов в мартенсите по кривой растяжения I осуществляется в жидком азоте при температуре ниже точки M_K – конца прямого мартенситного превращения (МП).

После упругой разгрузки до нуля, которая имеет нелинейный характер, по линиям ab , cd , ef образцы нагреваются до нормальной температуры естественным путем. Отметим, что она заведомо выше точки A_K^Φ – температуры формовосстановления. В результате обратного мартенситного превращения в заневоленном состоянии в образцах развиваются реактивные напряжения термомеханического возврата, величины которых определяется прямыми bm , dn , fs . Таким образом, кривая mns описывает конечное деформационно-силовое состояние образца в результате термического

формовосстановления с известным противодействием. Для упрощения испытаний методически термомеханическую диаграмму 2 обычно получают в условиях абсолютно жесткого противодействия, т. к. в этом случае заданная деформация равна деформации недовосстановления $\varepsilon_p = \varepsilon_s$.

Однозначность величины напряжения dn при $\varepsilon_s = 6\%$ показана стрелками на рис. 1. Так независимо от пути реализации процесса термомеханического возврата $\sigma_R = dn$ при абсолютно жестком противодействии, в результате генерирования реактивных напряжений по прямой fn с конечной жесткостью противодействия и при возврате с начальным свободным восстановлением размеров по линии fdn . В последних двух случаях деформация термического восстановления составляет $\varepsilon_f = 2\%$. Поэтому при $\varepsilon_p = 8\%$, $\varepsilon_s = \varepsilon_p - \varepsilon_f = 6\%$.

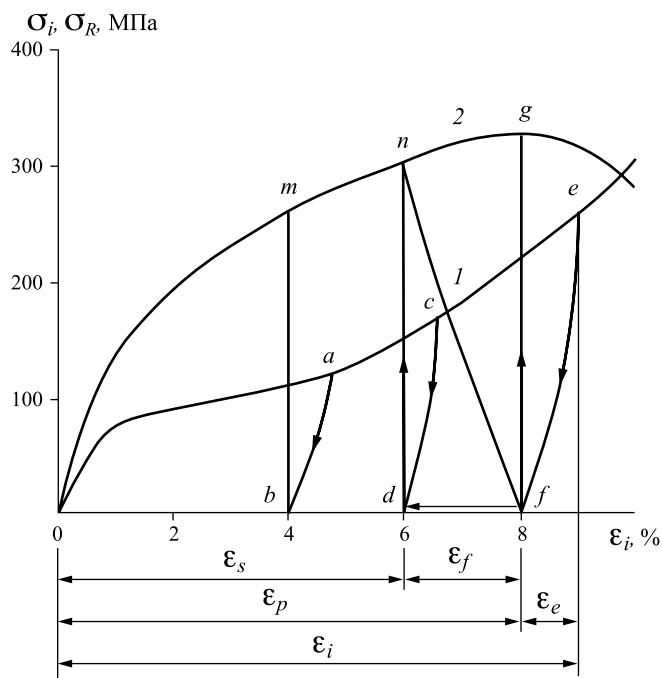


Рис. 1. Кривая растяжения сплава ТН1К в мартенсите 1 при $T_d \leq M_k$ и методика построения термомеханической диаграммы 2 в условиях абсолютно жесткого противодействия.

Обычно в расчетах силовых конструкций с ЭПФ используется только восходящая ветвь диаграммы 2. Максимальная величина напряжений возврата соответствует деформации недовосстановления, равной объему памяти формы $\varepsilon_p = \varepsilon_v$. Под объемом памяти понимают критическое значение заданной деформации, которая восстанавливается полностью при нагреве в свободном состоянии.

Экспериментальные исследования показывают, что при нагреве выше точки A_k^Φ реактивные напряжения мало меняются вплоть до температуры развития активных процессов релаксации и ползучести, связанных с увеличением диффузионной подвижности атомов. Для сплавов типа ТН1К и ТН1 она составляет $T_{раб} + 280$ град [8–13]. В интервале температур $A_k^\Phi - T_{раб}$ имеет место и обычная релаксация, однако она практически не влияет на величину напряжений возврата.

Нижняя граница термостабильности σ_R определяется температурой начала прямого МП M_H , т. е. интервал работоспособности ТМС составляет $M_H - T_{\text{раб}}$.

Несмотря на постоянное время выдержки при охлаждении и одинаковый диаметр стандартных образцов, их предварительная деформация может объективно осуществляться при различной температуре. Поэтому в общем случае растяжение образцов в мартенсите происходит по разным кривым деформирования I , хотя по величине напряжений σ_i они отличаются незначительно. Однако даже при отсутствии термостатирования значения реактивных напряжений будут практически одинаковыми.

Величины напряжений возврата для различных партий сплавов ТН1К и ТН1 имеют относительно большой разброс, поскольку они существенно зависят от содержания примесей внедрения, наличия неметаллических дисперсионных выделений, текстуры и других факторов, определяющих уровень механических свойств аустенита, а также термообработки и скорости нагрева в интервале обратного МП. Отметим, что скорость нагрева связана с историей термического нагружения материала.

Методика определения термомеханической диаграммы для напряженных соединений цилиндров при их плоской деформации. На основании работы [14] при решении плоской задачи теории упругости в полярных координатах симметричное распределение напряжений относительно оси цилиндра описывается следующими выражениями [15]:

$$\sigma_r(\rho) = \frac{D}{\rho^2} + C, \sigma_t(\rho) = -\frac{D}{\rho^2} + C, \quad (1)$$

где D, C – произвольные постоянные, определяемые из условий на контуре; $\sigma_r(\rho)$, $\sigma_t(\rho)$ – радиальные и окружные напряжения соответственно.

Соотношения (1) получены из уравнений равновесия малого элемента при условии его плоской деформации, т. е. справедливы и в пластической области. Сумма $\sigma_r + \sigma_t$ постоянна по всей толщине стенки тела. Поэтому напряжения σ_r и σ_t вызывают равномерное удлинение или сжатие цилиндра вдоль оси вращения и сечения, перпендикулярные к ней, остаются плоскими в результате его деформации.

Произвольные постоянные для наружного силового элемента ТМС найдем из следующих условий:

$$\begin{aligned} \text{при } \rho = R \quad \sigma_{lr}(R) &= -q, \\ \text{при } \rho = b \quad \sigma_{lr}(b) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} \sigma_{lr}(\rho) = \frac{qR^2}{b^2 - R^2} \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \\ \sigma_{lt}(\rho) = \frac{qR^2}{b^2 - R^2} \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \end{cases}. \quad (2)$$

Граничные условия на контуре внутренней втулки имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } \rho = r \quad \sigma_{2r}(r) &= -q, \\ \text{при } \rho = a \quad \sigma_{2r}(a) &= 0. \end{aligned}$$

С учетом данных краевых условий распределение напряжений по радиусу описывается равенствами

$$\begin{cases} \sigma_{2r}(\rho) = -\frac{qr^2}{r^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \\ \sigma_{2t}(\rho) = -\frac{qr^2}{r^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \end{cases}.$$

Согласно теории малых упругопластических деформаций [16] связь между компонентами напряжений и деформаций определяется соотношениями

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_r - \sigma_0) \\ \varepsilon_t = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_t - \sigma_0) \\ \varepsilon_x = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma_0) \end{cases}, \quad (3)$$

где σ_i , ε_i , σ_r – интенсивности напряжения и деформации; σ_r , σ_t , σ_x – радиальная, окружная и осевая компонента напряжения.

В силу принятого допущения $\varepsilon_{1x} = 0$ из условия несжимаемости $\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{1x} = 0$ получаем, что для наружного цилиндра $\varepsilon_{1t} = \varepsilon_{1r}$. Учитывая это равенство, устанавливаем связь между окружной составляющей и интенсивностью деформации недо-восстановления

$$\varepsilon_{1t} = \varepsilon_S = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{1r}. \quad (4)$$

Таким образом, теоретический объем памяти формы при радиальном растяжении составляет 9.24%.

Из условия несжимаемости материала получаем, что

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{1r} + \sigma_{1t} + \sigma_{1x}).$$

При подстановке этого соотношения в уравнения (3) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1r} &= \frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_{1t}} \left[\sigma_{1r} - \frac{1}{2}(\sigma_{1t} + \sigma_{1x}) \right], \\ \varepsilon_{1t} &= \frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_{1t}} \left[\sigma_{1t} - \frac{1}{2}(\sigma_{1r} + \sigma_{1x}) \right], \\ \varepsilon_{1x} &= \frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_{1t}} \left[\sigma_{1x} - \frac{1}{2}(\sigma_{1r} + \sigma_{1t}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно выражениям (2) для охватывающего тела можем записать

$$\sigma_{1r} + \sigma_{1t} = \frac{2q}{K_1^2 - 1} = \text{const}, K_1 = \frac{b}{R} \sim \frac{b_S}{r_K},$$

где r_K – радиус контактной поверхности после образования ТМС.

При подстановке этого равенства в последнее уравнение (5) имеем

$$\sigma_{1x} = \frac{q}{K_1^2 - 1}. \quad (6)$$

Таким образом, с учетом выражений для напряжений (2) и (6) составляющие радиальной и окружной деформации силового элемента равны

$$\begin{cases} \varepsilon_{lr} = -\frac{3\varepsilon_{li}}{2\sigma_{li}} \left(\frac{q}{K_1^2 - 1} \right) \frac{b^2}{\rho^2} \\ \varepsilon_{lt} = \frac{3\varepsilon_{li}}{2\sigma_{li}} \left(\frac{q}{K_1^2 - 1} \right) \frac{b^2}{\rho^2} \end{cases}.$$

Следовательно, величина окружной деформации на контактной поверхности отверстия наружного цилиндра при $\rho = R$ составляет

$$\varepsilon_{lt}(R) = \frac{3\varepsilon_{li}(R)}{2\sigma_{li}(R)} \left(\frac{qK_1^2}{K_1^2 - 1} \right).$$

Воспользовавшись уравнением термомеханической диаграммы l и соотношением (4) для интенсивности деформации, в результате простых преобразований получаем

$$\varepsilon_{lt}(R) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\sqrt{3}qK_1^2}{A_1^+(K_1^2 - 1)} \right]^{m_1^+}.$$

Связь между значениями окружной деформации на внешней $\varepsilon_{lt}(b)$ и внутренней $\varepsilon_{lt}(R)$ поверхностях наружного цилиндра нетрудно установить из условия постоянства его объема при образовании ТМС. Так, в соответствии с рис. 2а справедливо равенство

$$\pi l(b^2 - R^2) = \pi l \left\{ b^2 [1 + \varepsilon_{lt}(b)]^2 - R^2 [1 + \varepsilon_{lt}(R)]^2 \right\}.$$

Исключая малые величины более высокого порядка, находим

$$\varepsilon_{lt}(b) = \frac{1}{K_1^2} \varepsilon_{lt}(R).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{lt}(b) = \frac{\sqrt{3}}{2K_1^2} \left[\frac{\sqrt{3}qK_1^2}{A_1^+(K_1^2 - 1)} \right]^{m_1^+}. \quad (7)$$

Для внутреннего цилиндра в силу принятого допущения $\sigma_{2x}(\rho) = 0$ из последнего уравнения (3) осевая компонента деформации равна

$$\varepsilon_{2x} = -\frac{3\varepsilon_{2i}}{2\sigma_{2i}} \sigma_0.$$

Так как

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{lr} - \sigma_{lt}) = -\frac{2}{3}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right),$$

тогда

$$\varepsilon_{2x} = \frac{3\varepsilon_{2i}}{2\sigma_{2i}}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right).$$

Отсюда выражения для компонент деформаций (3) запишутся как

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_{2i}}{2\sigma_{2i}}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right)\left(3\frac{a^2}{\rho^2} - 1\right) \\ \varepsilon_{2t} = -\frac{\varepsilon_{2i}}{2\sigma_{2i}}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right)\left(3\frac{a^2}{\rho^2} + 1\right) \\ \varepsilon_{2x} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right) \end{array} \right\}.$$

На контактной поверхности охватываемого тела составляющие деформации при $\rho = r$ принимают значения

$$\varepsilon_{2r}(r) = \zeta(3 - K_2^2), \varepsilon_{2t}(r) = -\zeta(3 + K_2^2), \varepsilon_{2x}(r) = 2\zeta K_2^2 \quad (8)$$

при обозначении

$$\zeta = \frac{\varepsilon_{2i}q}{2\sigma_{2i}(K_2^2 - 1)}. \quad (9)$$

Подставим равенства (8) с учетом обозначения (9) в уравнение интенсивности деформации

$$\varepsilon_{2i} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{2r})^2 + (\varepsilon_{2r} - \varepsilon_{2x})^2 + (\varepsilon_{2x} - \varepsilon_{2t})^2}.$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon_{2i} = \frac{\varepsilon_{2i}}{\sigma_{2i}}q\left(\frac{\sqrt{3 + K_2^4}}{K_2^2 - 1}\right).$$

Таким образом, окружная составляющая связана с интенсивностью деформации контактной поверхности внутренней детали соотношением

$$\varepsilon_{2t}(r) = -\varepsilon_{2i}(r)\frac{3 + K_2^2}{2\sqrt{3 + K_2^4}}.$$

Учитывая уравнение деформационной кривой $\sigma_{2i} = A_2 \varepsilon_{2i}^m$ [1], преобразуем выражение для окружной деформации (8) к виду

$$\varepsilon_{2i} = -\frac{\varepsilon_{2i}^{1-m_2}}{2A_2} q \left(\frac{K_2^2 + 3}{K_2^2 + 1} \right).$$

Подставим в эту величину взаимосвязь между значениями ε_{2i} и ε_{2f} :

$$\varepsilon_{2f} = \left(\frac{2\varepsilon_{2f} \sqrt{K_2^4 + 3}}{K_2^2 + 3} \right)^{1-m_2} \frac{q}{2A_2} \left(\frac{K_2^2 + 3}{K_2^2 - 1} \right).$$

В результате элементарных преобразований окончательно получаем

$$\varepsilon_{2f} = -\frac{K_2^2 + 3}{2} \left[\frac{q \left(\sqrt{K_2^4 + 3} \right)^{1-m_2}}{A_2 (K_2^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{m_2}}.$$

Величину окружной деформации на поверхности его отверстия $\varepsilon_{2f}(a)$ найдем из условия постоянства объемов в исходном состоянии и после образования напряженной посадки. В соответствии с рис. 2б запишем

$$\begin{aligned} \pi l (r^2 - a^2) &= \pi l (1 + \varepsilon_{2x}) \times \\ &\times \left\{ r^2 [1 - \varepsilon_{2x}(r)]^2 - a^2 [1 + \varepsilon_{2f}(a)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

В результате элементарных преобразований, исключая малые величины более высокого порядка, имеем

$$\varepsilon_{2x} (K_2^2 - 1) - 2K_2^2 \varepsilon_{2f}(r) + 2\varepsilon_{2f}(a) = 0.$$

Из равенств (8) находим, что

$$\varepsilon_{2x} = -\varepsilon_{2f}(r) \frac{2K_2^2}{K_2^2 + 3}.$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon_{2f}(a) = 2\varepsilon_{2f}(r) K_2^2 \left(\frac{K_2^2 + 1}{K_2^2 + 3} \right).$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{2l}(a) = -K_2^2(K_2^2 + 1) \left[\frac{q(\sqrt{K_2^4 + 3})^{1-m_2}}{A_2(K_2^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{m_2}}. \quad (10)$$

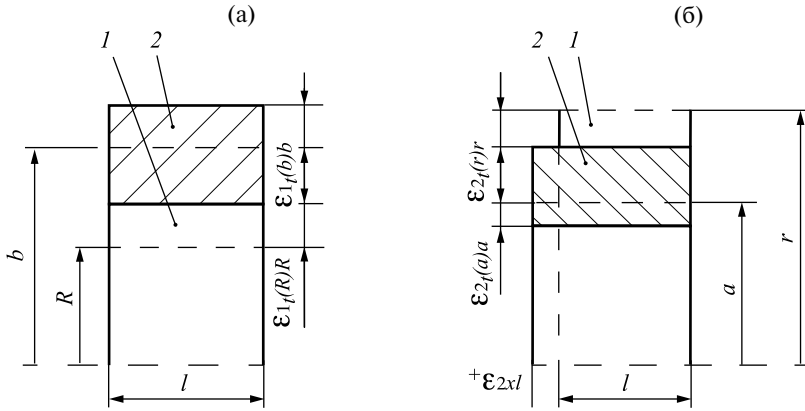


Рис. 2. К расчету окружной деформации свободных поверхностей сопрягаемых цилиндров при формировании ТМС: (а) – наружная деталь; (б) – внутренняя деталь; 1 – положение и размеры поперечного сечения втулки при изготовлении; 2 – после образования напряженной посадки.

Из уравнения (10) выразим контактную нагрузку в напряженном соединении

$$q = A_2 \frac{K_2^2 - 1}{(\sqrt{K_2^4 + 3})^{1-m_2}} \left[-\frac{\varepsilon_{2l}(a)}{K_2^2(K_2^2 + 1)} \right]^{m_2}. \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в равенство (7), можем записать

$$\begin{aligned} \frac{2K_1^2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{1l}(b) = \\ = \left\{ \frac{\sqrt{3}K_1^2(K_2^2 - 1)A_2}{(\sqrt{K_2^4 + 3})^{1-m_2}(K_1^2 - 1)A_1^+} \left[-\frac{\varepsilon_{2l}(a)}{K_2^2(K_2^2 + 1)} \right]^{m_2} \right\}^{\frac{1}{m_1^+}}. \end{aligned}$$

Таким образом, при статистической обработке результатов измерений определяется корреляция между величинами, установленными расчетно-экспериментальным путем для каждого напряженного соединения цилиндров:

$$Y = \frac{2K_1^2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{lr}(b), X = \frac{\sqrt{3}K_1^2(K_2^2 - 1)A_2}{\left(\sqrt{K_2^4 + 3}\right)^{1-m_2}(K_1^2 - 1)} \left[-\frac{\varepsilon_{2r}(a)}{K_2^2(K_2^2 + 1)} \right]^{m_2},$$

и строится эмпирическая линия регрессии согласно методике работы [3]

$$Y = BX. \quad (12)$$

После определения значений B и n вычисляют параметры диаграммы

$$m_1^+ = 1 / n_1^+ = 1 / B^{m_1^+}.$$

Для нахождения коэффициентов A_2^- , m_2^- термомеханической кривой при заданной деформации сжатием по результатам измерений окружных деформаций свободных поверхностей цилиндров в напряженном соединении определяется корреляция между величинами

$$Y = -\frac{2\varepsilon_{2r}(a)}{\sqrt{3}K_2^2}, X = \frac{\sqrt{3}(K_1^2 - 1)A_1}{(K_2^2 - 1)\left(\sqrt{3K_1^4 + 1}\right)^{1-m_1}} \left[\frac{K_1^2 \varepsilon_{lr}(b)}{K_1^2 + 1} \right]^{m_1},$$

и строится эмпирическая линия регрессии (12).

После вычисления значений B и n получают параметры диаграммы

$$m_2^- = 1 / n_2^- = 1 / B^{m_2^-}.$$

Выводы. В статье предложена новая практическая методика определения диаграммы при измерении окружных деформаций свободных поверхностей цилиндров в их напряженных соединениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khasyanova D. U.* Analyzing the Dimension of Thermo-Mechanical Coupling // J. Mach. Manuf. Reliab. 2022. V. 51. P. 650. <https://doi.org/10.3103/S105261882207007X>
2. *Шишкин С. В., Махутов Н. А.* Расчет и проектирование силовых конструкций на сплавах с эффектом памяти формы. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 412 с.
3. *Niinomi M.* Recent research and development in titanium alloys for biomedical applications and healthcare goods // Science and Technology of Advanced Materials. 2003. V. 4 (5). P. 445.
4. *Fu Y., Du H., Huang W. et al.* TiNi-based thin films in MEMS applications // Sensors and Actuators, A: Physical. 2004. V. 112 (2–3). P. 395.
5. *Hartl D. J., Lagoudas D. C.* Aerospace applications of shape memory alloys // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2007. V. 221 (4). P. 535.
6. *Eggeler G., Hornbogen E., Yawny A. et al.* Structural and functional fatigue of NiTi shape memory alloy // Materials Science and Engineering A. 2004. V. 378 (1–2). P. 24.
7. *Auricchio F., Taylor R. L., Lubliner J.* Shape-memory alloys: Macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1997. V. 146 (3–4). P. 281.

8. Чернов Д. Б. Термомеханическая память и методы ее определения. М.: НИИСУ, 1982. 146 с.
9. Shaw J. A., Kyriakides S. Thermomechanical aspects of NiTi // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1995. V. 43 (8). P. 1243.
10. Otsuka K., Ren X. Physical metallurgy of Ti-Ni-based shape memory alloys // Progress in Materials Science. 2005. V. 50 (5). P. 511.
11. Mohd Jani J., Leary M. et al. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities // Materials and Design. 2014. V. 56. P. 1078.
12. Desroches R., McCormick J., Delemont M. Cyclic properties of superelastic shape memory alloy wires and bars // Journal of Structural Engineering. 2004. V. 130 (1). P. 38.
13. Хасьянова Д. У. Обоснование гипотезы плоской деформации цилиндров при образовании термомеханического соединения // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2023. № 2. С. 59. https://doi.org/10.52261/02346206_2023_2_59
14. Тимошенко С. П. Теория упругости / Пер. с англ. Н.А. Шошина. М.; Л.: Гос. техн.-теоретич. изд-во, 1935. 451 с.
15. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 621: 631.3

ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУИРОВАНИЯ ШИРОКОЗАХВАТНЫХ ДОЖДЕВАЛЬНЫХ МАШИН

© 2024 г. Л. А. Журавлева

*Российский государственный аграрный университет –
МСХА им. К.А. Тимирязева, Москва, Россия
e-mail: dfz@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.05.2023 г.

После доработки 08.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Одним из перспективных и актуальных направлений при проектировании широкозахватных дождевальных машин является принцип ресурсосбережения. В статье определены направления совершенствования конструктивно-технологических параметров дождевальной техники на основе принципов ресурсосбережения и сформирована концепция разработки дождевальной техники исходя из условий эксплуатации. Проведенные исследования позволили усовершенствовать ферменные конструкции модельного ряда дождевальных машин “КАСКАД”. Снижение материалоемкости основано на оптимизации параметров пролетов и ферменных конструкций, для чего были предложены коэффициенты металлоемкости фермы и массы угольников. Усовершенствование ферменной конструкции позволило увеличить длину пролета на 22.1–33.8% при незначительном увеличении массы на 5.8–15.1%.

Ключевые слова: ферменная конструкция, дождевальная машина, пролет, ресурсосбережение, металлоемкость

DOI: 10.31857/S0235711924010071, **EDN:** SMYBSK

Актуальность. Многие еще работающие в полях широкозахватные дождевальные машины, спроектированные в советское время, уже не отвечают современным требованиям и зачастую не обеспечивают качественный полив сельскохозяйственных культур.

Крайне необходим новый подход при проектировании. Важны не только модернизация и восстановление дождевальных машин советского периода, важны разработка и производство нового ряда надежных и качественных машин. Одним из перспективных и актуальных направлений является принцип ресурсосбережения.

Разрабатываемые конструкции современных дождевальных машин должны обеспечить экономию материальных ресурсов, снижение эксплуатационных расходов, уменьшение потребления энергии, сокращение трудозатрат на обслуживание и др.

Целью является разработка методики проектирования широкозахватных дождевальных машин кругового действия на основе принципов ресурсосбережения.

Были поставлены и решены следующие задачи: 1) определить направления совершенствования конструктивно-технологических параметров дождевальной техни-

ки на основе принципов ресурсосбережения; 2) сформировать концепцию разработки дождевальной техники в зависимости от условий эксплуатации (среды).

Исследований в области конструирования широкозахватной дождевальной техники крайне мало. В основном они направлены на определение качественных показателей полива.

Работы Н.Ф. Рыжко [1, 2], В.К. Губера [3], В.А. Черноволова, Л.В. Кравченко [4] и др. ученых посвящены совершенствованию насадок и дождевальных аппаратов, их расстановке вдоль водопроводящего пояса.

В работах Ю.Ф. Снипича [5], А.И. Рязанцева [6], С.С. Турапина, Г.В. Ольгаренко, А.О. Антипова [7], А.И. Есина, В.А. Соловьева [8], D.L. Martin [9], P.M. Varsha, A. Varsha, H.V. Shubhu [10], N.A. Mat Leh, M.S. Ariffudin Mohd, Z. Muhammad [11], M.D. Zakari, M.M. Maina, M.S. Abubakar, N.J. Shanono, I. Lawan, M.A. Tadda, N.M. Nasidi [12] и др. рассмотрены вопросы модернизации дождевальных машин.

Большинство научных положений основываются на полученных эмпирических данных для конкретных моделей машин; дождевальных аппаратах, условиях работы.

Очевидно, что помимо модернизации уже существующих технических средств полива необходимо разработать новые современные модели, доступные по цене, обеспечивающие качественное и экологически безопасное орошение.

Материалы и методы. Ориентируясь на ресурсосбережение, можно выделить основные методы и направления развития машин.

Направления развития дождевальных машин с позиции ресурсосбережения:

1. Водные ресурсы. Методы: 1) снижение интенсивности водоподачи; 2) улучшение качества полива путем повышения равномерности увлажнения; 3) формирование благоприятной среды обитания растений.
2. Земельные ресурсы. Методы: 1) увеличение коэффициента земельного использования; 2) снижение эрозии почв за счет улучшения качества дождя; 3) уменьшение воздействия ходовых систем на почву.
3. Материальные ресурсы. Методы: 1) уменьшение материалоемкости дождевальных машин за счет совершенствования конструкции и применения альтернативных материалов.
4. Энергетические ресурсы. Методы: 1) повышение эффективности использования приводов; 2) применение низконапорных дождевальных машин.
5. Трудовые ресурсы. Методы: 1) повышение эффективности автоматической системы управления; 2) повышение производительности.

Таким образом, можно выделить направления совершенствования: 1) дождевальные направления на низком напоре; 2) приповерхностный полив; 3) разработка конструкций низконапорных дождевателей; 4) оптимизация ферменной конструкции с водопроводящим трубопроводом, рациональная расстановка дождеобразующих устройств; 5) оптимизация ходовых систем; 6) оптимизация системы привода; 7) совершенствование автоматической системы управления.

Кратко рассмотрим некоторые. *Водосбережение и энергосбережение.* Уже мировой тенденцией является перевод систем орошения на низкий напор и использование низконапорной дождевальной техники, имеющей свои конструктивные особенности.

Например, известно, что при снижении рабочего давления машины с 0.7 до 0.45 МПа уменьшается давление на насосной станции на 16%, а годовой расход электроэнергии на 13% [2].

