ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2024, № 1, с. 43–50

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 62.192

ОЦЕНКА СРЕДНЕГО ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ЦЕНЗУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ О БЕЗОТКАЗНЫХ НАРАБОТКАХ

© 2024 г. Г. С. Садыхов[1,*], С. С. Кудрявцева[1]

[1]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
**e-mail: gsadykhov@gmail.com*

Поступила в редакцию 08.03.2023 г.
После доработки 08.10.2023 г.
Принята к публикации 20.10.2023 г.

Доказаны формулы расчета и оценок среднего остаточного ресурса невосстанавливаемых технических объектов на основе использования цензурированных данных о безотказных наработках. Полученные результаты можно использовать в задачах продления сроков эксплуатации объектов. Приведены примеры оценок среднего остаточного ресурса объектов. Доказанные оценки среднего остаточного ресурса справедливы для любого закона расходования ресурса невосстанавливаемых технических объектов.

Ключевые слова: средний остаточный ресурс, вероятность безотказной работы, функция распределения ресурса

DOI: 10.31857/S0235711924010059, **EDN:** SNCKRG

Постановка задачи. Для расчета среднего остаточного ресурса невосстанавливаемого технического объекта сверх времени τ используется формула [1–8]

$$\rho(\tau) = \frac{1}{P(\tau)}\int_0^{\infty} P(\tau + u)\,\mathrm{d}u,$$

где $P(\cdot)$ – функция вероятности безотказной работы в течение времени, указанного внутри скобок.

Например, для объекта, у которого функция вероятности безотказной работы в течение времени u имеет вид $P(u) = \frac{1}{1+u}$, где $u \in [0,\infty)$, найдем

$$\rho(\tau) = \infty.$$

Такой же результат можно получить и для множества других функций вероятностей безотказной работы. Очевидно, что эти результаты расчета нельзя использовать, например, в задачах продления сроков эксплуатации объектов, где надо найти конкретное значение продлеваемых сроков эксплуатации сверх времени τ.

В связи с этим возникает задача вывода другой формулы расчета среднего остаточного ресурса сверх времени τ, которая позволила бы обосновать продлеваемые сроки эксплуатации сверх первоначально назначенного.

Средний остаточный ресурс. Пусть безотказные наработки объекта сверх времени τ цензурированы сверху величиной l. Введем случайную величину $\eta_l(\tau)$, которая равна величине безотказной наработки, если внутри интервала (τ, l) у объекта отказа не было, т. е. $\eta_l(\tau) = l - \tau$ при $\zeta > l$, где ζ – наработка до отказа, либо равна величине $\zeta - \tau$, если отказ произошел на интервале (τ, l), т. е. $\zeta \in (\tau, l)$.

Поскольку условием для равенства $\eta_l(\tau) = l - \tau$ является событие $(\zeta > l) / (\zeta > \tau)$, а условием для равенства $\eta_l(\tau) = \zeta - \tau$ – событие $\zeta \in (\tau, l) / (\zeta > \tau)$, то величина $\eta_l(\tau)$ есть не что иное, как остаточный ресурс объекта сверх времени τ в течение длительности $l - \tau$. Другими словами,

$$\eta_l(\tau) = \begin{cases} l - \tau, \text{если } (\zeta > l) / (\zeta > \tau), \\ \zeta - \tau, \text{если } \zeta \in (\tau, l) / (\zeta > \tau). \end{cases} \quad (1)$$

Определение. Под средним остаточным ресурсом объекта сверх времени τ в течение длительности $l - \tau$ будем понимать значение математического ожидания величины (1), равное

$$R_l(\tau) = \mathrm{E}\left[\eta_l(\tau)\right], \quad (2)$$

где $\mathrm{E}[\cdot]$ – обозначение математического ожидания величины, стоящей внутри скобок.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть безотказные наработки объекта цензурированы сверху величиной l. Тогда справедлива формула расчета среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ в течение продолжительности $l - \tau$

$$R_l(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_\tau^l P(u) \mathrm{d}u, \quad (3)$$

где $P(u)$ – функция вероятности безотказной работы объекта в течение времени u, $(\tau < u < l)$.

Доказательство. Случайная величина (1) – дискретно-непрерывная, т. к. верхняя строка (1) соответствует дискретной, а нижняя – непрерывной части.

