
МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.1

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ. ВЛИЯНИЕ АСИММЕТРИИ

© 2024 г. Л. Я. Банах

*Институт машиноведения им. А. А. Благодравова, Москва, Россия
e-mail: banl@inbox.ru*

Поступила в редакцию 21.03.2024 г.

После доработки 03.06.2024 г.

Принята к публикации 15.06.2024 г.

Исследуются колебания механических систем, обладающих геометрической симметрией. Показано, что в системах с малой асимметрией возникает расщепление кратных собственных частот, что приводит к неустойчивости вынужденных колебаний в этой частотной области, а также возникновению биений при собственных колебаниях. В механических системах симметрично расположенные элементы конструкции имеют, как правило, несколько степеней свободы или являются отдельными подсистемами. Поэтому введены блочные операторы симметрии и базисные векторы, характеризующие взаимодействия этих элементов конструкции, обусловленных условиями симметрии. Показано, что для систем с иерархией симметрий результирующий оператор симметрии равен произведению операторов, соответствующих каждой группе симметрии. Найдено, что базисные векторы для данного типа симметрии остаются такими же и для нелинейных систем с тем же типом симметрии. Их использование позволяет разделить исходные уравнения с нечетной функцией нелинейности на независимые нелинейные уравнения, каждое из которых описывает свою координату. Используется математический аппарат теории представления групп.

Ключевые слова: колебания, симметрия, обобщенные базисные векторы, рамы, нелинейные системы, теория групп

DOI: 10.31857/S0235711924050025, **EDN:** NURYFE

Постановка задачи. Системы, имеющие симметричную структуру, широко распространены в природе и технике. Они используются, например, в промышленном и гражданском строительстве, в авиационных и космических технологиях, в роторных системах. Их применение удобно из требований технологии, типизации. Кроме того, системы с симметричной структурой обладают целым рядом динамических свойств, которые делают их применение чрезвычайно удобным. Так, в частности, в симметричных системах: 1) отсутствует связь между поступательными и поворотными перемещениями при свободных колебаниях; 2) при поворотных колебаниях имеется «спокойная» точка — центр симметрии, что важно для проблем виброизоляции; 3) их поведение хорошо прогнозируемо, и в ряде случаев возможно аналитическое решение.

Особенно важно отметить, что такие свойства присущи как линейным, так и нелинейным системам, и их изучение является целью настоящей статьи.

Исследованию статике и динамики систем с учетом симметрии конструкций посвящена обширная литература [1–6].

Универсальным методом исследования систем с дискретной симметрией является теория представления конечных групп (теории дискретных групп) [7–9]. Этот подход позволяет найти основные динамические особенности систем, используя лишь свойства симметрии, не решая уравнения движений. В теории групп применяются проективные операторы симметрии \mathbf{P} и базисные векторы $\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{x}$, которые определяются только типом симметрии системы.

Обобщенные операторы симметрии и формы колебаний. Применение теории представления групп для задач механики имеет ряд особенностей. Так, в частности, симметрично расположенные элементы конструкции (узлы симметрии) могут иметь n степеней свободы. Более того, в качестве таких элементов могут быть также подсистемы со своей группой симметрии. Поэтому требуется обобщение имеющихся подходов для таких систем.

Если каждый элемент симметричной системы имеет только одну координату, тогда базисные векторы V_i — это скаляры, определяющие формы колебаний такой системы. Однако, если элемент содержит n степеней свободы, то целесообразно использовать блочные векторы, в которых каждый блок имеет n -й порядок [4, 10]. Обобщенные блочные базисные векторы характеризуют взаимодействия симметрично расположенных многомерных элементов системы, полагая их твердыми телами. Их можно трактовать как «симметричные» формы колебаний для твердотельного приближения расчетной модели. Далее для краткости мы будем называть обобщенные базисные векторы симметричными *типами* колебаний.

Используя блочные базисные векторы \mathbf{V} , можно при необходимости определить и собственные формы колебаний, описывающие каждую координату в отдельности в n -мерном узле. Для этого достаточно определить формы колебаний Φ_1 отдельного узла, рассматривая его как парциальную подсистему. Образуя затем матрицу $\Phi = [\Phi_1 \dots \Phi_n]$, где n — число степеней свободы узла, найдем произведение матриц

$$\Phi\mathbf{P} = \mathbf{H},$$

где \mathbf{H} и определит собственные формы колебаний.

Прежде, чем переходить к изучению колебаний общего случая симметричной системы, поясним введенные выше понятия на простом примере двухмассовой системы (рис. 1), симметричной относительно вертикальной оси и совершающей вследствие этого только симметричные и кососимметричные формы колебаний.