Сбережение земельных ресурсов. Коэффициент земельного использования (КЗИ) отчасти характеризует технический уровень системы орошения и, в частности, дождевальной машины. Чем меньше величина площади отчуждения под коммуникации, системы трубопроводов, колеи колес опорных тележек дождевальных машин, тем выше КЗИ [8].

Необходима оптимизация параметров ходовых систем, совершенствование автоматической системы выравнивания, обеспечение полива углов участка.

Материальные ресурсы. Широкозахватная дождевальная техника металлоемкая и достаточно дорогая. Примерно 60–75% веса приходится на ферменную конструкцию с водопроводящим трубопроводом, что говорит о важности ее оптимизации.

Металлоемкость дождевальных машин, т/га, можно выразить как

$$M = \Sigma m / S, \quad (1)$$

где Σm – масса машины, т; S – площадь полива, га.

Количество ходовых тележек

$$n_T = \left(\frac{L - \ell_K}{\ell} \right), \quad (2)$$

где L – длина машины; ℓ – расстояние между ходовыми тележками (длина пролета); ℓ_K – длина консоли.

Масса ферменной конструкции с водопроводящим трубопроводом

$$m_B = m_1(L - \ell_K), \quad (3)$$

где m_1 – средняя масса ферменной конструкции с водопроводящим трубопроводом.

Очевидными путями снижения металлоемкости машины являются: 1) увеличение пролетов между тележками (уменьшение количества тележек); 2) уменьшение массы ферменной конструкции с водопроводящим трубопроводом за счет усовершенствования конструкции и применения трубопровода с переменным диаметром по длине.

Представим конструктивный коэффициент массы машин как отношение общей массы к массе ферменной конструкции с водопроводящим трубопроводом, имеющий незначительные колебания между модификациями и составляющий для дождевальной машины “Фрегат” 4.13–4.62 и для дождевальной машины “Кубань” 3.17–3.97.

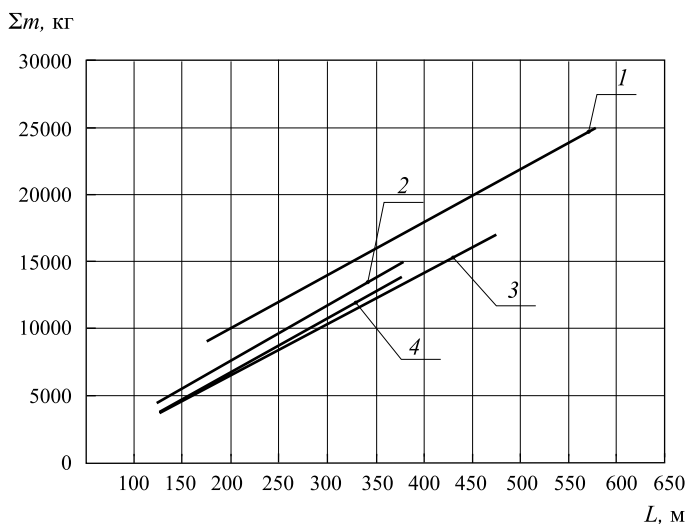


Рис. 1. Зависимость массы модификаций “Кубань” и “КАСКАД” от длины: 1 – “Кубань-ЛК1” (пролет длиной 48.7 м); 2 – МДЭК “Кубань-ЛК1М” (“КАСКАД”) (пролет длиной 48.7 м); 3 – ДМ “КАСКАД” (пролет длиной 59.5 м); 4 – ДМ “КАСКАД” (пролет длиной 65.25 м).

Представив зависимость массы широкозахватной дождевальная машины от ее длины для модификаций с разными длинами пролетов, можно заметить, насколько увеличение длины пролета способствует уменьшению массы машины, соответственно и стоимости (рис. 1).

При этом длина пролета ограничивается прочностью системы, весом, влияющим на удельное давление на почву, глубину колеи, и условиями эксплуатации, например, рельефом и др.

В качестве показателя, характеризующего конструктивное совершенство ферменной системы, введем показатель — коэффициент металлоемкости ферменной конструкции:

$$K_M = \frac{\sum P}{l}, \quad (4)$$

где $\sum P$ — сумма периметров угольников на пролет, м; l — длина пролета, м.

Показатель, характеризующий массу угольников ферменной конструкции:

$$K_\Delta = \frac{\sum m_\Delta}{l}, \quad (5)$$

где $\sum m_\Delta$ — масса всех угольников на пролет, м.

Результаты расчетов сведены в табл. 1. На дождевальных машинах типа “Кубань” и “КАСКАД” используются два типа ферменных конструкций: 1) первый тип — на ДМ “Кубань-ЛК1” и “Кубань-ЛК1М” с пролетами длиной 48.7 м, в поперечном сечении равнобедренный треугольник с разными длинами стоек и раскосов; 2) второй тип — на ДМ “КАСКАД” с пролетами длиной 59.5 и 65.2 м, в поперечном сечении равнобедренный треугольник с равновеликими тягами, раскосами и креплением в одной точке (рис. 2).

Таблица 1. Характеристики ферменной конструкции

Тип дождевальной машины	“Кубань-ЛК1”, “Кубань-ЛК1М” (“КАСКАД”)	“КАСКАД” (пролет 59.5 м)	“КАСКАД” (пролет 65.25 м)
Масса угольников ферменной конструкции на пролет, кг	198.12	209.74	228.21
Периметр ферменной конструкции на пролет, м	58.79	62.24	67.72
Длина пролета, м	48.7	59.5	65.25
Коэффициент металлоемкости ферменной конструкции	1.20	1.04	1.04
Коэффициент массы угольников	4.0	3.5	3.5
Процент увеличения длины пролета, %	0	22.1	33.8
Процент увеличения массы угольников на пролет, %	0	5.8	15.1

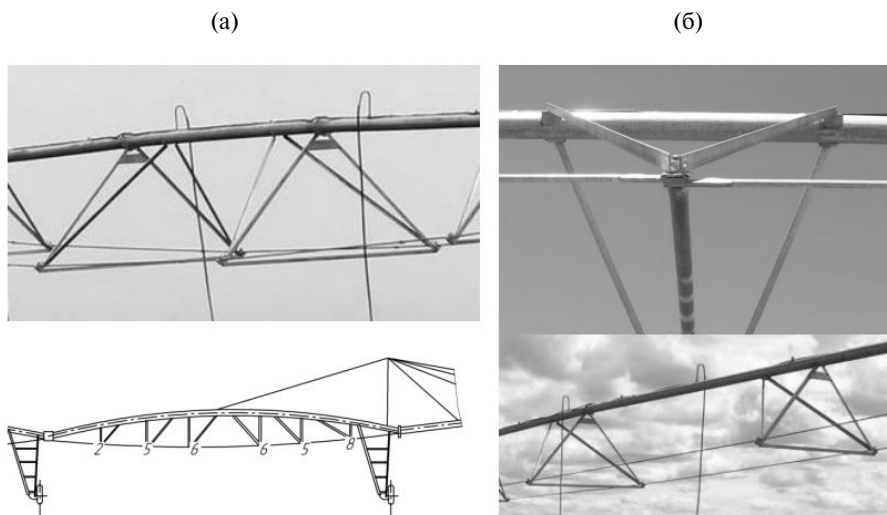


Рис. 2. Два типа ферменных конструкций: (а) – “Кубань-ЛК1М”; (б) – “КАСКАД”.

Оптимизация ферменной конструкции позволяет увеличивать длину пролета на 22.1–33.8% при увеличении массы на 5.8–15.1%.

Трудовые ресурсы. Зависят главным образом от качества и функциональности системы автоматизации, позволяя уменьшать трудоемкие ручные работы, управлять работой нескольких дождевальных машин дистанционно.

Таким образом, кратко изложенные взаимозависимости позволили наметить направления совершенствования и оптимизации с точки зрения ресурсосбережения.

Широкозахватную дождевальную машину проще всего рассматривать как объект проектирования по требованиям, предъявляемым условиями эксплуатации (параметрами среды).

Технические характеристики дождевальной машины (вес, форма, размер), т. е. конструкцию необходимо подобрать под условия эксплуатации, т. е. определить требования среды. Кроме того, они должны быть согласованы с уровнем развития технических средств, т. е. быть не ниже существующих аналогов (рис. 3).

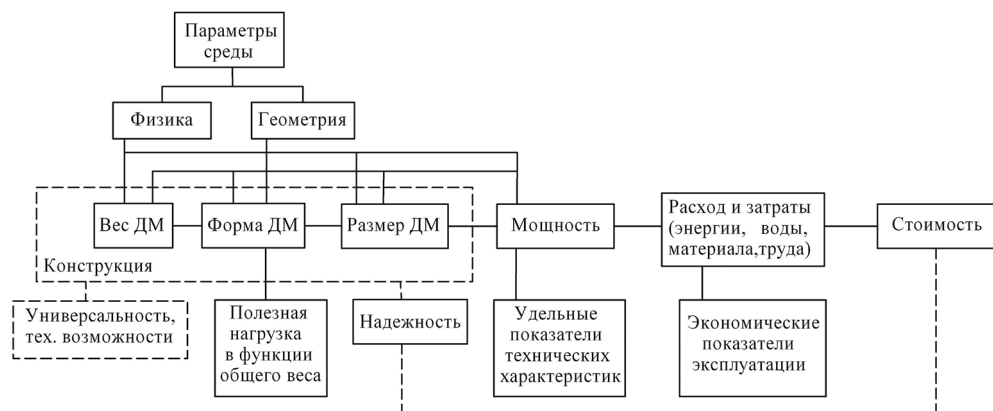


Рис. 3. Концепция проектирования широкозахватной дождевальной техники.

Таблица 2. Показатели дождевальных машин

Наименование показателя	Размерность
→ min	
Энергоемкость орошения на 1000 м ³ воды	кВт·ч/1000 м ³
Удельный расход энергии	кВт/га
Затраты мощности	кВт
Металлоемкость	т/га
Конструктивный коэффициент массы машины	—
Коэффициент массы угольников	—
Коэффициент металлоемкости ферменной конструкции	—
Трудоемкость обслуживания, ТО и ремонтов	чел.-ч
Затраты труда	чел.-ч
Капитальные вложения на 1000 м ³ воды	руб./1000 м ³
Капитальные вложения	руб.
Коэффициенты недостаточного и избыточного полива	
Средняя мощность дождя	Вт/м ²
Средняя интенсивность дождя	мм/мин
Ширина и глубина колеи	м
Повреждаемость растений	%
Количество обслуживающего персонала	чел.
Потери воды на испарение и снос	%
→ max	
Норма полива до стока	м ³ /га
Время полива до стока	мин
Степень использования земельных ресурсов (КЗИ)	КЗИ ≥ 0.97
Наработка на отказ	ч
Производительность труда	га/ч
Срок службы	лет
Коэффициент готовности дождевальных машин к работе	K _г ≥ 0.96
Коэффициент использования сменного времени	K _{см} > 0.95
Коэффициент эффективного полива	K _{эп} > 0.85

Параметры дождевальной машины через категории “вес”, “форма” и “размер” задают мощность, необходимую на привод машины, т. е. характеризуют конструкцию, которая и определяет надежность, универсальность и технические возможности, что влияет на стоимость технического средства.

Потребляемая мощность является определяющей для категории “расход и затраты”, и замыкается цепочка оценкой фактора целесообразности — общей стоимостью.

Категорию, характеризующую условия эксплуатации, т. е. “параметры среды”, можно разделить на две подкатегории: физику (например, физико-механические свойства почвы) и геометрию (геометрические параметры поля, рельеф местности, высота растений и др.).

Параметр “физика” среды является определяющим и лимитирующим параметром “физики” объекта проектирования. Например, физико-механические свойства почвы (“физика”) ограничивают вес дождевальной машины, задавая параметры ходовых систем.

Таблица 3. Основные технические характеристики машин

Наименование показателей	Показатель	
1	2	3
Условное наименование	“Ку- бань-ЛК1М” (“КАСКАД”)	“КАСКАД”
Привод передвижения машины	Электромеханический, реверсив- ный, мотор-редукторы	
Источник питания	380 В, 50 Гц	
Скорость движения последней тележки в пределах, м/с, (м/мин)	$(1.61-30.0) \cdot 10^{-3}$	
Дорожный просвет, мм, не менее	450	
Расстояние до нижнего пояса металлоконструкции, м	2.7	2.8–2.9
Механическая повреждаемость растений, %, не более	1.0	
Диаметры водопроводящего трубопровода, мм	159	219, 203, 168, 159, 133
Диаметры труб консоли, мм	133	133, 114, 108, 89
Длины пролетов, м	48.7	48.7, 59.5, 65.25
Максимальная длина машины, м (с консолью 31 м)	518	553
Колесная база, мм	3700	3700, 4200
Максимальная длина консоли, м	31	
Расход воды, л/с	до 90	
Давление воды на входе в машину, МПа, при длине 500 м	0.43	
Колеса самоходных тележек	пневматические	
Мотор-редукторы	УМС	
Колесные редукторы самоходных тележек, тип	червячные	
Расположение органов оперативного управления	с щита управления и дистанционный	
Режимы движения машины	старт-стопный	
Интенсивность дождя средняя, мм/мин, не более	0.66	
Норма полива за проход, м ³ /га	95–600	
Минимальное время оборота машины, ч, при длине 500 м	32.8	

Параметр “геометрия” среды также является определяющим и лимитирующим параметром “геометрии” объекта проектирования. Размеры поливного участка, рельеф местности, высота растений задают форму и размеры дождевальной машины (ее длину, конструктивно-высотные свойства).

Причем совершенство конструкции определяет полезную нагрузку от функции общего веса машины.

Конструкция задает требуемую мощность, группу “расход и затраты”, т. е. расход энергии, воды, материалов на изготовление самой конструкции, затраты труда на обслуживание. Конструкция и мощность во многом характеризуют показатели уровня техники и возможности ресурсосбережения как при изготовлении самой машины, так и в процессе эксплуатации, работы машины.

Важно определить взаимосвязь между принимаемыми конструктивными решениями, вытекающим ресурсосберегающим потенциалом и лимитирующими факторами.

Показатели технического уровня качества дождевальных машин и оценочные показатели их работы можно разделить на группы, стремящиеся к минимуму или к максимуму (табл. 2).

На основании представленных исследований предприятием ООО “Мелиоративные машины” были спроектированы и запущены в производство дождевальные машины “Кубань-ЛК1М” (“КАСКАД”) и “КАСКАД” [8].

Результаты исследований. Технические характеристики “Кубань-ЛК1М” (“КАСКАД”) приведены в табл. 3. На ее основании была разработана серия ДМ “КАСКАД” с усовершенствованной ферменной конструкцией. Пролеты были увеличены до 59.5 и 65.2 м (рис. 4).



Рис. 4. Дождевальная машина “КАСКАД”.

Оптимизация ферменной конструкции позволила увеличить длину пролета на 22.1–33.8% при незначительном увеличении массы на 5.8–15.1%.

Заключение. Важнейшим критерием конкурентоспособности является рациональное использование воды, земли, материалов, энергии, труда и средств как на стадии их создания, так и в процессе их обслуживания и эксплуатации.

Проведенный анализ позволил определить критерии эффективности и выделить направления совершенствования, разработать концепцию проектирования широкозахватной дождевальной техники.

Снижение материалоемкости основано на оптимизации параметров пролетов и ферменных конструкций, для чего были предложены коэффициенты металлоемкости фермы и массы угольников.

Проведенные исследования позволили усовершенствовать ферменные конструкции модельного ряда дождевальных машин “КАСКАД”.

Финансирование работы. Работа выполнена за счет средств Программы развития университета в рамках программы стратегического академического лидерства “Приоритет-2030”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыжко Н. Ф.* Совершенствование технических средств и технологии орошения в Поволжье: монография. Саратов: Саратовский источник, 2007. 110 с.
2. *Рыжко Н. Ф., Рыжко С. Н. и др.* Ресурсосбережение – как основа совершенствования многоопорных дождевальных машин // *Природообустройство*. 2022. № 1. С. 12.
3. *Губер К. В.* Ресурсосберегающие технологии и конструкции оросительных систем при дождевании: Дис. ... д-ра техн. наук. М.: ФГБНУ ВНИИГиМ, 2000. 518 с.
4. *Черноволов В. А., Кравченко Л. В.* Математическое моделирование процессов распределения жидкостей в агротехнологиях: монография. Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт, Донской ГАУ, 2016. 208 с.
5. *Снипич Ю. Ф.* Интенсификация технологий и совершенствование технических средств орошения дождеванием: Дис. ... д-ра техн. наук. Новочеркасск: ФГНУ РосНИИПМ, 2011. 340 с.
6. *Рязанцев А. И., Зазуля А. Н., Евсеев Е. Ю. и др.* Оценка параметров ходовой системы “Кубань-ЛК1” при заравнивании колеи // *Наука в центральной России*. 2023. № 1. С. 116.
7. *Турапин С. С., Ольгаренко Г. В. и др.* Эколого-энергетическое совершенствование многоопорных дождевальных машин // *Мелиорация и водное хозяйство*. 2021. № 3. С. 30.
8. *Есин А. И., Журавлева Л. А., Соловьев В. А.* Ресурсосберегающие технологии и дождевальные машины кругового действия: монография. Саратов: Амирит, 2019. 214 с.
9. *Martin D. L., Kincaid D. C., Lyle W. M.* Design and operation of sprinkle systems // *ResearchGate*. 2007. Т. 16. Р. 557. <https://doi.org/10.13031/2013.23699>
10. *Varsha P. M., Varsha A., Shubha H. V.* Parneeth charanthimath, “Smartphone based Automatic Irrigation System” // *Int. J. of Engineering Research & Technology*. 2018. V. 6. Iss. 15. P. 1.
11. *Mat Leh N. A., Ariffudin Mohd M. S., Muhammad Z.* Smart Irrigation System Using Internet of Things // 2019 IEEE 9th Int. Conf. on System Engineering and Technology (ICSET), 7 Oktober 2019, Shah Alam, Malaysia. P. 96. <https://doi.org/10.1109/icsengt.2019.8906497>
12. *Zakari M. D., Maina M. M., Abubakar M. S. et al.* Design, Construction and Installation of Sprinkler Irrigation System // *J. of the Faculty of Engineering*. 2012. V. 7. № 1–2. P. 109.

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 541.123:621.891:621.892

О ТРЕНИИ ЭЛАСТОМЕРОВ. 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

© 2024 г. А. А. Шепелевский^{1, *}, А. Ю. Неверовская²,
А. П. Возняковский², Е. Б. Седакова¹

¹Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

²Научно-исследовательский институт синтетического каучука им. академика С.В. Лебедева,
Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: spbc63@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.01.2023 г.

После доработки 14.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Показана неприменимость расчетных методик для трения твердых тел в случае трения скольжения по эластомерам. Показано, что при трении твердого тела по эластомеру отсутствует период приработки, и трение изначально носит стационарный характер. Предложена методика вычисления трибологических характеристик эластомеров.

Ключевые слова: трение скольжения, износ, эластомер, трибометодика, несущая способность, среднее значение функции, трибопятно

DOI: 10.31857/S0235711924010087, **EDN:** SMXVTJ

В последние годы в трибологии снова возникла необходимость проведения исследований трения при движении твердого тела по эластомерам. Проводятся достаточно тонкие исследования влияния адгезии на трение качения и скольжения твердого тела по эластомеру при жестком и мягком контакте [1], исследуется динамический отклик эластомера при трении [2] и ряд других вопросов [3, 4], посвященных в основном исследованию физики происходящих процессов в трибозоне при трении твердого тела по эластомеру.

В то же время для получения систематических триботехнических характеристик трибопроцесса при трении по эластомеру твердых тел требуется совершенно определенная методика. Такие методики разработаны для жестких трибопар, но они неприменимы для трибопар с эластомером. В предлагаемой статье делается попытка ликвидировать этот пробел.

Использование стандартных машин трения типа СМЦ, 2070 СМТ-1, ИИ 5018 и им подобных для измерения трибопараметров твердых (жестких) тел определяет и выбор методики измерений, в процессе которых снимаются размеры пятна трения и проводятся соответствующие расчеты. Примеры методик экспресс-испытаний приведены в [5–7]. Но при трении твердых тел предполагается, что: 1) макроформа исследуемого образца не меняется в пределах ошибки измерений, т. е. деформацией, вызванной давлением одного образца на другой, можно пренебречь; 2) давление на исследуемый образец распределено равномерно по площади трибоконтакта, и его можно вычислить как отношение нагрузки к номинальной площади трибоконтакта, которую можно измерить; 3) даже если жесткость одного из компонентов трибопары (контртела) заметно больше другого, эти положения выполняются.

Именно для случаев такого трибоэксперимента разработаны методики экспресс-измерений параметров трибопроцесса [1–3] и им подобные. Они годятся для металлов, керамик, жестких композитов на основе полимеров, полимеров ниже температуры стеклования T_g , некоторых полимеров и композитов на их основе выше температуры стеклования. Что же касается полимеров, не относящихся к этой категории, наиболее выразительными из которых являются эластомеры, то для них нет методик, аналогичных описываемым в [5–7].

Трибоконтакт в случае трибопар эластомер – твердое тело имеет принципиальные отличия. При давлении жесткого контртела на эластомерный образец номинальная площадь контакта контртелом определяется не пятном износа, как в случае жестких тел, а деформацией эластомера. Это приводит к необходимости рассмотреть процесс взаимодействия таких контртел в деталях.

Цель статьи. Предлагаемая статья посвящена более подробному рассмотрению задачи трибоэксперимента твердое (жесткое) тело – эластомер выше T_g .

Образцы и оборудование. В исследованиях использовался эластомер марки СКУ-ПФЛ-100, машина трения ИИ 5018, прибор для измерения перемещений “Микрон-02”, штангенциркуль. Форма исследованной трибопары: цилиндрическое контртело – плоскость. Высота цилиндра 15 мм, сталь ШХ-15. Исследованный образец эластомера был в форме стержня прямоугольного сечения размером $70 \times 10 \times 7$ мм, закрепленного с двух сторон (рис. 1).

Результаты. Эластомер под нагрузкой имеет сложную форму, что можно видеть на рис. 1.

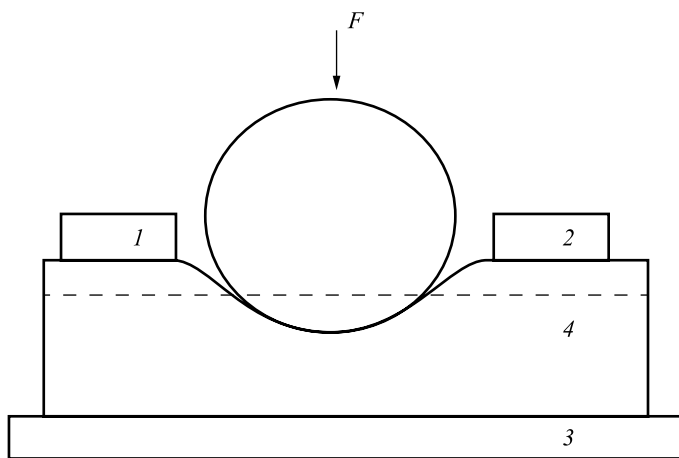


Рис. 1. Реальный профиль контакта цилиндрического контртела с бруском эластомера: 1, 2 – крепеж бруска к основанию 3; 4 – брусок эластомера.

Однако для более подробного рассмотрения достаточно ограничиться формой лишь той части образца, которая находится в контакте с контртелом (выделено штриховой линией).

При приложении нагрузки к трибопаре твердое тело – эластомер происходит следующее.

1. Деформация эластомерного образца изначально изменяет его макроформу: образец деформируется во все стороны, меняя не только свою толщину, но и форму контакта. Так, для образца эластомера в виде стержня прямоугольного сечения при трении его о цилиндрическое твердое контртело форма контакта имеет вид не прямоугольника, как было бы в случае трения жестких тел, а усеченного овала (рис. 2), который получается за счет увеличения под давлением поперечного размера стерж-

ня. Сама площадь контакта определяется не процессами трения и износа, а деформацией эластомера под действием нагрузки.

2. Кроме того, давление в трибоконтакте нельзя вычислить как отношение приложенной нагрузки к площади трибоконтакта, даже если знать точную величину контактной площади. Это определяется неравномерным распределением приложенного усилия по площади трибоконтакта, что можно видеть из схемы поперечного сечения трибоконтакта в геометрии цилиндр (твердое тело) – плоскость (эластомер) (рис. 3).

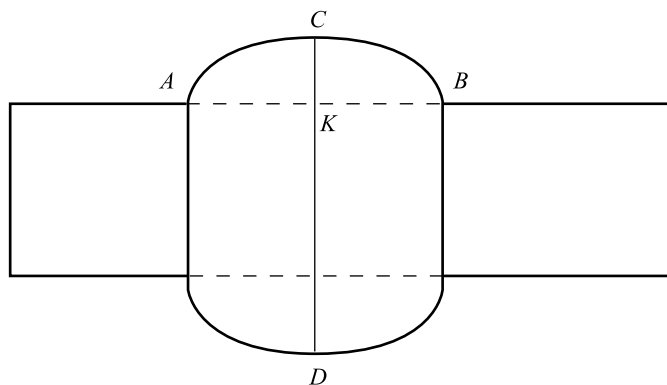


Рис. 2. Схема увеличения площади трибоконтакта за счет боковых сегментов.

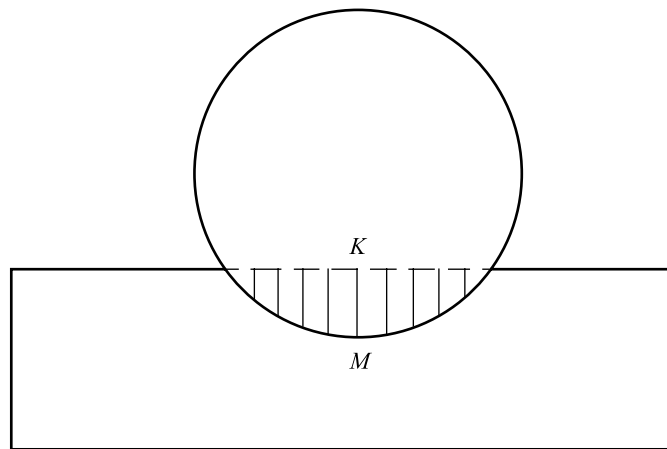


Рис. 3. Сечение трибоконтакта цилиндр – плоскость в нагруженном состоянии.

Длина штрихов вертикальной штриховки соответствует величинам приложенной нагрузки. Размер KM соответствует задаваемому номиналу, прочие – соответственно меньше.

Номинальная величина приложенного усилия (рис. 2) имеет место только в точке максимума деформации образца. Во всех остальных точках она меньше и стремится к нулю при приближении к краю трибоконтакта. Соответственно, и давление в трибоконтакте распределяется от максимума, соответствующего номиналу прикладываемого усилия в центре контакта, до нуля на краю.

