
НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 537.853

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МИКРОМАСШТАБНОГО БЕСКОНТАКТНОГО ИНДУКЦИОННОГО ПОДВЕСА С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ КОНТУРОМ УПРАВЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТЬЮ

© 2024 г. П. П. Удалов^{1, *}, И. А. Попов¹, А. В. Лукин¹, Л. В. Штукин¹,
К. В. Полеткин²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург,
Россия

²Университет Хэфэя, Хэфэй, Китай

*e-mail: pp_udalov@mail.ru

Поступила в редакцию 23.06.2023 г.

После доработки 09.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

В статье выполнено аналитическое исследование параметрических колебаний недеформируемого диска, находящегося в бесконтактном электромагнитном подвесе с электростатическим контуром управления эффективной жесткостью. На основе асимптотических методов нелинейной динамики получены аналитические выражения для переходных кривых стационарного положения левитирующего тела в областях главного и вторичных параметрических резонансов. Получены оценки параметров системы, для которых бесконтактный подвес с квазиулевым электромагнитной жесткостью является асимптотически устойчивым.

Ключевые слова: электромагнитный подвес, левитация, акселерометр, гравиметр, нелинейная динамика, параметрический резонанс, устойчивость колебаний

DOI: 10.31857/S0235711924010043, **EDN:** SNDNET

Электромагнитный подвес – устройство для бесконтактной стабилизации инерционного тела в поле тяжести, работающее на принципе электромагнитной индукции [1]. Технология производства бесконтактного подвеса обеспечивает низкую стоимость производства и обслуживания, точность управления, малые размеры. Применение электромагнитного подвеса в интересах разработки датчиков инерциальной информации представляется перспективным, поскольку позволяет реализовать архитектуры как высокоточных, так и более доступных акселерометров и гироскопов, обладающих преимуществами в долговечности, помехозащищенности и температурной стабильности [2, 3].

В настоящее время интенсивное развитие получает направление разработки электромагнитных подвесов с комбинированным использованием электростатического [4, 5] и индукционного [6–8] принципов воздействия на инерционное тело. Конструкция подвеса принципиально включает в себя как катушки индуктивности для создания переменного магнитного поля, так и электроды для создания электростатического поля. Функция катушки индуктивности состоит в создании силы Ампера, посредством которой обеспечивается стабилизация подвижного элемента. Функция

конденсаторов заключается в управлении эффективной жесткостью подвеса посредством формируемых электростатических сил, величина которых зависит от перемещения инерционного тела. Такой подход позволяет использовать индукционный подвес как высокочувствительный акселерометр/гравиметр с квазинулевой жесткостью.

Вопросам экспериментального и аналитического исследований режимов работы электромагнитного подвеса посвящено большое число публикаций. В работах [9–14] представлены исследования экспериментального прототипа микромасштабного индукционного подвеса. Отмечается, что такое устройство можно использовать при создании микроакселерометров, микрогироскопов, микрозеркал. В работе [15] демонстрируется технология создания схемы формирования возбуждающего электрического сигнала катушки индуктивности, которая позволяет избежать использования высокочастотных усилителей тока и заменить их интегральной схемой управления, включающей генератор сигнала и усилитель. Показано, что предлагаемая схема имеет геометрические размеры, сравнимые с размерами чувствительного элемента устройства. В работах [16, 17] обсуждаются вопросы, посвященные построению систем снятия информации о положении ротора, используя для этого сигналы малой емкости при наличии большой зашумленности сигнала, вызванной электромагнитными помехами. В работах [18–20] исследуются аналитические модели акселерометра и гироскопа соответственно, основанные на принципе электромагнитной левитации. В [21, 22] рассмотрены вопросы, посвященные аналитическим расчетам собственных и взаимных индуктивностей проводов и контуров. В [23, 24] приводятся оценки сил и жесткостей чувствительного элемента индукционного подвеса. В [25] исследуются вопросы устойчивости индукционного подвеса. Работы [26, 27] посвящены экспериментальному и аналитическому исследованию эффекта схлопывания, заключающегося в прилипании инерционной массы электромагнитного подвеса к обкладкам конденсаторов при достижении на них критической величины напряжения как для дискообразной, так и для прямоугольной инерционных масс. Численные исследования режимов работы и силовых характеристик устройства электромагнитного подвеса на основе метода конечных элементов приведены в [28–31].