Система состоит из двух одинаковых твердых тел 1 и 2, каждое из которых имеет две степени свободы — перемещение вдоль осей (x, y) ; угловые колебания для простоты не учитываем. Тела имеют упругое закрепление вдоль осей x, y , с коэффициентами главной и взаимной жесткости, равными k_1, k_2, k_{12} , соответственно. Масса тел равна M , и они связаны между собой упругим элементом 3, жесткость которого

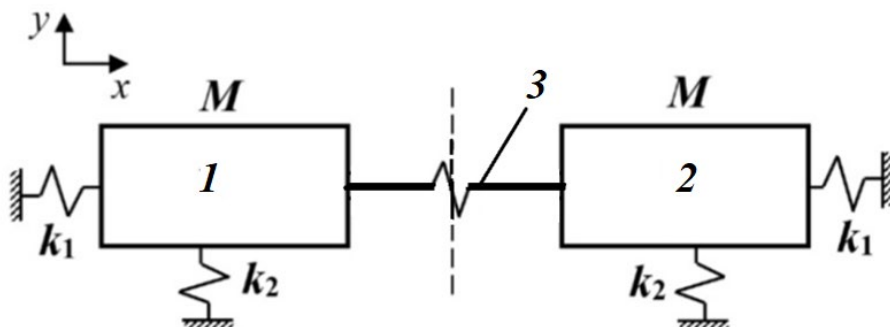


Рис. 1. Двухмассовая система, симметричная относительно вертикальной оси y .

вдоль осей x , y равна соответственно K_1 , K_2 . Уравнение свободных колебаний такой системы имеет вид

$$D = \begin{bmatrix} -M\lambda^2 + k_1 + k_{12} + K_1 & -k_{12} & -K_1 & & \\ & -k_{12} & -M\lambda^2 + k_2 + k_{12} + K_2 & & -K_2 \\ & -K_1 & & -M\lambda^2 + k_1 + k_{12} + K_1 & -k_{12} \\ & & -K_2 & -k_{12} & -M\lambda^2 + k_2 + k_{12} + K_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (1)$$

Если бы каждое тело имело только одну степень свободы, например x , то известное линейное преобразование координат

$$\begin{bmatrix} x_{\text{сим}} \\ x_{\text{кс}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

приводило бы к разделению исходных уравнений на два независимых, описывающих симметричные и кососимметричные колебания соответственно. Но в случае двух степеней свободы в узле необходимо обобщение этого преобразования. Оно теперь имеет вид блочной матрицы

$$P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E & E \\ E & -E \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где E — единичная матрица 2×2 .

Тогда найдем из (1)

$$D^* = P_2^T D P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -M\lambda^2 + k_1 & k_{12} & & & \\ k_{12} & -M\lambda^2 + k_2 & & & \\ & & -M\lambda^2 + k_1 + 2K_1 & k_{12} & \\ & & k_{12} & -M\lambda^2 + k_2 + 2K_2 & \end{bmatrix} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, исходные уравнения распались на два независимых блока, имеющих очевидный физический смысл: левый верхний блок описывает синхронные колебания тел 1 и 2 при которых упругая связь 3 между ними не работает; правый нижний блок описывает кососимметричные колебания тел в противофазе, при этом узел колебаний находится в середине упругого элемента 3. В уравнении (3) этому соответствует жесткое закрепление этого узла, в результате чего величина жесткости удваивается и становится равной $2K_1$, $2K_2$. Следовательно, базисные векторы (2) являются обобщенными формами (типами) колебаний.

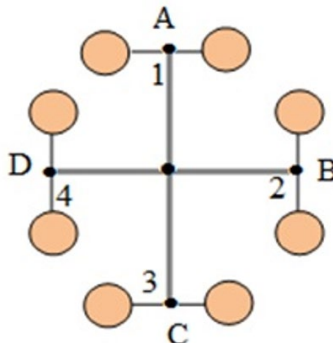


Рис. 2. Система с иерархией симметрий: 1–4 — узлы с группой симметрии C_{4v} , подсистемы А, В, С, D — с группой симметрии C_{2v} .

Системы с иерархией симметрий. Рассмотрим теперь случай систем с иерархией симметрий, когда узлы симметрии сами являются подсистемами, имеющими свою группу симметрии. Например, система, представленная на рис. 2, имеет группу симметрии C_{4v} (типа квадрата), а ее узлы 1–4 — подсистемы А, В, С, D с 2-мя степенями свободы — совершают симметричные и кососимметричные колебания, т.е. имеют группу симметрии C_{2v} , (в теории групп системы с циклической симметрией типа n -угольника обозначают символом C_{nv}).