Это обстоятельство как минимум затрудняет определение несущей способности по зависимости начального давления на трибоконтакте от приложенной нагрузки

[7]. И не только потому, что нагрузка распределена неравномерно по площади трибоконтакта, но еще и потому, что это давление определяется фактически задаваемой площадью трибоконтакта при приложении нагрузки, а не нарабатываемой в процессе трения. Боковые сегменты и при широком, и при узком образце будут практически одинаковы и зависят от величины нагрузки, диаметра ролика контртела, а также от толщины и податливости образца. Но при любом образце, задавая нагрузку, мы тем самым задаем одновременно и площадь трибоконтакта не как результата трения, а как результата деформации под задаваемой нагрузкой.

3. Соответствующим образом распределен и износ, который максимален в точке максимума деформации и стремится к нулю при приближении к краю трибоконтакта, что приводит к неопределенности и неотчетливости его границ после снятия нагрузки.

Таким образом, рассмотренные особенности трения эластомеров не позволяют использовать для расчетов методики, разработанные для твердых трибопар, и требуют предварительных измерений площади контакта при различных нагрузках.

В [8] рассмотрена еще одна особенность трения твердого тела по эластомеру. В этой работе рассматривалось скольжение микровыпуклости твердого тела по поверхности эластомера, в процессе которого имеет место смещение пятна статического контакта в направлении движения твердой микровыпуклости из-за одновременного растяжения области эластомера позади микровыпуклости касательными усилиями адгезионной природы, что в большой степени определяет гистерезисную составляющую данного процесса трения.

В макромасштабе при трении цилиндрического образца по плоскости эластомера также возможен сдвиг статического пятна контакта по тем же причинам. Однако, в отличие от неконтролируемого гистерезиса на микроуровне, с гистерезисом на макроуровне можно бороться. Для этого необходимо исключить определяющую роль адгезии в процессе трения с помощью эффективного смазывания, что скажется и на микроуровне, а также выбирать достаточно толстые и жестко закрепленные вблизи пятна трения образцы эластомеров. В этом случае макрогистерезисом можно будет пренебречь и считать пятном трения реальное пятно статического контакта. Однако для очень мягких эластомеров этого может быть недостаточно. Но для большинства полиуретанов, в том числе для рассмотренных в настоящей статье, предложенное эффективно.

Рассмотрим измерение деформации образца эластомера СКУ-ПФЛ-100 в виде бруска прямоугольного сечения, на который давит цилиндрическое контртело (как при трении в геометрии цилиндр – плоскость) при статическом нагружении различными нагрузками. Размеры бруска: толщина 6 мм, ширина 8.15 мм, длина 50 мм. Образец закреплен справа и слева от пятна трения, сколь можно близко к нему. При каждой нагрузке проводилось измерение двух параметров: размера KM (рис. 2) с точностью в 1.0 мкм и размера CD (рис. 2) с точностью 0.05 мм. Нагрузка задавалась ступенчато через 100 Н от нуля до 1000 Н с точностью приблизительно 4 Н. Площадь сегмента, являющегося частью площади эллипса (как косое сечение цилиндра), для простоты расчетов заменена площадью сегмента окружности с той же высотой и хордой. При этом учитывалось, что эта площадь является площадью боковой поверхности цилиндра.

В табл. 1 приведены результаты измерений деформации сжатия, размер KM на рис. 3 и размеры увеличивающейся ширины CD на рис. 2 в зависимости от прилагаемой нагрузки. Поскольку ширина предполагаемого пятна износа (дуга окружности цилиндрического контртела, находящаяся в контакте с телом (рис. 2)) не мала, приведены результаты ее вычисления L , а также значения величины KO на рис. 4.

В табл. 2 приведены результаты расчетов реальной площади трибоконтакта в принятой геометрии испытаний на основании измерений при статическом нагружении различными нагрузками. При этом было принято в расчет, что площадь пятна является площадью боковой поверхности цилиндра.

Обозначения: $СК$ – высота бокового кругового (на самом деле эллиптического) сегмента (рис. 2), $S_{\text{СЕГМ}}$ – площадь этого сегмента; $S_{\text{ПТ}}$ – общая площадь пятна трения (трибоконтакта).

Таблица 1. Зависимость деформации сжатия $KМ$ (рис. 3) и уширения CD (рис. 2) рассматриваемого образца от нагрузки

F_N , Н	$KМ$, мм	CD , мм	L , мм	$KО$, мм
0	0	8.15	0	23.0
100	0.799	10.00	12.16	22.201
200	1.352	10.70	15.85	21.648
300	1.769	11.00	18.16	21.231
400	2.122	11.55	19.92	20.878
500	2.427	12.05	21.32	20.573
600	2.705	12.30	22.54	20.295
700	2.941	12.50	23.52	20.059
800	3.087	13.05	24.11	19.913
900	3.299	13.40	24.94	19.701
1000	3.438	13.80	25.47	19.562

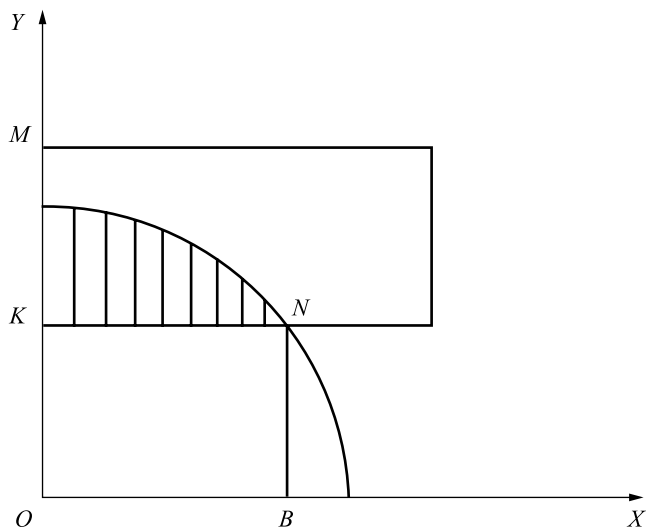


Рис. 4. Распределение нагрузки в трибоконтакте деформированного образца.

Увеличение площади (табл. 2) за счет бокового уширения для данного образца и при данных условиях может быть не менее 20%. Зависимость же площади трибопятна от нагрузки представляет возрастающую кривую с насыщением, что определя-

ется конечностью размеров образца, поскольку максимальная деформация образца под нагрузкой не может быть больше толщины образца.

Таблица 2. Зависимость площади трибоконтакта от нагрузки

F_N , Н	CK , мм	$S_{\text{СЕГМ}}$, мм ²	$S_{\text{ПТ}}$, мм ²	$2S_{\text{СЕГМ}}/S_{\text{ПТ}}$, %	Увеличение площади трибоконтакта, мм ²
0	0	0	0	—	0
100	0.92	13.32	125.73	21.2	125.73
200	1.27	16.70	162.59	20.5	36.86
300	1.42	19.11	186.22	20.5	23.63
400	1.70	21.05	204.42	20.6	18.20
500	1.95	22.63	219.04	20.7	14.62
600	2.07	23.93	231.52	20.7	12.48
700	2.17	24.97	241.66	20.7	10.14
800	2.45	25.74	247.97	20.8	6.31
900	2.62	26.70	256.70	20.8	8.73
1000	2.82	27.39	262.36	20.9	5.66

О давлении. Оно, как и нагрузка, распределено неравномерно. В центральной части пятна трения, где приложенная сила равна задаваемому номиналу, давление на площадь узкого пятна в 1 мм длиной 10 мм (ширина деформированного бруска) при нагрузке 1 кН равно 72.5 МПа. В то же время при приближении к краю давление стремится к нулю. Это затрудняет определение давления на образце в целом. Однако если знать закон распределения нагрузки, то можно воспользоваться понятием среднего значения функции на данном интервале, что позволит получить среднее давление при заданной нагрузке. Последнее можно использовать при выборе методики исследования.

В соответствии с первой теоремой о среднем [9] среднее значение функции на данном интервале аргумента равно площади, ограничиваемой функцией на этом интервале аргумента, деленной на значение интервала. Исходя из этого, определим закон распределения нагрузки от середины трибоконтакта, где она максимальна, до края, где она равна нулю (рис. 3). Рассмотрим половину этого симметричного рисунка в прямоугольной системе координат XY (рис. 4). Начало этой системы координат совпадает с центром цилиндрического контртела радиуса $R = OM$. Таким образом, дуга MC является дугой окружности радиуса R , центр которой лежит в начале координат. Исходя из уравнения окружности с центром в начале координат и в соответствии с первой теоремой о среднем [9], среднее значение функции $Y(x)$ для данного случая будет определяться как

$$\overline{Y(x)} = \left(\frac{1}{B} \right) \int_0^B \left(R^2 - x^2 \right)^{1/2} dx, \quad (1)$$

где B — значение x в точке B .

После взятия интеграла выражение (1) примет вид

$$Y(x) = \left(\frac{1}{2B} \right) \left(B \left(R^2 - B^2 \right)^{1/2} + R^2 \arcsin(B / R) \right).$$

Найденная точка среднего значения функции будет иметь одинаковые аргументы и для фигуры $OMNB$, и для заштрихованной фигуры KMN . Разница будет лишь в значении ординаты.

Найдем ординату фигуры KMN , соответствующую среднему значению функции, найдем ее долю в значении KM и с помощью этой доли определим величину средней силы при нагрузке, соответствующей деформации KM . Поделив найденную среднюю силу на площадь, которой она соответствует, получим среднее давление.

На рис. 5 представлена полученная таким образом зависимость среднего давления от приложенной нагрузки.

Практически прямолинейный вид зависимости давления от нагрузки в случае трения жестких тел означает, что процесс трения происходит на приработанном пятне, т. е. стационарен. В этом случае износ носит линейный характер. В случае же эластомера стационарный характер процесса, как выяснилось, имеет место изначально, поскольку пятном трения является не предварительно натертое пятно, а пятно деформации под нагрузкой. Иначе говоря, режим приработки в случае трения твердых тел с эластомерами отсутствует. При этом в каждой точке площади контакта контртела с образцом имеет место стационарный режим, но с разными давлениями в разных точках по окружности контртела.

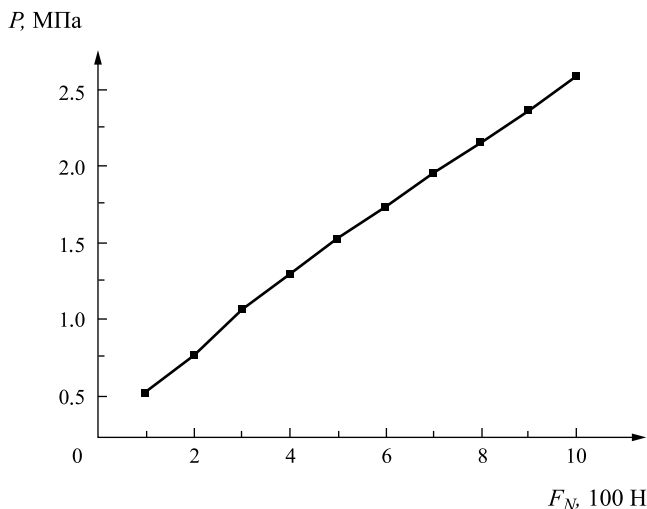


Рис. 5. Зависимость среднего давления в трибоконтакте от прикладываемой нагрузки F_N .

Среди схем, предложенных в методике экспрессных триботехнических испытаний антифрикционных полимеров работы [6], для оценки параметров трения стали по эластомеру можно использовать схему 2, которая предполагает стационарный характер процесса трения. Однако начальное давление, прикладываемое к трибопятну, следует определять как отношение средней нагрузки F_N к площади деформационного пятна при данной нагрузке, а не номинальной нагрузки к площади следа трения после снятия предварительной нагрузки.

Прочие трибопараметры — коэффициент трения f , интенсивности линейного I_h и объемного I_v износов — в зависимости от начального давления P_n определяются предложенным в [6] образом.

Следует отметить еще ряд особенностей процесса трения в рассматриваемом трибоконтакте.

В первую очередь сформулируем способ определения износа. Реальное пятно трения после снятия нагрузки имеет продольный размер, равный поперечному раз-

меру образца (длина канавки износа), поперечный же размер может не иметь четких границ, что затрудняет как минимум определение его площади. Для определения поперечного размера канавки износа потребуется дополнительная процедура определения границы на пятне трибоконтакта, с которой начинается износ.

Поскольку нагрузка F_N , приложенная к трибоконтакту, распределена неравномерно и близка к нулю у краев контактного пятна, то и износ, максимальный при максимальном усилии в центре, на краях близок к нулю. При смазывании реально изнашивается лишь часть площади трибоконтакта, где приложена достаточная нагрузка. На краях этой нагрузки может быть недостаточно, и будет иметь место безызносное трение.

Реальный износ и пятно износа под нагрузкой в случае эластомеров всегда существенно меньше площади реального трибоконтакта. Поэтому, чтобы определить износ, придется определять ту нагрузку, при которой при выбранных условиях начинается реальный износ материала.

При трении стали по эластомеру даже при смазывании маслом исключить адгезию полностью не удастся. Следствием этого при определенной нагрузке на стальном контртеле возникает отчетливый след как результат переноса материала каучука на контртело. Если определить ту нагрузку, с которой начинается этот перенос, то при дальнейшем увеличении нагрузки границу ширины канавки износа следует отсчитывать от точки приложения данной силы, которую также нужно будет определять как долю приложенного номинала, чтобы определить ее местоположение на пятне трибоконтакта.

Выводы. 1. Рассмотрен процесс трибосопряжения жесткое тело — эластомер в случае использования стандартных машин трения. Показано отличие от аналогичных сопряжений жестких тел. 2. Показано, что методики измерений и расчетов [5–7] в том виде, как они использовались для характеристики трения жестких тел, неприменимы при исследовании трибологии эластомеров выше температуры стеклования. 3. Показано, что в случае трибоконтакта жесткое тело — эластомер (выше T_g) необходимы предварительные измерения деформации эластомера в зависимости от нагрузки для определения площади реального трибоконтакта. Эти измерения дадут одновременно и информацию о распределении давления в трибоконтакте еще до трибоиспытаний. 4. Показан изначально стационарный характер процесса трения жесткого тела по эластомеру без предварительной наработки пятна трения. 5. Предложена методика вычисления трибологических характеристик эластомеров.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121112500318-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Popov V. L., Li Q. et al.* Adhesion and friction in hard and soft contacts: theory and experiment // *Friction*. 2021. V. 9. № 6. P. 1688.
2. *Nakano K., Kawaguchi K., Takeshima K. et al.* Investigation on dynamic response of rubber in frictional contact // *Front Mech. Eng.* 2019. V. 5. P. 9.
3. *Sahli R., Pallaris G., Papangelo A. et al.* Shear-induced anisotropy in rough elastomer contact // *Phys. Rev. Lett.* 2019. V. 122. № 21. P. 214301.
4. *Burkhart C., Schollmayer T., Van der Vorst B. et al.* Development of an online-wear-measurement for elastomer materials in a tribologically equivalent system for radial shaft seals // *Wear*. 2021. V. 476. P. 203671.
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2021.203671>
5. *Козырев Ю. П., Гинзбург Б. М., Приемский Н. Д. и др.* Определение характеристик изнашивания при линейном начальном контакте цилиндрических контртел // *Трение и износ*. 1993. Т. 14. № 4. С. 759.

6. *Точильников Д. Г., Гинзбург Б. М.* Методика экспрессных триботехнических испытаний антифрикционных полимеров // Вопросы материаловедения. 2002. Т. 31. № 3. С. 39.
7. *Гинзбург Б. М., Точильников Д. Г. и др.* Несущая способность полимеров и полимерных композиций при трении по металлам и смазывании водой // Трение и износ. 2011. Т. 32. № 3. С. 214.
8. *Мур Д.* Трение и смазка эластомеров. М.: Химия, 1981. 262 с.
9. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. М.: ГИТТЛ, 1981. 718 с.

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРА СТАЛЬНОГО ШАРИКА ОБ АЛЮМИНИЕВУЮ ПЛАСТИНУ Д16 И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ© 2024 г. А. Г. Анисимов¹, М. Э. Ахмед Солиман^{1, *}¹*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, 630090, Россия***e-mail: ahmedsoliman@hydro.nsc.ru*

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.

После доработки 15.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

В статье был исследован процесс пробития алюминиевой пластины стальным шариком при скоростях от 600 до 1000 м/с. Проведено численное моделирование удара шарика и выполнено сравнение с результатами экспериментов, в которых шарик ускорялся с помощью порохового ускорителя. Численные модели были разработаны с использованием явного метода конечных элементов МКЭ в программном обеспечении LS-DYNA. Проанализировано влияние свойств материала и параметров модели на процесс пробития. Достигнуто хорошее соответствие между численными и экспериментальными результатами.

Ключевые слова: удар шарика, алюминий Д16, метод конечных элементов, глубина каверны, гидрокоды

DOI: 10.31857/S0235711924010092, **EDN:** SMWQYJ

Использование надежных численных моделей приобрело большое значение там, где невозможно провести испытания поведения материалов в различных конструкциях и сложно получить данные о состоянии материала. В численном моделировании существует множество параметров, которые могут повлиять на результат, таких как состав элементов, тип песочных часов, количество элементов в модели и т. п. [1–5]. При разработке гидрокодов использовались многочисленные экспериментальные данные, полученные в хорошо известных условиях, но всегда необходимо найти правильную конфигурацию между решателем, оптимизацией размера сетки и уравнениями состояния, прочности, разрушения и численной эрозии с их хорошо откалиброванными параметрами. Для моделирования контактного взаимодействия в расчете используется эрозионный тип контакта [6–11]. Выбранный тип характеризуется тем, что контакт между телами происходит по поверхностям.

Конститутивная модель Джонсона–Кука. Материал подвергается высокому напряжению и большой скорости деформации из-за ударов, например, как при попадании снаряда. Процесс деформации материала при таких динамических нагрузках значительно отличается от условий кауси-статистики и низкой скорости деформации. Из-за высокой скорости деформации происходит локальное повышение температуры, которое называется адиабатическим нагревом. Адиабатический нагрев вызывает локальное размягчение материала, и эффект от него выше, чем эффект деформационного упрочнения. Важно выбрать подходящую материальную модель, которую

можно использовать для отслеживания этих эффектов во время численного анализа. Модель, разработанная Джонсоном и Куком, учитывает влияние скорости деформации, эффект деформационного упрочнения и температурный эффект поведения материалов при различных скоростных нагрузках. Преимущество использования такой модели заключается в том, что у нее есть несколько альтернативных путей, которые пользователь может использовать в определяющих соотношениях и критериях разрушения материалов, что позволяет с достаточной точностью предсказать физическое поведение при ударе снаряда. При экспериментальном исследовании характеристик разрушения металл подвергается различным деформациям, скоростям деформаций, температурам и давлениям, соответствующим реальному поведению материалов. Модель пластичного материала Джонсона–Кука использовалась для моделирования поведения пластичных материалов при напряжении течения Мизеса. Упрочнение материала алюминиевой пластины Д16 представляет собой особый тип изотропного упрочнения, при котором фон Мизес $\bar{\sigma}$ выражается как функция эквивалентной пластической деформации $\bar{\varepsilon}^{pl}$, эквивалентной скорости пластической деформации $\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}$ и безразмерной температуры T^{*m} :

$$\bar{\sigma} = \left[A + B \left(\bar{\varepsilon}^{pl} \right)^n \right] \times \left[1 + C \ln \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] (1 - T^{*m}),$$

где A, B, C, m – параметры материала; n – показатель деформационного упрочнения, $\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} / \dot{\varepsilon}_0$ – нормированная эквивалентная скорость пластической деформации, обычно нормировано на скорость пластической деформации 1.0 с^{-1} , T^{*m} – гомологичная температура.

Постановка экспериментов. Ускорение стальных шаров проводилось при помощи порохового ускорителя, позволяющего ускорять тела диаметром 5–10 мм до скоростей порядка 1000 м/с. Схема эксперимента представлена на рис. 1. Рассмотрены три постановки экспериментов: 1) проникновение шарика в толстую мишень из Д16АМ; 2) проникновение шарика в тонкую мишень из Д16АМ (сквозное пробитие); 3) проникновение шарика в тонкую мишень из Д16Т (без пробития).

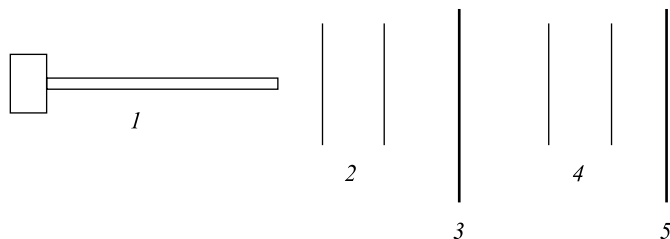


Рис. 1. Схема проведенных экспериментов: 1 – пороховой ускоритель; 2, 4 – датчики скорости тела до удара по мишени и после; 3 – мишень (Д16АМ, Д16Т толщиной 5 мм или 25 мм); 5 – мишень Д16Т толщиной 5 мм.

Скорость тела перед соударением с мишенью v_0 измерялась магнитными датчиками 2 до соударения с мишенью и в случае сквозного пробития датчиками 4 скорость v_1 после мишени. Точность измерения скорости – 5%. После эксперимента

проводились исследования кратера, оставленного на мишени. Для этого мишень разрезали и проводили измерения глубины кратера относительно первоначальной поверхности мишени h_0 , глубины кратера относительно валика h_1 , диаметра каверны на уровне первоначальной поверхности Φ_0 . В случае сквозного пробития мишени (толщиной 5 мм) проводились измерения диаметра отверстия.

Измеренные величины v_0 , v_1 и h_0 , h_1 , Φ_0 сравнивались с полученными по численной модели. Кроме того, проводилось сравнение формы кратера в эксперименте и в модели.

Проникновение шарика в толстую мишень из Д16АМ. Была проведена серия экспериментов по проникновению стальных шариков диаметром $\Phi = 7\text{--}9.5$ мм, ускоренных до скоростей $V_0 = 815\text{--}896$ м/с, в мишень из Д16АМ. Для численного моделирования таких задач использовалась мишень из материала Джонсона – Кука в виде алюминиевой пластины Д16АМ размером 25×30 мм и толщиной 25 мм, состоящая из 25 слоев конечных элементов, закрепленная прижимом за боковые грани. Угол соударения составлял 90° (рис. 2).

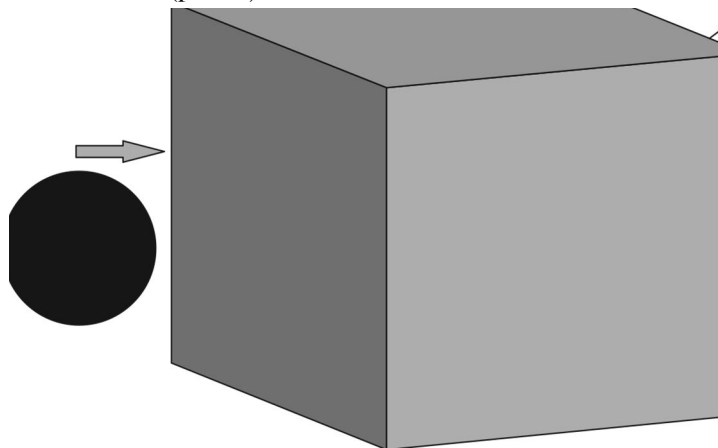


Рис. 2. Начальные условия и конфигурация для расчета МКЭ:
1 – снаряд; 2 – мишень.

На рис. 3 представлен график рассчитанных пластических деформаций ϵ^p для контрольных элементов.

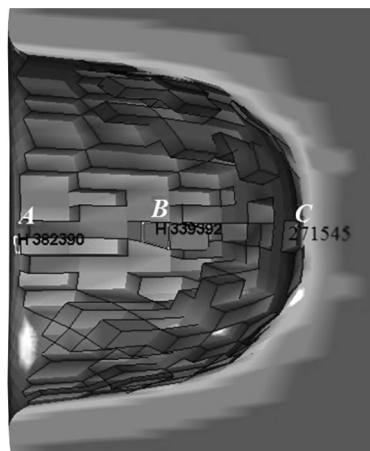
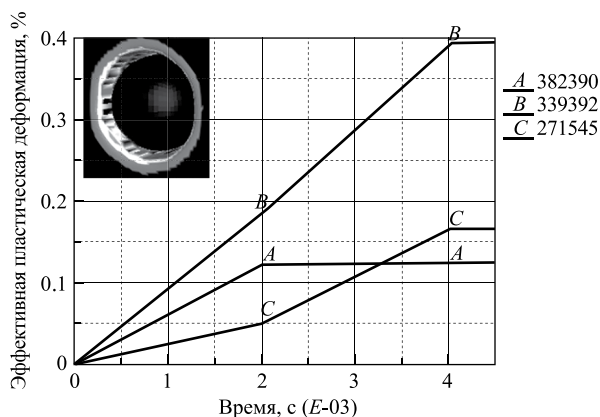


Рис. 3. График кривых в зонах пластической деформации каверны.

Пластические деформации постепенно увеличиваются от нуля до 0.4 для элемента 339392; 0.16 для элемента 271545 и 0.12 для элемента 382390.

На рис. 4 представлена зависимость скорости шарика от времени в условиях постановки эксперимента № 1. Скорость полета снаряда до удара составляла $V_0 = 815$ м/с, затем в процессе соударения и проникновения в мишень шарик отскакивает со скоростью $V_1 = -124$ м/с и летит с постоянной скоростью.

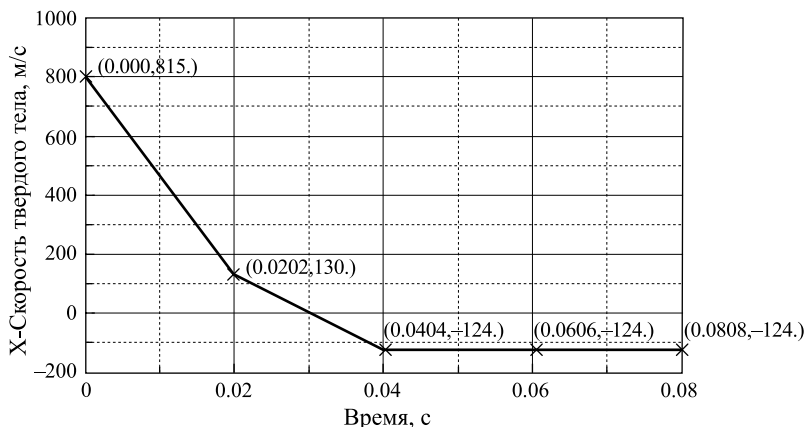


Рис. 4. Изменение скорости удара шарика во время расчета.

Результаты моделирования показывают, что размер каверны меняется в процессе проникания шарика в преграду, наблюдается несколько пульсаций. На рис. 5 показан поперечный разрез каверны после затухания пульсаций.