Основная **цель** настоящей статьи состоит в качественном аналитическом исследовании эффекта параметрического резонанса [32] в бесконтактном электромагнитном подвесе, проявляющегося в возникновении зон раскачки и затухания колебаний, на примере одномерных колебаний твердой дискообразной массы. Особое внимание уделяется задаче определения диапазона параметров системы, в котором наблюдается асимптотическая устойчивость инерционной массы при квазинулевой эффективной жесткости системы.

Математическая модель нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса. Рассмотрим одномерную модель колебаний инерционной массы (ИМ), выполненную в форме твердого диска и находящуюся в переменных электромагнитном и электрическом полях (рис. 1).

Для создания устойчивого равновесия подвижного тела y_0 на катушку индуктивности срединного радиуса r_l толщины t_l подается переменный ток i_1 амплитуды i_a с частотой ω : $i_1 = i_a \sin \omega t$. Вследствие закона электромагнитной индукции [1] в дископодобной ИМ толщины t_{pm} радиуса r_{pm} возникает наведенный ток i_2 , который при взаимодействии с током i_1 порождает силу Ампера, что приводит к левитации ИМ. Управляющая высотой левитации катушка, по которой течет ток i_1 , называется левитационной (на рис. 1 она обозначена черными прямоугольниками). Стабилизирующая катушка, обозначенная на рис. 1 серым цветом, необходима для исключения возможности боковых смещений ИМ и, как следствие, обеспечения устойчивости положения равновесия y_0 . Ток i_s , протекающий по стабилизирующей катушке срединного радиуса r_s толщины t_s , в общем случае может отличаться от тока i_1 . В дальнейшем примем, что ток i_s с точностью до амплитуды и фазы равняется току i_1 , т. е.

$i_s = i_a^s \sin \omega t$, где i_a^s – амплитуда тока стабилизирующей катушки. Подавая постоянные напряжения u_1, u_2 на электроды E_1, E_2 при заземленных электродах E_3, E_4 соответственно, генерируется постоянное электрическое поле [4]. При выборе определенных величин u_1, u_2 возможно добиться квази нулевой жесткости, что отвечает цели конструирования высокочувствительного датчика [18].

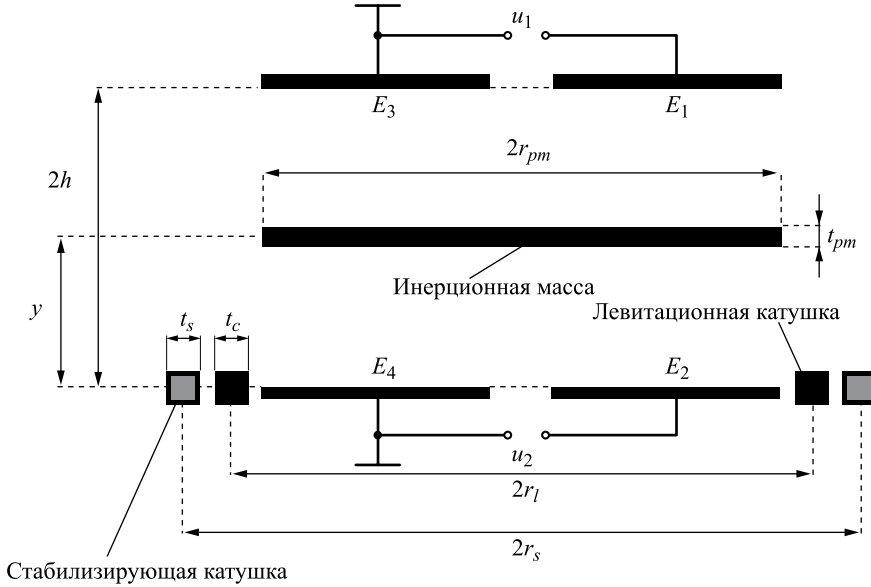


Рис. 1. Схематическое изображение электромагнитного подвеса.