Найдем вначале проективный оператор P_4 [8, 9] системы (рис. 2), считая подсистемы А, В, С, D твердыми телами и полагая E (2×2)

$$P_4 = \begin{bmatrix} E & E & E & E \\ E & -E & -E & E \\ E & E & -E & -E \\ E & -E & E & -E \end{bmatrix}.$$

Затем определим проективный оператор P_2 (2) для подсистем, рассматривая их как парциальные. Тогда матричное произведение

$$P^* = P_2 P_4 = \begin{bmatrix} P_2 & P_2 & P_2 & P_2 \\ P_2 & -P_2 & -P_2 & P_2 \\ P_2 & P_2 & -P_2 & -P_2 \\ P_2 & -P_2 & P_2 & -P_2 \end{bmatrix},$$

определил проективный оператор P^* рассматриваемой иерархической системы. Таким образом, результирующий оператор равен произведению операторов, отвечающих твердотельной модели и парциальных подсистем, т.е. происходит как бы произведение симметрий. Такой вид решения определяет возникновение модулированных колебаний, модулируемых низшей частотой, отвечающей, как правило, твердотельной модели. Поэтому обобщенные базисные векторы позволяют выявить основные динамические свойства симметричной системы, являясь первой ступенью иерархии при построении расчетной модели. Отметим еще, что оператор симметрии P описывает колебания любых точек системы, расположенных в соответствии с рассматриваемой группой симметрии.

Заметим, что этот результат аналогичен полученному ранее результату при анализе периодических структур, образованных периодическими подсистемами [11], и такая аналогия вполне ожидаема. Действительно в [11] показано, что результирующее решение для таких периодических систем можно представить в виде произведения волновых функций, отвечающих колебаниям системы без учета упругих свойств подсистем и самих подсистем, рассматривая их как парциальные. В случае вынужденных колебаний это приводит к появлению модулированных колебаний. В то же время, симметричные структуры также можно рассматривать как периодические структуры, т.е. системы с трансляционной симметрией, но при граничных условиях, соответствующих замыканию концов периодической структуры.

Колебания симметричных рам. Влияние асимметрии и возникновение биений. Рассмотрим колебания симметричной рамы (рис. 3а).

Запишем уравнения колебаний рамы, используя метод конечных элементов (МКЭ) [12–14] в аналитической форме [4, 10]. Проанализируем плоские колебания рамы в плоскости (x, y) . Положим для простоты, что каждый пролет рамы 1–2, ..., 6–1 можно представить как один конечный элемент (хотя полученные далее результаты будут справедливы и в общем случае n конечных элементов). Матрица жесткости для 1-го и 2-го концов плоского балочного элемента в плоскости (x, y) (рис. 3б) имеет вид блочной матрицы, описывающей поступательные перемещения u и угол поворота сечения θ вокруг поперечной оси [12–14]

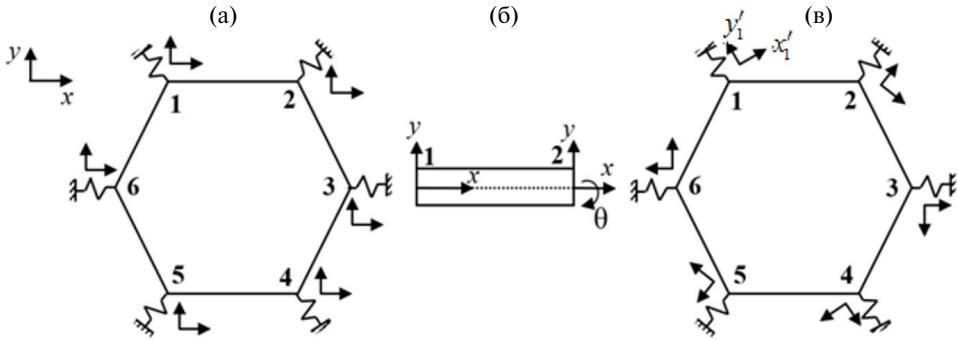


Рис. 3. Симметричная шестиугольная рама: (а) — направление осей координат при расчете МКЭ; (б) — плоский конечный элемент; (в) — «симметричная» система координат.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}^{11} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}.$$