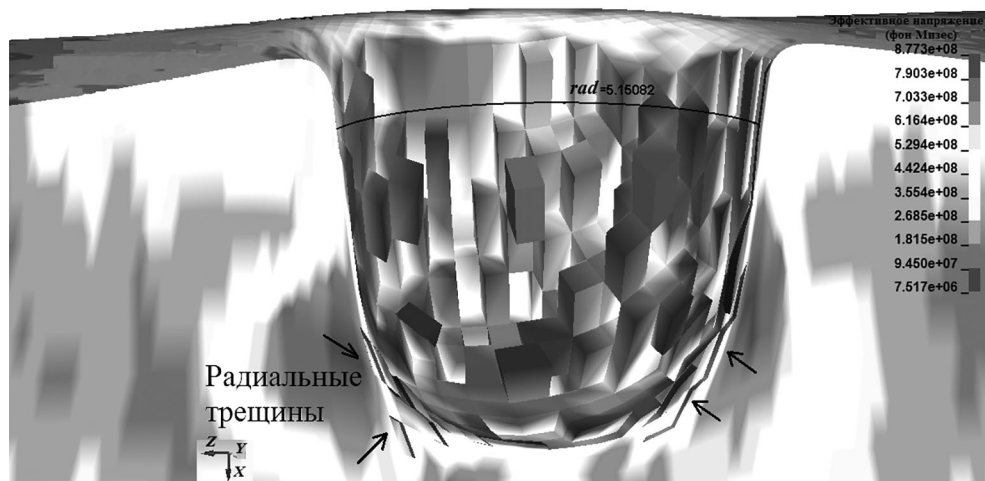


Рис. 5. Поперечный разрез каверны после удара шарика (модель).

Диаметр Φ_0 каверны после удара шарика определялся при пересечении первоначальной плоскости мишени с каверной. Модельный расчет показывает, что вокруг нижней зоны образуются радиальные трещины, которые также наблюдаются в эксперименте (рис. 6).

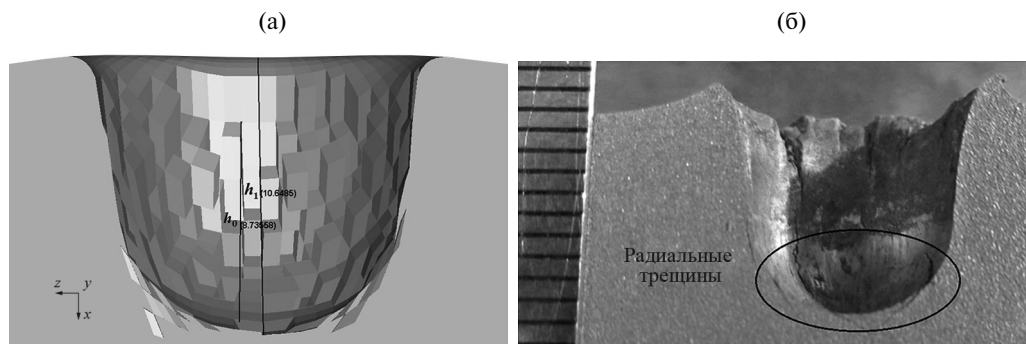


Рис. 6. Сравнение результатов моделирования (а) и эксперимента (б).

В табл. 1 приведены диаметр Φ_0 каверны, глубина h_0 каверны (относительно плоскости мишени) после удара шарика, полная глубина h_1 (относительно валика вокруг каверны), полученные при проведении 2 экспериментов и соответствующие численному моделированию. Результаты экспериментов показали хорошее совпадение с численным моделированием и подтвердили правильность последнего.

Таблица 1. Сравнение результатов моделирования с экспериментом для шариков $\Phi = 9.5$ мм и $\Phi = 7.0$ мм

№	Начальные показатели			Моделирование			Эксперимент		
				Д16АМ					
	Ø, мм	V ₀ , м/с	V ₁ , м/с	Ø ₀ , мм	h ₁ , мм	h ₀ , мм	Ø ₀ , мм	h ₁ , мм	h ₀ , мм
1	9.5	815	−124	10.6	10.6	8.7	10.5	11.5	8.8
2	7.0	896	−152	8.0	8.7	6.2	8.0	9.5	8.0

Проникновение шарика в тонкую мишень из Д16АМ (сквозное пробитие). Была проведена серия экспериментов, в которой шарики $\Phi = 7$ мм (эксперимент № 3) и 9.5 мм (эксперимент № 4), ускоренные до скоростей $V_0 = 815$ и 955 м/с, пробивали пластину. Было выполнено численное моделирование для каждого эксперимента.

Для численных расчетов использовалась мишень, смоделированная с помощью материала Джонсона—Кука в виде алюминиевой пластины Д16АМ размером 25×30 мм с количеством слоев конечных элементов, равным 20 слоям, с толщиной 5 мм, закрепленной прижимом за боковые грани под углом соударения 90° (рис. 7).

На рис. 8 представлен график, на котором показана расчетная скорость шарика для условий эксперимента № 3. Первоначальная скорость полета снаряда до столкновения составляла $V_0 = 815$ м/с, затем, после соударения с пластиной к моменту времени $t_2 = 2e^{-2}$, с, скорость шарика уменьшилась до 580 м/с, и далее он двигался с постоянной скоростью.

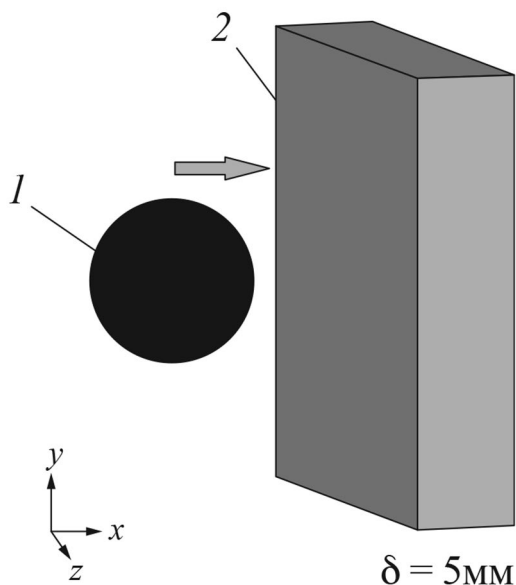


Рис. 7. Начальные условия и конфигурация для расчета МКЭ:
1 – снаряд; 2 – мишень.

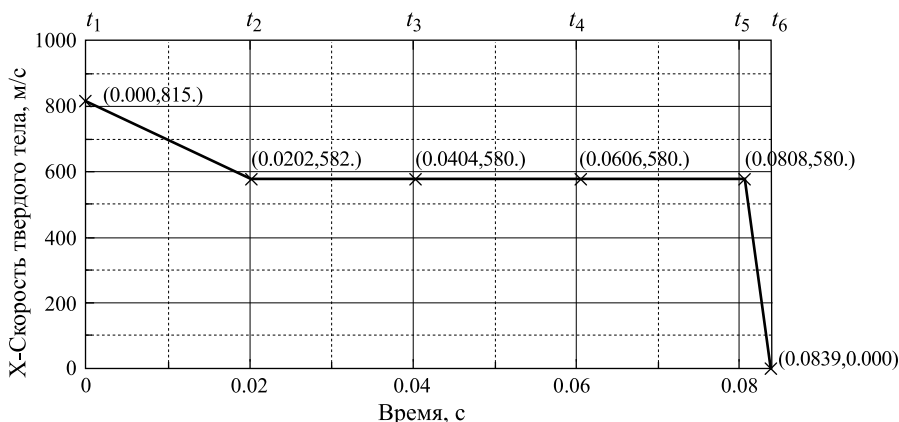


Рис. 8. Изменение скорости удара шарика во время расчета.

Проникновение шарика в тонкую мишень из Д16Т (без пробития). На рис. 9 показано сечение мишени после удара стального шарика диаметром 5 мм, движущегося со скоростью $V_0 = 392$ м/с (эксперимент № 5).

На рис. 10 представлен график, результирующий скорость шарика до и после пробития. Скорость полета снаряда до удара составляла $V_0 = 392$ м/с, затем после соударения с пластиной шарик отскочил в момент времени $t_3 = 4e^{-5}$, с, со скоростью $V_1 = -20.7$ м/с и остановился из-за взаимодействия со стенками кратера к моменту времени $t_4 = 5.44e^{-5}$, с.

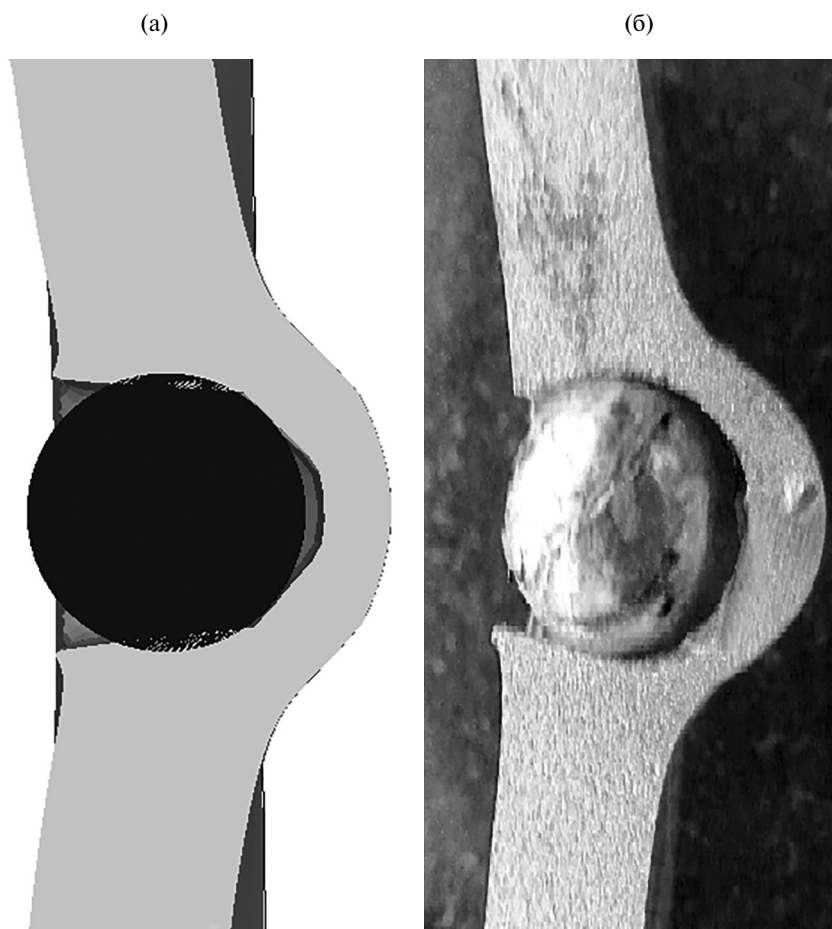


Рис. 9. Сравнение результатов моделирования и эксперимента: модель (а) и эксперимент (б).

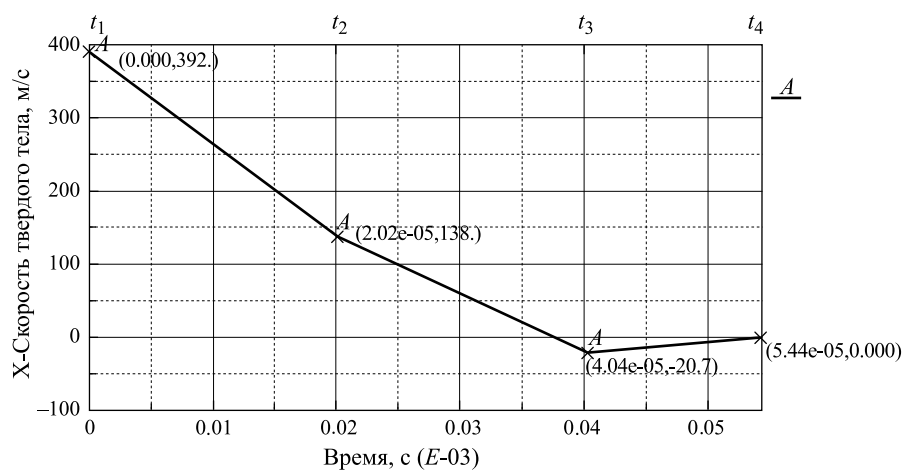


Рис. 10. Изменение скорости шарика во время удара (расчет).

Результаты моделирования и эксперимента для шариков были объединены в табл. 2.

Таблица 2. Сравнение результатов моделирования с экспериментом при ударе шарика по тонкой мишени

№	Диаметр шарика	Моделирование	Эксперимент	Диаметр отверстия
		Д16АМ		
3	Ø = 9.5 мм	V ₀ = 815 м/с		9 мм
		V ₁ = 580 м/с	V ₁ = 550 м/с	
4	Ø = 6.9 мм	V ₀ = 955 м/с		6 мм
		V ₁ = 640 м/с	V ₁ = 700 м/с	
5	Ø = 5 мм	Д16 Т		—
		V ₀ = 392 м/с		
		V ₁ = 0 м/с	V ₁ = 0 м/с	

Результаты и их обсуждение. 1. Прогнозы моделирования дают хорошую валидацию с процентной погрешностью примерно в 10%. 2. Проведенное моделирование показало, что модель Джонсона—Кука хорошо работает при больших деформациях и скоростях деформирования, что позволяет рассчитать поля напряжений, деформаций и скоростей в процессе соударения и их зависимость от свойств материала мишени и ее толщины. 3. При моделировании пробития снарядами мишеней с помощью механизма разрушения и увеличения отверстия под давлением модели не разрушаются, но показывают образование маленьких трещин вокруг каверны, которые, по-видимому, имеют незначительное влияние на конечную скорость снаряда. Это также означает, что использование критерия отказа Джонсона—Кука оказывается подходящим. 4. Расчет пластических деформаций ϵ^p глубины каверны показал, что центральная зона *B* подвергается большей деформации, чем верхняя *A* и нижняя *C* зоны, и колеблется в пределах 0.2–0.4. 5. Реализация адаптивного сетчатого алгоритма для цели оказалась отличным решением для преодоления проблем с большими деформациями в лагранжевой модели конечных элементов. 6. Численные результаты, полученные с помощью LS-DYNA, хорошо согласуются с экспериментальными результатами и дают возможность эффективно и точно прогнозировать взаимодействие снаряда и мишени при данном диапазоне скоростей соударения.

Вклад авторов. Концептуализация; исследование; написание, подготовка первоначального проекта — М.Э. Ахмед Солиман; написание, рецензирование и редактирование — А.Г. Анисимов. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование. Эта работа была выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 121 121 600 298-7).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Diep Q. B., Moxnes J. F., Nevstad G.* Fragmentation of projectiles and steel rings using 3D numerical simulations // 21st Intern. Symp. of Ballistics, 19–23 April 2004, Adelaide, Australia.
2. *Крейнхаген К. Н., Вагнер М. Х. и др.* Нахождение баллистического предела при соударении с многослойными мишенями // Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 12. С. 42.
3. *Corbett G. G., Reid S. R., Johnson W.* Impact Loading of Plates and Shells by Free-Flying Projectiles: A Review // Int. J. Impact Eng. 1996. V. 18 (2). P. 141.

4. *Littlefield D. L., Anderson C. E. et al.* The penetration of steel targets finite in radial extent // Int. J. Impact Eng. 1997. V. 19. P. 49.
5. *Cockcroft M. G., Latham D. J.* Ductility and workability of metals // J. Inst. Met. 1968. V. 96. P. 33.
6. *Borvik T. et al.* Ballistic penetration of steel plates // Int. J. Impact Eng. 1999. V. 22. P. 855.
7. *Li Y., Fan W., Zhao J. H. et al.* Dynamic response study for penetration of medium-low speed projectile on semi-infinite rock targets // Eng. Mech. 2017. V. 34 (9). P. 139.
8. *Piekutowski A. J., Forrestal M. J. et al.* Penetration of 6061-T6511 aluminum targets by ogive-nose steel projectiles with striking velocities between 0.5 and 3.0 km/s // Int. J. Impact Eng. 1999. V. 23 (1). P. 723.
9. *Littlefield D. L., Anderson C. E. et al.* The penetration of steel targets finite in radial extent // Int. J. Impact Eng. 1997. V. 19. P. 49.
10. Penetration Modeling with LS-DYNA, Seminar notes, 28–29 November 2012, Stuttgart, Germany.
11. LS-DYNA Keyword User's Manual, May 2014, Version R7.1, Livermore software Technology Corporation (LSTC).

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.01

УПРАВЛЕНИЕ ЧЕТЫРЕХКООРДИНАТНЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ С УДАЛЕННЫМ ЦЕНТРОМ ДВИЖЕНИЯ

© 2024 г. К. А. Шалюхин

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

e-mail: constmeister@gmail.com

Поступила в редакцию 10.08.2023 г.

После доработки 08.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

В статье рассмотрены вопросы разработки системы управления манипулятора с шаговыми приводами. На примере управления механизмами с удаленным центром движения показаны способы формирования управляющих сигналов при использовании униполярных и биполярных шаговых двигателей. Приведены примеры управления приводами с использованием различных задатчиков движения. Обозначены проблемы разработки задатчиков движения и способы управления манипулятором при необходимости одновременной работы двух и более приводов.

Ключевые слова: механизм с удаленным центром движения, эндоскоп, шаговый привод, задатчик движения, униполярный шаговый двигатель, биполярный шаговый двигатель, система управления

DOI: 10.31857/S0235711924010109, **EDN:** SMVSPG

Среди множества механизмов, используемых для манипуляции разнообразными объектами материальной среды в производстве, транспорте, энергетике, научных исследованиях, здравоохранении, ликвидации чрезвычайных ситуаций, заметное место занимают механизмы с удаленным центром движения. Их особым качеством является возможность манипулирования объектами, находящимися в закрытых объемах, через небольшое отверстие. Задачи такого рода есть, например, в современной хирургии при использовании технологии малоинвазивных лапароскопических операций, производимых специальными инструментами через несколько проколов в коже пациента. Как пример технической задачи, решаемой подобными механизмами, можно привести зондовую диагностику плазменных потоков в рабочем теле турбин авиационных двигателей [1].

В широко известной робот-ассистированной хирургической системе *da Vinci* [2], используемой для таких операций, наличие удаленного центра движения обеспечено введением избыточных степеней подвижности манипуляторов и использованием специальных алгоритмов управления. В системе *SoloAssist* [3], представляющей собой автономный робототехнический комплекс для управления медицинским эндоскопом с видеокамерой, удаленный центр вращения обеспечивается наличием трех пассивных степеней подвижности манипулятора в дополнение к трем приводным, которые сообщают эндоскопу угловые и линейные перемещения.

В Институте машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (ИМАШ) ведутся работы по синтезу и исследованию манипуляторов с удаленным центром движения [4, 5].

В статье описана разработка способов управления подобными пространственными механизмами, обладающими четырьмя степенями свободы. Требуемый характер движения каждого из приводов — обеспечение максимально возможной постоянной скорости в прямом или обратном направлении при поступлении логического управляющего сигнала, подаваемого оператором при помощи задатчиков движения различного принципа действия.

В качестве платформы для тестирования способов управления манипулятором автором выбран четырехкоординатный сбалансированный механизм с удаленным центром движения. В основе механизма — два плоских параллелограмма с общим звеном, что позволяет выходному звену повторять движение приводного звена механизма, обеспечивающего поворот в плоскости параллелограмма. Параллелограммы, приводимые в движение шаговым двигателем через зубчатую ременную передачу (назовем это приводом продольного наклона), расположены на поворотной платформе с осью вращения, проходящей через неподвижную точку на рабочем органе. Платформа приводится в движение расположенным на основании приводом поперечного наклона, по передаточному числу и крутящему моменту идентичным приводу, установленному на поворотной платформе. На выходном звене установлены приводы вращения рабочего инструмента вокруг собственной продольной оси и линейного перемещения вдоль нее же. Общий вид механизма приведен на рис. 1.

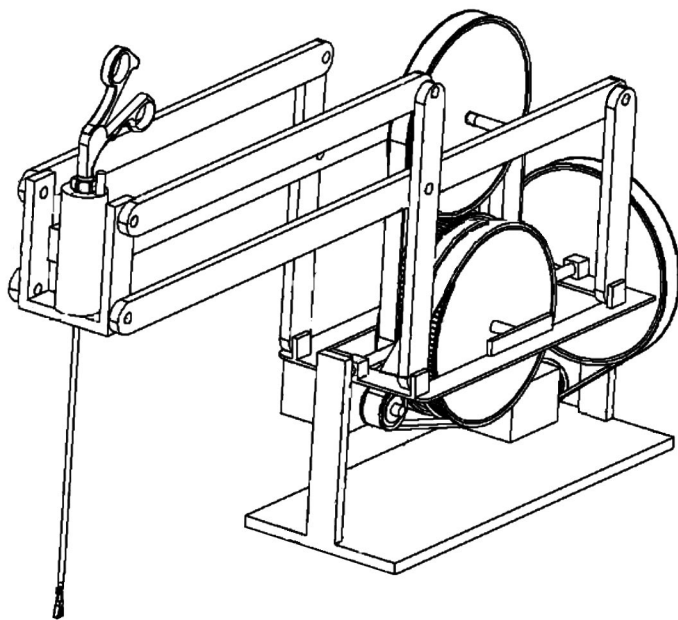


Рис. 1. Механизм с удаленным центром движения.

Механизм приводится в действие четырьмя шаговыми двигателями. Приводы продольного и поперечного наклона базируются на униполярном шаговом двигателе *FL57STH76*, привод вращения рабочего инструмента состоит из биполярного *FL20STH30-0604* и зубчатой ременной передачи. Все вышеперечисленные двигатели

являются гибридными с повышенным крутящим моментом. Привод линейного перемещения состоит из шагового униполярного мотор-редуктора 28BYJ-48, зубчатой ременной передачи и винтовой передачи. Двигатели FL57STH76 управляются драйверами SMD-2,8mini, FL20STH30 – драйвером Mini L298N, а мотор-редуктор 28BYJ-48 – драйвером ULN2003A.

Система управления приводами, которая анализирует информацию, поступающую с датчиков движения, и формирует необходимые сигналы для драйверов, построена на базе процессора *Arduino uno*, потенциал которого позволяет использовать широкий спектр программ управления с возможностью использования как цифровых, так и аналоговых датчиков движения [6].

Управление униполярными двигателями проводится подачей импульсов на входы *DIR+* и *STEP+* драйвера SMD-2,8mini в последовательности, показанной на рис. 2. Два верхних графика отражают импульсы для наклона выходного звена в прямом направлении, а два нижних – в обратном направлении.

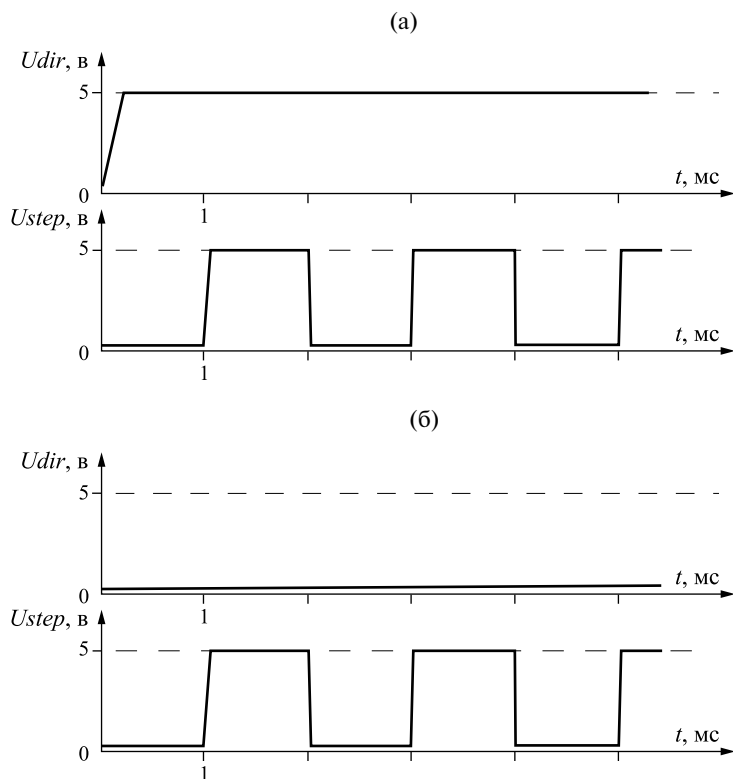


Рис. 2. Импульсы управления приводами наклона: (а) – в прямом направлении; (б) – в обратном направлении.

Дробление шага 1 : 16 для достижения большей плавности движения манипулятора задается переключателями драйвера. При этом частота шаговых импульсов устанавливается максимально возможной для получения скорости перемещений. В программе, формирующей импульсы для входов драйвера, задержка между переключениями состояний входов установлена на уровне 1 мс. Учитывая то, что в цикле одного шага есть четыре переключения, общая его продолжительность составляет приблизительно 4 мс (пренебрегая задержкой процессора при исполнении данного

участка программы). Эта величина установлена эмпирически, исходя из способности привода двигаться без потери шагов при дроблении 1 : 16. Такое управление осуществляется обоими приводами наклона эндоскопа, построенными на двигателях *FL57STH76*. Реализация данного алгоритма показала устойчивую работу приводов под нагрузкой и приемлемую плавность движений.

Двигатель привода вращения рабочего инструмента *FL20STH30-0604*, будучи биполярным, требует иных алгоритмов управления. Необходимо не только подавать напряжение на обмотки двигателя, но и менять его полярность в последовательности, определяющей направление вращения. Последовательность импульсов в режиме симметричной коммутации (когда на каждом из четырех тактов цикла управления возбуждается только одна из обмоток двигателя) приведена на рис. 3. Четыре верхних графика отражают вращение рабочего инструмента по часовой стрелке, а четыре нижних — против часовой стрелки.

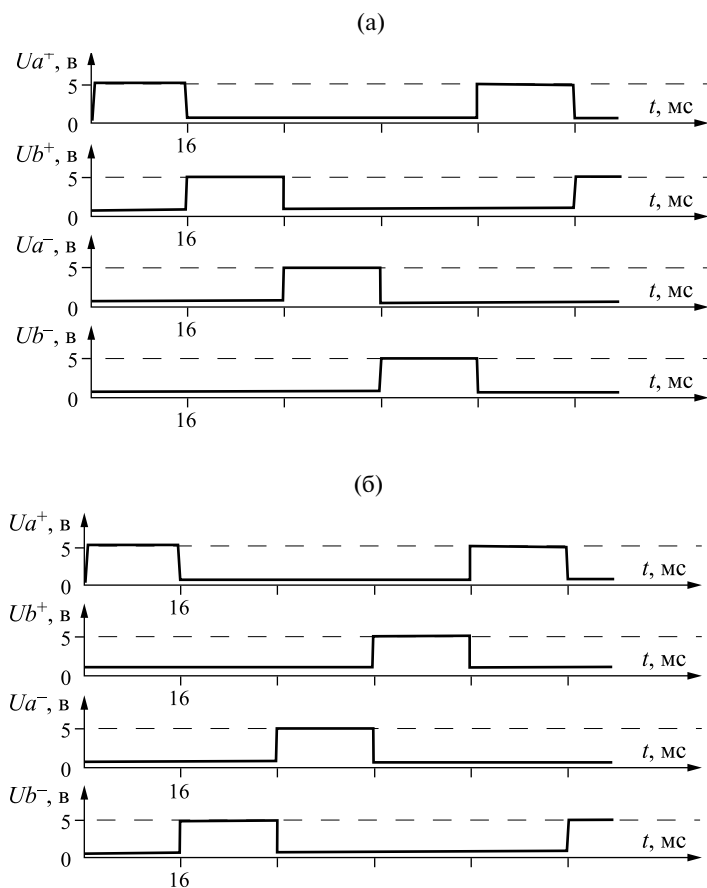


Рис. 3. Импульсы управления привода вращения:
(а) — по часовой стрелке, (б) — против часовой стрелки.