Применяя формализм Лагранжа – Максвелла, система уравнений колебаний ИМ запишется как [33]

$$\begin{aligned}
 & L_2 \ddot{i}_2 + \left(\frac{dM_{12}(y)}{dy} i_a + \frac{dM_{s2}(y)}{dy} i_a^s \right) \dot{y} \sin \omega t + \\
 & + \left(M_{12}(y) i_a + M_{s2}(y) i_a^s \right) \omega \cos \omega t + R_2 \dot{i}_2 = 0, \\
 & \tilde{m} \ddot{y} + \mu \dot{y} - \left(\frac{dM_{12}(y)}{dy} i_a + \frac{dM_{s2}(y)}{dy} i_a^s \right) i_2 \sin \omega t + \tilde{m} (g_0 + \Delta g) - \\
 & - \frac{e_1^2}{2A} + \frac{e_2^2}{2A} + \frac{(e_1 + e_2)^2}{2Ah} (h - y) = 0, \\
 & \frac{(2h - y)}{A} e_1 + \frac{y(2h - y)}{2Ah} (e_1 + e_2) = u_1, \\
 & \frac{y}{A} e_2 + \frac{y(2h - y)}{2Ah} (e_1 + e_2) = u_2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где L_2 – собственная индуктивность ИМ; $M_{12}(y)$ – взаимная индуктивность между левитационной катушкой и ИМ; $M_{s2}(y)$ – между стабилизирующей катушкой и ИМ;

t – время; R_2 – электрическое сопротивление ИМ; $\tilde{m}$ – массы ИМ; μ – коэффициент вязкого трения между ИМ и окружающей средой; g_0 – постоянная величина ускорения свободного падения; Δg – переменная составляющая ускорения свободного падения; $A = \epsilon_e \epsilon_0 A_e$; ϵ_0 – относительная диэлектрическая проницаемость; ϵ_e – диэлектрическая постоянная; A_e – площадь электродов; $2h$ – зазор между верхними и нижними пластинами электродов; $\epsilon_1, \epsilon_2, u_1, u_2$ – заряды и напряжения пар электродов E_1, E_3 и E_2, E_4 соответственно; y – вертикальная координата движения ИМ.

Вводя безразмерные параметры

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{L_1 i_a^2}{2\tilde{m}g_0 h}, \tau = \omega t, \varepsilon = \frac{g_0}{2\omega^2 h}, \lambda = \frac{\mu}{\tilde{m}\omega}, \xi = \frac{y}{2h}, j_2 = \frac{i_2}{i_a}, \hat{e}_1 = \frac{e_1}{e_0}, \\ \hat{e}_2 &= \frac{e_2}{e_0}, W_0 = \frac{e_0^2}{2A}, l = \frac{L_2}{L_1}, r = \frac{R_2}{L_1 \omega}, u_c = \frac{2he_0}{A}, u_{01} = \frac{u_1}{u_c}, u_{02} = \frac{u_2}{u_c}, \zeta = \frac{W_0}{\tilde{m}g_0}, \\ \beta_l &= \frac{\mu_0 r_l}{L_1}, \beta_s = \frac{\mu_0 r_s}{L_1}, a = \frac{r_{pm}}{h}, a_l = \frac{r_l}{h}, a_s = \frac{r_s}{h}, j_s = \frac{i_s}{i_a}, \Gamma = \frac{\Delta g}{g_0}, \\ m_{l2} &= \frac{M_{l2}}{L_1} = \beta_l \sqrt{\frac{a}{a_l}} \left[\left(\frac{2}{\kappa_{l2}} - \kappa_{l2} \right) K(\kappa_{l2}) - \frac{2}{\kappa_{l2}} E(\kappa_{l2}) \right], \\ \frac{dm_{l2}}{d\xi} &= -\frac{8\beta_l a}{\kappa_{l2}^2} \left[\frac{(2 - \kappa_{l2}^2) E(\kappa_{l2})}{1 - \kappa_{l2}^2} - 2K(\kappa_{l2}) \right] \frac{\xi}{\left((a + a_l)^2 + 4\xi^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \\ m_{s2} &= \frac{M_{s2}}{L_1} = \beta_s \sqrt{\frac{a}{a_s}} \left[\left(\frac{2}{\kappa_{s2}} - \kappa_{s2} \right) K(\kappa_{s2}) - \frac{2}{\kappa_{s2}} E(\kappa_{s2}) \right], \\ \frac{dm_{s2}}{d\xi} &= -\frac{8\beta_s a}{\kappa_{s2}^2} \left[\frac{(2 - \kappa_{s2}^2) E(\kappa_{s2})}{1 - \kappa_{s2}^2} - 2K(\kappa_{s2}) \right] \frac{\xi}{\left((a + a_s)^2 + 4\xi^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \kappa_{l2}^2(y) &= \frac{4aa_l}{(a + a_l)^2 + 4\xi^2}, \kappa_{s2}^2(y) = \frac{4aa_s}{(a + a_s)^2 + 4\xi^2},\end{aligned}$$