Согласно (2) и правилу вычисления математического ожидания смешанных случайных величин [9] имеем

$$R_l(\tau) = (l - \tau) P_r\left[(\zeta > l) / (\zeta > \tau)\right] + \int_0^{l-\tau} x \mathrm{d}\left[\Phi_\tau(x)\right], \quad (4)$$

где $P_r\left[(\zeta > l) / (\zeta > \tau)\right]$ – вероятность того, что случайная величина ζ – наработка до отказа – удовлетворяет соотношению $\zeta < l$ при условии, что $\zeta > \tau$; $\Phi_\tau(x)$ – функция распределения непрерывной части случайной величины (1)

$$\Phi_\tau(x) = P_r\left[\left((\zeta - \tau < x) / (\zeta > \tau)\right)\right]. \quad (5)$$

Используя формулу умножения вероятностей $P_r(\zeta > l)$ и $P_r(\zeta > \tau)$ при условии, что $\tau < l$, имеем

$$P_r\left[(\zeta > l) / (\zeta > \tau)\right] = \frac{P(l)}{P(\tau)}.$$

Учитывая это, в (4) получим

$$R_l(\tau) = \frac{(l-\tau)P(l)}{P(\tau)} + \int_0^{l-\tau} x\mathrm{d}\left[\Phi_\tau(x)\right]. \tag{6}$$

Так как согласно (5)

$$\Phi_\tau(x) = P_r\left[(\zeta < \tau + x)/(\zeta > \tau)\right],$$

то

$$\Phi_\tau(x) = \frac{F(u)\big|_\tau^{\tau+x}}{P_r(\zeta > \tau)}, \tag{7}$$

где $F(u) = P_r(\zeta < u)$ – функция распределения вероятностей случайной величины ζ.

Далее, согласно формуле (7) имеем

$$\Phi_\tau(x) = \frac{P_r(\zeta > \tau) - P_r(\zeta > \tau + x)}{P_r(\zeta > \tau)},$$

откуда получим

$$\Phi_\tau(x) = \frac{P(\tau) - P(\tau + x)}{P(\tau)}, \tag{8}$$

где $P(\cdot)$ – функция вероятности безотказной работы в течение времени, указанного внутри скобок. Учитывая (8) в соотношении (6), найдем

$$R_l(\tau) = \frac{(l-\tau)P(l)}{P(\tau)} - \frac{1}{P(\tau)}\int_0^{l-\tau} x\mathrm{d}\left[P(\tau + x)\right]. \tag{9}$$

Так как

$$\int_0^{l-\tau} x\mathrm{d}\left[P(\tau + x)\right] = xP(\tau + x)\big|_0^{l-\tau} -$$

$$-\int_0^{l-\tau} P(\tau + x)\mathrm{d}x = (l-\tau)P(l) - \int_0^{l-\tau} P(\tau + x)\mathrm{d}x,$$

то согласно (9) получим

$$R_l(\tau) = \frac{1}{P(\tau)}\int_0^{l-\tau} P(\tau + x)\mathrm{d}x.$$

Сделав замену переменной в интеграле $\tau + x = u$, найдем искомую формулу (3), что и доказывает теорему.

Доказанная формула (3) справедлива для любого закона распределения безотказных наработок до отказа, цензурированных сверху, и поэтому является источником нахождения формул расчета среднего остаточного ресурса для конкретных законов. Продемонстрируем это на следующей задаче.

Задача. Пусть безотказные наработки объекта цензурированы сверху величиной l и распределены на отрезке времени $(0, l)$ равномерно. Вывести формулу расчета среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ, $(0 < \tau < l)$ в течение продолжительности $l - \tau$.

Решение. Так как для этого закона функция вероятности безотказной работы объекта в течение времени t равна [10] $P(t) = 1 - \frac{t}{l}$, где $0 < t < l$, то согласно формуле (3) имеем

$$R_l(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_\tau^l \left(1 - \frac{u}{l}\right) \mathrm{d}u.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\int_\tau^l \left(1 - \frac{u}{l}\right) \mathrm{d}u = (l - \tau)\left[1 - \frac{1}{2l}(l + \tau)\right]. \tag{10}$$

Учитывая это в (10), найдем формулу расчета среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ в течение длительности $l - \tau$:

$$R_l(\tau) = \frac{l - \tau}{2}. \tag{11}$$

Видно, что для этого закона средний остаточный ресурс сверх времени τ в течение продолжительности $l - \tau$ равен среднему значению этой продолжительности.