Необходимо отметить, что режим симметричной коммутации не обеспечивает дробления шага. Такой режим можно достичь применением режима несимметричной коммутации, в котором четным и нечетным тактам цикла соответствует различное число возбужденных обмоток. Однако практика показала достаточную плавность вращения приводом рабочего инструмента, поэтому от более сложного

режима коммутации было решено отказаться. К тому же дробление шага привело бы к уменьшению скорости вращения. Максимально возможная частота переключений, формируемая управляющей программой, задана задержкой между переключениями, составляющей 16 мс. Учитывая наличие в цикле четырех таких задержек, получаем продолжительность цикла, приблизительно равную 64 мс.

В приводе управления продольным перемещением эндоскопа используется мотор-редуктор 28BYJ-48. Этот тип двигателя является униполярным и управляется драйвером *ULN2003A*. Двигатель мотор-редуктора имеет четыре фазных обмотки, соединенные звездой. Управляющие импульсы подаются на четыре входа драйвера, каждый из которых соответствует одной обмотке. Последовательность подачи импульсов и определяет направление движения; верхние четыре графика – движение выходного звена вниз, а нижние четыре – движение вверх (рис. 4).

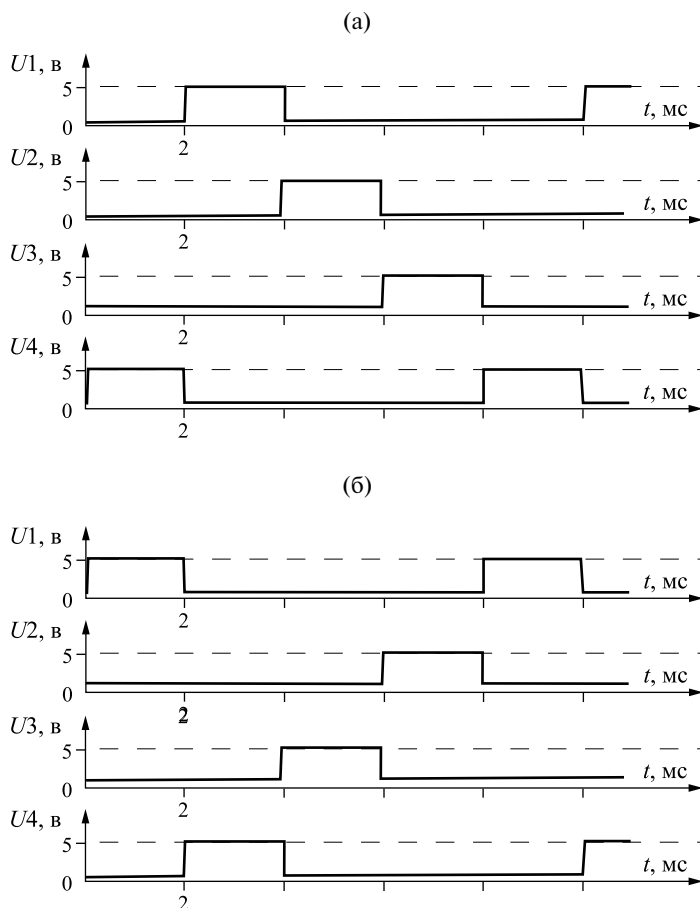


Рис. 4. Импульсы управления привода перемещения: (а) – вниз, (б) – вверх.

Такой алгоритм управления соответствует режиму симметричной коммутации и также не обеспечивает дробления шага. Применение режима несимметричной коммутации, например, последовательности управляющих импульсов $IN1 - IN1 + IN2 - IN2 - IN2 + IN3 - IN3 - IN3 + IN4 - IN4 - IN4 + IN1 - IN1$ и т. д. ($IN1 - IN4$ – входы для сигналов $U1 - U4$), здесь также не нужно, поскольку большое передаточное число редуктора, а именно 64 : 1, обеспечивает плавность хода эндоскопа.

Кроме того, благодаря редуктору шаговый двигатель значительно менее нагружен, что позволяет установить задержку переключения входов драйвера в программе, формирующей импульсы, на уровне 2 мс. Поскольку в цикле каждого шага происходит четыре переключения, его суммарная продолжительность 8 мс, пренебрегаем запаздыванием исполнения процессором операторов, содержащихся в цикле управления драйвером мотор-редуктора.

Число выходов процессора, необходимых для управления драйвером *SMD-2,8mini*, – два, драйвером *Mini L298N* – четыре, а драйвером *ULN2003A*, который хоть и управляет униполярным шаговым двигателем, как и *SMD-2,8mini*, но имеет более примитивную схему, – также равно четырем. Суммируя общее количество выходов, получаем число 12. Ровно столько выводов содержит логический интерфейс процессора *Arduino uno* (каждый вывод может служить как логическим входом, так и логическим выходом в зависимости от функции, назначенной программой). Поскольку использование расширителей, позволяющих через один вывод интерфейса обрабатывать сигналы от восьми или шестнадцати дополнительных выводов, делает схему более громоздкой, было решено использовать в качестве логических выводов аналогового интерфейса, которых в *Arduino uno* имеется шесть, а его программное обеспечение позволяет им работать в таком качестве.

Для управления четырьмя приводами, каждый из которых может иметь два состояния движения: в прямом и обратном направлении, плюс состояние покоя, – получаем минимально необходимое количество состояний входов системы управления, равное восьми, плюс одно состояние покоя для всех приводов. Необходимо отметить, что при таком небольшом числе состояний входов возможно обеспечить движение только одного из приводов в данный момент времени, а все остальные состояния будут являться запрещенными. В качестве примера можно привести управление манипулятором от педального датчика движения, разработанного в ИМАШ РАН (рис. 5).



Рис. 5. Педальный датчик движения для манипулятора.

Его конструкция основана на педальных выключателях, закрепленных на платформе. Оператор работает сидя, поставив ноги на платформу, или стоя, опираясь на нее.

Платформа дает возможность стоять, не включая ни одной из педалей, что соответствует состоянию неподвижности всех приводов. Преимущества такого задатчика движения — свобода рук оператора, необходимая для выполнения других задач, высокая стабильность работы выключателей, а также регулируемая чувствительность педалей для настройки под анатомические особенности конкретного оператора и параметры его обуви для эргономичного управления. Собственно управление производится восемью комбинациями нажатий педалей под пятками оператора и педалей под его носками. Такое количество комбинаций обеспечивает однозначное управление четырьмя реверсивными приводами манипулятора. Сигнал управления определяется количеством и сочетанием педалей, нажатых одновременно. Один из вариантов интуитивно понятной интерпретации движений оператора [7] приведен на рис. 6.

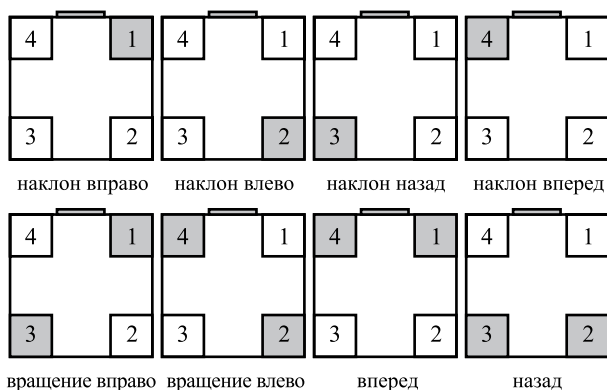


Рис. 6. Диаграмма управления при помощи педального задатчика.

Запрещенные состояния при таком управлении исключаются за счет физической невозможности одновременного нажатия двух педалей носком и пяткой одной и той же ноги, т. е. $1 + 2$ и $4 + 3$) и, как следствие, невозможности нажатия трех или четырех педалей одновременно. Поэтому используется всего четыре логических входа процессора, причем без программных блокировок запрещенных состояний. Все возможные комбинации нажатий дают восемь состояний движения и одно состояние покоя всех приводов.

В ходе экспериментов возникла потребность в управлении от небольших джойстиков, закрепляемых на двух лапароскопических инструментах, используемых хирургом в ходе операции. В этом случае управление камерой эндоскопа хирург может осуществлять самостоятельно, не прибегая к помощи ассистента. Такой подход, в частности, используется в роботизированной системе управления эндоскопом *Soloassist* [2]. За основу были взяты *Arduino*-совместимые модули с пятипозиционной кнопкой навигации, используемые как логические двухкоординатные джойстики.

При переходе от педального задатчика к двум отдельным джойстикам возникли две основных проблемы.

Первая проблема — недостаточное количество (не более пяти) свободных входов на управляющем процессоре, т. к. каждый из двух двухкоординатных джойстиков имеет четыре выхода, так что нужно минимум восемь входов. Конечно, можно было установить расширитель входов и поменять программу управляющего процессо-

ра. Но для упрощения задачи и получения более быстрого результата было решено не менять программу, используя готовые алгоритмы, применяемые с педальным задатчиком. При этом функцию коммутации сигналов с двух джойстиков и приведения их к четырем выходным сигналам выполняет дополнительный процессор *Arduino uno*. Такой подход может показаться избыточным, но он был выбран с учетом перспективы развития системы, например, планируемого управления манипулятором при помощи шлема, фиксирующего угловые отклонения небольших движений головы оператора. В таком случае вспомогательный процессор возьмет на себя не только функцию коммутации сигналов, но и значительно более сложные задачи пересчета координат, а за основным процессором остается только функция управления приводами манипулятора.

Вторая проблема состоит в том, что каждый из двух джойстиков выдает по четыре сигнала: вверх, вниз, влево, вправо; плюс четыре их сочетания: вверх и вправо, вверх и влево, вниз и вправо, вниз и влево; всего получается восемь состояний плюс одно ненажатое состояние. Учитывая возможность одновременного нажатия обоих джойстиков, мы получаем множество запрещенных состояний, которые необходимо блокировать программными методами. Однако при использовании вспомогательного процессора эта проблема легко устранима без внесения изменений в программу основного процессора.

По результатам анализа ситуации в ИМАШ РАН были созданы джойстики, закрепляемые на рабочих инструментах, и коммутатор сигналов на базе процессора *Arduino uno* (рис. 7).

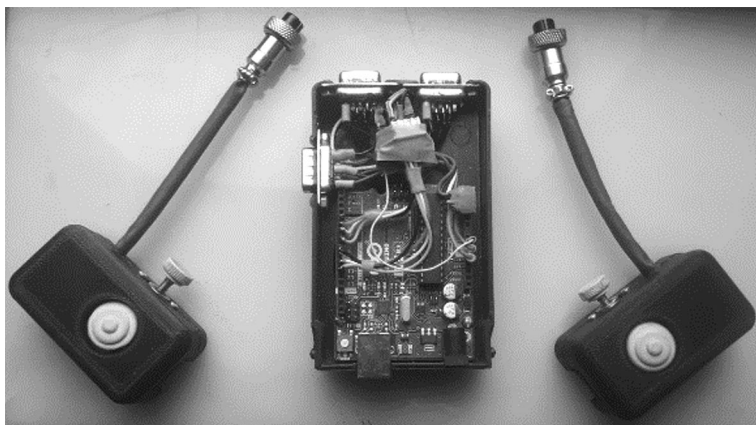


Рис. 7. Мини-джойстики с коммутатором сигналов.

Алгоритм работы коммутатора следующий. При поступлении сигнала от одного (и только одного) из джойстиков на вход основного процессора подается сочетание сигналов, имитирующее сигналы педального задатчика (рис. 6). При этом от левого джойстика управляются приводы продольного и поперечного наклона, а от правого — приводы вращения и продольного перемещения рабочего инструмента.

В случае одновременного нажатия двух джойстиков движение манипулятора блокируется, так же как и в случае одновременной подачи двух сигналов (например, вверх и вправо) с любого из джойстиков. Все эти состояния являются запрещенными при управлении приводами через четыре логических входа по алгоритму педального задатчика.

Алгоритм коммутатора показал устойчивую работу. При этом для перехода от управления при помощи педального задатчика к управлению при помощи джойстиков нет необходимости в перепрограммировании системы, достаточно только подключить соответствующие разъемы. Кроме того, при управлении с помощью двух отдельных джойстиков исчезли ложные срабатывания приводов в переходных режимах при смене одной комбинации нажатий на другую, которые были характерны для управления с помощью педального задатчика.

Дальнейшее развитие такой системы может, в частности, добавить возможность одновременной работы двух и более приводов. Для этого необходимо большее число разрешенных состояний входов основного процессора: для одного джойстика восемь состояний, на втором еще восемь и по восемь вариантов для каждого из восьми состояний одного из джойстиков при одновременном нажатии второго. Всего получается $64 + 8 + 8 = 80$ состояний, плюс одно ненажатое для обоих джойстиков состояние. В этом случае (максимально сложном) разрешена одновременная работа всех четырех приводов или меньшего их количества в любом сочетании. В случае необходимости можно реализовать подобный режим или менее сложные режимы (например, разрешающие совместную работу только приводов наклона или только приводов вращения и перемещения рабочего инструмента) через имеющиеся аналоговые входы, при этом необходимо задействовать несколько состояний каждого входа в зависимости от их количества и числа требуемых состояний входного сигнала.

Выводы. 1. Приводы с использованием как униполярных, так и биполярных шаговых двигателей, управляемых через совместимые драйверы и логический интерфейс процессора *Arduino Uno*, позволяют эффективно управлять манипулятором на базе механизма с удаленным центром вращения для решения широкого круга задач в области промышленности и медицины. 2. В простейшем случае при раздельном управлении приводами четырехкоординатного пространственного механизма достаточно восьми комбинаций управляющего сигнала и четырех входов логического интерфейса процессора управления. 3. Для такого режима управления может использоваться педальный задатчик движения с четырьмя педалями или два логических двухкоординатных джойстика с использованием логической блокировки запрещенных состояний. 4. В случае необходимости одновременной работы двух или нескольких приводов требуется большее количество входов логического интерфейса процессора управления приводами или использование аналогового интерфейса с большим количеством состояний каждого входа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Freschi C., Ferrari V., Melfi F. et al.* Technical review of the daVinci surgical telemanipulator // The Int. J. of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery. 2013. V. 9. P. 394.
2. *Ohmura Y., Nakagawa M., Suzuki H. et al.* Feasibility and Usefulness of a Joystick-Guided Robotic Scope Holder (Soloassist) in Laparoscopic Surgery // Visceral Medicine. 2018. V. 34. P. 37.
3. *Филиппов Г. С., Глазунов В. А., Алешин А. К. и др.* Перспективы применения механизмов параллельной структуры в зондовой диагностике плазменных потоков // Лесной вестник. 2019. Т. 23. № 6. С. 88.
4. *Алешин А. К., Бузурина Д. С., Гаврюшин С. С. и др.* Новые механизмы робототехнических и измерительных систем / Под ред. В.А. Глазунова, С.В. Хейло. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2022. 244 с.
5. *Алешин А. К., Антонов А. В., Глазунов В. А. и др.* Патент РФ 182946 U1, 2018.
6. *Warren J.-D., Adams J., Molle H.* Arduino for Robotics. CA: Apress Berkeley, 2011. P. 51. <https://doi.org/10.1007/978-1-4302-3184-4>
7. *Алешин А. К., Антонов А. В., Борисов В. А. и др.* Механизмы перспективных робототехнических систем / Под ред. В.А. Глазунова, С.В. Хейло. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2020. 296 с.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА.
ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ**

УДК 621.785.5.621.793

**ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗНОСОСТОЙКОСТИ НОЖЕЙ В ПЕРИОД
ЭКСПЛУАТАЦИИ И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДОВ
ИХ УПРОЧНЕНИЯ**

© 2024 г. В. П. Лялякин^{1, *}, В. Ф. Аулов¹, А. В. Ишков²,
И. Н. Кравченко^{3, **}, Ю. Н. Рожков¹

¹ *Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ, Москва, Россия*

² *Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия*

³ *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

** e-mail: valpal-1938@mail.ru*

*** e-mail: kravchenko-in71@yandex.ru*

Поступила в редакцию 05.08.2023 г.

После доработки 04.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Представлены результаты анализа износа ножей измельчителя зерноуборочного комбайна. Установлено, что предельный износ ножей составляет 225 га убранной площади, после чего они подлежат замене. Произведена оценка эффективности методов упрочнения ножей. Используя изменение твердости и микротвердости металлографического и рентгенофазного анализа, определен оптимальный способ упрочнения ножей.

Ключевые слова: износостойкость, микротвердость, модифицированные покрытия, способы упрочнения ножей, твердость, ТВЧ-борирование, термообработка

DOI: 10.31857/S0235711924010117, **EDN:** SMRQHG

В современных зерновых комбайнах при уборке колосовых для измельчения зерновой части культуры применяются специальные измельчительные устройства [1–4]. Конструктивной особенностью таких устройств является высокая частота вращения вала ротора (до 3600 мин⁻¹), на котором монтируются ножи. При этом количество ножей измельчителей может достигать от 36 до 80 шт. [5].

В современных конструкциях устройств для измельчения соломы применяются плавающие самозатачивающиеся ножи повышенной прочности различного размера длиной 160–187 мм, шириной 50–60 мм, толщиной 3–5 мм и диаметром посадочного отверстия 18–25 мм [6–8]. Кромки лезвия ножей при их изготовлении затачиваются с двух сторон до определенной остроты. Как правило, радиус закругления составляет до 0.1 мм. Особые требования при этом предъявляются к применяемым материалам и термообработке [9–11].

Наиболее существенными свойствами используемых сталей является износостойкость, твердость и вязкость. Предел прочности стали обычно изменяется в интервале 1800–2150 МПа. Для устойчивости против смятия необходимо использовать материал с пределом текучести 1050–1800 МПа. С целью обеспечения служебных свойств ножей соломоизмельчителя в них необходимо иметь мелкозернистую структуру, при этом поверхность должна быть твердой (мартенсит), а сердцевина — зна-

чительно более мягкой для погашения удара (остаточный аустенит). В современных условиях заводы-изготовители устройств для измельчения соломы используют ножи с односторонней заточкой, изготовленные из стали 65Г и упрочненные наплавкой твердыми сплавами с использованием ТВЧ [12–15].

Для разработки новых технологий повышения износостойкости ножей до уровня перспективных зарубежных аналогов необходимо исследовать параметры износа (линейного, весового) в условиях реальной эксплуатации.

Целью статьи являются исследования износостойкости ножей в период эксплуатации и определение эффективности методов их упрочнения.

Методика проведения исследований. Для получения текущих износов подготовлена партия ножей с односторонней заточкой. Режущие кромки ножей были упрочнены с обработкой стороны индукционной наплавкой твердого сплава в соответствии с технологическими схемами, приведенными в работе [16]. Далее определялись контрольные наработки зерноуборочного комбайна Acros, при достижении которых снимались ножи с режущего устройства и проводились измерения геометрических и весовых параметров ножей. Относительный линейный I_l и весовой I_m износы рассчитывались по формулам

$$I_l = 1 - (l_{\text{изн.}} / l_0); \quad (1)$$

$$I_m = 1 - (m_{\text{изн.}} / m_0), \quad (2)$$

где $l_{\text{изн.}}$, $m_{\text{изн.}}$ — величина размера изношенного ножа и его масса; l_0 , m_0 — размер и масса неизношенной детали.

Для оценки эффективности методов упрочнения ножей были проведены исследования по определению твердости, микротвердости, фазового состава покрытий, химического и рентгенофазного состава по известным методикам с использованием современного оборудования [17, 18].

Результаты исследования и обсуждение. На рис. 1 представлены фотографии контрольных ножей, снятых с эксплуатации при разной наработке комбайна. В соответствии с выражениями (1) и (2) для расчетов были приняты следующие константы: $l_0 = 60$ мм, $m_0 = 325$ г, ширина ножа l , измеренная на различном удалении от его края, мм (5, 10, 20, 40, 60, 80, 100).



Рис. 1. Внешний вид изношенных контрольных ножей измельчителя-разбрасывателя комбайна Acros при различной наработке, га: 1 – 47; 2 – 110; 3 – 162; 4 – 225.

Результаты определения весовых и размерных величин приведены в табл. 1 и 2.

У исследованных ножей (табл. 1) наблюдается закономерное постепенное увеличение относительного весового износа и уменьшение характеристического размера в зависимости от наработки, что свидетельствует об установившемся характере износа. Кроме того, прослеживается практическое постоянство ширины ножа, измеренное на удалении 80 и 100 мм от его края, что свидетельствует о низкой интенсивности изнашивающего процесса в этой зоне детали. Низкая интенсивность изнашивания ножа в начале лезвия связана с уменьшением в 1.5–1.6 раза скорости резания по длине лезвия ножа (от 98 м/с на его торце и до 61 м/с в начале ножа).

Таблица 1. Параметры изношенных контрольных ножей

Наработка, га	$m_{\text{изн}}, \text{ г}$	Размер $l(i)$ на удалении, мм от края, мм						
		5	10	20	40	60	80	100
47	322.5	52.5	55.3	56.2	58.1	58.6	59.2	59.8
110	310.2	51.8	52.3	55.4	57.3	58.6	58.6	59.6
162	304.9	50.8	51.6	55.7	57.8	58.6	58.8	59.9
225	298.3	49.4	50.7	53.5	57.1	57.9	58.6	59.5

Таблица 2. Рассчитанные величины относительных износов контрольных ножей

Наработка, га	$I_m, \%$	Износ $I_l(i)$ на удалении, мм от края, %						
		5	10	20	40	60	80	100
47	0.8	12.5	7.8	6.3	3.1	2.3	1.3	0.3
110	4.6	13.6	12.8	7.6	4.5	2.3	2.3	0.6
162	6.2	15.3	14.0	7.2	3.6	2.3	2.0	0.2
225	8.2	17.6	15.5	10.8	4.8	3.5	2.3	0.8

Установившийся характер износа и постоянство механизма изнашивания у исследованных ножей на протяжении всей наработки вплоть до 225 га позволяют экспериментально установить форму преимущественной фигуры (эпюра) износа и разработать новую конструкцию упрочняющего покрытия ножа. Экспериментальная эпюра износа лезвия ножа приведена на рис. 2.

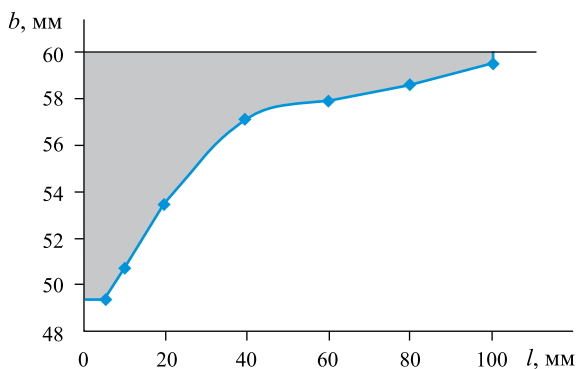


Рис. 2. Эпюра износа лезвия ножа при наработке 225 га.

Проще всего определить форму преимущественной фигуры износа на основе имеющихся материалов путем симметричного нанесения максимально изношенного полу-контура ножа с наработкой 225 га на новую заготовку ножа с лицевой стороны (рис. 3).



Рис. 3. Контур преимущественной фигуры износа ножа.

Результаты анализа показывают (рис. 3), что при наработке ножей 225 га и выше границы фигуры износа вплоть до расстояний 10 мм от его торца полностью находятся за пределами режущей кромки, что приводит к ухудшению режущих свойств, увеличению сопротивления резания, увеличению ударных нагрузок и повышенному износу ножа.

По-видимому, наработку (200–225 га) следует считать предельной для одной из режущих кромок этой партии ножей, т. к. при ее достижении была проведена полная замена/перестановка всего комплекта. Граничным параметром для замены ножа, согласно эксплуатационной документации на комбайн Astros, является износ режущих кромок до основной толщины на любом участке ножа. В то же время даже при достижении предельной наработки (рис. 3) износу подверглись только 2/3 длины режущей кромки от его торца, в то время как оставшаяся 1/3 длины лезвия, удаленная от торца на 65–70 мм, износу не подверглась.

Таким образом, для сохранения приемлемых режущих свойств ножа, вплоть до достижения им предельного состояния, необходимо изменить используемую конструкцию упрочняющего покрытия, а именно: во-первых, отказаться от нанесения упрочняющих полосок твердого сплава с обратной стороны режущих кромок на 1/3 их длины, расположенной на удалении от торца 65–70 мм; во-вторых, ширину полосок необходимо сделать переменной, постепенно увеличивая ее при приближении к торцу ножа до размеров, в 1.5–2.0 раза превышающих ширину лезвия, т. е. придать им треугольную или криволинейную форму, близкую и/или перекрывающую границы фигуры износа; в-третьих, треугольную форму полосок можно обеспечить за счет запаса материала, высвободившегося с неупрочняемой 1/3 длины лезвия.

Для исследования эффективности методов упрочнения ножей использованы четыре способа (табл. 3), отличающиеся материалом основы, материалом упрочняющего покрытия и конструкцией упрочняющего покрытия.

Все упрочненные ножи подвергались термообработке – закалке с последующим или без него средним отпускком в оптимальных интервалах температур, отвечающих маркам сталей. Твердость материала основы упрочненных ножей, измеренная в трех контрольных точках (рис. 4), приведена в табл. 4.

При этом обращает на себя внимание значительный разброс значений твердости основы у упрочненных ножей, выполненных из Ст40, в то время как разброс аналогичного параметра у ножей, выполненных из заменяющего материала (Ст65Г), укладывается в интервал 2–5 единиц.