перепишем систему (1) в виде [33]

$$\begin{aligned}lj_2' + rj_2 &= -m^\xi \xi' \sin \tau - m \cos \tau, \\ \xi'' + \lambda \xi' &= \varepsilon \left(\alpha m^\xi j_2 \sin \tau - 1 - \Gamma + \zeta \hat{e}_1^2 - \zeta \hat{e}_2^2 + \zeta (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)^2 (2\xi - 1) \right), \\ (1 - \xi) \hat{e}_1 + \xi (1 - \xi) (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) &= u_{01}, \xi \hat{e}_2 + \xi (1 - \xi) (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = u_{02},\end{aligned}\quad (2)$$

где $m = m_{l2} + j_s m_{s2}$; $m^\xi = m_{l2}^\xi + j_s m_{s2}^\xi$; $(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial \tau}$; $(\cdot)'' = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$; $(\cdot)^\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}$; $(\cdot)^{\xi\xi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$; L_1 – собственная индуктивность левитационной катушки; μ_0 – магнитная постоянная.

В выражении (2) в дальнейшем примем, что $\zeta = 1$, т. е. $W_0 = \tilde{m}g_0$, откуда

$$e_0 = \sqrt{2A\tilde{m}g_0},$$

что определяет величину заряда e_0 , накопленного на обкладках конденсаторов, при котором соблюдается баланс между электрической и потенциальной энергиями системы.

Динамика инерционной массы вблизи положения равновесия. Для исследования малых колебаний вблизи положения равновесия системы ξ_0 , которая определяется как [33]

$$\frac{u_{01}^2}{(\xi_0 - 1)^2} - \frac{u_{02}^2}{\xi_0^2} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{l} m(\xi_0) m^\xi(\xi_0) - 2(1 + \Gamma) = 0,$$

введем переменную

$$z \triangleq \xi - \xi_0$$

и перепишем второе уравнение в (2) как

$$z'' + \lambda z' = \varepsilon \left[\alpha m^z(z + \xi_0) j_2(z + \xi_0, \tau) + \right. \\ \left. + \hat{e}_1^2(z + \xi_0) - \hat{e}_2^2(z + \xi_0) + 2(z + \xi_0)(\hat{e}_1(z + \xi_0) + \hat{e}_2(z + \xi_0))^2 \right], \quad (3)$$

где $(\cdot)^z = \frac{\partial}{\partial z}, (\cdot)^{zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Предполагая малость смещений относительно положения равновесия, разложим правую часть в ряд Тейлора, удержав при этом только линейные по z члены:

$$m(z + \xi_0) = m(\xi_0) + z m^z(\xi_0) + O(z^2); \quad (4)$$

$$m^z(z + \xi_0) = m^z(\xi_0) + z m^{zz}(\xi_0) + O(z^2); \quad (5)$$

$$j_2(z + \xi_0, \tau) = j_2(\xi_0, \tau) - \frac{z m^z(\xi_0)}{l} \cos \gamma \sin(\tau + \gamma) + O(z^2); \quad (6)$$

$$e_1(z + \xi_0) = e_1(\xi_0) + \frac{u_1}{2(1 - \xi_0)^2} z + O(z^2); \quad (7)$$

$$e_2(z + \xi_0) = e_2(\xi_0) - \frac{u_2}{2\xi_0^2} z + O(z^2). \quad (8)$$

Исходя из (4)–(8), выражение (3) примет вид

$$z'' + \lambda z' + (\delta - \hat{\varepsilon} \cos(2\tau + \gamma)) z = 0, \quad (9)$$

где

$$\sigma = \frac{\alpha \cos \gamma}{l} \left[\left(m^z(\xi_0) \right)^2 + m(\xi_0) m^{zz}(\xi_0) \right], \delta = \varepsilon \omega^2, \varepsilon = \frac{\sigma \varepsilon}{2},$$

$$\eta = \frac{u_{01}^2}{(\xi_0 - 1)^3} - \frac{u_{02}^2}{\xi_0^3}, \omega^2 = \frac{\sigma \cos \gamma}{2} + \eta.$$

Уравнение (9) описывает линейную динамику чувствительного элемента вблизи его положения равновесия. Вследствие периодичности тока катушки магнитная

жесткость системы имеет периодическую компоненту с удвоенной частотой тока возбуждения. Уравнение (9) представляет собой уравнение Матье. Для нахождения переходных кривых (кривых, разделяющих области устойчивости и неустойчивости параметрических колебаний) применим метод растянутых параметров [32].