В МКЭ традиционно направления осей координат выбираются одинаковыми в каждой точке расчета (рис. 3а). Матрицы жесткости и матрицы инерции элементов, входящих в i -й узел симметрии рамы, записываются в этих осях с помощью поворота местных осей координат конечных элементов на угол ϑ_i , соответствующий данному узлу. Это означает умножение координат на матрицу поворота

$$\theta_i = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}_i.$$

Численные расчеты на основе МКЭ проводятся на основе стандартных программ, однако выявление *общих закономерностей* возможно только с использованием аналитических, и, в частности, теоретико-групповых подходы. Для проведения аналитических исследований выберем локальную систему координат (x'_i, y'_i) ($i = 1, \dots, n$), симметричную относительно каждого узла (рис. 3в): ось y'_i направлена по биссектрисе соответствующего узла и, следовательно, оси координат для каждого последующего узла поворачиваются на угол, равный $2\pi/n$. На рис. 3в в качестве примера приведено обозначение этих осей для 1-го узла ($i = 1$). В этой системе координат, каждый узел симметрии расположен совершенно идентично и поэтому матрица, описывающая колебания, состоит из одинаковых блоков и приобретает особенно простой вид, не зависящий от нумерации узлов. Так, для n -угольной симметричной рамы получим

$$\mathbf{D}_n = \begin{matrix} \text{узлы} & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{11} & \mathbf{d}_{12} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{d}_{21} \\ \mathbf{d}_{21} & \mathbf{d}_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{d}_{11} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{d}_{21} & \mathbf{d}_{11} \end{bmatrix} & -\lambda \mathbf{M}; \end{matrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{d}_{11} = \theta_\varphi^{tr} \mathbf{K}_{11} \theta_\varphi + \theta_{-\varphi}^{tr} \mathbf{K}_{22} \theta_{-\varphi} + k, \quad (5)$$

$$\mathbf{d}_{12} = \mathbf{d}_{21} = \theta_\varphi^{tr} \mathbf{K}_{12} \theta_{-\varphi}.$$

Координаты (x, y) в исходной традиционной системе координат (рис. 3а) и в «симметричной» (x', y') (рис. 3в) связаны соотношением

$$\mathbf{X}' = \boldsymbol{\theta}\mathbf{X}, \quad \boldsymbol{\theta} = \text{diag}[\boldsymbol{\theta}_0 \quad \dots \quad \boldsymbol{\theta}_{m0}],$$

где $\boldsymbol{\theta}_{i0}$ — матрица поворота i -го узла на угол между исходной и «симметричной» осями координат.

Линейное преобразование координат (5) не меняет спектральных свойств системы, следовательно, собственные частоты системы, записанной в традиционной и «симметричной» системе координат, будут одинаковы.

Как видно, строки в матрице (4) получаются друг из друга путем циклической перестановки координат, что и является признаком геометрической симметрии системы.

Этот подход, очевидно, остается справедливым и в общем случае пространственных колебаний.

Найдем теперь основные динамические свойства симметричных рам на примере 4-угольной симметричной (квадратной) рамы, наиболее часто встречающейся в приложениях как основание для размещения оборудования (рис. 4а).

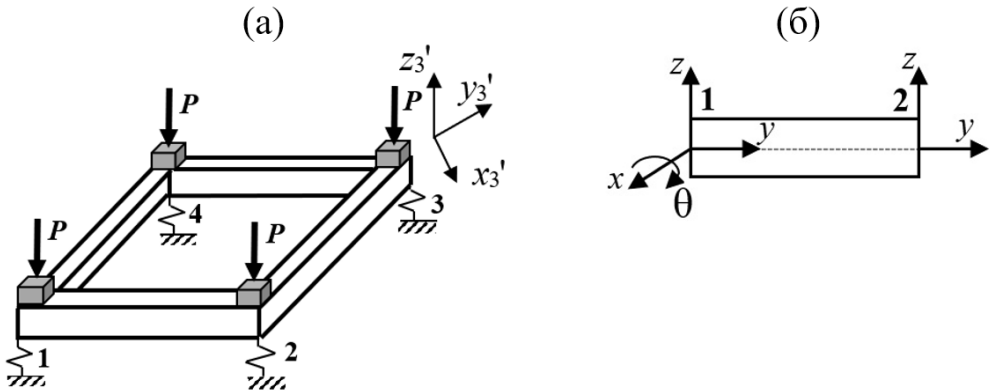


Рис. 4. Четырехугольная симметричная рама: (а) — квадратная амортизированная рама; (б) — плоский вертикальный балочный элемент.

Рама установлена на амортизаторах, жесткость которых равна $k_{ам}$. Рассмотрим колебания рамы в вертикальной плоскости. Предполагаем, как и выше, что рама образована балочными элементами. Здесь каждый конец плоского балочного конечного элемента (рис. 4б) описывает две координаты: перемещение вдоль вертикали z и угол поворота сечения θ вокруг поперечной оси.