Таблица 3. Способы упрочнения ножей

Способ	Сущность, последовательность и описание технологических операций	Примечание
1	Индукционная наплавка упрочняющего покрытия на 2/3 длины лезвия с обратной фрезерованной поверхности заготовки ножа; наплавляемый материал – твердый сплав с модификаторами твердости, трения, износостойкости (“Ростов-1”)	Форма упрочняющего покрытия совпадает (по длине и/или по эюре) с преимущественной фигурой износа ножа; исследованные формы: прямоугольная полоска (1), треугольник (2)
2	То же; отличающийся признак – состав наплавочной шихты (“Ростов-2”)	—
3	То же; отличающийся признак – образцы, наплавленные стандартной шихтой без модификаторов (контроль)	Наплавка базовой шихты
4	То же + предварительное последовательное (совместное) электроискровое легирование наплавляемой поверхности материалами ВК8, Р6М5	Наплавка базовой шихты, упрочняющее покрытие – прямоугольная полоска (1)

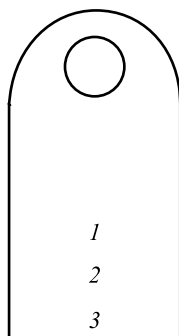


Рис. 4. Схема расположения точек замера твердости с обратной стороны упрочненного ножа.

В качестве основного модификатора износостойкости оба состава содержали сферический порошок карбида вольфрама фракцией $\varnothing 0.25\text{--}0.5$ мм. В качестве дополнительного модификатора эти составы содержали карбид бора, а состав “Ростов-2” – дополнительно порошок никеля, введенный вместо твердого сплава для поддержания оптимального баланса металлической матрицы и керамического наполнителя. Вместо сварочного флюса АН-348 в шихте использован боратный флюс П-0.66. Оптимизированные по технологическим показателям (скорость плавления, смачивающая способность, растекаемость, формирование сплошного покрытия и др.) составы шихты для индукционной наплавки ножей приведены в табл. 5.

Подготовленный шихтовый материал для каждого метода упрочнения наносился на нож, далее проводилась индукционная наплавка на инверторе «ЭЛСИТ» с параметрами: первая ступень – ток 95%, время 20 с; вторая ступень – ток 75%, время 40 с. После наплавки нож извлекался из индуктора и помещался в закалочную среду (масло). После закалки ножи подвергались среднему отпуску. У подготовленных образцов исследовались: твердость, макро- и микроструктура, микротвердость, фазовый и рентгенофазовый составы покрытия. Твердость полученных покрытий приведена в табл. 6.

Таблица 4. Твердость упрочненных заготовок

Способ упрочнения, шихта	Шифр*	HRC
1, “Ростов-1”	1111	30; 40; 43
	1112	48; 49; 54
	1113	16; 19; 51
	1114	48; 37; 48
	1115	34; 33; 39
	1211	54; 56; 35
	1212	51; 25; 37
	1213	24; 25; 47
	1121	60; 60; 64
	1122	44; 45; 46
	1221	62; 63; 61
	1222	45; 45; 45
2, “Ростов-2”	2111	23; 22; 39
	2112	22; 23; 34
	2113	45; 39; 48
	2212	21; 26; 45
	2211	45; 41; 50
	2213	23; 22; 58
	2121	60; 61; 62
	2122	57; 56; 61
	2123	61; 59; 60
	2221	48; 47; 48
3, Твердый сплав (контроль)	2222	48; 50; 50
	3111	40; 42; 53
	3121	33; 52; 48
4, Твердый сплав	3122	34; 45; 47
	4111	53; 46; 55
	4112	13; 22; 24
	4113	40; 27; 25
	4114	30; 23; 25
	4115	49; 34; 37

* поз. 1 – способ упрочнения, шихта (1–4); поз. 2 – форма фигуры покрытия (1 – полоска, 2 – треугольник); поз. 3 – марка стали (1 – Ст65Г, 2 – Ст40); поз. 4 – номер ножа в партии

Исследование макрофотографий ($50\times$) шлифов упрочняющих покрытий позволило по морфологии их наиболее типичных участков выделить основные структуры, характерные зоны, составляющие покрытие, и определить их характеристики. Так, во всех покрытиях, модифицированных карбидом вольфрама, обнаруживаются шаровидные включения, твердость которых достигает 1620–1970 HV. Кроме того, во всех покрытиях, модифицированных карбидом бора, выделяются фазы мелко-дисперсной эвтектики системы Fe–C–B, твердость которых превосходит значение не модифицированных бором фаз в 1.2–1.5 раза и достигает 1080–1110 HV. При этом общим признаком модифицированных покрытий является подплавление границы с основным металлом, что предопределяет повышение их износостойкости [19].

Таблица 5. Оптимизированные составы шихты для индукционной наплавки ножей

Шихта	Ингредиент	Содержание, масс. %
“Ростов-1”	Твердый сплав ПГ-С27	80–85
	Карбид вольфрама	3–5
	Карбид бора	1.0–1.5
	Флюс П-0.66	Остальное
“Ростов-2”	Твердый сплав ПГ-С27	75–78
	Карбид вольфрама	8–10
	Карбид бора	1.5–2.5
	Порошок ПТ-19Н	2–3
	Флюс П-0.66	Остальное
“Ростов-3, -4” (базовая)	Твердый сплав ПГ-С27	80–85
	Флюс П-0.66	Остальное

Таблица 6. Твердость упрочняющих покрытий

№ п/п	Способ упрочнения, шихта	HRC
1	1, “Ростов-1”	62–67
2	2, “Ростов-2”	54–57
3	3, базовая	54–55
4	4, базовая	54–57

Анализ микроструктуры исследуемых покрытий показал наличие мелкодисперсных эвтектик разной микротвердости. При этом наибольшей микротвердостью обладает структура, полученная на образцах первого способа, состоящая из структуры сферического карбида вольфрама и шаровидной формы. Микротвердость этих включений составляет 1900–2000 HV. На образцах второго способа наибольшей твердостью обладает боридная эвтектика с включениями карбида бора с микротвердостью 1000–1100 HV. На остальных образцах преобладает мелкодисперсная карбидная эвтектика микротвердостью 900–950 HV. Таким образом, все четыре исследуемых способа упрочнения позволяют получить износостойкие покрытия, различающиеся по составу, свойствам и потенциальной износостойкости.

Далее определяли химический состав упрочняющих покрытий методом эмиссионной спектроскопии [20]. Результаты химического анализа покрытий, полученных различными способами, приведены в табл. 7. Колебания химического состава материалов упрочняющих покрытий вызваны их макронеоднородностью и незначительным временем металлургического процесса [21]. Так как введенный в состав материалов покрытий карбид бора может химически взаимодействовать с железом, хромом и другими элементами, входящими в состав твердого сплава ПГ-С27 с образованием новых твердых и износостойких фаз (Fe_2B , FeB , CrB и др.), было проведено рентгенофазовое исследование покрытий. Исследования показали, что весь карбид бора, введенный в образцы 1 и 2, полностью усвоился покрытиями, однако концентрации бора и времени индукционной наплавки (~1 мин) оказалось недостаточно для образования новых боридных фаз в покрытиях, поэтому весь бор, очевидно, находится в покрытиях в виде растворов, входит в состав эвтектик, изменяет растворимость и дисперсность находящихся в них карбидных фаз. Кроме того, дополнительно привнесенный в материал углерод из карбида бора изменяет соотношение Me/C (где $\text{Me} = \text{Cr}, \text{Fe}$), что приводит к увеличению доли износостойких карбидов

(Cr_7C_3 , Fe_7C_3) в покрытиях, повышению их твердости и потенциальной износостойкости. Снижение твердости образца 2 можно объяснить его макродефектной структурой, наличием пор, трещин и включений непрореагировавшего карбида бора.

Таблица 7. Химический состав материала покрытий образцов (без учета железа), мас. %

C	Si	Cr	Mn	Ni	W	Mo	B	P	S
Образец 1									
2.9–4.1	1.2–1.4	22.6–23.3	0.9–0.82	1.05–2.1	2.2–3.8	0.12–0.18	2.3–3.5	0.02–0.06	0.13–0.19
Образец 2									
3.6–4.2	0.9–1.0	22.8–26.1	0.7–1.1	2.8–3.5	5.2–6.0	0.09–0.19	5.2–6.9	0.02–0.04	0.11–0.20
Образец 3									
3.813.85	0.6–1.3	25.9–28.3	0.7–0.9	1.9–2.0	0.23–0.26	0.13–0.16	0.8–0.9	0.01–0.02	0.04–0.05
Образец 4									
3.8–3.9	0.6–0.9	24.3–29.4	0.8–0.9	1.9–2.3	0.6–0.7	0.17–0.21	0.7–1.0	0.02–0.04	0.04–0.05

Усиленный рост дендритов и разбавление наплавляемого материала железом основы в образце 3 также приводит к изменению соотношения Me/C . Поэтому на его рентгенограмме одной из основных фаз является цементит Fe_3C . Подавление роста дендритов путем предварительного электроискрового легирования поверхности материала основы сплавом ВК и сталью Р6М5 у образца 4 приводит к уменьшению количества цементита в покрытии и сохранению износостойких карбидов Cr_7C_3 , Fe_7C_3 , которые, однако, оказываются оттесненными к границе раздела основа – наплавляемый металл.

Таким образом, использование карбидов вольфрама и бора в качестве модификаторов износостойкости упрочняющего покрытия ножей соломоизмельчителя на основе твердого сплава ПГ-С27 приводит к изменению его химического состава, структуры и свойств.

В качестве оптимального содержания компонентов модификаторов (исходя из соотношений цена/качество, твердость и технологичность) следует рекомендовать, мас. %: карбид вольфрама до 5–8, карбид бора не превышает 1.5. Для предотвращения образования пор и трещин количество металлической части шихты не должно быть меньше 78–80 мас. %, а размер частиц карбида бора следует задавать минимальным 0.05–0.10 мм [22].

Выводы. 1. Определена предельная наработка комбайна, при которой необходимо проводить замену партии ножей на новые детали вследствие повышенного износа. Эта наработка составляет 225 га убранной площади. **2.** Предложена новая конструкция упрочняющего покрытия, предусматривающая процесс его нанесения на обратную сторону режущих кромок на 1/3 их длины, расположенной на удалении от торца 65–70 мм. При этом ширину упрочняющих полосок необходимо задавать переменной, постепенно увеличивающейся при приближении к торцу, т. е. придавать им треугольную форму. **3.** Обосновано оптимальное содержание компонентов модификаторов, вводимых в шихту для наплавки упрочняющих покрытий на ножи в следующем составе (мас. %): карбид вольфрама до 5–8; карбид бора не выше 1.5; количество металлической части шихты не должно быть меньше 78–80; размер частиц карбида бора следует задавать минимальным 0.05–0.10 мм.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ягельский М. Ю., Родимцев С. А. Оценка качества работы соломоизмельчителя зерноуборочного комбайна // Тракторы и сельхозмашины. 2013. № 6. С. 47.
2. Литская В. К. Методика выбора рационального варианта технического решения при проектировании, совершенствовании и модернизации зерноуборочных комбайнов // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. 2015. № 3 (62). С. 103.
3. Ягельский М. Ю., Родимцев С. А. Тенденции развития и классификация соломоизмельчителей-разбрасывателей современных зерноуборочных комбайнов // Вестник ОрелГАУ. 2016. № 3 (60). С. 73.
4. Rodimtsev S. A., Kuznetsov Yu. A., Kolomeichenko A. V. Theoretical grounding of rational design for straw disperser working elements of grain combine harvester // INMATEH – Agricultural Engineering. 2017. V. 53. № 3. P. 133.
5. Ягельский М. Ю., Родимцев С. А. Типы и классификация ножей измельчителей-разбрасывателей соломы зерноуборочных комбайнов // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. 2017. № 1 (52). С. 114.
6. Шило И. Н., Бетенья Г. Ф., Анискович Г. И. и др. Повышение работоспособности деталей рабочих органов сельскохозяйственных машин. Минск: БГАТУ, 2010. 320 с.
7. Дудников А. А., Беловод А. И., Пасюта А. Г. и др. Технологические способы повышения долговечности и ресурса рабочих органов почвообрабатывающих машин // Технологический аудит и резервы производства. 2015. № 1 (25). С. 4.
8. Измайлов А. Ю., Сидоров С. А., Лобачевский Я. П. и др. Повышение технических характеристик рабочих органов сельскохозяйственных машин // Вестник Российской сельскохозяйственной науки. 2016. № 4. С. 58.
9. Бетенья Г. Ф., Анискович Г. И., Андрушевич А. А. и др. Объемные нанокристаллические износостойкие детали рабочих органов сельско-хозяйственной техники // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. 2012. № 3. С. 46.
10. Абдулов А. Р., Новоселов В. Г. Исследование износостойкости стальных ножей сборных фрез, обработанных борированием в порошках // Труды БГТУ. 2014. № 2. С. 222.
11. Измайлов А. Ю., Сидоров С. А., Лобачевский Я. П. и др. Новые материалы и технологии нанесения твердосплавных покрытий для деталей почвообрабатывающих машин // Вестник Российской сельскохозяйственной науки. 2016. № 2. С. 66.
12. Сенчишин В. С., Пулька Ч. В. Современные методы наплавки рабочих органов почвообрабатывающих и уборочных сельскохозяйственных машин // Автоматическая сварка. 2012. № 9 (713). С. 48.
13. Антонцев Н. М., Гритчин В. В., Толкачев М. Н. Борирование с использованием ТВЧ нагрева // Труды ГОСНИТИ. 2015. Т. 121. С. 166.
14. Polischuk S. D., Stekolnikov Yu. A., Churilov D. G. et al. Corrective Maintenance and Hardening of Agricultural Machinery Parts // Key Engineering Materials. 2020. V. 83. P. 158.
15. Golubev I. Analysis of reconditioning and hardening methods applied for the working tools of tillage machines // BIO Web of Conferences. 2021. V. 37. P. 00001.
16. Пулька Ч. В., Сенчишин В. С. и др. Влияние технологических схем индукционной наплавки на стабильность толщины наплавленного слоя // Автоматическая сварка. 2013. № 4 (720). С. 65.
17. Галынская Н. А., Кухарева Н. Г., Петрович С. Н. и др. Исследование износостойкости боридных покрытий, полученных из композиционных порошковых сред // Наука и техника. 2012. № 1. С. 10.
18. Аулов В. Ф., Иванайский В. В., Ишков А. В. и др. Получение износостойких композиционных боридных покрытий на стали 65Г при ТВЧ-нагреве // Технология машиностроения. 2015. № 2. С. 30.
19. Сидоров С. А., Миронов Д. А. и др. Повышение износостойкости и других ресурсных характеристик материалов рабочих органов почвообрабатывающих машин // Металлург. 2021. № 5. С. 93.

20. Глазырин А. В., Кузнецов А. А. Оценка структурных параметров стали методом атомно-эмиссионной спектроскопии // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. 2012. № 3 (113). С. 253.
21. Мишустин Н. М., Иванайский В. В., Ишков А. В. Состав, структура и свойства износостойких покрытий, полученных на сталях 65Г и 50ХГА при скоростном ТВЧ-борировании // Известия Томского политехнического университета. 2012. Т. 320. № 2. С. 68.
22. Lyalyakin V. P., Aulov V. F., Ishkov A. V. et al. Properties of Wear-Resistant Composite Coatings Produced by High-Speed Borating // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2022. V. 51. № 2. P. 134.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА.
ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ**

УДК 621.3.019

**МЕТОДОЛОГИЯ ВВЕДЕНИЯ ПОПРАВОК ПРИ СТАТИСТИЧЕСКИХ
ИССЛЕДОВАНИЯХ НА ОСНОВЕ КОНТРОЛЬНЫХ КАРТ**© 2024 г. Н. И. Сидняев^{1, *}, Э. Баттулга¹¹*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
e-mail: Sidn_ni@mail.ru*

Поступила в редакцию 14.07.2023 г.

После доработки 05.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Показано, как изменение условий в течение эксперимента может остаться незамеченным и как возникают аномальные измерения, которые приведут к неправильным значениям, содержащим грубые ошибки. Трактуются, что искажение измерений может быть следствием неправильной работы регистрирующих устройств; при обнаружении неисправности такие значения следует отбросить. Изложены проблемы неопределенности информации по входным данным при расчетах классическими методами. Изучено влияние отклонения внешних воздействий от номинальных значений, непостоянность интенсивности выбросов, нелинейный характер влияния внешних факторов на вероятность события.

Ключевые слова: статистика, методики, аномальность, выброс, обработка, контрольная карта

DOI: 10.31857/S0235711924010129, **EDN:** SMNZUM

Анализ современного состояния учета аномальных факторов. Начиная с разработки технического задания на систему и кончая выпуском технической документации на опытное производство, стадии проектирования являются ключевыми в общей проблеме обеспечения надежности высокотехнологического изделия. Важной работой, регламентирующей взаимоотношения всех участников разработки продукции, является обоснование программы обеспечения надежности (ПОН) изделия в целом, его составных частей и элементов, а также выработка и согласование порядка подтверждения требований по надежности на всех стадиях [1–3]. С этой целью используют модели ПОН, типовые ПОН и модели (процедуры) подтверждения надежности. После выбора основных проектных, схемных и конструкторско-технологических решений перед окончательным оформлением проекта службой надежности предприятия совместно с подразделениями-разработчиками осуществляется оценка (экспертиза) результатов проектирования с позиций обеспечения надежности и корректировка принятых решений [1–4].

Рассмотрим критерий, предложенный в работе [2]. Пусть дана некоторая выборка наблюдений $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 3$), которая, по предположению, является случайной выборкой для случайной величины X , распределенной по нормальному закону с параметрами μ_X и σ_X^2 . Вычислим разности $Y_i = X_i - \bar{X}$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$. Если

одно из значений X_i выделить, то для оставшихся наблюдений выборочное среднее будет равно

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x_i}{v} = \bar{X}, v = n - 1. \quad (1)$$

Если выделить несколько значений $x_1, x_2, \dots, x_r$, то выборочное среднее будет равно

$$\bar{X} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r}{n - r}. \quad (2)$$

При использовании индекса M для обозначения наблюдения, которому соответствует максимальная разность $Y_M = x_M - \bar{X}$, правило, предложенное в работах [2–6], состоит в следующем (для случая, когда дисперсия σ_x^2 неизвестна): при заданном значении s наблюдение x_M отбрасывается, если $|Y_i| > cs_x$. В противном случае наблюдение x_M оставляется. Для выборок большого объема, если наблюдение x_M отброшено, оставшаяся выборка рассматривается как вновь полученная, и для нее анализ можно продолжить. Каждый раз величина σ_x оценивается по наблюдениям, оставшимся после отбрасывания x_M . Величина c может изменяться при изменении объема выборки, и ее можно выразить неявно через t :

$$\left[\frac{nc^2(v - v_0 - 1)}{v \left(v + v_0 - \frac{nc^2}{v} \right)} \right]^{1/2} \approx t_{1-\alpha/2}^{v+v_0-1}, \quad (3)$$

а также можно использовать приближенное выражение через распределение F в явном виде:

$$c \approx \left(\frac{v}{n} \right)^{1/2} \left(\frac{3F_{1-q}}{1 + \left[\frac{3F_{1-q} - 1}{v + v_0} \right]} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где $v = n - 1$, а v_0 — любое другое число дополнительных степеней свободы, которое связано с оценкой σ_x^2 по выборке объема, не равного n . С помощью выражения (4) можно провести проверку следующим образом. Если никакие значения не были отброшены, умножим допустимое относительное приращение σ_x^2 на величину v/n . Обозначим это произведение через q и найдем соответствующую верхнюю процентную точку для отношения дисперсий F_{1-q} при трех и $v + v_0 - 1$ степенях свободы. Вычислим значение c по выражению (4) и применим критерий для X_M . Например, если $n = 4$, $v = 3$ и $v/n = 0.75$, для положительного решения 0.02 имеем $q = 0.02 \cdot 0.75 = 0.5$. Ищем значение $F_{1-0.05}$ при 3 и 3 степенях свободы. Оно равно $F_{1-q} = 9.28$. Тогда

$$c = (0.75)^{1/2} \left(\frac{3F_{0.95}}{1 + (3F_{0.95} - 1)/3} \right)^{1/2}.$$

Наблюдение X_M следует отбросить, если $|Y_M| > 0.831 \cdot S_x$. Рассмотрим ситуацию использования критерия для обнаружения выброса.

Допустим, дан ряд значений

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq 1}}^n \frac{x_i}{v} = \bar{X} - \frac{Y_j}{v}.$$

Проверим, является ли значение x_5 резко выделяющимся, и следует ли выбросить его из данной выборки. Для этого вычисляем $\bar{X} = 23.9$, а затем $Y_5 = X_5 - \bar{X} = 25.5 - 23.9$, $Y_5 = 1.6$, $S_X = 0.77$. Для $\alpha = 0.05$, $n = 5$ из выражения (3) имеем

$$\left[\frac{5c^2 \cdot 3}{3(3 - 4c^2 / 3)} \right]^{1/2} = 2.776,$$

и методом проб и ошибок находим $c = 1.49$. Согласно критерию $|1.6| > 1.49 \cdot 0.77 = 1.05$ наблюдение X_5 отбрасывается.

Постановка задачи. Использование контрольных карт. Контрольные карты представляют собой графические средства анализа, которые нетрудно подготовить и использовать в производственных условиях. Общий метод изготовления контрольной карты процесса включает: 1) получение выборки; 2) вычисление подходящей статистики, такой как выборочное среднее, размах или накопленная сумма, и 3) графическое построение этой статистики на карте в виде функции от выборочной последовательности или времени. На карте нужно каким-либо способом отобразить правила принятия решения о том, находится ли данная переменная процесса “под контролем”. До тех пор пока статистика, откладываемая на этой карте, попадает между двумя границами, процесс считается под контролем. Если на графике статистика превысит контрольные пределы, принимается решение, что процесс “вышел из-под (статистического) контроля”; пересечение контрольных границ свидетельствует о нестандартной работе. Даже чрезмерное скопление точек по одну из сторон от центральной линии можно интерпретировать как некоторый сдвиг нормального хода процесса. Использование контрольных карт для непрерывных производственных процессов не было столь плодотворным, как, например, в производстве деталей для высокотехнологичных изделий, ибо в первом случае основная цель часто состоит не в контроле над тем, чтобы выходная переменная, такая как производительность, находилась в заданных пределах, а в том, чтобы сделать ее максимально большей. Трудностью использования контрольных карт для непрерывных производственных процессов является то, что причины выхода процесса из-под контроля никогда не очевидны, за исключением тех случаев, когда отклонения вызваны неправильной подачей сырья, неправильной регулировкой управляющих переменных, неисправностью оборудования, нарушением действующих инструкций и т. д. В любом случае такие причины обычно исправляются еще до того, как их влияние обнаруживается на контрольных картах. Однако сдвиг уровня и (или) циклические флуктуации в некотором процессе трудно приписать определенным причинам, некоторые из которых могут быть связаны с ненаблюдаемыми переменными или с внешними условиями. Рассмотрим некоторые виды контрольных карт, различающиеся между собой статистиками, которые откладываются на графике: контрольные карты Шухарта (карты $\bar{X}$, R и s); карты скользящих геометрических средних (скользящего экспоненциально взвешенного среднего); карты накопленных сумм; многомерные контрольные карты. В равной степени полезны и многие другие типы карт; они описаны в работах [5–10]. В табл. 1 указана относительная эффективность обнаружения различных изменений в процессе для четырех типов контрольных карт. Цифрами

обозначены эффективности параметров: 1 – наиболее эффективная; 2 – средняя по эффективности; 3 – наименее эффективная; (–) непригодная.

При разработке контрольных карт процесса, т. е. при определении положения центральной линии и контрольных пределов требуется некоторое исследование процесса. Допустим, что процесс и точки замеров четко определены, учтено время запаздывания и мертвое время и найден подходящий выборочный метод и выборочный интервал. Тогда необходимо исследовать и саму процедуру получения выборки, чтобы точность данных, которые будут использоваться, была известна (и находилась на допустимо низком уровне). Для более тонких проверок требуются выборки большого объема, однако временной шаг может быть и такой, что выборка будет состоять лишь из одного показания.

Таблица 1. Относительная эффективность обнаружения изменений в процессе

Причина изменения	Контрольные карты			
	среднее $\bar{X}$	размах R	стандартное отклонение s	Накопленная сумма
Отклонение с пересечением	1	2	–	3
Сдвиг среднего	2	–	3	1
Сдвиг дисперсии	–	1	–	–
Медленная флуктуация (тренд)	2	–	–	1
Быстрая флуктуация (колебание)	–	1	2	–

Процесс введения поправок на основе контрольных карт. Рассмотрим ситуацию, когда контрольные карты могут применяться для выявления нежелательных рабочих условий и последующего определения необходимых корректировочных действий. При приемочном контроле измеряются некоторые характеристики продукта, согласно некоторому выборочному плану берется случайная выборка объема n , вычисляются выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение и для проверки нулевой гипотезы применяется критерий значимости. С нулевой гипотезой связаны альтернативная гипотеза и ошибки первого и второго рода. Потребитель, приобретающий этот продукт, устанавливает предел, ниже которого продукт считается непригодным к использованию, и именно он определяет альтернативную гипотезу. На рис. 1 изображена кривая оперативной характеристики для типичного выборочного плана. Представлена вероятность p приемки партии от доли – t дефектной продукции, где α и β – риск производителя.

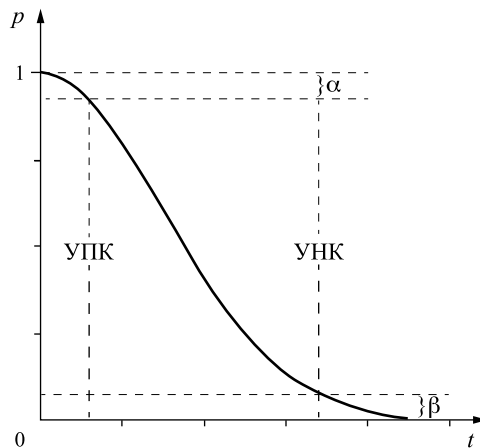


Рис. 1. Кривая оперативной характеристики для выборочного плана.

Для производителя нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что продукт приемлем, и даже если он производит приемлемый продукт, $100\alpha\%$ продукции будет считаться неприемлемой, т. к. по своей природе выборочная статистика процесса стохастична. В этом смысле величина α будет *риском производителя*, а связанный с ней уровень доли дефектных изделий — *уровнем приемлемого качества* (УПК). Если производитель выпускает $100\beta\%$ дефектной продукции, которая не зарегистрирована как дефектная из-за стохастической природы выборочной статистики, то вероятность β будет *риском потребителя*, и альтернативная гипотеза H_1 устанавливает *уровень неприемлемого качества* (УНК). При составлении контрольной карты приемки приемлемый уровень для процесса (ПУП) определяется по величине α , а неприемлемый уровень (НУП) — по величине β . До тех пор, пока контролируемая статистика продукта попадает между ПУП и НУП, считается, что процесс находится под контролем. Заметим, что контрольные пределы зависят от α , β и n [2–5].