Например, если $l = 4500G$, $\tau = 500G$, то средний остаточный ресурс, согласно формуле (11), равен

$$R_l(\tau) = 2000G.$$

Следствие из теоремы 1. Пусть безотказные наработки объекта имеют произвольный закон распределения вероятностей и цензурированы сверху величиной l. Тогда R_l – средний (безостаточный) ресурс объекта в течение продолжительности l рассчитывается по формуле $R_l = \int_0^l P(u)\mathrm{d}u$, где $P(u)$ – функция вероятностей безотказной работы в течение времени u $(u < l)$.

В самом деле, полагая в формуле (3) $\tau = 0$, получим искомую формулу, т. к. $R_l = R_l(0)$.

Статистическая (точечная) оценка показателя (3). Формула (3) позволяет рассчитать истинное значение среднего остаточного ресурса объекта при заданной функции вероятности безотказной работы объекта. Однако в практических задачах возникает вопрос оценки среднего остаточного ресурса по результатам подконтрольной эксплуатации или испытаний однотипных объектов. В связи с этим докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть k объектов отказали в течение времени τ из n однотипных, а остальные в количестве $n - k$ после времени τ, причем, безотказные наработки цензурированы сверху величиной l. Тогда статистической (точечной) оценкой среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ в течение продолжительности $l - \tau$ будет служить величина $R_l^{(k)}(\tau)$, определяемая по формуле

$$R_l^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n-k}(t_i - \tau)}{n - k}, 5A;\ 8\,k < n; \\ 0, 5A; 8\,k = n, \end{cases} \tag{12}$$

где t_i – наработка до отказа i-го объекта после времени τ, $(i = 1, 2, \ldots, n - k)$.

Доказательство. Не нарушая дальнейших рассуждений, будем считать, что

$$\tau < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots < t_{n-k} < l.$$

Установим соотношение (12), используя формулу (3), в которой функции вероятностей безотказной работы заменены их точечными оценками по временным интервалам следующим образом:

$$\widehat{P}(x) = \begin{cases} \dfrac{n-k}{n}, 5A;\ 8\, x \in [\tau, t_1); \\ \dfrac{n-k-1}{n}, 5A;\ 8\, x \in [t_1, t_2); \\ \dfrac{n-k-2}{n}, 5A;\ 8\, x \in [t_2, t_3); \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{n-k-i}{n}, 5A;\ 8\, x \in [t_i, t_{i+1}); \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{1}{n}, 5A;\ 8\, x \in [t_{n-k-1}, t_{n-k}); \\ 0, 5A;\ 8\, x \in [t_{n-k}, l). \end{cases}$$

Интегрируя ступенчатую функцию $\hat{P}(x)$, имеем

$$\int_\tau^l \widehat{P}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\Big[(n-k)(t_1-\tau) + (n-k-1)(t_2-t_1) + (n-k-2)(t_3-t_2) + \cdots + \\ + (n-k-i)(t_{i+1}-t_i) + \cdots + (t_{n-k}-t_{n-k-1})\Big].$$

Представив выражение $(n-k)(t_1-\tau)$ в виде $(t_1-\tau)+(n-k-1)(t_1-\tau)$, получим

$$\int_\tau^l \widehat{P}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\Big[(t_1-\tau) + (n-k-1)(t_1-\tau+t_2-t_1) + (n-k-2)(t_3-t_2) + \cdots + \\ + (n-k-i)(t_{i+1}-t_i) + \cdots + (t_{n-k}-t_{n-k-1})\Big].$$

После приведения подобных членов второе слагаемое внутри квадратных скобок, имеющее вид $(n-k-1)(t_2-\tau)$, запишем в виде $(t_2-\tau)+(n-k-2)(t_2-\tau)$.

Тогда после приведения подобных членов уже для третьего слагаемого внутри квадратных скобок получим

$$\int_\tau^l \widehat{P}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\Big[(t_1-\tau) + (t_2-\tau) + (n-k-2)(t_3-\tau) + \cdots + \\ + (n-k-i)(t_{i+1}-t_i) + \cdots + (t_{n-k}-t_{n-k-1})\Big].$$

Далее выделим выражение $(t_3-\tau)$ из третьего слагаемого согласно равенству $(n-k-2)(t_3-\tau) = (t_3-\tau)+(n-k-3)(t_3-\tau)$.