Как и выше, выберем в каждом узле «симметричную» систему координат (x_i', y_i', z_i') ($i = 1, 2, 3, 4$), в которой ось z_i' направлена вертикально вверх, а ось y_i' вдоль биссектрисы соответствующего узла. На рис. 4а показаны в качестве примера оси координат x_3', y_3', z_3' для 3-го узла. Уравнение колебаний рамы в этих осях имеет вид, аналогичный (4)

$$\mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{11} + k_{ам} & \mathbf{d}_{12} & & \mathbf{d}_{21} \\ & \mathbf{d}_{11} + k_{ам} & \mathbf{d}_{12} & \\ & & \mathbf{d}_{11} + k_{ам} & \mathbf{d}_{12} \\ \text{symm} & & & \mathbf{d}_{11} + k_{ам} \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{M} = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{d}_{11} определяются аналогично (5).

Проективный оператор \mathbf{P}_4 и базисные векторы (типы колебаний) \mathbf{V}_4 для 4-угольной рамы [8, 9]

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} & \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} & -\mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} & -\mathbf{E} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} & \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_4 \\ \mathbf{X}_1 = -\mathbf{X}_2 = -\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_4 \\ \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = -\mathbf{X}_3 = -\mathbf{X}_4 \\ \mathbf{X}_1 = -\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3 = -\mathbf{X}_4 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что типы колебаний 4-угольной рамы следующие: 1) низший 1-й тип колебаний соответствует перемещению всех узлов в фазе, а высший 4-я — в противофазе; 2) собственные частоты 2-го и 3-го типов колебаний описывают поворотные колебания рамы относительно осей x , y соответственно; они имеют кратность, равную двум, а типы колебаний получаются круговой перестановкой друг друга.

Применяя к матрице \mathbf{D}_4 (6) групповое преобразование (7), найдем

$$\mathbf{D}_4^* = \mathbf{P}_4^{\text{tr}} \mathbf{D}_4 \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & & & \\ & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \\ & \mathbf{D}_{23}^{\text{tr}} & \mathbf{D}_{32} & \\ & & & \mathbf{D}_{44} \end{bmatrix}_4 - \lambda \mathbf{M} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, исходная матрица разделилась на независимые блоки, каждый из которых описывает свой тип колебаний: блок \mathbf{D}_{11}^* описывает синфазные колебания всех узлов рамы; блок \mathbf{D}_{44}^* — противофазные колебания, а двоянные диагональные блоки \mathbf{D}_{22}^* , \mathbf{D}_{23}^* , \mathbf{D}_{33}^* соответствуют кратным частотам, описывающим поворотные колебания вокруг ортогональных осей. Сдвоенные блоки, получаются в результате того, что соответствующие им базисные векторы в (7) не ортогональны между собой.

Предположим далее, что имеется некоторый разброс жесткостей балочных элементов и амортизаторов. Тогда система перестает быть строго симметричной и в матрице (8) появятся малые добавки $\delta_i \ll \varepsilon$, описывающие эту асимметрию

$$\mathbf{D}_4^* = \mathbf{P}_4^{\text{tr}} \mathbf{D}_4 \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^* & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \mathbf{D}_{22}^* & \mathbf{D}_{23}^* + \delta_{21} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \mathbf{D}_{32}^* + \delta_{21} & \mathbf{D}_{33}^* & \delta_{34} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \mathbf{D}_{44}^* \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{M}^* = 0. \quad (9)$$

Структура матрицы \mathbf{D}_4^* (9) асимметричной системы совпадает с матрицей слабосвязанных систем. Степень взаимодействия подсистем определяется безразмерными коэффициентами энергетической связи [10]

$$\alpha_{ij}^{pr} = \frac{(\mathbf{h}_i^p)^T \mathbf{K}_{ij} \mathbf{h}_j^r}{(\lambda_i^{(p)} \lambda_j^{(r)})^{1/2}}, \quad p = 1 \dots n_i, \quad r = 1 \dots n_j,$$

где \mathbf{h}_i , λ_i — собственные векторы и собственные частоты i -й парциальной подсистемы; \mathbf{K}_{ij} — матрица жесткости связи между подсистемами i и j . Этот коэффициент отражает отношение работы, произведенных связями между подсистемами к энергии этих парциальных подсистем.