Контрольная карта скользящего геометрического среднего. Контрольные карты скользящих геометрических средних [4–7] или контрольные карты скользящих экспоненциально взвешенных средних, так же как и контрольные карты накопленных сумм, находят наиболее широкое применение там, где технические условия должны быть жесткими, так что необходима чувствительная схема контроля. Карта скользящего геометрического (экспоненциально) взвешенного среднего придает больший вес последним измерениям по сравнению со старыми, т. к. вычисляется взвешенная линейная комбинация некоторой выборочной статистики, например $\bar{X}$. Самым новым значениям приписывается вес ω ($0 \leq \omega \leq 1$), а более старой взвешенной статистике — вес $1 - \omega$. Таким образом, если Z_k — взвешенное среднее выборочной статистики после выборки k , Z_k — значение статистики в k -й выборке, k — текущее измерение, $k - 1$ — предыдущее измерение и т. д., $0 \leq i \leq k$, $\bar{Z}$ — центральная линия на контрольной карте, то

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= \bar{Z}, \\
 Z_1 &= \omega Z_1 + (1 - \omega) Z_0, \\
 Z_2 &= \omega Z_2 + (1 - \omega) Z_1, \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \\
 Z_k &= \omega \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \omega) Z_{k-i} + (1 - \omega)^k Z_0.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

При $\omega = 1$ весь вес падает на текущие данные, и получается карта Шухарта. Если $\omega = 0$, текущим данным не придается никакого веса, так что в результате текущую выборку не нужно набирать. Можно показать, что если $Z_i = \bar{X}_i$, то математическое ожидание $\varepsilon\{Z_k\} = \mu_0$ и дисперсия

$$\text{Var}\{Z_k\} = \sigma_X^2 \left[1 - (1 - \omega)^{2k} \right] \frac{\omega}{2 - \omega}.$$

Для больших k контрольные пределы можно представить на типичной карте на соответствующем расстоянии от Z . В контрольных картах накопленных сумм, как видно из самого названия, используются накопленные суммы случайной переменной или некоторой функции случайной переменной, начиная с некоторого опорного времени. Например, статистиками, значения которых накапливаются, могут быть сама переменная; разность между измеренным значением переменной и ее математическим ожиданием; разность между измеренным значением переменной и некоторым целевым значением; последовательные разности между значениями переменной или абсолютные величины разностей; выборочное среднее; размах.

В табл. 2 приведены расчетные формулы для типичных карт накопленных сумм; каждая сумма определяется по выборке объема n .

Таблица 2. Расчетные формулы для карт накопленных сумм

Тип карты	Накопленная сумма
Отклонение от опорного (целевого) значения h	$\sum_{i=1}^n (X_i - h)$
Разность абсолютного значения отклонения и его математического ожидания	$\sum_{i=1}^n [X_i - h - Ksi \{ X_i - X \}]$
<i>Последовательные разности</i>	$\sum_{i=1}^n D_i, \quad D_i = X_i - X_{i-1}$
Отклонения абсолютного значения последовательности разностей от его математического ожидания	$\sum_{i=1}^n [D_i - Ksi \{ D_i \}]$

Основное преимущество карт накопленных сумм по сравнению с картами Шухарта состоит в том, что они более чувствительны к небольшим отклонениям исследуемой статистики процесса от ее математического ожидания; они подавляют случайный шум, одновременно усиливая реальные изменения в процессе. Карты Шухарта можно сделать более чувствительными, используя помимо контрольных пределов (табл. 2) (для одной статистики) один или несколько из следующих критериев [4–8]: 1) линии “предупреждения” внутри контрольных пределов и линии “вмешательства” на месте обычных контрольных пределов; 2) серии значений статистики, например три последовательные точки за контрольными линиями, проведенными на расстоянии $\pm\sigma$ от центральной, или семь последовательных точек по одну из сторон от центральной линии.

В таком варианте правила принятия решения позволяют использовать часть дополнительной информации, записанной на контрольной карте, помимо той, которая содержится в текущей выборке. В зависимости от характера диаграммы на карте накопленной суммы используются различные критерии вмешательства. Контрольные пределы на карте накопленной суммы определяются по распределению статистики, наносимой на карту; однако контрольные линии на карте не проводятся,

а задаются с помощью специального шаблона или накладной маски. На карте накопленной суммы интерес представляет не абсолютное значение суммы, а *наклон* кривой, определяемый по последовательным точкам. Для каждого типа карт требуются различные шаблоны, указывающие величину наклона.

На рис. 2 показан типичный шаблон и приведены правила для его построения и использования, выводимые из распределения статистики, наносимой на карту, в предположении, что случайная переменная распределена по нормальному закону.

После того как каждая точка отмечена на карте, опорная точка P на маске совмещается с самой последней точкой. Тогда исследователь может увидеть, попадают ли ранее отмеченные точки под маску, если правильно расположить маску в соответствии с данным правилом принятия решения. Когда такое событие происходит, то процесс выходит из-под контроля.

Для V-образных масок полагают, что визуальное проявление некоторого изменения оптимально, если горизонтальный шаг приблизительно равен 2σ вертикального шага [5–8]. Правила обращения формулируются так: поместите точку P в последнюю точку, отложенную на контрольной карте; изменение произойдет, если какая-либо отложенная точка закрыта маской. Шаблон для выборочного среднего (отклонение от целевого значения h) рассчитывается так: строится график зависимости $Z(m)$. Затем определяются

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X}_i - h)}{\sigma_{\bar{X}}}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{\delta}{2k}\right), \quad d = \frac{-2\ln a}{\delta^2},$$

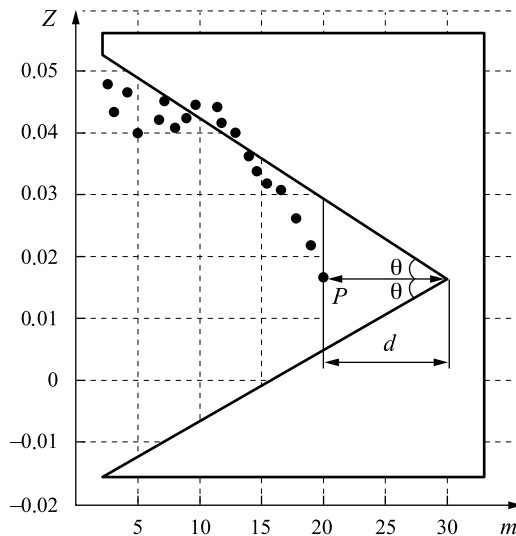


Рис. 2. Шаблон для контрольной карты накопленной суммы (отношение масштабов равно k , m – число выборок).

где a – уровень значимости принятия, равный 2α (рис. 1); $\delta = \frac{D}{\sigma_{\bar{X}}}$; D – минимальный сдвиг среднего уровня процесса, который должен быть замечен. Дисперсию $\sigma_{\bar{X}}^2$ можно аппроксимировать объединенной выборочной дисперсией $S_p^2 = \sum_{i=1}^m \frac{S_i^2}{n}$, где m – номер последней выборки.

Расчет шаблона для выборочного размаха проводится так: строится график зависимости ε от mv_i (для $n < 10$), а затем

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^m R_i^2}{(\sigma_{xc})^2}, \quad \theta = \arctg \left(\frac{2 \ln(\sigma_1 / \sigma_2)}{1 - (\sigma_0 / \sigma_1)^2} \right), \quad d = \frac{-\ln a}{\ln(\sigma_1 / \sigma_0)},$$

где σ_0^2 — стандартная дисперсия; σ_1^2 — предполагаемая дисперсия, которую требуется испытать. Значения параметров $c = 1.378$ и 1.207 и $v_i = 1.93$ и 5.5 . Так как V-образную маску можно построить по двум параметрам, половинному углу раствора θ и длине шага d (рис. 2), естественно, возникает вопрос, как связать соответствующие величины θ и d с мощностью правила принятия решения. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо сначала ввести понятие средней длины серии. *Средней длиной серии* (СДС) принимают число *выборок*, полученных до того, как появился сигнал вмешательства. СДС служит мерой того, как часто необходимо вмешиваться в процесс, если следовать соответствующим правилам принятия решения, основанным на выбранном значении a . Так как средняя длина серии является случайной переменной, распределение которой зависит от критериев, используемых при контроле, она и служит некоторой мерой относительной эффективности контрольной схемы.

При использовании этих карт для определения d и θ предполагается, что интервал, откладываемый по горизонтальной оси для статистики процесса, равен интервалу в 2σ на вертикальной оси, так что в результате получается угол в 45° для средней траектории статистики, если среднее процесса сдвинуто на 2σ . Если интервал, откладываемый по горизонтальной оси, равен интервалу на вертикальной оси величин $q\sigma$, то значения $\text{tg}\theta$, данные для этой карты, следует умножить на $2/q$. Можно выбрать некоторые значения d и θ и для данного k вычислить СЦД. В статье сравнивались несколько типов контрольных карт, используя для каждой карты один или ряд критериев. Наблюдения имитировались с помощью таблицы случайных чисел, распределенных по нормальному закону с математическим ожиданием равным нулю и дисперсией равной единице. Значения (табл. 3) получены в предположении одинаковой чувствительности каждого из критериев при отсутствии сдвига среднего уровня процесса. За исключением малых значений k , эффективность критериев оказалась приблизительно одинаковой.

Считается, что процесс вышел из-под контроля, если выполнено хотя бы одно из условий: 1) $|\bar{X}_i - \mu_0| > 3\sigma_{ж}^c$, $\bar{X}_i$ и либо $\bar{X}_{i-1}$, либо $\bar{X}_{i-2}$ попадают между контрольными уровнями $2\sigma_{ж}^c$ и $3\sigma_{ж}^c$; 2) $\bar{X}_{i-7}, \bar{X}_{i-6}, \dots, \bar{X}_i$ все попадают по одну сторону μ_0 $|\bar{X}_i - \mu_0| > 3\sigma_{ж}^c$ $|\bar{X}_i - \mu_0| > 3\sigma_{ж}^c$.

Прикладные аспекты контрольных карт для нескольких переменных. Если проводятся наблюдения над двумя или большим числом переменных, и для каждой переменной на индивидуальной карте откладывается некоторая выборочная статистика, то можно полагать, что процесс вышел из-под контроля, если на какой-нибудь карте контрольные условия оказались нарушенными. Однако такое правило приводит к необоснованному решению в случае, когда эти переменные обладают некоторым совместным распределением. Предположим, что две переменные имеют нормальное совместное распределение, а значение α выбрано равным 0.05. Если карты составляются отдельно для каждой переменной, то вероятность того, что обе переменные попадут между контрольными пределами, равна 0.9025; следовательно, в действительности ошибка первого рода будет происходить приблизительно на уровне 0.1, а не на уровне 0.05. Истинной контрольной областью является не квадрат и не прямоугольник, а эллипс, причем все точки на его периметре

Таблица 3. Сравнение контрольных карт

Тип карты	Расчет точки на графике	Критерий, используемый для вмешательства в процесс
$\bar{X}$ Шухарта	$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$	$ \bar{X}_i - \mu_0 > 3\sigma_{\text{ж}}^c$
$\bar{X}$ Шухарта и критерий серий	$\bar{X}_i$ и подсчет серий над или под центральной линией	$ \bar{X}_i - \mu_0 > 3\sigma_{\text{ж}}^c$ и двухсторонний критерий серий
Скользящее среднее	$\bar{X}_{(i)} = \frac{\bar{X}_{i-k+1} + \dots + \bar{X}_{i-1} + \bar{X}_i}{k}$ $k = \min\{i, 9\}$, $A_k = 3$	$ \bar{X}_i - \mu_0 > \frac{A_k \sigma_{\text{ж}}^c}{\sqrt{k}}$, для $k = 9$, $ \bar{X}_i - \mu_0 > \frac{A_k \sigma_{\text{ж}}^c}{\sqrt{i}}$, для $k < 9$
Скользящее геометрическое среднее	$Z_i = 0.2\bar{X}_i + 0.8Z_{i-1}$ $Z_0 = \mu_0, w = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{10}, A_r = 3$	$ \bar{Z}_i - \mu_0 > A_k \sigma_{\text{ж}}^c \left(\frac{w}{2-w} \right)^{1/2}$, для больших значений i
Накопленная сумма	$S_i = 0.2\bar{X}_i - \mu_0 + S_{i-1}$ $S_0 = 9, i = 0, \dots, n$	Точка лежит за пределами раствора V-образной маски

имеют одинаковую вероятность появления. Если переменные коррелированы, такой областью служит эллипс, повернутый так, что его главные оси не совпадают с координатными осями x_1, x_2 . В качестве общей статистики, которая вычисляется по значениям многих переменных и может откладываться на некоторой контрольной карте, в работах [8, 9] предложено использовать статистику T^2 , введенную ранее Хотеллингом [10, 11]. Статистика T^2 представляет собой просто геометрическое место точек эллипсоида доверительной области; для двух случайных переменных X и Y с нормальным совместным распределением она выражается через объем выборки n , выборочные средние и выборочные дисперсии следующим образом:

$$T_i^2 = \frac{m_s^2 s_y^2}{s_x^2 s_y^2} \left[\frac{(x_i - \bar{X})^2}{s_x^2} + \frac{(y_i - \bar{Y})^2}{s_y^2} - \frac{2s_{xy}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{s_x^2 s_y^2} \right].$$

Все значения T_i^2 , которые превышают значения, подсчитанные по этой формуле, характеризуют нарушение контрольного условия. Величину T^2 можно связать с распределением F : $T_\alpha^2 = \frac{2(n-1)F_\alpha}{n-2}$, где статистика F_α имеет 2 и $n-2$ степени свободы. Для p переменных наиболее удобно представлять T^3 в матричном виде: $T^3 = X_S^{-1} X^T, X = [X_1 - \bar{X}_1, X_2 - \bar{X}_2, \dots, X_p - \bar{X}_p]$. Статистика T^2 распределена как $p \nu F / (\nu - p + 1)$, где F имеет p и $(\nu - p + 1)$ степеней свободы, причем ν представляет собой число степеней свободы, используемых при оценивании выборочной дисперсии, обычно равное $n-1$.

Заключение. Предложены методы по использованию контрольных объединяющих информации из отобранных выборок, что позволяет использовать больший объем информации, причем в результате регистрации наблюдаются меньшие сдвиги уровня процесса. Карта скользящего геометрического (экспоненциально) взвешенного среднего придает больший вес последним измерениям по сравнению со старыми, т. к. вычисляется взвешенная линейная комбинация некоторой выборочной

статистики. Самым новым значениям приписывается вес $\omega (0 \leq \omega \leq 1)$, а более старой взвешенной статистике – вес $1 - \omega$. Одним из достоинств разработанной методики является то, что в ситуациях, когда еще не накопилось достаточно статистической информации, источником первоначальных данных для настройки модели надежности являются экспертные оценки, а в дальнейшем используются данные, поступающие в ходе эксплуатации. Систематизированы и изучены существующие методы по использованию контрольных карт. Выявлены проблемы недостатка информации при расчетах классическими методами, игнорирование таких факторов, как влияние отклонения режима работы или внешних воздействий от номинальных значений, непостоянность интенсивности отказов, нелинейный характер влияния внешних факторов на результат принятия решения. Изучен характер влияния внешних факторов на надежность статистических данных и степень учета данных факторов в существующих методах. Качественные, организационно-технические (конструктивные и программные) требования по надежности, задаваемые в ТЗ для каждой стадии создания элементов в целом, должны выполняться и подтверждаться на соответствующей стадии работ. Значительному сокращению затрат на экспериментальные исследования и созданию высоконадежных изделий на стадиях проектно-конструкторской разработки способствуют создаваемые в отдельных отраслях промышленности проектные нормы надежности – системы количественных и качественных требований и правил, выполнение которых обязательно при разработке изделий различного назначения.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеева И. И., Чекулина Т. А., Тимофеева С. А.* Статистика. М.: Инфра-М, 2016. 227 с.
2. *Морозов Д. В., Чермошенцев С. Ф.* Методика повышения надежности функционирования системы управления беспилотного летательного аппарата в полете при возникновении отказа в бортовой контрольно-проверочной аппаратуре // Надежность. 2019. № 19 (1). С. 30.
3. *Сидняев Н. И., Садыхов Г. С., Савченко В. П.* Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 382 с.
4. *Плеханов Д. А.* Большие данные и официальная статистика: обзор международной практики внедрения новых источников данных // Вопросы статистики. 2017. № 1 (12). С. 49.
5. *Сидняев Н. И.* Математическое моделирование оценки надежности объектов сложных технических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 4. С. 24.
6. *Овчинникова Л. С.* Статистика и ее роль в эффективном управлении: проблемы и перспективы // Бенефициар. 2020. № 73. С. 30.
7. *Михненко О. Е., Салин В. Н.* Проблемы современной трансформации статистики // Учет. Анализ. Аудит. 2021. Т. 8. № 4. С. 18.
8. *Похабов Ю. П.* Что понимать под расчетом надежности уникальных высокоответственных систем применительно к механизмам одноразового срабатывания космических аппаратов // Надежность. 2018. № 4. С. 28.
9. *Антонов С. Г., Климов С. М.* Методика оценки рисков нарушения устойчивости функционирования программно-аппаратных комплексов в условиях информационно-технических воздействий // Надежность. 2017. № 17 (1). С. 32.
10. *Климов С. М., Поликарпов С. В., Федченко А. В.* Методика повышения отказоустойчивости сетей спутниковой связи в условиях информационно-технических воздействий // Надежность. 2017. № 17 (3). С. 32.
11. *Колобов А. Ю., Дикун Е. В.* Интервальные оценки безотказности единичных космических аппаратов // Надежность. 2017. № 17 (4). С. 31.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА.
ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ**

УДК 656.13;614.84;517.958:539.3(6)

**МОДЕЛЬ СТАТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ МЕДНОГО ПРОВОДНИКА ПРИ
ТОКОВОЙ ПЕРЕГРУЗКЕ**© 2024 г. А. И. Недобитков^{1, *}, Б. М. Абдеев¹¹*Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск,
Республика Казахстан***e-mail: a.nedobitkov@mail.ru*

Поступила в редакцию 14.10.2022 г.

После доработки 05.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Представлены результаты экспериментальных и теоретических исследований образования трещины медного проводника под действием токовой перегрузки. Проводник исследовался с помощью растрового электронного микроскопа JSM-6390L. Получена уточненная математическая модель статического напряженно-деформированного состояния и разрушения медного стержня в условиях неупругого изгиба при температуре до 700°С. Определены предельные значения изгибающего момента и кривизны медного проводника, вызывающие его разрыв после образования трещины. Алгоритм расчета доведен до конечных аналитических зависимостей, позволяющих использовать их при проведении судебной пожарно-технической экспертизы или проектировании электропроводки.

Ключевые слова: медный проводник, растровая микроскопия, токовая перегрузка, пластичность, текучесть, температура, прочность

DOI: 10.31857/S0235711924010134, **EDN:** SMLBYU

По оценке авторов [1, 2], в США пожары, вызванные неисправностью электропроводки, составляют 13% всех бытовых пожаров. Это приводит к 13% всех смертей от пожаров и 21% всех повреждений собственности от электрических пожаров. При этом, по данным [1], стоимость всех потерь превышает один миллиард долларов. Таким образом, короткое замыкание и токовая перегрузка в электрических цепях считаются основными причинами пожаров и повреждений от пожаров в США.

По данным [3<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7599679/> - B1-materials-13-04521], пожары, связанные с электропроводкой, составили 36.6% от общего числа пожаров в Китае. Основными причинами этих пожаров были короткое замыкание, перегрузки, плохой контакт и отказы электрического оборудования. При этом авторы подчеркивают, что перегрузка по току является окончательным проявлением различных причин возгорания.

В свою очередь в диссертации [4<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7599679/> - B1-materials-13-04521] подчеркивается, что в промышленно развитых странах, в том числе и в России, доля пожаров от электротехнической продукции ежегодно составляет от 15 до 25%. При этом из всех видов электротехнической продукции первое место по числу пожаров с большим опережением занимают изде-

лия кабельной промышленности (провода и кабели) в комплексе с другими компонентами электросетей.

Необходимо отметить, что авторы [2–4] независимо друг от друга приходят к выводу, что основными причинами, приводящими к возникновению загораний кабелей, являются электродуговые режимы, а также режимы сверхтоков, которые могут иметь место при коротких замыканиях или перегрузках.

Автором [4] констатируется, что наиболее изученным электрическим пожароопасным режимом как с пожарно-профилактической, так и экспертно-криминалистической точки зрения является короткое замыкание, в то время как токовая перегрузка изучена недостаточно полно. Например, при токовой перегрузке может происходить разрыв проводников с образованием оплавлений, визуально не отличающихся от электродуговых. Вполне очевидным является вывод, что разрыву медного проводника в процессе токовой перегрузки предшествует зарождение и образование трещины.

Целью статьи является уточнение математической модели статического напряженно-деформированного состояния и разрушения медного стержня в условиях неупругого изгиба при температуре до 700°C .

Исходя из этого, были поставлены следующие задачи: 1) исследовать на растровом электронном микроскопе медные проводники, изъятые с места пожара, подвергшиеся токовой перегрузке; 2) наглядно подтвердить, что на начальном этапе токовой перегрузки у медных проводников происходит образование трещин; 3) определить условие, при котором произойдет образование трещины с последующим разрушением медного проводника; 4) довести решение актуальной прикладной задачи до простых конечных формул, которые можно использовать при проведении пожарно-технической экспертизы.

Материалы и методика экспериментов. Исследования выполнены в Центре превосходства Veritas Восточно-Казахстанского технического университета им. Д. Серикбаева с использованием растрового электронного микроскопа JSM-6390LV. Объектом исследования являлись многопроволочные медные проводники, подвергшиеся токовой перегрузке и изъятые с места пожара.

Также в период 2014–2018 гг. по методике, изложенной в [4], проводились эксперименты, заключающиеся в том, что через многопроволочные медные проводники по ГОСТ 26445-85 с площадью сечения 0,5, 0,75, 1,5 и 2,5 мм² пропускался как постоянный, так и переменный ток с кратностью перегрузки 4–6, что соответствует плотности тока 50–70 А/мм².

Главным отличием от работы [4] являлось то, что исследовались участки проводников без образования оплавлений в виде утончений, утолщений и шейки (рис. 1).

На рис. 1 показаны различные стадии процесса образования трещины медного проводника под действием токовой перегрузки.

Теоретические основы. Авторами [5–8] приведены данные о влиянии неоднородностей на краях плоских шин на распределение магнитного давления, возникающего при протекании тока плотностью 100 кА/мм² и более. Поскольку $100 \text{ кА/мм}^2 \gg 50\text{--}76 \text{ А/мм}^2$, то в статье использован общепринятый идеализированный классический подход сопротивления материалов для математического моделирования напряженно-деформированного состояния медного проводника в условиях локального неупругого чистого изгиба и высокой температуры. При этом роль магнитных воздействий, относящихся к разновидности объемных сил (по аналогии с собственным весом), является малой (классическое положение). Это известное фундаментальное допущение применяется в решении практических всех технических задач сопротивления материалов и при расчете инженерных конструкций, в которых вес деталей небольшого размера (например, тонкого медного стержня) на несколько

порядков меньше внешней механической силовой нагрузки или изгибающего момента, рассмотренного в этой экспериментально-теоретической работе.

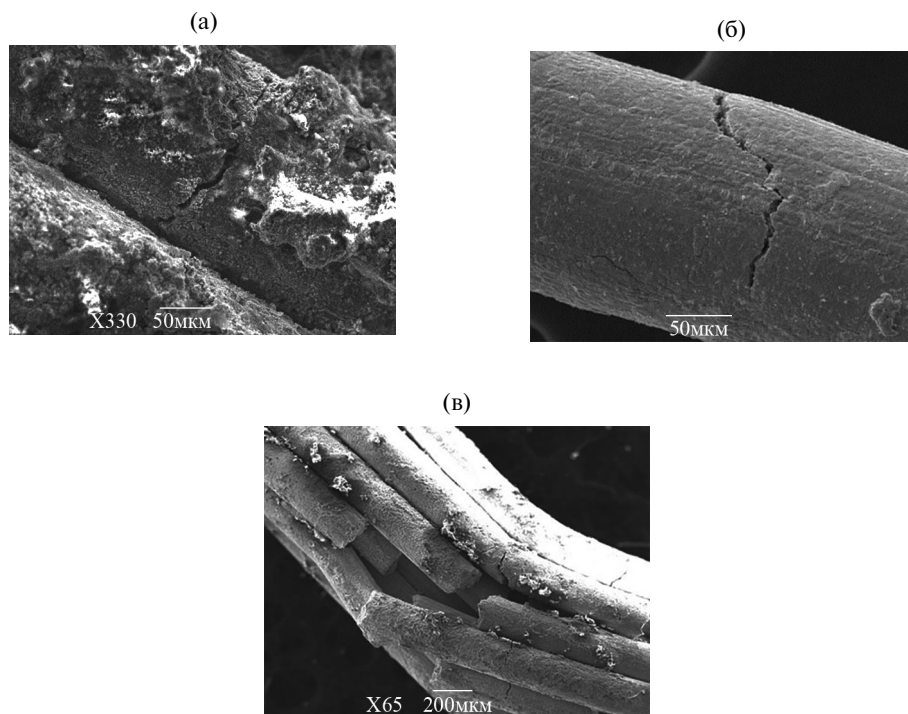


Рис. 1. Образование трещины медного проводника под действием токовой перегрузки: (а) — начальная стадия, увеличение $\times 330$; (б) — развитие трещины, увеличение $\times 430$; (в) — конечная фаза, разрушение проводника, увеличение $\times 65$.

Для математического описания напряженно-деформированного состояния неупругого чистого изгиба моментом M медного стержня круглого поперечного сечения (рис. 2) [9, 10, 12–14] воспользуемся представленной в [10] моделью прочности, в основе которой:

1) раздельная аппроксимация зависимости между нормальным напряжением σ и относительной продольной деформацией ϵ двумя несимметричными функциональными выражениями $\sigma_r(\epsilon_r)$, $\sigma_s(\epsilon_s)$ с общим начальным модулем упругости E [9, 10], характеризующими интенсивность внутренних сил пластичного материала (рис. 3).