Продолжая таким способом процесс выделения слагаемых вида $t_i - \tau$, окончательно получим

$$\int_{\tau}^{l}\widehat{P}(x)\mathrm{d}x = \frac{\sum_{i=1}^{n-k}(t_i - \tau)}{n-k}.$$

Поскольку $\widehat{P}(\tau) = \frac{n-k}{n}$, то из последних двух соотношений, согласно формуле (3), имеем

$$R_l^{(k)}(\tau) = \frac{\int_{\tau}^{l}\widehat{P}(x)\mathrm{d}x}{\widehat{P}(\tau)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k}(t_i - \tau)}{n-k}.$$

Таким образом, соотношение (12) установлено, что и доказывает теорему.

Следствие из теоремы 2. Пусть в течение времени τ число отказавших объектов равно k из количества n. Остальные объекты либо отказали в количестве m, либо были безотказны сверх времени τ. Причем безотказные наработки объектов цензурированы сверху величиной l. Тогда статистической (точечной) оценкой среднего остаточного ресурса исследуемых объектов сверх времени τ в течение продолжительности $l - \tau$ будет служить величина

$$R_l^{(k)}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{n-k}\left[\sum_{i=1}^{m}(t_i - \tau) + (n-k-m)(l-\tau)\right], 5A;\ 8\,k < n; \\ 0,5A; 8\,k = n. \end{cases} \tag{13}$$

В самом деле, т. к.

$$\sum_{i=1}^{n-k}(t_i - \tau) = \sum_{i=1}^{m}(t_i - \tau) + \sum_{i=m+1}^{n-k}(t_i - \tau),$$

где $\sum_{i=m+1}^{n-k}(t_i - \tau) = (n-k-m)(l-\tau)$, то оценка (13) следует из (12).

Пример. Девять однотипных объектов, безотказно проработавших в течение 1000 ч, поставлены на ресурсные испытания в течение 4000 ч. В результате испытания два объекта отказали: первый через 2000 ч; второй через 3000 ч (сверх времени 1000 ч). Рассчитать статистическую (точечную) оценку среднего остаточного ресурса исследуемого объекта сверх времени 1000 ч в течение продолжительности 4000 ч.

Решение. Поскольку $n = 9$, $k = 0$, $m = 2$, $\tau = 1000G$, $l = 5000G$, $l - \tau = 4000G$, $t_1 - \tau = 2000G$, $t_2 - \tau = 3000G$, то согласно (13) имеем

$$R_l^{(k)}(\tau) = \frac{1}{9}\left[2000G + 3000G + (9-2)4000G\right] = 3666.6G.$$

Итак, статистическая (точечная) оценка среднего остаточного ресурса исследуемого объекта сверх времени 1000 ч в течение продолжительности 4000 ч равна 3666.6 ч.

Исследование смещенности оценок (12) и (13). В связи с использованием оценок (12) и (13) возникает вопрос, насколько точечные оценки уклоняются от истинного значения показателя $R_l(\tau)$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть

$$Z_n\left[P(\tau)\right] = 1 - \left[1 - P(\tau)\right]^n. \tag{14}$$

Тогда выражение $\dfrac{R_l^{(k)}(\tau)}{Z_n\left[P(\tau)\right]}$ является несмещенной статистической (точечной) оценкой показателя $R_l(\tau)$, т. е.

$$\mathrm{E}\left[\frac{R_l^{(k)}(\tau)}{Z_n\left[P(\tau)\right]}\right] = R_l(\tau). \tag{15}$$

Доказательство. Согласно формуле (12) при $t_i = \tau + \eta_l^{(i)}(\tau)$, где $\eta_l^{(i)}(\tau)$ – остаточный ресурс i-го объекта (сверх времени τ в течение длительности $1 - \tau$), оценка $R_l^{(k)}(\tau)$ равна

$$R_l^{(k)}(\tau) = \frac{1}{n-k}\left[\sum_{i=1}^{n-k} t_i - \tau(n-k)\right] = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}\eta_l^{(i)}(\tau).$$