При решении слабосвязанных систем, когда $\alpha_{ij}^{pr} < \varepsilon$, применяются методы теории возмущений. При отсутствии кратных собственных частот поправки, как для частот, так и для собственных векторов будут иметь порядок ε . Однако, в случае кратных собственных частот $\lambda_r = \lambda_{r+1}$ происходит их расслоение, собственные

векторы при этом резко меняются и определяются в виде линейной комбинации соответствующих собственных векторов [10]

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda_{i0} \pm \alpha_{is} \Delta\lambda + o(\varepsilon^2), \quad \mathbf{h}_i = \mathbf{h}_i \pm \mathbf{h}_{i+1} + \varepsilon s_{ij} \mathbf{h}_i + o(\varepsilon). \quad (10)$$

Из (10) следует, что вследствие малой расстройки частот λ_r, λ_{r+1} частотная полоса $\lambda_{i0} \pm \alpha_{is} \Delta\lambda$ характеризуется неустойчивостью при вынужденных колебаниях, когда формы колебаний резко меняются при малом изменении частоты, а при собственных колебаниях в окрестности этой частоты возникает режим биений. Этот результат особенно важен для симметричных систем, поскольку они имеют кратные корни.

Колебания квадратной рамы при наличии асимметрии. Пример расчета. В качестве примера рассмотрим вертикальные колебания квадратной амортизированной рамы (рис. 4а) при малой асимметрии, возникающей вследствие разброса жесткостных параметров.

Рама образована балочными элементами со следующими параметрами: длина $l = 0.3$ м, $b = h = 0.08$ жесткость амортизаторов $k_{i \text{ ам}} = 0.1 \cdot 10^{11}$ Н/м. Инерционные элементы $M = 20$ кг полагаем расположенными в узлах. Расчеты проводились с помощью программы matrixcalc.org.

Собственные частоты симметричной рамы ω (рад/с): 71; 210; 210; 290 собственные формы совпадают с (7).

Предположим теперь, что имеется разброс жесткостных параметров: жесткость балки между узлами 1–2 стала меньше на 0.1%, жесткость балки 2–3 — на 0.2%, жесткость балки 3–4 — больше на 0.2%, жесткость балки 4–1 осталась без изменений.

Собственные частоты ω (рад/сек): 71; 207; 212; 290. Соответствующие собственные формы: (1; 1; 1; 1), (–0.9; –1.1; 1; 1), (1.2; –1.1; –1.1; 1), (–0.9; 0.8; –0.9; 1). Таким образом, видим, что в результате асимметрии возникает расслоение кратных собственных частот. При вынужденных колебаниях в окрестности этих частоты происходит резкое изменение амплитуд колебаний при малом изменении частот возбуждения.

На рис. 5а, б представлены амплитуды колебаний асимметричной рамы при частотах возбуждения $\omega_1 = 2.07$ рад/с (рис. 5а) и $\omega_2 = 212$ рад/с (рис. 5б). Отношение амплитуд колебаний A_i i -го узла ($i = 1, 2, 3, 4$) к амплитуде возмущающей силы F : A_i/F на этих частотах следующие:

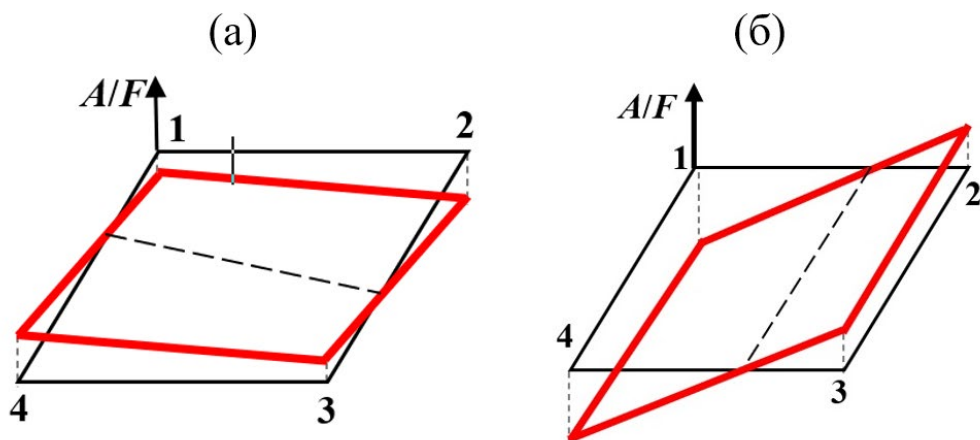


Рис. 5. Вынужденные колебания асимметричной рамы: (а) — возбуждение с частотой $\omega = 207$ рад/с; (б) — возбуждение с частотой $\omega = 212$ рад/с.

$$\omega_1 = 207 \text{ рад/с} : A_i / F : (-0.3, -0.42, 0.11, 0.3);$$

$$\omega_2 = 212 \text{ рад/с} : A_i / F : (-0.7, 0.3, 0.4, -0.5).$$

Как видим, амплитуды колебаний каждого узла рамы 1–4 резко меняются при малом изменении частоты возбуждения всего на 5 рад/с < 1 Гц. Пунктиром на рис. 5а, б выделены узловые оси, вокруг которых происходит поворот рамы при колебаниях. Как следует из сравнения рис. 5а, б, эти оси также существенно отличаются.