Для этого ищется равномерно пригодное разложение вида

$$z = \varepsilon z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^3 z_2, \delta = n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2, \quad (10)$$

определяя при этом коэффициенты δ_i ($i = 1, 2, 3$) из условия периодичности асимптотического решения.

Также предположим, что трение между подвижной частью прибора и окружающей средой мало, и примем λ как $\lambda = \varepsilon \nu$, ν – положительная величина.

Подстановка разложений (10) в исходное уравнение (9) дает

$$\begin{aligned} & (\varepsilon z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^3 z_2)'' + \varepsilon \nu (\varepsilon z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^3 z_2)' + \\ & + (n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 - \varepsilon \cos(2t + \gamma)) (\varepsilon z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^3 z_2) = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при последовательных степенях ε , получаем

$$z_0'' + n^2 z_0 = 0; \quad (11)$$

$$z_1'' + n^2 z_1 = -z_0 (\delta_1 - \cos(2t + \gamma)) - \nu z_0'; \quad (12)$$

$$z_2'' + n^2 z_2 = -z_1 (\delta_1 - \cos(2t + \gamma)) - \nu z_1' - \delta_2 z_0. \quad (13)$$

Общее решение (11) можно представить в виде

$$z_0 = c_1 \sin nt + c_2 \cos nt, \quad (14)$$

где c_1, c_2 – константы.

Случай $n = 0$.

В этом случае уравнение (14) сводится к

$$z_0 = c_2.$$

При этом уравнение (12) принимает вид

$$z_1'' = -c_2 \delta_1 + c_2 \cos(2t + \gamma). \quad (15)$$

Требование к отсутствию секулярного слагаемого в правой части (15), порождающего секулярный член в решении для z_1 , приводит к условию

$$\delta_1 = 0.$$

В результате этого частное решение уравнения (15) имеет вид

$$z_1 = -\frac{c_2}{4} \cos(2t + \gamma).$$

При этом уравнение (13) представляется как

$$z_2'' = -c_2 \delta_2 - \frac{c_2}{8} - \frac{c_2 \nu}{2} \sin(2t + \gamma) - \frac{c_2}{8} \cos 2(2t + \gamma). \quad (16)$$

Для периодичности z_2 требуется выполнение условия

$$c_2\delta_2 - \frac{c_2}{8} = 0,$$

откуда при $c_2 \neq 0$ (нетривиальность решения) имеем

$$\delta_2 = -\frac{1}{8}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), частное решение уравнения (16) примет вид

$$z_2 = \frac{c_2 v}{8} \sin(2t + \gamma) + \frac{c_2}{128} \cos 2(2t + \gamma).$$

Используя полученные результаты, решение имеет вид

$$z = \varepsilon c_2 - \frac{\varepsilon^2 c_2}{4} \cos(2t + \gamma) + \frac{\varepsilon^3 c_2}{8} \left(v \sin(2t + \gamma) + \frac{1}{8} \cos 2(2t + \gamma) \right), \delta = -\frac{1}{8} \varepsilon^2 + \dots \quad (18)$$

Следовательно, переходная кривая, разделяющая области устойчивости и неустойчивости и выходящая из точки $\varepsilon = 0, \delta = 0$, описывается уравнениями (18); при этом они показывают, что на этих ветвях решение z периодически с периодом π .

Случай $n = 1$.

Подставляя (14) в уравнение (11) и полагая $n = 1$, получим

$$\begin{aligned} z_1'' + z_1 = & \left[c_1 \left(v + \frac{\sin \gamma}{2} \right) + c_2 \left(\delta_1 - \frac{\cos \gamma}{2} \right) \right] \cos t + \frac{c_2}{2} \cos(3t + \gamma) + \\ & + \left[c_1 \left(\delta_1 + \frac{\cos \gamma}{2} \right) + c_2 \left(\frac{\sin \gamma}{2} - v \right) \right] \sin t + \frac{c_1}{2} \sin(3t + \gamma). \end{aligned} \quad (19)$$

Требование к исключению слагаемых, порождающих секулярные члены в z_1 , приводит к условиям

$$\begin{aligned} c_1 \left(v + \frac{\sin \gamma}{2} \right) + c_2 \left(\delta_1 - \frac{\cos \gamma}{2} \right) &= 0, \\ c_1 \left(\delta_1 + \frac{\cos \gamma}{2} \right) + c_2 \left(\frac{\sin \gamma}{2} - v \right) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В результате уравнение (28) принимает вид

$$z_1'' + z_1 = \frac{c_1}{2} \sin(3t + \gamma) + \frac{c_2}{2} \cos(3t + \gamma). \quad (21)$$