Так как

$$\mathrm{E}\left[\eta_l^i(\tau)\right] = R_l(\tau), (i = 1,2,...,n-k),$$

то математическое ожидание оценки (12) при фиксированном значении k равно

$$\mathrm{E}\left[R_l^{(k)}(\tau)/k\right] = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}\mathrm{E}\left[\eta_l^i(\tau)\right] = R_l(\tau).$$

Учитывая это соотношение и вторую строку формулы (12) в следующей расчетной формуле:

$$\mathrm{E}\left[R_l^{(k)}(\tau)\right] = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{E}\left[R_l^{(k)}(\tau)/k\right]\cdot P_n(k),$$

где $P_n(k)$ – вероятность того, что в n независимых наблюдениях k объектов откажут, получим

$$\mathrm{E}\left[R_l^{(k)}(\tau)\right] = R_l(\tau)\sum_{k=0}^{n-1}P_n(k). \tag{16}$$

Так как согласно формуле Бернулли [10, 11]

$$P_n(k) = C_n^k\left[1 - P(\tau)\right]^k\left[P(\tau)\right]^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_n(k) = 1 - P_n(n) = 1 - \left[1 - P(\tau)\right]^n.$$

Учитывая это соотношение в (16) и формулу (14), найдем

$$\mathrm{E}\left[R_l^{(k)}(\tau)\right] = R_l(\tau) Z_n\left[P(\tau)\right],$$

откуда следует формула (15), что доказывает теорему.

Следствие из теоремы 3. При $k = 0$ статистические (точечные) оценки (12) и (13) являются несмещенными относительно показателя $R_l(\tau)$.

В самом деле, т. к. согласно (14) $Z_n\left[P(\tau)\right] = 1 - \left(1 - \frac{n-k}{n}\right)^n = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^n$, то при $k = 0$ получим $Z_n\left[P(\tau)\right] = 1$.

Используя полученное в формуле (15), найдем $\mathrm{E}\left[R_l^{(k)}(\tau)\right] = R_l(\tau)$. Это доказывает несмещенность оценок (12) и (13) относительно показателя $R_l(\tau)$.

Таким образом, доказана формула расчета среднего остаточного ресурса невосстанавливаемых технических объектов, безотказные наработки которых цензурированы сверху. Доказанная формула справедлива для любого закона распределения вероятностей безотказных наработок объекта. Кроме того, найдены несмещенные (точечные) оценки среднего остаточного ресурса объекта. Приведены примеры расчета и оценок среднего остаточного ресурса сверх заданного времени.

Финансирование работы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-08-00574-а и № 10-08-00607-а).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садыхов Г. С.*, *Савченко В. П.*, *Сидняев Н. И.* Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 382 с.
2. *Ганиев Р. Ф.*, *Балакшин О. Б.*, *Кухаренко Б. Г.* Флаттер с предельным циклом колебания лопаток ротора турбокомпрессора // Докл. АН. 2012. Т. 446. № 2. С. 159.
3. ГОСТ 27.002.2009. Надежность в технике. Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2011. 32 с.
4. *Klass P. J.* Cycling Tests Increase Reliability Factor // Aviation Week. 1960. Sept. V. 73. № 5. P. 14.
5. *Димитриенко Ю. И.*, *Юрин Ю. В.*, *Европин С. В.* Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2013. № 11. С. 3.
6. *Артюхов А. А.* Оценка средней наработки до отказа при частых срабатываниях // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. 2015. № 18. С. 295.
7. *Басов В. Н.*, *Нестеренко Г. И.* Экспериментальное исследование характеристик статической прочности, усталостной долговечности и циклической трещиностойкости листов из алюминиево-литиевых сплавов // Труды ЦАГИ. 2007. Вып. 2675. С. 181.
8. *Петушков В. А.* К прогнозированию остаточного ресурса конструкций с повреждениями, подвергаемых в эксплуатации ударным воздействиям // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 91.
9. *Северцев Н. А.*, *Юрков Н. К.*, *Нгуен К. Т.* Показатель «средний остаточный срок утилизации технических объектов» и его свойства // Надежность и качество: Труды междунар. симпозиума / Под ред. Н.К. Юркова. Т. 1. Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. С. 202.
10. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 2001. 298 с.
11. *Гнеденко Б. В.*, *Беляев Ю. К.*, *Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности и их статистический анализ. М.: URSS, 2013. 584 с.