Формы колебаний нелинейных симметричных систем. Покажем, что полученные выше результаты можно применить и для определения нормальных форм колебаний нелинейных систем, обладающих геометрической симметрией.

Понятие формы колебаний нелинейной системы впервые ввел Р. М. Розенберг [15]. Он также выделил класс нелинейных систем, допускающих прямолинейные нормальные формы колебаний, к которым, в частности, относятся симметричные системы с потенциальной энергией. Проблема нормальных колебаний в нелинейных системах посвящены также работы [16–18].

Для определения нормальных форм колебаний нелинейных систем, обладающих симметрией, можно предложить двухэтапный способ решения. На первом этапе используются базисные векторы V_i , учитывающие тип симметрии системы. Покажем, что и в нелинейных симметричных системах базисные векторы будут такими же, как и в линейном случае, и приведут к разделению исходных уравнений на независимые нелинейные уравнения для каждой координаты. Необходимым условием для этого является требование нечетности нелинейной функции.

Запишем уравнения квадратной рамы в «симметричной» системе координат (рис. 4), полагая, что каждый узел рамы 1–4 теперь описывается только одной координатой x_i ($i = 1-4$). Предположим, что балочные элементы, связывающие узлы $i, i + 1$, описываются нелинейной функцией $f_{I,i+1}(x_{I+1} - x_i)$. Получим следующие уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = f_{11}(x_1) - f_{12}(x_1 - x_2) - f_{12}(x_1 - x_4); \tag{11}$$

$$m\ddot{x}_2 = f_{11}(x_2) - f_{12}(x_2 - x_1) - f_{12}(x_2 - x_3); \tag{12}$$

$$m\ddot{x}_3 = f_{11}(x_3) - f_{12}(x_3 - x_2) - f_{12}(x_3 - x_4); \tag{13}$$

$$m\ddot{x}_4 = f_{11}(x_4) - f_{12}(x_4 - x_3) - f_{12}(x_4 - x_1). \tag{14}$$

В силу нечетности нелинейных функций: $f(-x) = -f(x)$.

Применяя к (11)–(14) оператор Р (7), найдем эквивалентную систему уравнений (15)–(18) в виде

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + m\ddot{x}_3 + m\ddot{x}_4 &= f_{11}(x_1) + f_{11}(x_2) + f_{11}(x_3) + f_{11}(x_4) - f_{12}(x_1 - x_2) - f_{12}(x_1 - x_4) - \\ &\quad - f_{12}(x_2 - x_1) - f_{12}(x_2 - x_3) - f_{12}(x_3 - x_2) - f_{12}(x_3 - x_4) - f_{12}(x_4 - x_3) - f_{12}(x_4 - x_1) \\ m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_3 + m\ddot{x}_4 &= f_{11}(x_1) - f_{11}(x_2) - f_{11}(x_3) + f_{11}(x_4) - f_{12}(x_1 - x_2) - f_{12}(x_1 - x_4) + \\ &\quad + f_{12}(x_2 - x_1) + f_{12}(x_2 - x_3) + f_{12}(x_3 - x_2) + f_{12}(x_3 - x_4) - f_{12}(x_4 - x_3) - f_{12}(x_4 - x_1) \\ m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_3 - m\ddot{x}_4 &= f_{11}(x_1) + f_{11}(x_2) - f_{11}(x_3) - f_{11}(x_4) - f_{12}(x_1 - x_2) - f_{12}(x_1 - x_4) - \\ &\quad - f_{12}(x_2 - x_1) - f_{12}(x_2 - x_3) + f_{12}(x_3 - x_2) + f_{12}(x_3 - x_4) + f_{12}(x_4 - x_3) + f_{12}(x_4 - x_1) \\ m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 + m\ddot{x}_3 - m\ddot{x}_4 &= f_{11}(x_1) - f_{11}(x_2) + f_{11}(x_3) - f_{11}(x_4) - f_{12}(x_1 - x_2) - f_{12}(x_1 - x_4) + \\ &\quad + f_{12}(x_2 - x_1) + f_{12}(x_2 - x_3) - f_{12}(x_3 - x_2) - f_{12}(x_3 - x_4) + f_{12}(x_4 - x_3) + f_{12}(x_4 - x_1) \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Далее на следующем этапе подставляем в систему уравнений (15) базисные векторы (7)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_2 = x_3 = x_4, \\
 x_1 &= -x_2 = -x_3 = x_4, \\
 x_1 &= x_2 = -x_3 = -x_4, \\
 x_1 &= -x_2 = x_3 = -x_4.
 \end{aligned}$$