Нетривиальное решение системы (20) удовлетворяется при условии тривиальности ее определителя. Таким образом, условие на отсутствие секулярного слагаемого в (19) при нетривиальном решении (20) примет вид

$$\delta_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2}. \quad (22)$$

При подстановке (22) в (20) получаем следующую связь между константами c_1, c_2 :

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\cos \gamma - 2\delta_1}{2v + \sin \gamma}.$$

Следовательно, частное решение уравнения (21) с учетом (22) имеет вид

$$z_1 = \frac{c_2 \pi^\mp}{16} \sin(3t + \gamma) - \frac{c_2}{16} \cos(3t + \gamma), \quad (23)$$

$$\text{где } \pi^\mp = \frac{\cos \gamma \mp \sqrt{1 - 4v^2}}{2v + \sin \gamma}.$$

Подставляя (23) в (13), получим

$$\begin{aligned} z_2'' + z_2 = & -c_2 \left(\frac{1}{32} + \delta_2 \right) \cos t - c_2 \pi^\mp \left(\frac{1}{32} + \delta_2 \right) \sin t + \\ & + \frac{c_2}{16} \left(3\pi^\mp v \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2} \right) \cos(3t + \gamma) + \\ & + \frac{c_2}{16} \left(-3v \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2} \pi^\mp \right) \sin(3t + \gamma) - \\ & - \frac{c_2 \cos(5t + 2\gamma)}{32} - \frac{c_2 \pi^\mp \sin(5t + 2\gamma)}{32}. \end{aligned} \quad (24)$$

Потребовав исключения секулярных членов из z_2 , приходим к соотношениям

$$c_2 \left(\frac{1}{32} + \delta_2 \right) = 0, c_2 \pi^\mp \left(\frac{1}{32} + \delta_2 \right) = 0,$$

или в предположении о нетривиальности c_2

$$\delta_2 = -\frac{1}{32}. \quad (25)$$

После подстановки (25) в (24) частное решение уравнения (24) примет вид

$$\begin{aligned} z_2 = & \frac{c_2}{768} \cos(5t + 2\gamma) + \frac{c_2 \pi^\mp}{768} \sin(5t + 2\gamma) - \frac{c_2}{128} \left(3\pi^\mp v \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2} \right) \cos(3t + \gamma) - \\ & - \frac{c_2}{128} \left(-3v \pm \frac{\pi^\mp \sqrt{1 - 4v^2}}{2} \right) \sin(3t + \gamma). \end{aligned}$$

Итак, область раскачки колебаний и выражения для колебаний на ее границах имеют вид

$$\begin{aligned} \delta = & 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 - 4\lambda^2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \dots, \\ z = & \varepsilon c_2 \left[\pi^\mp \sin t + \cos t \right] + \frac{\varepsilon^2 c_2}{16} \left[\pi^\mp \sin(3t + \gamma) - \cos(3t + \gamma) \right] + \\ & + \frac{\varepsilon^3 c_2}{768} \left[\cos(5t + 2\gamma) + \pi^\mp \sin(5t + 2\gamma) - 6 \left(3\pi^\mp v \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4v^2} \right) \cos(3t + \gamma) - \right. \\ & \left. - 6 \left(-3v \pm \frac{\pi^\mp \sqrt{1 - 4v^2}}{2} \right) \sin(3t + \gamma) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнения (26) описывают две ветви переходной кривой, выходящие из точки $\varepsilon = 2\lambda$, $\delta = 1$. При этом они показывают, что на этих ветвях решение z периодически с периодом 2π .

“Критическое” значение величины $\varepsilon = \varepsilon_\lambda$, больше которого подкоренное выражение в первом выражении (26) становится комплексным, равно

$$\varepsilon_\lambda = 2\lambda.$$

На рис. 2 изображено сравнение выражений переходных кривых, задаваемых выражениями (18), (26), с численными результатами, полученными для выражения (9) согласно теории Флоке [32].