При растяжении в виде кубической параболы [9]

$$\sigma_r = \sigma_r(\epsilon_r) = E\epsilon_r - A_r\epsilon_r^3, \quad 0 \leq \epsilon_r \leq \epsilon_{kr}, \quad (1)$$

имеющей экстремум

$$\sigma_r^{(\max)} = \sigma_{pp}, \quad (2)$$

равный известному справочно-нормативному пределу прочности σ_{pp} , и нисходящий участок, оканчивающийся напряжением $\sigma_{kr} < \sigma_{pp}$ и характеризующий повышение

пластичности на внешней границе изгибаемого элемента (рис. 2, точка K_r) [9, 10] в условиях нулевого теплового градиента [11, 13]

$$T = t - t_n = 20^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 0. \quad (3)$$

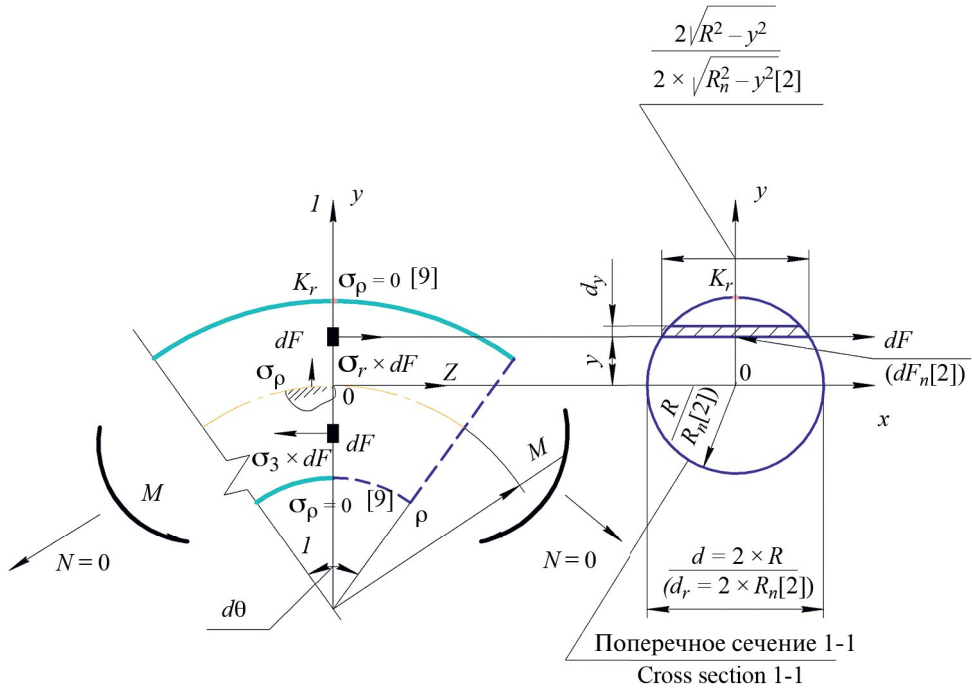


Рис. 2. Расчетная схема участка стержня, искривленного изгибающим моментом M .

Для сжатой области с применением возрастающей кривой второй степени

$$\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon_s) = E\varepsilon_s + A_s\varepsilon_s^2, -\varepsilon_{ks} \leq \varepsilon_s \leq 0, \quad (4)$$

где σ_r , σ_s – соответственно напряжения растяжения и сжатия изгибаемого проводника; ε_r , ε_s – линейные деформации, адекватные σ_r , σ_s ; σ_{ks} , σ_{kr} – нормальные напряжения в крайних точках (индекс k) круглого поперечного сечения; ε_{ks} , ε_{kr} – деформационные параметры в тех же точках k ; $A_s = \text{const}$, $A_r = \text{const}$ – искомые коэффициенты; $t = t_n = 20^\circ\text{C}$ – соответственно конечная и начальная температуры при нулевом перепаде (градиенте) (3);

2) классическое допущение прикладной механики твердого деформируемого тела об однородности, изотропности и сплошности материала [10, 12–14];

3) уточняющие (частные) допущения, связанные с тем, что в процессе искривления стержня (рис. 2, 3): форма и начальный диаметр d_n его поперечного сечения не изменяются при выполнении равенства (3); радиус кривизны ρ изогнутой геометрической оси остается постоянным:

$$\rho(T) = \rho(0) = \rho = \text{const}; \quad (5)$$

обладающего физической и геометрической нелинейностью (рис. 2, 3) [9, 10, 16, 17–19]. При этом, как отмечено в [11], знание о величинах характеристик прочности, жесткости и пластичности конкретного материала в условиях нормальной температуры $t_n = 20^\circ\text{C}$ является уже недостаточным для проектирования конструкций, работающих при положительных и высоких тепловых градиентах [14, 17, 20] $T = t - 20^\circ\text{C} \gg 0$.

Можно заметить, что с повышением температуры $t \gg 20^\circ\text{C}$ начальный модуль упругости $E = E(t)$ и расчетно-нормативный предел прочности $\sigma_{pp} = \sigma_{pp}(t)$ непрерывно и сильно понижаются у цветных металлов и их сплавов [11, 14, 15, 17].

В связи с особенностями, непосредственно связанными с моделированием процесса разрушения [13] искривленного и нагретого медного проводника, существенно уточняем, дополняем и модифицируем общую теорию и алгоритм [10] применительно к решению поставленной физико-технической нелинейной задачи строительной механики: 1) учет влияния на понижение модуля упругости $E = E(t)$ и предела прочности $\sigma_{pp} = \sigma_{pp}(t)$ постоянного температурного градиента T , что обосновано в работе [11]; 2) замена σ_{pp} в условии прочности (2) [10] на истинное сопротивление отрыва S_k [13, 17] с коэффициентом $k > 1$, позволяющим повысить растягивающее напряжение σ_{kr} в крайнем, наиболее натянутом деформацией $\varepsilon_{\max}$, волокне проволоки (рис. 2, точка K_r) до предельно опасного (разрушающего) уровня $S_k = \sigma_{krp}$ при сохранении экстремума

$$\sigma_{rp}^{(\max)} = kS_k > \sigma_{krp} = S_k \quad (7)$$

внутри (в глубине) поперечного сечения стержня и нисходящего участка диаграммы $\sigma_r(\varepsilon_r)$ [9–11], характерного для пластичных материалов [9, 13, 14] (рис. 3, кривая 2); 3) предложенная в авторской публикации [11] методика расчета механической характеристики $S_k = S_k(t)$ меди, базирующейся на экспериментально-теоретических результатах, а также на численном решении трансцендентного уравнения и формулах (26), (28), (38) из [11], откуда следует второе трансцендентное соотношение, определяющее S_k ; 4) возможность учета увеличения начального диаметра d_n (радиуса R_n) стержня $d_n = 2R_n$ до величины $d = d_n(1 + \alpha T)$ вследствие значительного повышения температуры $t \gg 20^\circ\text{C}$ медного провода при токовой перегрузке. Параметр $\alpha = \alpha(t)$ представляет собой коэффициент линейного теплового расширения меди, зависящий от t [19, 20]; 5) дополнительная предпосылка о том, что ввиду малости коэффициента $\alpha \ll 1$ [11, 13, 15, 18, 20] соотношение между температурной деформацией $\varepsilon_t = \alpha T \ll 1$ и нормальным напряжением σ_t является линейным [9, 16] $\sigma_t = -E(t)\varepsilon_t(t)$, а принимая во внимание статическую определенность решаемой задачи при условии отсутствия кинематических связей, стесняющих свободное перемещение границ тела (стержня-проволоки), можно считать, что $\sigma_t = 0$.

И в этом случае напряженно-деформированное состояние изгибаемого проводника (рис. 2) будет характеризоваться только внутренними силовыми σ_r, σ_s и геометрическими составляющими $\varepsilon_r, \varepsilon_s$ от действия момента M (рис. 2, 3, кривая 2) [13, 17]. Справедливость допущения $\sigma_t = 0$ при соблюдении линейных соотношений $\varepsilon_t = \alpha T$, $\sigma_t = E\varepsilon_t$ можно обосновать, модифицировав с помощью [13] функциональные формулы (1), (4) к тождественному виду после дополнения их напряжением σ_t и замены $\varepsilon_r, \varepsilon_s$ суммами $\varepsilon_r + \varepsilon_t, \varepsilon_s + \varepsilon_t$, состоящими из двух частей – малых силовых $\varepsilon_t, \varepsilon_s \ll 0.05$ и температурной $\varepsilon_t \ll 1$.

С целью получения аналитического экстремума $\sigma_{rp}^{(\max)}$ у функции $\sigma_r = \sigma_r(\varepsilon_r)$ на основании (7), свидетельствующего о наличии требуемой нисходящей ветви на графике $\sigma_r(\varepsilon_r)$ (рис. 3, кривая 2), преобразуем выражение (1) по методике [9, 10], откуда после реализации условия $d\sigma_r(d\varepsilon_r)^{-1}$ следуют зависимости ε_{mp}, A_r , включающие касательный модуль E_k [9, 10, 12].

Заменяя ϵ_r на ϵ_{rmp} при соблюдении равенства $\sigma_{rp}^{(\max)} = kS_k$, будем иметь необходимые соотношения для определения физико-механической константы A_r и деформации ϵ_{rmp} .

Далее, формулируем, согласно аппроксимациям (1), (4), гипотезе (6), принятым допущениям и вышеуказанным предпосылкам, первое необходимое условие равновесия, эквивалентное отсутствию при чистом изгибе равнодействующей внутренней силы N , перпендикулярной плоскости любого радиального сечения и обусловленной напряжениями σ_r , σ_s (рис. 2, 3, кривая 2) [9, 10, 12]:

$$N = \int_F \sigma dF = \int_{F_r} \sigma_r dF + \int_{F_s} \sigma_s dF = 0, \quad (8)$$

где F , dF , F_r , F_s — соответственно общая площадь всего сечения, ее бесконечно малая величина $dF = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$ (рис. 2) и аналогичные геометрические характеристики $F_r = F_s$ растянутой и сжатой частей.

Представляем в функциональных зависимостях (1), (4) линейные относительные деформации ϵ_s , ϵ_r на основании (6) выражением $\epsilon_r = \epsilon_s = \rho^{-1}$ с известным коэффициентом A_r .

Параметр A_s в функции (4) вычисляем из интегрального статического условия $N=0$ и раскрытия соответствующих интегралов с помощью справочных таблиц [21, 22].

Вторым уравнением равновесия (в дополнение к (8)) для бесконечно малого кольцевого элемента проводника, ограниченного центральным углом $d\theta$, связываем функцию изгибающего момента M с кривизной бруса $\frac{1}{\rho} = \text{const}$ (рис. 2) [9, 10, 12], используя зависимости (1), (4), таблицы [21, 22] и уже выведенные соотношения A_r , A_s :

$$M = M\left(\frac{1}{\rho}\right) = \int_F \sigma y dF = \int_{F_r} \sigma_r y dF + \int_{F_s} \sigma_s y dF, \quad 0 \leq \frac{1}{\rho} \leq \left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max} \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по аргументу $\frac{1}{\rho}$ и приравнявая производную к нулю, получаем расчетные аналитические зависимости для наибольшей кривизны $\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max}$ и минимального (предельного) радиуса $\rho_{\min}$, когда действует изгибающий момент $M_{\max}$, а функция (9) достигает экстремума $M_{\max} = \left(\rho_{\max}^{-1}\right)$.

Руководствуясь предельной зависимостью (1), дополненной индексом “ p ”, после замены деформации ϵ в соответствии с (6) находим ординату y_m [9, 10], адекватную максимальному значению $\sigma_{rp}^{\max} = kS_k$, согласно требованию (7) (рис. 2, 3, кривая 2):

$$\left[\frac{d\sigma_{rp}}{dy} \right]_{y=y_m} = E\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max} - 3 \frac{4E^3}{27k^2 S_k^2} \left[\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max} \right]^3 y^2, \quad (10)$$

$$y_m = 0.3465d_n(1 + \alpha T) = 0.693R_n(1 + \alpha T).$$

В соответствии с предпосылкой (7) для функции $\sigma_{rp}(y)$ в диаграмме разрушения, изображенной на рис. 3 (кривая 2), вычисляем коэффициент $k > 1$ из равенства

$$\sigma_{krp}(0.5d) = E\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max} 0.5d - \frac{4E^3}{27k^2 S_k^2} \left[\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max} \right]^3 (0.5d) = S_k, \quad (11)$$

после подстановки $y = y_{\max} = 0.5d$ воспользовавшись уже известным значением $(\frac{1}{\rho})_{\max}$ и $\sigma_{pp}(y_{\max})$, когда в крайнем предельно растянутом волокне круглого поперечного сечения медной проволоки (рис. 2, точка K_p) переменная $y = y_{\max} = 0.5d$. В результате после несложных преобразований и сокращений получаем $k = 1.50775$.

Для проверки соблюдения ограничений (7), (9), связанных с вычислением наибольшей относительной продольной деформации $\epsilon_{\max}$, и построения графика предельных сжимающих напряжений σ_{sp} воспользуемся зависимостями (4), (6), $\epsilon_{\max} = R(\frac{1}{\rho})_{\max} \leq 0.05$, A_s , $R = 0.5d$, $(\frac{1}{\rho})_{\max}$, подставив в них коэффициент $k = 1.50775$.

$$\begin{aligned}\epsilon_{\max} &= \epsilon_{krp} = |\epsilon_{ksp}| = (\frac{1}{\rho})_{\max} \frac{d}{2} = 4.327 \frac{kS_k}{Ed} \frac{d}{2} = \\ &= 4.327 \cdot 1.50775 \cdot 0.5 \frac{S_k}{E} = 3.262 \frac{S_k}{E} \leq 0.05;\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{sp} &= \sigma_{sp}(y) = E(\frac{1}{\rho})_{\max} y + \frac{64E^3 d}{405\pi k^2 S_k^2} \left[(\frac{1}{\rho})_{\max} \right]^3 y^2 = \\ &= 6.52403 S_k \cdot \frac{y}{d} \left[1 + 0.94178 \frac{y}{d} \right], -\frac{d}{2} \leq y \leq 0;\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{sp}(-0.25d) &= -6.52403 S_k \cdot 0.25(1 - 0.94178 \cdot 0.25) = -1.24699 S_k, \\ \sigma_{sp}(-0.5d) &= -6.52403 S_k \cdot 0.5(1 - 0.94178 \cdot 0.5) = -1.72596 S_k.\end{aligned}\quad (14)$$

Абсолютное численное превышение напряжения $\sigma_{ksp}^{(\max)}$ по сравнению с $\sigma_{rp}^{(\max)}$ (рис. 3, кривая 2)

$$\sigma_{ksp}^{(\max)} = |\sigma_{sp}(-0.5d)| = 1.72596 S_k > \sigma_{kp}^{(\max)} = k S_k = 1.50775 S_k \quad (15)$$

не является опасным, поскольку пластичные и упруго-пластичные материалы (в том числе медь) не имеют предела прочности при сжатии [14].

Предельное значение деформации растяжения ϵ_{rmp} (дополненной индексом “p”), соответствующее экстремальному напряжению $\sigma_{rp}^{(\max)}$, можно вычислить по гипотезе плоских сечений (6), когда $y = y_m = 0.3465d$, согласно (10), с учетом $(\frac{1}{\rho})_{\max}$, k .

Численно-аналитические итоги расчета $(\frac{1}{\rho})_{\max}$, k , $M_{\max}$ и (14) в полной мере согласуются с графической иллюстрацией, приведенной на рис. 4.

В соответствии с количественной информацией рис. 4 и экспериментально-статистическими данными [4] медный провод, подверженный воздействию тока большой величины, вследствие сильного нагрева начнет разрушаться с крайнего растянутого волокна в наиболее опасной точке k_p путем образования трещины длиной $l_{tr} = 0.668R$ с последующим ее увеличением примерно до половины поперечного сечения и разрывом проводника (рис. 2, 4, 5). При этом велика вероятность быстрого трещинообразования ввиду наличия на эпюре σ_{rp} еще двух внутренних опасных точек m , v в материале (рис. 4) с максимальным нормальным напряжением $\sigma_{rp}^{(\max)} = 1.50775 S_k > S_k$ и предельно допустимым сопротивлением S_k .

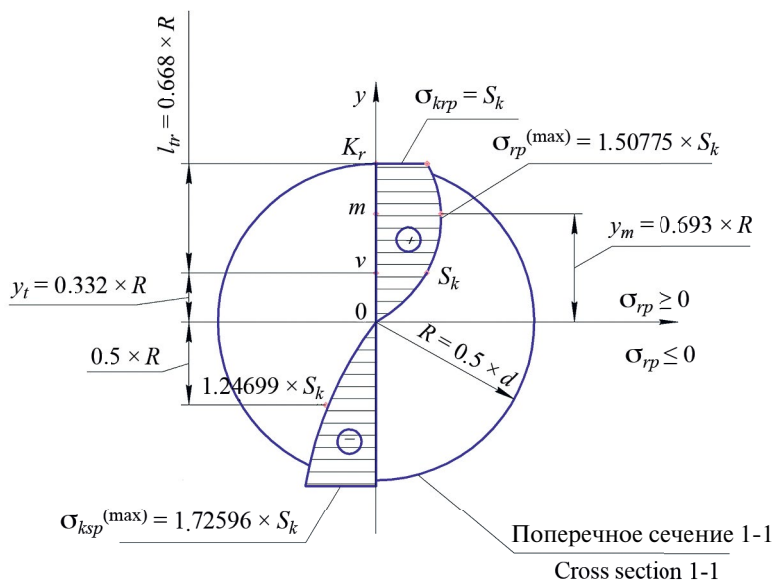


Рис. 4. Предельные эпюры внутренних силовых факторов σ_{rp} , σ_{sp} в плоскости поперечного сечения медного провода.

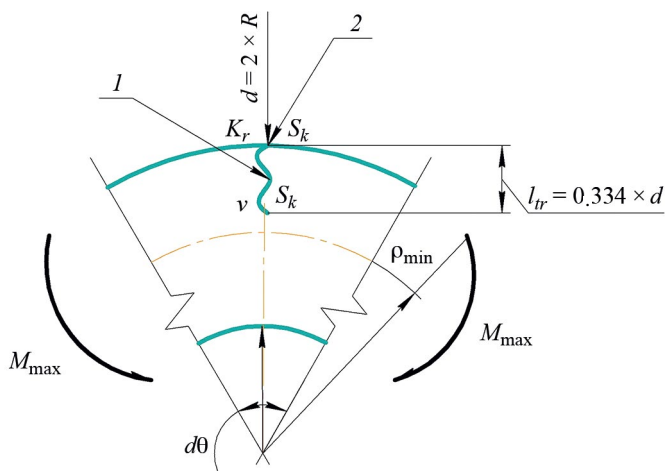


Рис. 5. Начальная стадия процесса разрушения в предельном напряженно-деформированном состоянии чистого изгиба моментом $M_{\max}$: 1 – трещина минимальной длины l_{tr} ; 2 – наиболее опасная точка.

Таким образом, разрыв проводника не произойдет при $\frac{1}{\rho} < \left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max}$ или $\rho > \rho_{\min}$,

где ρ – фактический радиус кривизны. В противном случае, если $\frac{1}{\rho} \geq \left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max}$ либо $\rho \leq \rho_{\min}$, то гарантировано его разрушение.

Из этого следует условие предельной несущей способности (неразрушимости) медного однопроволочного проводника в классической интерпретации [13,14,19] $\sigma_{knp} < S_k$.

В то же время, представляя минимально допустимое значение растягивающего напряжения

$$\left[\sigma_{rp}^{(\max)} \right] = \frac{k S_k}{[n_k]} = 1.50775 \frac{S_k}{[n_k]}, 1 < [n_k] \leq 2, \quad (16)$$

при $k = 1.50775$ с минимальным нормируемым коэффициентом запаса $1 < [n_k] \leq 2$ [19] и формулируя проектное условие неразрушимости

$$\sigma_{rp}^{(\max)} \leq \left[\sigma_{rp}^{(\max)} \right], \quad (17)$$

становится возможным определить соответствующие граничные геометрические характеристики $\left[\left(\frac{1}{\rho} \right)_{\max} \right], [\rho_{\min}]$

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)_{\max} \leq \left[\left(\frac{1}{\rho} \right)_{\max} \right] = \frac{6.524}{[n_k]} \cdot \frac{S_k}{Ed_n(1 + \alpha T)}, \quad (18)$$

$$\rho_{\min} \leq [\rho_{\min}] = \rho_{\min} \cdot [n_k],$$

воспользовавшись зависимостями $\left(\frac{1}{\rho} \right)_{\max}, \rho_{\min}$ с запасом несущей способности $[n_k]$.

В настоящей статье, исходя из сечения исследуемых медных проводников, моделировались условия токовой перегрузки, характерные для автомобильной электрической сети, электрической сети бытовых помещений, кабелей промышленного оборудования, где эффект провисания проводника при нагреве практически отсутствует из-за конструктивных особенностей прокладки проводников и их длины.

В работе [24] показано, что токовая перегрузка формирует структуру электромагнитного поля, которое взаимодействует с протекающим током и, согласно закону Ампера, порождает механические усилия, направленные в тело проводника (как в электрических машинах). При этом авторы [24] подчеркивают, что при токовой перегрузке, как и при коротком замыкании, возникают эффекты взаимодействия тока, электромагнитного поля, теплового поля от джоулева нагрева и механического от сил Ампера и пондеромоторных сил магнитного поля.

В настоящей статье исследовалась начальная стадия разрушения медного проводника под действием токовой перегрузки, когда визуально действие этих сил еще не обнаруживается, т. е. еще нет оплавлений, изменений диаметра сечения проводника и т. п., при этом на рис. 1 видно, что форма и площадь сечения проводника еще не изменились.

В работе [25] изменение формы и площади сечения проводника было зафиксировано только в месте его оплавления на конечной фазе его разрушения. Кроме того, в работах [4, 25] показано, что разрушение медного проводника, как правило, имеет место на нескольких участках, и, если оплавления сразу привлекают внимание и исследуются в рамках пожарно-технической экспертизы, то наличие трещин медного проводника, как правило, не исследуется, несмотря на то, что это важный криминалистический признак.

В работе [26] показано, что при механическом раскрытии (доломе) трещины медного проводника, подвергнутого токовой перегрузке, изменение формы и площади

сечения проводника не фиксировалось. Таким образом, можно с полной уверенностью констатировать, что в пределах введенных допущений круговая форма поперечного сечения медного проводника не изменяется при изгибе с минимально допустимым радиусом кривизны $\rho_{\min}$. Этот факт подтвержден как прямыми замерами, так и путем теоретического определения $\rho_{\min}$ и $\epsilon_{\max}$ изгибаемой медной проволоки диаметром 1 мм из стандартной электротехнической меди марки М1 по ГОСТ 859-2014 и при $t = 700^\circ\text{C}$ [18, 20].

В предлагаемой модели связь между нагревом проводника и прочностными характеристиками учитывается изменением модуля упругости, в частности, при температуре 20°C он равен $E = 12714 \text{ кг/мм}^2$, а при температуре 700°C — $E = 9883 \text{ кг/мм}^2$.

Заключение. Исследованием на растровом электронном микроскопе медных проводников, подвергшихся токовой перегрузке и изъятых с места пожара, наглядно подтверждено, что на начальном этапе процесса токовой перегрузки происходит образование микротрещин, которые затем под действием электродинамических сил развиваются до полного разрушения проводника.

Разработана уточненная теория предельного напряженно-деформированного состояния, и на ее основе предложена статическая механико-математическая модель разрушения медного стержня круглого поперечного сечения в условиях чистого неупругого изгиба.

Решение новой актуальной фундаментально-прикладной задачи нелинейной строительной механики доведено до простых конечных формул, позволяющих их использовать в практической деятельности.

Полученные результаты можно непосредственно использовать как для количественной оценки несущей способности медных проводников в условиях их токовой перегрузки при проведении обоснованной физико-математически пожарно-технической экспертизы, так и при проектировании электропроводки.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roby R. J., McAllister J. Forensic investigation techniques for inspecting electrical conductors involved in fire // Final Technical Report for Award No. 239052. Columbia : Combustion Science & Engineering, 2012. 259 p.
2. Babrauskas V. Arc mapping: a critical review // Fire Technology. 2018. V. 54. Iss. 3. P. 749. https://doi.org/10.1007_s10694-018-0711-5
3. Xiao K. C. et al. Investigation of evolution process and molten marks characteristics of overcurrent fault // J. Xian Univ. Sci. Technol. 2020. V. 40. P. 393.
4. Мокряк А. Ю. Установление природы оплавлений медных проводников и латунных токоведущих изделий при экспертизе пожаров на объектах энергетики: Дис. ... канд. техн. наук. СПб.: Академия ГПС МЧС России, 2018.
5. Финкель В. М., Головин Ю. А., Слетков А. А. О возможности торможения быстрых трещин импульсами тока // ДАН СССР. 1976. Т. 227. № 4. С. 848.
6. Головин Ю. И., Финкель В. М., Слетков А. А., Шибков А. А. Динамика разрушения материала в вершине трещины под действием сильного электромагнитного поля // ФХОМ. 1978. № 2. С. 40.
7. Емельянов О. А. Локальное разрушение тонких металлических пленок при электродинамических нагрузках // Журнал технической физики. 2008. Т. 78. № 7. С. 48.
8. Krivosheev S. I., Adamian Yu. E., Alekseev D. I. et al. The impact of local current density increase on conductor destruction // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1147 (1). 012033. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1147/1/012033>

9. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
10. Недобитков А. И., Абдеев Б. М. О физической основе локальной токовой перегрузки // Пожаровзрывобезопасность 2019. Т. 28. № 6. С. 18.
<https://doi.org/10.18322/PVB.2019.28.06.18-28>
11. Недобитков А. И., Абдеев Б. М. Неупругое растяжение медного однопроволочного проводника при неограниченных местных деформациях и положительной температуре // Журнал технической физики. 2021. Т. 91. № 6. С. 946.
<https://doi.org/10.21883/JTF.2021.06.50864>
12. Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов: Пер. с англ. 2-е изд. СПб.: Лань, 2002. 672 с.
13. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов: учебное пособие. М.: Наука, 1986. 560 с.
14. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. М.: Наука, 1975. 832 с.
15. Варданян Г. С., Андреев В. И. и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебн. пособие / Под ред. Г.С. Варданян. М.: Изд-во АСВ, 1995. 558 с.
16. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.
17. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов М.: Наука, 1974. 500 с.
18. Николаев А. К., Костин С. А. Медь и жаропрочные медные сплавы. М.: ДПК Пресс, 2012.
19. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность: Руководство и справ. пособие / Под ред. С.В. Серенсена. М.: Машиностроение, 1975. 488 с.
20. Сакало В. И., Гусева Ю. С., Иншакова Т. В. Влияние температуры термообработки на механические свойства меди М1 // Вестник Брянского гос. тех. ун-та. 2015. Т. 47. № 3. С. 94.
21. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., исправл. М.: Наука, 1986. 544 с.
22. Смолянский М. Л. Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1965. 112 с.
23. Правила устройства электроустановок. Все действующие разделы шестого и седьмого изданий с изменениями и дополнениями. Новосибирск: Норматика, 2018. 462 с.
24. Гуляев И. В., Васенин А. Б., Степанов С. Е. и др. Тепловизионное обследование изогнутых шинопроводов распределительных устройств трансформаторных подстанций // Автоматизация и ИТ в энергетике. 2022. № 6 (155). С. 2.
25. Yang Li et all. Analysis of overload induced arc formation and beads characteristics in a residential electrical cable // Fire Safety J. 2022. V. 131. P. 103626.
<https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2022.103626>
26. Недобитков А.И. Фрактография изломов медных проводников автомобильной электрической цепи // Пожаровзрывобезопасность. 2016. Т. 25. № 2. С. 21.
<https://doi.org/10.18322/PVB.2016.25.02.21-27>