В результате получим, учитывая нечетность функции $f(x)$,

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_1 &= f_{11}(x_1), \\
 m\ddot{x}_2 &= f_{11}(x_2) - 0.5f_{12}(2x_2) - 0.5f_{12}(2x_3), \\
 m\ddot{x}_3 &= f_{11}(x_3) - 0.5f_{12}(2x_2) - 0.5f_{12}(2x_3), \\
 m\ddot{x}_4 &= f_{11}(x_4) - 2f_{12}(2x_4).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Эти преобразования, очевидно, представляют собой скалярный аналог матричных преобразований, использованных выше, что легко проверить непосредственно.

Таким образом, получили независимые нелинейные уравнения (16) для каждой координаты в отдельности. Как и выше, уравнения для 2-й и 3-й форм колебаний оказались связанными в силу неортогональности базисных векторов (7).

На втором этапе для окончательного определения нормальных форм колебаний системы необходимо решить нелинейные уравнения (16) и найти амплитудно-частотную характеристику для каждой координаты нелинейной системы.

Выводы. Для симметричных систем, в которых узлы симметрии имеют несколько степеней свободы, введены блочные операторы симметрии и базисные векторы. Показано, что блочные базисные векторы характеризуют взаимодействия симметрично расположенных элементов конструкции, полагая их твердыми телами. Их можно трактовать как «симметричные» формы колебаний для твердотельного приближения расчетной модели.

Для систем с малой асимметрией возникает расслоение кратных собственных частот. Это приводит к неустойчивости вынужденных колебаний в данной частотной области, а также возникновению биений при собственных колебаниях.

Базисные векторы для такого типа симметрии остаются такими же и для нелинейных систем, имеющих тот же тип симметрии. Их использование позволяет разделить исходные уравнения с нечетной функцией нелинейности на независимые нелинейные уравнения, каждое из которых описывает свою координату.

Для систем с иерархией симметрий показано, что результирующий оператор симметрии равен произведению операторов, соответствующих каждой группе симметрии.

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета ИМАШ РАН. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zingoni A.* Group-theoretic exploitations of symmetry in computational solid and structural mechanics // *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2009. V. 79 (3). P. 253. <https://doi.org/10.1002/nme.2576>
2. *Дьяченко М.И., Павлов А.М., Темнов А.Н.* Продольные упругие колебания многоступенчатой жидкостной ракеты-носителя // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2015. № 5. С. 14. <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2015-5-14-24>
3. *Костюк А.Г.* Динамика и прочность турбомашин. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 480 с.
4. *Banakh L. Ya., Kempner M. L.* Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure. Heidelberg, New York, London: Springer, 2010. 261 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03126-7>

5. *Srinivasan A. V.* Vibrations of Bladed-Disk Assemblies — A Selected Survey (Survey Paper) Vib., Acoust., Stress, and Reliab. Apr. 1984. V. 106 (2). P. 165.
<https://doi.org/10.1115/1.3269162>
6. *Samaranayake G., Samaranayake A., Bajaj K.* Resonant vibrations in harmonically excited weakly coupled mechanical systems with cyclic symmetry // Chaos Solitons & Fractals. 2000. V. 11 (10). P. 1519.
[https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(99\)00075-2](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(99)00075-2)
7. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. М.: Гостехиздат. 1957, 356 с.
8. *Хаммермеш М.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Мир, 2002. 588 с.
9. *Злокович Дж.* Теория групп и G-векторных пространств в колебаниях, устойчивости и статике конструкций. М.: Стройиздат, 1977. 168 с.
10. *Банах Л. Я.* Методы декомпозиции при исследовании колебаний механических систем. Москва: РХД, 2016. 292 с.
11. *Банах Л. Я., Бармина О. В., Волоховская О. А.* Колебания и волны в многосекционных роторных системах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 5. С. 23.
<https://doi.org/10.31857/S0235711921050060>
12. *Постнов В. А., Хархурим И. А.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение. 1974. 341 с.
13. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 539 с.
14. *Галлагер М.* Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1983. 428 с.
15. *Rosenberg R. M., Hsu C. S.* On the Geometbrization of Normal Vibrations of Nonlinear Systems Having Many Degrees of Freedom // Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. Т. 1. С. 380.
16. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
17. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
18. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 253 с.