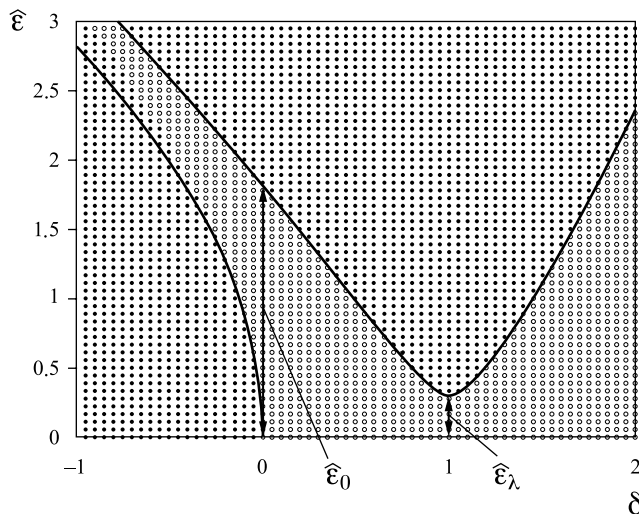


Рис. 2. Области устойчивости (окружности) и неустойчивости (черные точки) в плоскости параметров (ε, δ) . Черные линии — переходные кривые, задаваемые выражениями (18), (26); $\nu = 0.15$.

Аналитические выражения переходных ветвей (18), (26) (рис. 2) с хорошей точностью совпадают с численным решением задачи (9). В случае оценки колебаний вблизи положения равновесия рабочими областями являются области затуханий колебаний (область окружностей) вследствие потребности удержания колебаний вблизи положения равновесия ξ_0 .

Особенно важной задачей в конструировании акселерометров данного типа является нахождение соотношений между параметрами системы, при которых жесткость системы становится нулевой или квазинулевой.

Исходя из (9) видно, что нулевой жесткости отвечает случай $\delta = 0$. В этом случае следует (рис. 2), что область затуханий колебаний определяется следующим интервалом величины ε :

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0 = 4\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{24 - \lambda^2}}$ — критическое значение величины ε , выше которого распадается зона неустойчивости уравнения (9) при $\delta = 0$.

Таким образом, на основе анализа параметрических колебаний показана ограниченность допустимого диапазона параметров системы для стабильной реализации режима квазинулевой жесткости. Основные результаты и соотношения приведены ниже:

- уравнение для определения равновесия ξ_0 :

$$\frac{u_{01}^2}{(\xi_0 - 1)^2} - \frac{u_{02}^2}{\xi_0^2} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{l} m(\xi_0) m^\xi(\xi_0) - 2(1 + \Gamma) = 0;$$

- неравенство для статической устойчивости равновесия ξ_0 :

$$\left(m^z(\xi_0)\right)^2 + m(\xi_0) m^{zz}(\xi_0) > 0;$$

- уравнение для обеспечения квазинулевой жесткости подвеса:

$$\frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} \frac{1}{l} \left[\left(m^z(\xi_0)\right)^2 + m(\xi_0) m^{zz}(\xi_0) \right] + \frac{u_{01}^2}{(\xi_0 - 1)^3} - \frac{u_{02}^2}{\xi_0^3} = 0;$$

- неравенство для параметрической устойчивости:

$$0 < \frac{\varepsilon \alpha \cos \gamma}{l} \left[\left(m^z(\xi_0)\right)^2 + m(\xi_0) m^{zz}(\xi_0) \right] < 8\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{24 - \lambda^2}}.$$

Выводы. В статье рассмотрена аналитическая модель нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса, выполненного в виде недеформируемого дископодобного тела. Уравнение, описывающее линейную динамику чувствительного элемента бесконтактного подвеса вблизи его положения равновесия, представляет собой уравнение Матье. На основе асимптотических методов нелинейной динамики получены аналитические выражения для переходных кривых стационарного положения левитирующего тела в областях главного и вторичных параметрических резонансов. Получены оценки параметров системы, для которых бесконтактный подвес с квазинулевой электромагнитной жесткостью является асимптотически устойчивым. Отмечается, что для устойчивой работы предложенного устройства необходимо выбрать как геометрические (радиусы и толщины катушек индуктивности и ИМ), так и физические параметры (амплитуды и частоты питающих токов катушек, материал ИМ) таким образом, чтобы аналитически найденная величина положения равновесия ξ_0 удовлетворяла одновременно условиям на статическую и параметрическую устойчивость, сведенным в конце работы.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Han H. S., Kim D. S. Magnetic levitation // Springer Tracts on Transportation and Traffic. Heidelberg: Springer Netherlands, 2016. P. 247.
2. Leland R. P. Mechanical-thermal noise in MEMS gyroscopes // IEEE Sensors J. 2005. V. 5 (3). P. 493.
3. Prikhodko I. P. et al. Sub-degree-per-hour silicon MEMS rate sensor with 1 million Q-factor // 2011 16th Int. Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference, IEEE, 2011. P. 2809.
4. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
5. Мартыненко Ю. Г. Аналитическая динамика электромеханических систем. М.: Изд-во МЭИ, 1984. 64 с.
6. Xiao Q. et al. Design and experiment of an electromagnetic levitation system for a micro mirror // Microsystem Technologies. 2019. V. 25. P. 3119.

7. Бадыков Р. Р. и др. Разработка экспериментальной установки для исследования несущей способности одноступенного магнитного подвеса ротора // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. 2022. Т. 4 (143). С. 4.
8. Пириева Н. М. Методика проектирования индукционного левитатора // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2022. Т. 65 (2). С. 69.
9. Williams C. B. et al. Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor // Sensors and Actuators A: Physical. 1997. V. 61 (1–3). P. 469.
10. Williams C. B. et al. Initial fabrication of a micro-induction gyroscope // Microelectronic Engineering. 1996. V. 30 (1–4). P. 531.
11. Shearwood C. et al. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope // Sensors and actuators A: physical. 2000. V. 83 (1–3). P. 85.
12. Wu X.S. et al. Micromotor with electromagnetically levitated rotor using separated coils // Electronics Letters. 2004. V. 40 (16). P. 996.
13. Liu W. et al. Variable-capacitance micromotor with levitated diamagnetic rotor // Electronics Letters. 2008. V. 44 (11). P. 681.
14. Liu W., Zhang W., Chen W. Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor // J. of Magnetism and Magnetic Materials. 2019. V. 492. P. 165634.
15. Vlnieska V. et al. Development of control circuit for inductive levitation micro-actuators // Proceedings. MDPI, 2020. V. 64 (1). P. 1.
16. Zhang W. et al. The study of an electromagnetic levitating micromotor for application in a rotating gyroscope // Sensors and actuators A: physical. 2006. V. 132 (2). P. 651.
17. Xiaogang H. et al. High resolution differential capacitance detection scheme for micro levitated rotor gyroscope // Chinese J. of Aeronautics. 2007. V. 20 (6). P. 546.
18. Xu Y. et al. Passive diamagnetic contactless suspension rotor with electrostatic glass motor // Micro & Nano Letters. 2019. V. 14 (10). P. 1056.
19. Yang B. et al. Research on a new microelectromechanical hybrid gyroscope // The 2010 IEEE Int. Conf. on Information and Automation. IEEE. 2010. P. 1520.
20. Xia D., Yu C., Kong L. A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance // Sensors. 2013. V. 13 (2). P. 2176.
21. Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. 488 с.
22. Rosa E. B., Grover F. W. Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance. Washington, DC: US Government Printing Office, 1948. V. 169.
23. Zhang X., Quan C., Li Z. Mutual inductance calculation of circular coils for an arbitrary position with electromagnetic shielding in wireless power transfer systems // IEEE Transactions on Transportation Electrification. 2021. V. 7 (3). P. 1196.
24. Babic S., Akyel C. Magnetic force between inclined circular loops (Lorentz approach) // Progress in Electromagnetics Research B. 2012. V. 38. P. 333.
25. Sari I., Kraft M. A MEMS linear accelerator for levitated micro-objects // Sensors and Actuators A: Physical. 2015. V. 222. P. 15.
26. Xiao Q. et al. Design of contactless electromagnetic levitation and electrostatic driven rotation control system for a micro mirror // 2018 15th Int. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV), IEEE. 2018. P. 1176.
27. Xu Y. et al. Realization of a diamagnetically levitating rotor driven by electrostatic field // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2017. V. 22 (5). P. 2387.
28. Liu K. et al. An innovative micro-diamagnetic levitation system with coils applied in micro-gyroscope // Microsystem technologies. 2010. V. 16. P. 431.
29. Liu W., Zhang W., Chen W. Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor // J. of Magnetism and Magnetic Materials. 2019. V. 492. P. 165634.

-
30. *Xia D., Yu C., Kong L.* A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance // *Sensors*. 2013. V. 13 (2). P. 2176.
 31. *Poletkin K.* Quasi-finite Element Modelling // *Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators*. 2021. P. 45.
 32. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods. New-York: John Wiley & Sons, 2008. P. 425.
 33. *Удалов П. П. и др.* Статическая устойчивость трехстепенной модели индукционного подвеса // В сб. трудов конф. “МИКМУС-2023”, Москва, 2–23. С. 567.